Institut National de Recherche en Informatique et Automatique

Un Cadre Riemannien pour l'Imagerie du Tenseur

Pierre FILLARD

Rapport de stage de Master Optique-Image-Vision
Spécialité recherche Image-Vision-Signal 2ème année

Sous la direction de :
Nicholas AYACHE
Xavier PENNEC

24 août 2004

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Nicholas Ayache pour m'avoir accueilli au sein du projet Epidaure pendant 7 mois qui j'espère auront été aussi agréable pour lui que pour moi.

Un grand merci également à Xavier Pennec qui, au fil de discussions enrichissantes mais dont parfois l'objet s'embrumait peu à peu, m'a permis d'avancer dans ce projet dont l'objectif au début me paraissait difficile à atteindre.

Merci également à tous les thésards dont j'aurai croisé le chemin et dont les discussions à toute heure de la journée m'auront fait avancer à leur manière.

Merci à Jean-Marie Becker et Catherine Mennessier, mes professeurs de mathématiques et d'informatique, qui en plus de m'avoir appris énormément dans leurs domaines respectifs, m'ont transmis la passion pour l'imagerie.

J'adresse un merci très particulier au Dr. Guido Gerig pour sa compréhension et sa patience devant mon éternelle indécision.

Merci bien évidemment à ma famille pour m'avoir toujours soutenu et épaulé et pour m'avoir offert l'éducation qui m'a permis d'arriver jusqu'ici.

Et pour finir, merci énormément à Ghislaine pour son soutien, sa gentillesse et sa bienveillance, sans qui je n'aurai pu aboutir aux résultats présentés dans ce rapport.

Et un grand merci et un grand pardon à tous ceux dont je n'ai pas cité le nom.

TABLE DES MATIÈRES

1 Introduction **4**

2 Introduction à l'IRM et l'IRM de diffusion **8**
2.1 Le signal IRM 9
2.2 L'IRM de diffusion 12
2.3 L'anatomie d'une séquence en IRM de diffusion 13
2.4 Coefficient d'anisotropie 14
2.5 Le suivi de fibres 18
2.6 Etat de l'art en manipulation de champs de tenseurs 19

3 Quelques Rappels sur les Variétés Différentielles et la Géométrie Riemannienne **20**
3.1 Définitions 20
3.2 Carte exponentielle 21
3.3 Le lieu de coupure 22
3.4 Réinterprétation des opérations de base 22

4 Une Métrique Invariante par Transformation Affine pour l'Espace des Tenseurs **24**
4.1 Rappels sur quelques fonctions matricielles utilisées 24
4.2 Une distance invariante par transformation affine 25
4.3 Une métrique riemannienne invariante par transformation affine 26
4.4 Cartes exponentielle et logarithmique 28
4.5 Systèmes de coordonnées induit et othonormal 28
4.6 Descente de gradient et EDP 29
4.7 Un exemple : le calcul de moyenne 29
4.8 Quelques statistiques sur les tenseurs 31

5 L'interpolation de Tenseurs **32**
5.1 Interpolation par moyenne pondérée 32
5.2 Exemple : l'interpolation linéaire 33
5.3 Interpolation bi(tri)-linéaire 34
5.4 Interpolation de mesures non régulières 35

6 Filtrage des Champs de Tenseurs **37**
6.1 Filtrage gaussien 37
6.2 Gradient d'un Champ de Tenseurs 38
6.3 Filtrage par EDP 39
6.3.1 Le cas scalaire 41
6.3.2 Le cas vectoriel 42
6.3.3 Les champs de tenseurs 42
6.4 Le filtrage anisotrope 43

7 Régularisation et Restoration de Champs de Tenseurs **49**
7.1 Le terme de régularisation 49
7.2 Un terme d'attache aux données aux moindres carrés 50
7.3 Un terme d'attache aux données pour un champ éparse de tenseurs 50
7.4 Interpolation par diffusion 51

8 Estimation du Champ de Tenseurs en IRM de Diffusion **54**
8.1 Estimation classique 54
8.2 Estimation riemannienne 56

9 Application à la Statistique de Forme : Modélisation de la variabilité Anatomique du Cerveau **59**
9.1 Données 59
9.2 Stratégie 61
9.3 Mise en correspondance 62
9.4 Calcul d'un sillon moyen et des matrices de covariance 62
9.5 Vers un modèle de variabilité locale 63
9.6 Diffusion des données à tout le volume 66
9.7 Premier test statistique : étude de la symétrie - asymétrie des sillons 69

10 Conclusions et Futur **72**

CHAPITRE 1

Introduction

Les matrices symétriques définies positives, encore appelées tenseurs dans ce rapport, sont utilisées de nos jours en imagerie comme source d'informations géométriques, que ce soit pour caractériser la variabilité d'un processus aléatoire dans l'espace (cas des matrices de covariance), ou pour quantifier l'anisotropie de la diffusion des molécules d'eau dans les tissus biologiques en IRM de diffusion (figure 1.2). Dans ce dernier exemple, le tenseur de diffusion est très souvent representé par une ellipsoide dont la direction principale est alignée sur la direction des structures anatomiques sous-jacentes, notamment les fibres nerveuses de la substance blanche du cerveau (figure 1.1).

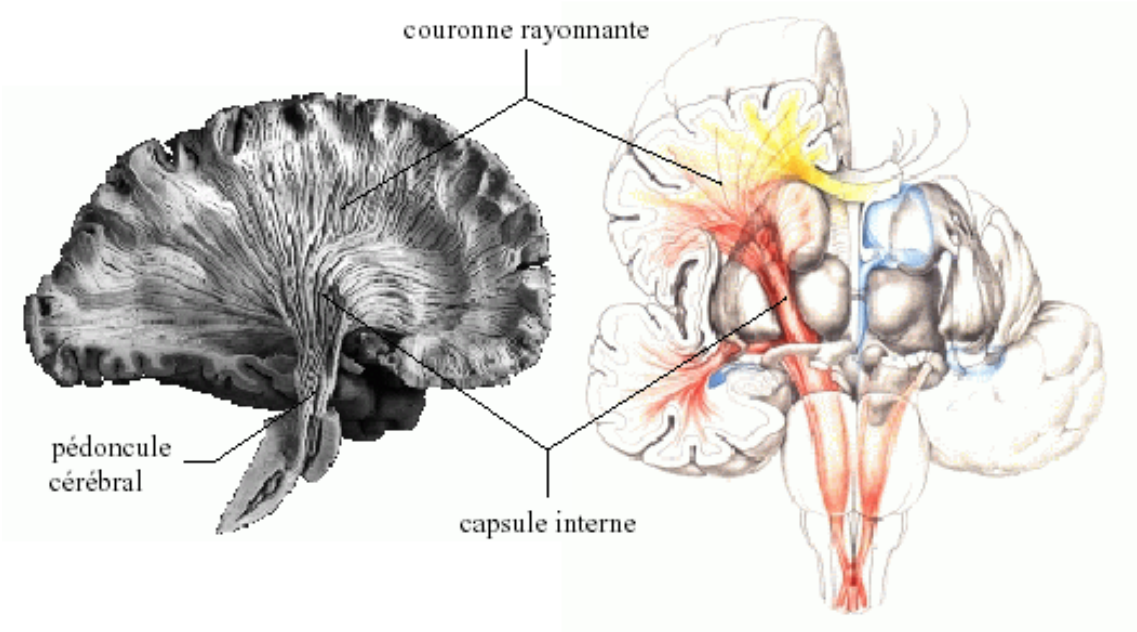

FIG. 1.1 – Dissection de la substance blanche du cerveau ([43]) et projections de la couronne rayonnante.

Toutefois, l'acquisition de données réelles est accompagnée de bruit et il est nécessaire de pouvoir procéder à une estimation, régularisation ou interpolation de ces champs de tenseurs. Le principal inconvénient est que l'ensemble des tenseurs n'est pas un espace vectoriel mais un espace convexe (cône positif des matrices symétriques). Ainsi, de nom-

breuses opérations restent stables dans cet espace (calcul de moyenne, interpolation), mais des opérations plus complexes se révèlent difficiles à réaliser : par exemple, l'optimisation d'un critére par rapport à une matrice de covariance ou la résolution d'une équation aux dérivées partielles (EDP) par descente de gradient deviennent vite instables et des matrices à valeurs propres négatives peuvent apparaître.

Dans ce rapport, nous proposons une approche géométrique et une métrique riemannienne invariante par transformation affine pour les tenseurs, permettant de considérer cet espace comme une variété différentielle et de pouvoir mener des calculs en étant assuré de respecter la contrainte de positivité stricte. Ces travaux ont été initié par [40] et [39] qui ont développé des outils satistiques sur les groupes de transformations et sur les variétés homogènes. Ces travaux ont ensuite été étendu par [37] et [38] sur des variétés riemannienne. Nous montrerons dans ce rapport comment cette théorie peut être appliquée aux tenseurs et comment les outils de la géométrie riemannienne permettent de généraliser les algorithmes classiques (calcul de gradient, laplacien par exemple) des espaces vectoriels à l'espace des tenseurs.

Nous décrirons brièvement dans une première partie la physique de l'IRM et de l'IRM de diffusion afin d'apporter un contexte aux travaux décrits dans ce rapport, c'est-à-dire de définir d'où proviennent les données et quels sont les modalités d'acquisitions. Ce chapitre a pour but d'initier le lecteur aux principes fondamentaux de l'IRM. Nous terminerons cette partie par un état de l'art succint sur le traitement des champs de tenseurs pour l'IRM de diffusion. Dans une deuxième partie, nous ferons quelques rappels sur les variétés différentielles et la géométrie riemannienne. Les méthodes géométriques et les notations utilisées nous permettront d'introduire la métrique riemannienne pour les tenseurs dans une troisième partie. Nous parcourerons ensuite les applications possibles au travers des chapitres suivants et nous nous intéressons à deux d'entre elles : le traitement des champs de tenseurs en IRM de diffusion (estimation, filtrage, restoration) et la statistique de forme en imagerie cérébrale. Plus préciément, nous utiliserons ce cadre riemannien pour modéliser la variabilité anatomique du cerveau à partir de statistiques sur les sillons corticaux. Cette dernire étude est réalisée en partenariat avec l'équipe du LONI à UCLA (Laboratory Of Neuro Imaging University of California at Los Angeles).

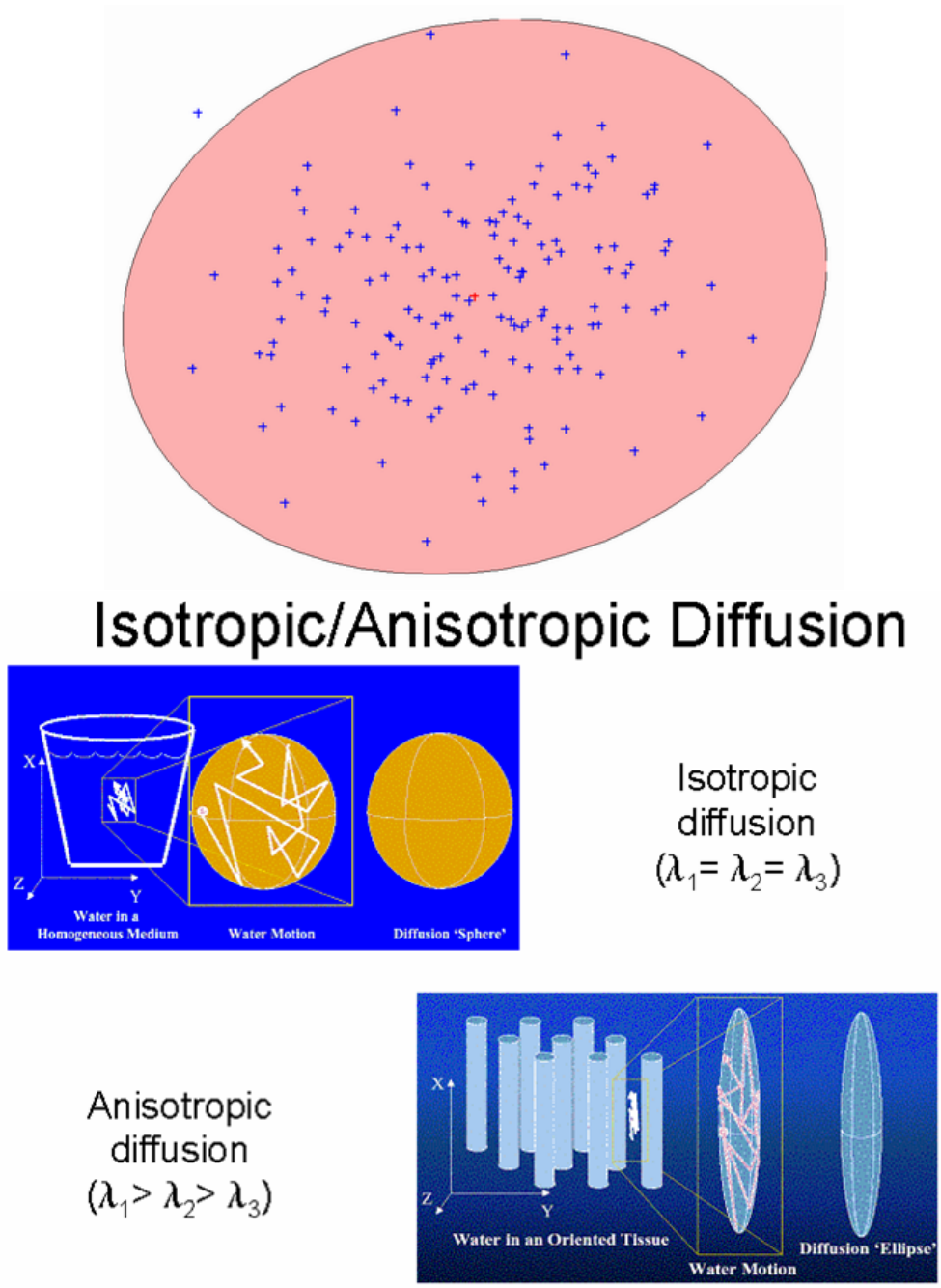

FIG. 1.2 – **Haut :** un exemple de tenseur de covariance. **Bas :** les schémas de diffusion en IRMd. Le mouvement de l'eau est restreint par les structures de la substance blanche comme les fibres nerveuses.

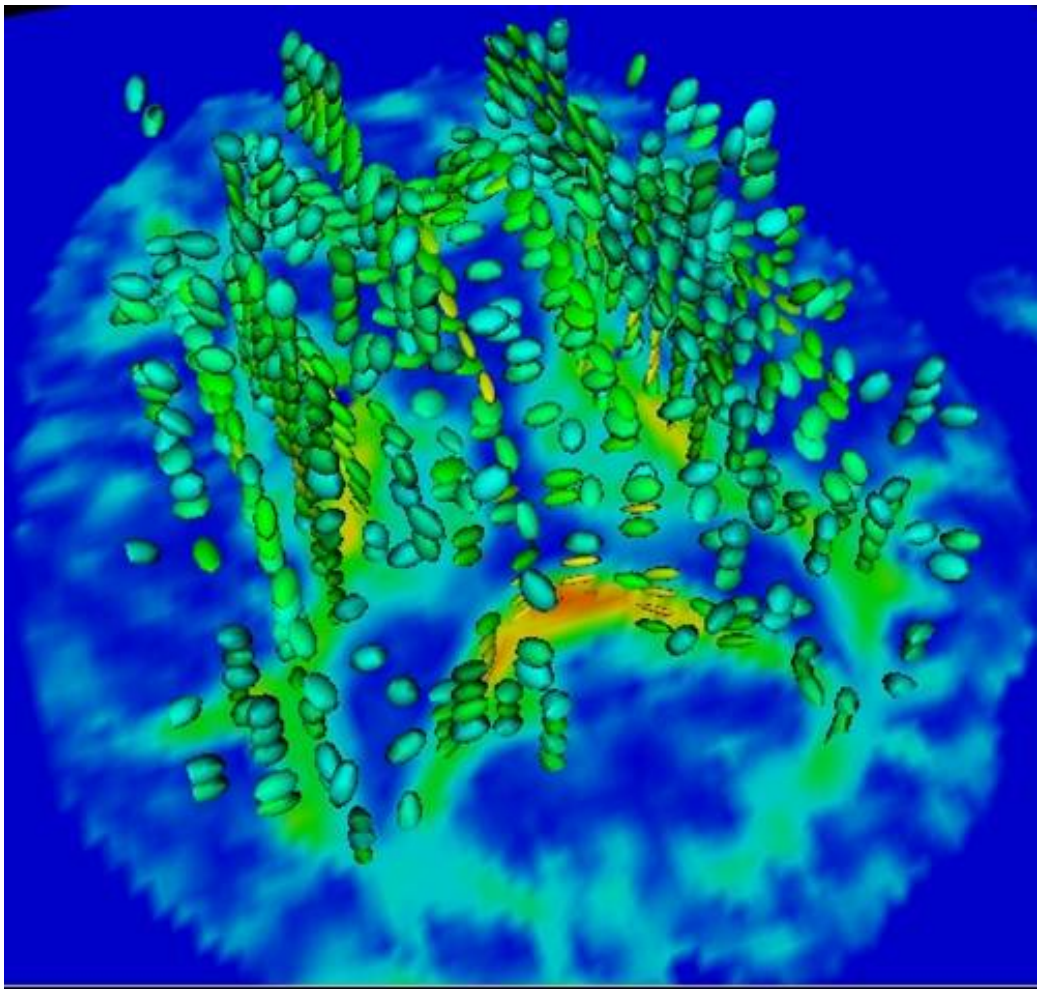

FIG. 1.3 – Champ de tenseurs extrait de l'IRM de diffusion. Les ellipsoides sont alignées sur les fibres nerveuses.

CHAPITRE 2

Introduction à l'IRM et l'IRM de diffusion

L'Imagerie du Tenseur de Diffusion, ou DTI (Diffusion Tensor Imaging), est une technique d'imagerie apparue au milieu des années 80 ([8], [33]) : cette méthode, dérivée de l'IRM, permet d'accéder aux structures internes de la substance blanche de façon non-invasive. Cette technique d'imagerie a souffert à ses débuts de limitations techniques (qualité des images, temps d'acquisition) mais les progres réalisés ces dernières années en terme de procédure d'acquisition et de physique des scanners ([3]) a permis à cette technique d'occuper une place de plus en plus importante pour finalement devenir une modalité tres utilisée dans le milieu clinique.

L'IRM classique est une méthode non-invasive donnant accès à la substance blanche, la substance grise et au fluide cortico-spinal. Cependant, la substance blanche garde un aspect homogène, sa couleur provenant du blanc des gaines de myéline protégeant les axones et les dendrites. Il est alors impossible avec une IRM classique d'obtenir une information sur la structure même de la substance blanche. Des méthodes invasives à base de traceurs chimiques ont été utilisées pour observer les structures fibreuses chez le chat et le singe ([46], [61]), mais rien n'était disponible par les neuroanatomistes pour accéder à ces informations in vivo. L'IRM de diffusion se positionne donc comme l'unique méthode capable de renseigner les neuroanatomistes quant à la structure même des connexions neuronales. En effet, le cerveau est un grand centre de traitement avec une organisation bien spécifique : les zones de traitement de l'information se situent dans le cortex, c'est-a-dire à la périphérie du cerveau (substance grise). C'est dans cette zone que se trouvent les neurones. Les zones sont reliées entre elles par le biais de fibres nerveuses, faites d'axones et de dendrites constituant la matière blanche. Par exemple, l'information traitée dans la zone visuelle du cortex est acheminée vers la zone mémoire par un certain chemin nerveux dans le processus de reconnaissance d'un visage. La substance blanche est finalement faite d'un ensemble de faisceaux de fibres reliant les zones corticales les unes avec les autres. On comprend facilement pourquoi l'étude de ces connexions depuis longtemps fascine les neuroanatomistes : leur intégrité est intimement liée au bon fonctionnement du cerveau. De plus, de nombreuses maladies neurodégénératives ont des effets dévastateurs sur les fasiceaux nerveux (sclérose en plaques, maladie d'Alzheimer, tumeurs) et il est crucial de pouvoir accéder à l'état des connexions nerveuses, afin de pouvoir évaluer le degré d'avancement d'une maladie, l'efficacité d'un traitement ou encore les dégats occasionés par une tumeur.

L'IRM de diffusion permet de quantifier la diffusion des molécules d'eau dans des tissus biologiques comme le cerveau ou les muscles. Nous verrons par la suite que le phénomene de diffusion est un effet macroscopique résultant d'un mouvement aléatoire de ces molécules. Toute particule microscopique subit constamment un mouvement de rotation et de translation dépendant de leur énergie thermique. Ce mouvement est mieux connu sous le nom de mouvement brownien. Le concept de base en diffusion est que le mouvement brownien des molécules d'eau est influencé par les structures biologiques internes et leur architecture, au niveau microscopique. La diffusion est le phénomene observé au niveau macroscopique. En IRM de diffusion, l'hypothèse est faite que les molécules d'eau tendent à diffuser de manière plus importante le long des structures orientées comme les faisceaux de fibres. Ainsi, s'il est concevable de mesurer la diffusion de l'eau dans plusieurs directions de l'espace, il est donc possible de retrouver avec une précision dépendant du nombre de directions choisi les directions des structures microscopiques, c'est-à-dire des fibres nerveuses.

Le chapitre suivant va nous familiariser avec les notions de bases de l'IRM et permettra d'introduire la physique de l'IRM de diffusion, de l'acquisition des images à l'estimation du champ de tenseurs.

2.1 Le signal IRM

Le phénomene de Résonance Magnétique Nucléaire (RMN) a été observé simultanément en 1946 par deux équipes, Bloch (Stanford) et Purcell (Harvard) ([44], [10]). Leur découverte a été récompensée par le prix Nobel en 1952.

Tout d'abord, rappelons qu'une particule animée d'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe possède un moment cinétique appelé spin $\vec{s}$ aligné sur son axe de rotation (figure 2.1). On modélise cet effet par un dipôle magnétique de moment $\vec{m}$ relié au spin par la relation :

$$\| \vec{m} \| = \gamma \frac{h \| \vec{s} \|}{2\pi}$$

où h est la constante de Planck et γ le rapport gyromagnétique qui caractérise l'élément nucléaire considéré. Le proton possède un rapport gyromgnétique γ=42.76x2π MHz/T.

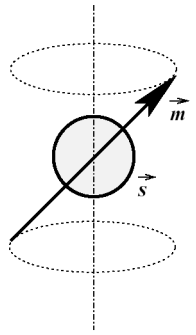

FIG. 2.1 – Spin $\vec{s}$ aligné sur son axe de rotation et son dipôle de moment magnétique $\vec{m}$ associé.

Le noyau d'hydrogène, principal élément constituant de l'eau, joue un rôle très important en IRM puisqu'il possède un seul proton et qu'il représente les 2 tiers des atomes du

corps humain. De plus, son moment magnétique $\vec{m}$ est très élevé entrainant un phénomène de résonance mangnétique très net (nous verrons dans la suite ce qu'est le phénomène de résonance).
Dans un élément de volume (voxel), un grand nombre de dipôles magnétiques cohabitent (environ 2.10^{15} protons/mm^3), chacun avec son propre spin $\vec{s}$. L'aimantation résultante $\vec{M}$ est la somme des moments des dipôles dans l'élément de volume. En supposant que l'orientation des dipôles est uniforme dans l'espace, il en résulte une aimantation nulle : $\vec{M}=\vec{0}$. Si on soumet un tissu biologique à l'action d'un champ magnétique statique $\vec{B_0}$ dirigé selon l'axe (Oz), les dipôles magnétiques élémentaires s'alignent dans la direction de $\vec{B_0}$ et induisent, à l'équilibre, une aimantation longitudinale parallèle au champ $\vec{B_0}$. En réalité cette aimantation est non nulle car le nombre de spin suivant la direction de $\vec{B_0}$ (faible état énergétique) est plus important que le nombre de spins suivant la direction opposée à $\vec{B_0}$ (fort état énergétique) (figure 2.2).

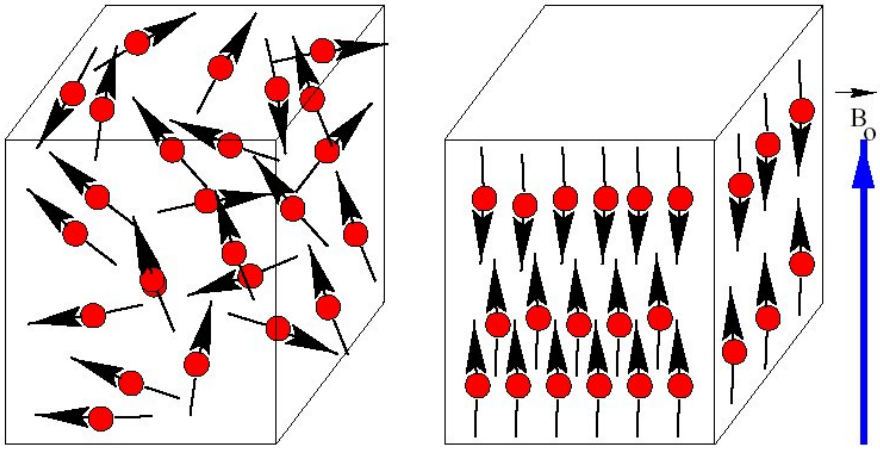

FIG. 2.2 – Action d'un champ magnétique $\vec{B_0}$ sur les spins. **Gauche :** spins libres de moment magnétique résultant nul. **Droite :** alignement des spins soumis au champ $\vec{B_0}$.

Le passage de l'aimantation nulle $\vec{M}=\vec{0}$ à l'état d'équilibre suit une croissance exponentielle dont le paramètre T_1 est appelé temps de relaxation longitudinale.

$$\| \vec{M_L}\ (t)\| = \| \vec{M_L}\ (0)\|(1 - \exp\,(-\frac{t}{T1})) \tag{2.1}$$

Dans le plan transverse (Oxy) orthogonal à l'axe longitudinal $\vec{k}$, les moments magnétiques $\vec{\mu_T}$ ont une dynamique différente : sous l'action du champ magnétique $\vec{B_0}$, les spins ont un mouvement de précession (rotation) autour d'un axe parallèle à $\vec{B}0$. La fréquence de précession $\omega_0 = \gamma\, B_0$ est appelée fréquence de Larmor. Elle est proportionnelle au champ statique B_0. Cependant les moments magnétiques transversaux $\vec{\mu_T}$ n'ont pas de mouvement cohérent dans le plan transversal. Cela vient de l'hétérogénéité microscopique du champ magnétique local. Ainsi, chaque dipôle posseède une fréquence de précession différente propre et par conséquent une phase propre. Il en résulte une aimantation transversale nulle car les phases sont distribuées de manière uniforme :

$$\overrightarrow{M_T} = \sum_{spin} \overrightarrow{\mu_T} = \overrightarrow{0}$$

Si l'on applique un champ magnétique B$_1$=B$_1$cos(ω_0t) $\overrightarrow{i}$ +B$_1$sin(ω_0t) $\overrightarrow{j}$ tournant autour de $\overrightarrow{k}$ à la fréquence ω_0, l'aimantation $\overrightarrow{M}$ se met à tourner autour de l'axe $\overrightarrow{k}$ à la fréquence de Larmor ω_1=γB$_1$. L'onde de champ magnétique $\overrightarrow{B_1}$ est appelée impulsion radiofréquence à 90°. Cette impulsion va entrainer l'équilibre entre le nombre de spins à fort état énergétique et faible état énergétique, entrainant ainsi l'annulation de la composante longitudinale de l'aimantation. Ce transfert d'énergie entre $\overrightarrow{B_1}$ et les dipôles s'appelle la **résonance magnétique**. Le phénomene macroscopique observable avec l'application du champ $\overrightarrow{B_1}$ est l'annulation de l'aimantation longitudinale $\overrightarrow{M_L}$ dans un mouvement hélicoidal, se transformant en aimantation transversale $\overrightarrow{M_T}$ (figure 2.3).

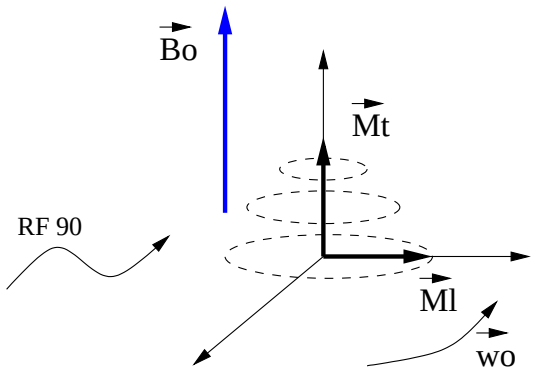

FIG. 2.3 – Abaissement de l'aimantation longitudinale dans un mouvement hélicoidal dans le plan transversal et création d'une aimantation transversale.

Dans le plan transversal, les dipôles magn'etiques, qui possédaient au préalable une phase libre, sont dotés maintenant de phases cohérentes (aimantation transversale $\overrightarrow{M_T}$). Après l'excitation à 90°, l'aimantation transversale s'annule et les dipôles retrouvent leur phase libre, en même temps que l'aimantation longitudinale recroît sous l'effet du champ statique $\overrightarrow{B_0}$.
Le premier processus (annulation de la composante tangentielle de l'aimantation) suit une loi exponentielle de paramètre T_2 (entre 50ms et 100ms) appelé temps de relaxation transverse (eq. 2.2).

$$\| \overrightarrow{M_T}\ (t)\| = \| \overrightarrow{M_T}\ (0)\| \exp\left(-\frac{t}{T_2}\right) \tag{2.2}$$

alors que le second processus (augmentation de $\overrightarrow{M_L}$) suit une loi exponentielle de paramètre T_1 (entre 500ms et 1000ms) (eq 2.1). En pratique, le champ $\overrightarrow{B_0}$ est en partie responsable du déphasage des moments transversaux $\overrightarrow{\mu_T}$ car $\overrightarrow{B_0}$ n'est jamais totalement spatialement uniforme. Ces hétérogénéités de $\overrightarrow{B_0}$ sont constantes au cours du temps et au sein d'un même élément de volume. Hahn montra qu'elles peuvent être corrigées grâce à l'émission d'une seconde impulsion radiofréquence à 180°. Après l'émission de la première impulsion à 90°, l'émission d'une seconde à 180°entraîne un basculement symétrique des moments $\overrightarrow{\mu_T}$ dans le plan transversal sans changer leur sens de précession. Par conséquent , les spins

les plus rapides se trouvent en retard et après un temps T_E, tous les spins se réalignent entre eux, ce qui conduit à la repousse de l'aimantation transversale : c'est l'écho de spin et T_E est appelé temps d'écho (figure 2.4).

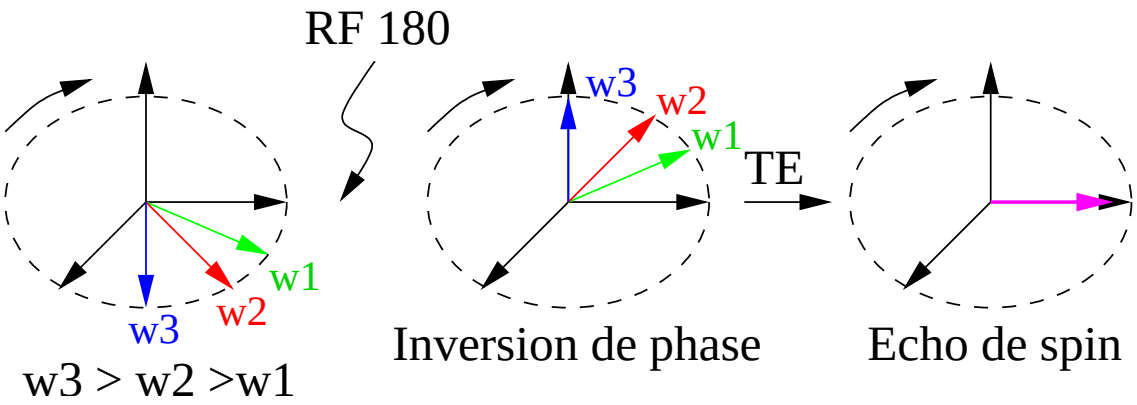

FIG. 2.4 – Principe de l'echo de spin. **Droite :** Les moments $\vec{\mu_T}$ ont un mouvement de précession propre. **Milieu :** Après l'application d'une impulsion radio-fréquence à 180°, les moments $\vec{\mu_T}$ basculent de manière symmétrique sans changer leur sens de précession. Les spins les plus rapides sont en retard sur les plus lents. **Gauche :** Après un temps TE (temps d'echo), les spins sont tous en phase, le signal est alors maximal : c'est l'écho de spin.

Le signal est acquis pendant l'écho de spin : c'est cette composante transversale de l'aimantation (Mxy) qui, en tournant la vitesse ω_0, devant la bobine qui a servi l'excitation et qui travaille maitenant en réception, va induire dans cette bobine un courant sinusoïdal amorti à la fréquence ω_0.

Nous ne détaillerons pas ici comment reconstituer les images. Il est important de préciser que l'émission de l'impulsion radiofréquence se fait selon une coupe choisie et qu'ainsi on peut acquérir un volume 3D. De nombreuses techniques d'acquisition existent (EPI, spiral, etc.).

2.2 L'IRM de diffusion

Des molécules se déplaçant dans un milieu isotrope s'entrechoquent sans arrêt et changent souvent de direction : elles sont soumises à un mouvement brownien qui se modélise à l'échelle macroscopique par un phéhomène de diffusion. La probabilité qu'une molécule se déplace d'une distance r pendant un temps τ suit une loi gaussienne de variance $var(r) = 6 \times D \times \tau$. D est le coefficient scalaire de diffusion. Dans le tissu cérébral anisotrope, la mobilité d'une molécule d'eau varie selon les obstacles qu'elle est susceptible de rencontrer, comme une paroi axonale. Le phénomène de diffusion n'est plus isotrope et le coefficient scalaire D est remplacé par un opérateur multilinéaire : un tenseur d'ordre 2 :

$$D = \begin{pmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{xy} & D_{yy} & D_{yz} \\ D_{xz} & D_{yz} & D_{zz} \end{pmatrix}$$

La matrice [D] est réelle, symétrique et définie positive. Elle est intrinsèque au tissu considéré. Cependant, cette matrice reste une approximation : on suppose que la probabilite qu'une molécule d'eau se déplace d'un point P_1 à un point P_2 est gaussienne.

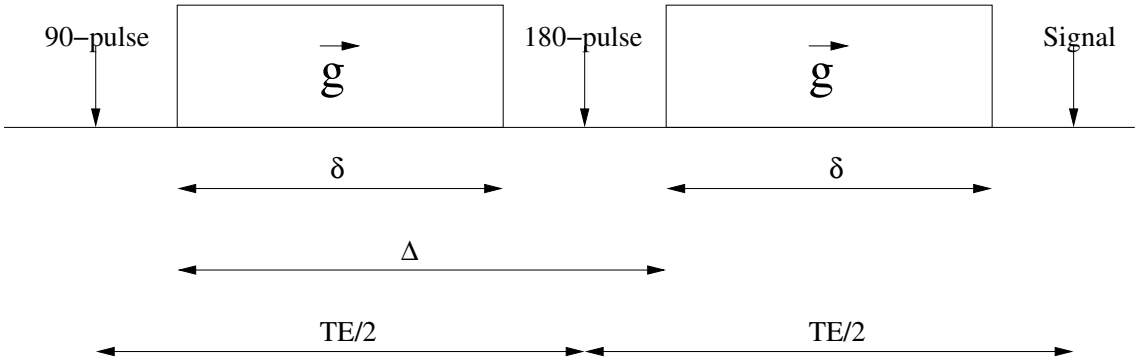

FIG. 2.5 – Résumé d'une séquence en IRM de diffusion (séquence de Stejskal et Tanner). Les gradients de diffusion sont appliqués après chaque émission d'onde RF à 90°et 180°. Le signal est atténué par les spins diffusants.

Cette hypothèse n'est valable que dans le cas isotrope mais s'avère être une bonne approximation dans le cas où la diffusion est restreinte. Cette matrice peut être vue comme la matrice de covariance d'un mouvement stochastique (celui de l'eau) : c'est donc une approximation au premier ordre du mouvement brownien de l'eau (figure 1.2).
L'obtention du tenseur de diffusion n'est pas immédiate et nécessite l'acquisition d'un grand nombre de mesures dites pondérées en diffusion, chacune correspondant à l'obervation du phénomène de diffusion dans des directions de l'espace différentes.

Nous avions vu à la section précédente qu'après l'émission de l'impulsion radiofréquence à 90°, l'aimantation transversale $\overrightarrow{M_T}$ disparaissait à cause de l'hétérogénéité du champ $\overrightarrow{B_0}$. Une deuxième onde radiofréquence à 180°permettait d'inverser les moments $\overrightarrow{\mu_T}$ des spins et de les rephaser au bout d'un temps T_E. L'imagerie de diffusion ajoute au champ magnétique $\overrightarrow{B_0}$ un gradient de diffusion $\overrightarrow{G}$ constant et d'amplitude très supérieure à celle des hétérogénéités de $\overrightarrow{B_0}$ pour que celles-ci deviennent négligeables. Le champ magnétique en chaque voxel s'écrit :

$$B = B_0 + \overrightarrow{G}[x, y, z]^T$$

Après émission de la première onde radiofréquence à 90°, une première impulsion de gradient force chaque spin à avoir sa propre fréquence de Larmor en fonction de sa localisation spatiale. La seconde onde à 180°est ensuite appliquée pour renverser ce déphasage.
Dans le cas où le dipôle magnétique est immobile, l'application d'un second gradient de diffusion rephase exactement son spin.
Si le dipôle diffuse, c'est-à-dire que sa position spatiale est modifiée, sa fréquence de précession ne sera pas constante et l'excitation à 180°couplée au second gradient de diffusion ne va pas rephaser son spin. Cela se traduit par une atténuation de l'aimantation transversale et par conséquent une baisse du signal RMN (figure 2.5).

2.3 L'anatomie d'une séquence en IRM de diffusion

Le tenseur de diffusion possède 6 degrés de liberé. Il est donc naturel de procéd à l'acquisition de 6 images de diffusion avec 6 gradients spatiaux non colinéaires. Pour pouvoir quantifier la perte de signal RMN et donc calculer le tenseur de diffusion en chaque voxel,

une image sans gradient est également acquise (figure 2.6[1]). Le tenseur de diffusion peut être estimé avec l'équation de Stejskal et Tanner (eq. 2.3) ([48]) :

$$S_i = S_0 \exp\left(-b g_i^T D g_i\right) \tag{2.3}$$

où b est le coefficient de diffusion proposé par Le Bihan et al ([8]). Ce coefficient est lié aux paramètres physiques de l'acquisition :

$$b = \gamma^2 \delta^2 \left(\Delta - \frac{\delta}{3}\right) |g|^2$$

avec $|g|^2$ l'amplitude du gradient de diffusion, δ sa durée et Δ le temps séparant deux impulsions (figure 2.5).

Pour une meilleure estimation du tenseur de diffusion, il convient d'échantillonner l'espace avec beaucoup plus de directions non-colinéaires : avec l'amélioration des protocoles d'acquisition, il est maintenant courant d'utiliser plusieurs dizaines de directions. Nous verrons un exemple avec 25 directions mais la grande majorité des images dans ce rapport sont acquises avec 6 gradients de diffusion. Nous verrons également comment procéder à l'estimation du tenseur de diffusion (section 8), une étape qui reste non triviale (figure 2.7).

2.4 Coefficient d'anisotropie

On peut caractériser l'anisotropie de la diffusion des molécules d'eau par des coefficients d'anisotropie. Ce sont des scalaires dérivés du champ de tenseurs de diffusion. En effet, il est difficile d'apprécier à l'oeil nu la forme et la direction d'un ellipsoide quand celui-ci fait partie d'un champ dense. Il serait intéressant de pouvoir quantifier le degré d'anisotropie par une mesure scalaire. Autrement dit, on cherche à mesurer de combien un tenseur diffère d'un tenseur isotrope, c'est-à-dire d'une sphère. Cet indice d'anisotropie est appelé l'anisotropie fractionnelle AF (ou Fractional Anisotropy FA) introduit par [42] et s'exprime comme la variance normalisée des valeurs propres du tenseur de diffusion. Soit $\lambda_i, i = \{1, 2, 3\}$ les valeurs propres du tenseur D. Soit $\overline{\lambda}$ la moyenne des valeurs propres. Le coefficient AF d'écrit :

$$AF = \sqrt{\frac{3}{2}\left(\frac{(\lambda_1 - \overline{\lambda})^2 + (\lambda_2 - \overline{\lambda})^2 + (\lambda_3 - \overline{\lambda})^2}{\sum_{i=1}^{3} \lambda_i^2}\right)} \tag{2.4}$$

Le coefficient $\frac{3}{2}$ est un coefficient de normalisation si bien que le coefficient AF est compris entre 0 et 1 (0 pour un tenseur isotrope, 1 pour un tenseur anisotrope). Un avantage du coeffcient AF est qu'il peut être calculé sans décomposition spectrale de D. En écrivant que $\overline{\lambda} = trace(D)/3$ et que $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i^2 = trace(D^2)$, on a :

$$AF = \sqrt{\frac{3}{2}\left(1 - \frac{trace(D)^2}{3\, trace(D^2)}\right)}$$

ce qui rend le calcul de AF indépendant de la décomposition spectrale et ainsi rapide et moins sensible aux erreurs d'estimation du au bruit dans les images.

[1] L'auteur tiend à remercier le Dr. Guido Gerig et le Dr. Weili Lin pour ces données.

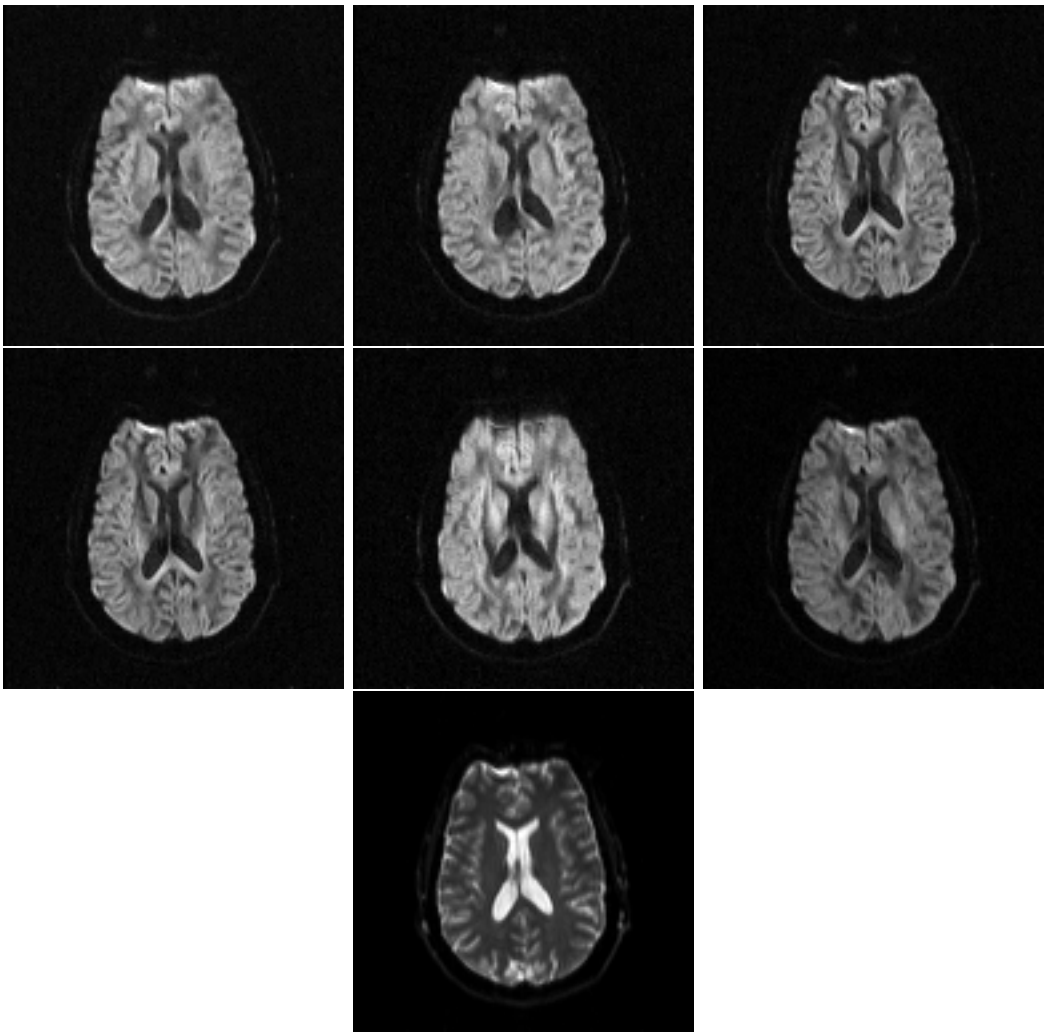

FIG. 2.6 – Séquence en IRM de diffusion (IRMd) acquise avec 6 gradients spatiaux (coupe n°29). **Deux premières lignes :** les 6 images $B_{i=1...6}$ pondérées en diffusion. **Bas :** l'image B_0 sans gradient de diffusion. Résolution des images : $128 \times 128 \times 58$. Résolution spatiale : $2mm \times 2mm \times 2mm$. Provenance : University Of North Carolina, Chapel Hill.

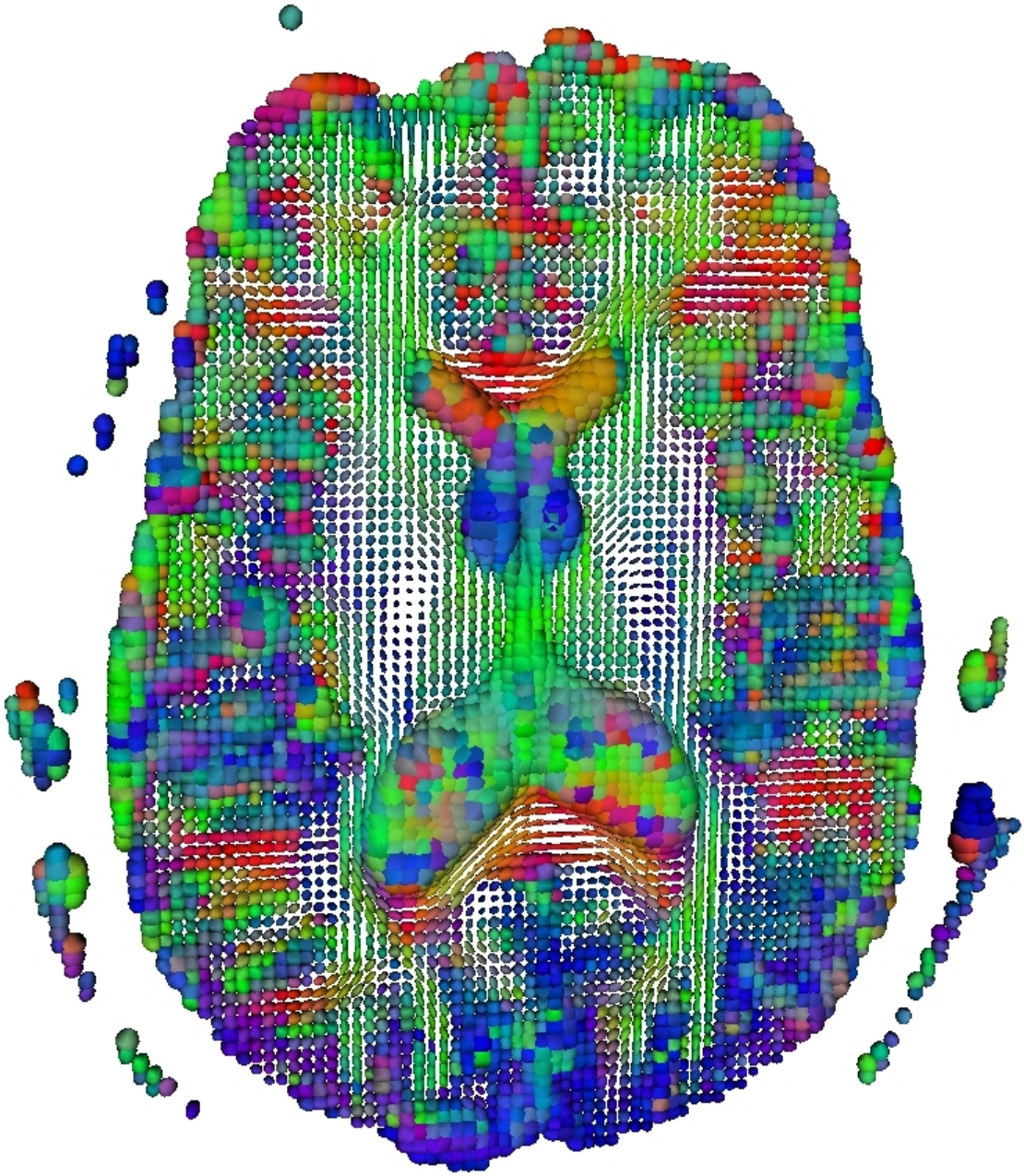

FIG. 2.7 – Tenseurs de diffusion estimés à partir des images 2.6. La couleur code la direction principale des tenseurs, i.e. le vecteur propre associé à la plus grande valeur propre : **rouge :** gauche-droite, **vert :** postérieur- antérieur, **bleu :** inférieur-supérieur. Les ellipsoides sont alignées sur les fibres de la substance blanche.

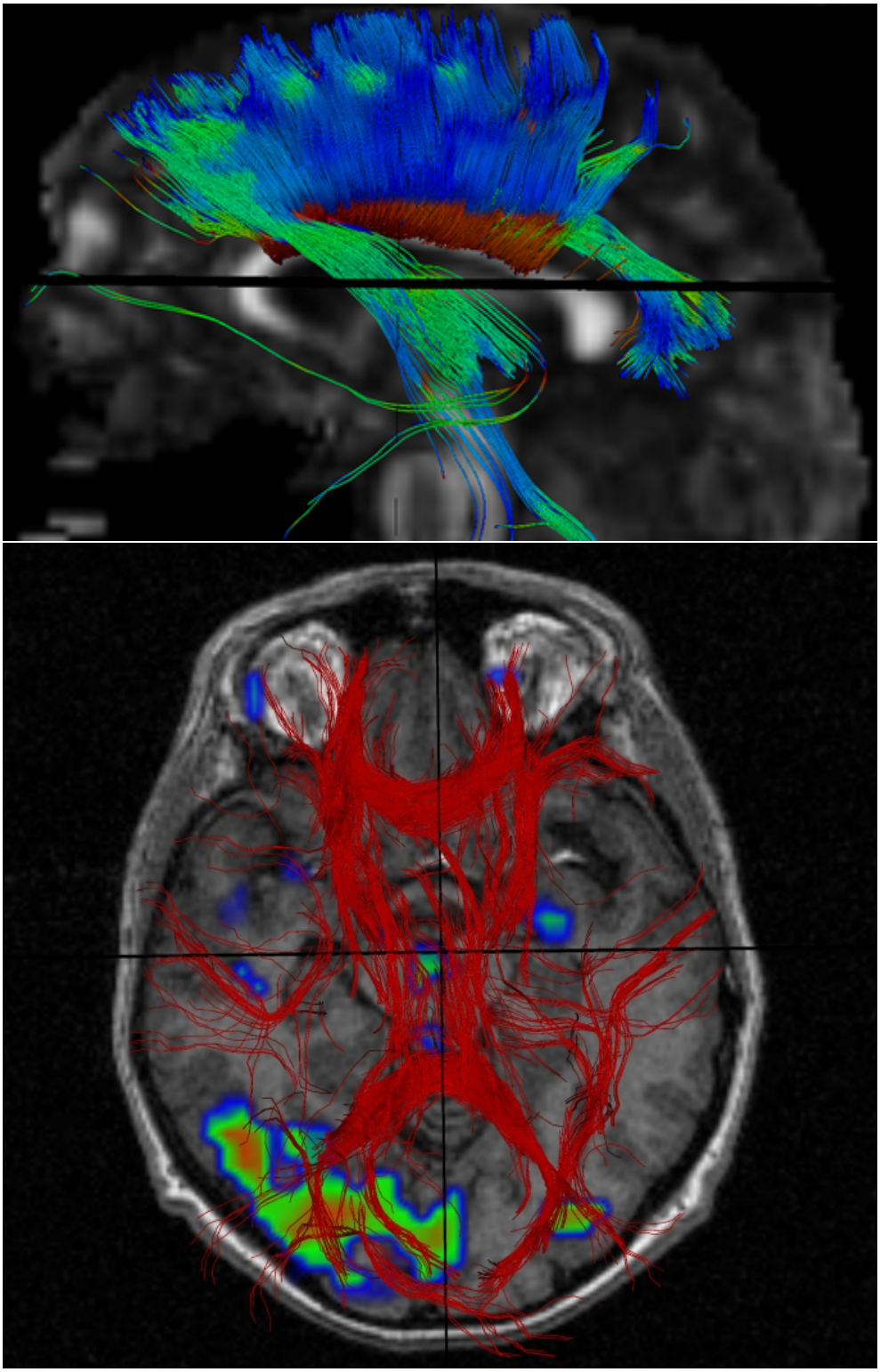

FIG. 2.8 – **Haut :** résultat du suivi de fibres reliant le corps caleux (région brillante dans l'image superposée) au cortex ([21], [20]). La couleur code la direction de la fibre (même codage que la figure 2.7) **Bas :** différents faisceaux de fibres superposés à l'IRM T1 (anatomique) et une carte d'activation représentant les zones cérébrales activées lors d'un stimulus.

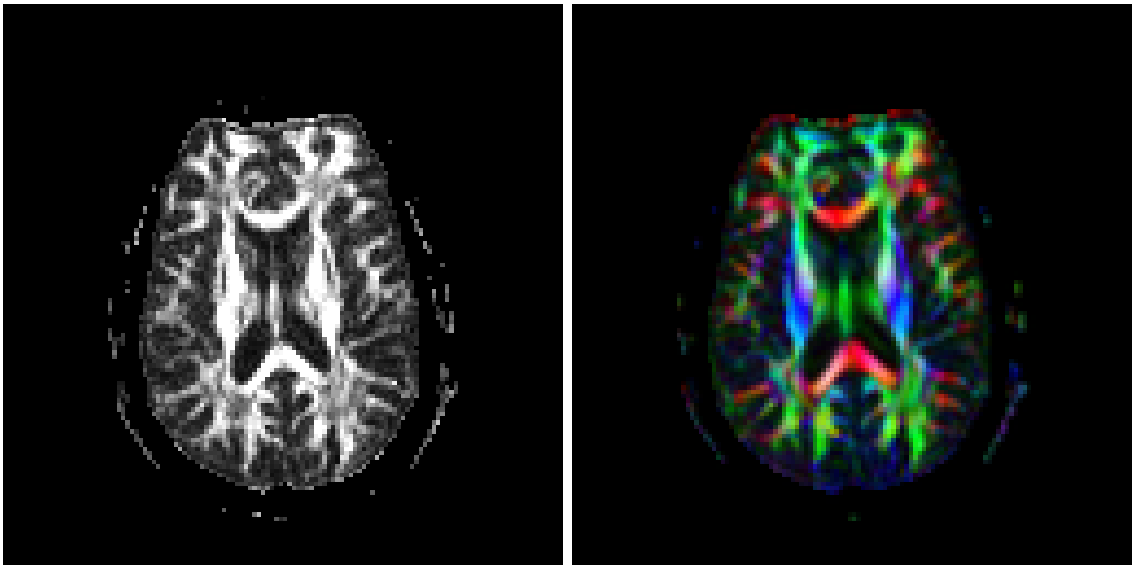

FIG. 2.9 – **Gauche :** Image de l'anisotropie fractionelle AF. Les zones brillantes correspondent aux zones anisotropes, c'est-à-dire les zones où les fibres nerveuses se situent. **Droite :** Anisotropie Fractionelle coloriée par la direction principale des tenseurs en chaque voxel. rouge : gauche-droite, vert : antérieur-postérieur, bleu : supérieur-inférieur.

Cependant, l'AF ne donne aucun renseignement quant à la direction principale des tenseurs en chaque pixel. On utilise alors un codage couleur pondéré par l'AF : le vecteur de direction principale d'un tenseur code les coordonnées RGB du pixel courant. Ainsi, un vecteur dans la direction (Ox) aura comme coordonnées (1,0,0) et sera un pixel rouge dans l'image AF couleur. Il faut faire attention de prendre la valeur absolue de chaque coordonnée (pas de composante RGB négative), mais cela entraine aussi la non-unicité des couleurs et des directions : (a,b,c) a la même couleur que (a,-b,c). Ensuite, on pondère la couleur par le coefficient d'AF afin que les couleurs sombres correspondent aux régions isotropes dont la direction ne nous intéresse pas et que les couleurs vives correspondent aux pixels dont le tenseur est très anisotrope (figure 2.9).

D'autres coefficients d'anisotropie ont été développés ([6]), mais l'AF est de loin le plus utilisé en IRMd.

2.5 Le suivi de fibres

Le suivi de fibres est la dernière étape en IRM de diffusion. Elle consiste à utiliser le champ de tenseurs pour reconstruire les connexions nerveuses d'un patient. Les applications sont grandes : mesurer l'effet d'une tumeur sur les chemins nerveux, l'effet d'une maladie neuro-dégénérative ou d'une lésion. La littérature est très florissante sur le sujet. Nous renvoyons le lecteur intéressé à quelques références nous semblant les plus intéressantes mais nous ne détaillerons pas plus cette étape : [21, 20, 5, 13, 17, 31, 43, 57, 30]. Une illustration de suivi de fibres est présentée figure 2.8.

2.6 Etat de l'art en manipulation de champs de tenseurs

Une litérature impressionnante a fleuri avec l'avènement de l'IRM de diffusion : [4], [9], [59] ou plus récemment [55], [18]. La plupart des méthodes développées jusqu'ici utilisent la nature géométrique des tenseurs pour procéder à une régularisation par EDP du champ de tenseurs tout en conservant les discontinuités (voir [18] pour un récapitulatif récent des méthodes). Par exemple, [18] opère une régularization anisotrope de la direction principale des tenseurs (i.e. vecteur propre associé à la plus grande valeur propre) puis utilise le résultat pour régulariser la plus grande valeur propre à son tour. Une approche similaire a été adoptée par [53] qui se base sur la décomposition spectrale des tenseurs : $W = U\ D\ U^T$ à chaque point du champ et opère une régularisation indépendante sur les valeurs propres et les vecteurs propres (U est ici une matrice orthogonale). Cette approche nécessite cependant une étape supplémentaire de réorientation des vecteurs propres, puisque la décomposition d'une matrice en éléments propres n'est pas unique (les vecteurs propres sont définis au signe près et tout arrangement de ces vecteurs dans U est possible à condition darranger les valeurs propres dans D en correspondance). Un autre problème se pose quand deux des valeurs propres deviennent égales : tout un sous-ensemble de vecteurs propres est possible et une réorientation devient difficile.
Dans [16], les mêmes auteurs proposent une méthode de flux matriciel avec préservation du rang. Leur dérivation aboutit à une équation d'évolution proche de celle que nous introduisons à la section 4 sans précise quelle métrique ils utilisent. Cependant, leur flux tend à mélanger les orientations des tenseurs, ce que nous n'obervons pas avec notre équation d'évolution. L'explication vient du fait que nous n'utilisons pas la même métrique lors du calcul des gradients.
L'origine de la métrique riemanniene invariante par transformation affine pour les tenseurs peut être remontée aux travaux de [35] sur les connexions invariantes par transformation affine sur les espaces homogènes. Elle est également enfouie sous des théorèmes très généraux sur les espaces symétriques empruntés à la géométrie différentielle ([24], [27], [29]) et parfois même considérée comme un résultat bien connu dans [7].
Quoiqu'il en soit, même si certains problèmes ont été résolus de manière indépendante, d'autres subsistent et aucun cadre général n'existe pour manipuler les champs de tenseurs. Nous avons introduit un formalisme mathématique rigoureux, basé sur une métrique riemannienne invariante sur l'espace des tenseurs, permettant d'étendre de nombreux algorithmes jusque-là réservés aux images scalaire aux images de tenseurs.

CHAPITRE 3

Quelques Rappels sur les Variétés Différentielles et la Géométrie Riemannienne

Ce chapitre a pour but de familiariser le lecteur avec quelques notions essentielles sur les variétés différentielles et la géométrie riemannienne de manière intuitive mais n'est en aucun cas un cours complet ni rigoureux sur le sujet. Pour cela, je renvoie le lecteur à l'ouvrage de Manfredo Perdigao do Carmo, Riemannian Geometry [14]. Les quelques notions de bases qui seront décrites dans ce chapitre sont essentielles pour introduire notre cadre riemannien pour les tenseurs. Le vocabulaire définit ici sera utilisé tout au long du rapport.

3.1 Définitions

Intuitivement, une variété est un espace «courbe» de $\mathbb{R}^N$. Comme il est difficile de se représenter un espace courbe en plus de 3 dimensions, nos exemples se limiteront aux variétés de $\mathbb{R}^3$. Par exemple, une sphère ou un tore sont des variétés de $\mathbb{R}^3$ ou en général, toute surface est une variété de $\mathbb{R}^3$. L'espace des tenseurs Sym_n^+ que nous allons décrire par la suite est une variété de $\mathbb{R}^6$.

Prenons l'exemple de la sphère S_2. La sphère est une variété de $\mathbb{R}^3$. Un tore, une quadrique sont des variétés de $\mathbb{R}^3$. Si l'on observe une sphère de suffisamment près, on peut approximer la courbure de sa surface par un plan tangent. C'est exactement ce que nous faisons lorsque l'on dessine une carte géographique : on approche la courbure de la terre par un plan. Par définition, une variété différentielle est une variété qui est localement difféomorphe à un espace vectoriel de dimension fixée.

Reprenons notre exemple de la sphère. A chaque point de cette variété peut être dèfinit un plan tangent. Ce plan tangent contient une infinité de vecteurs tangents à la variété. Avec l'illustration de la figure 3.1, on comprendra que l'on peut additionner deux vecteurs d'un plan tangent et rester dans ce plan. De même, on peut multiplier un vecteur par un scalaire et rester dans le plan. En revanche, il est impossible d'additionner deux vecteurs de deux plans tangents différents car on sortirait de l'un ou l'autre des plans. Finalement, on peut montrer qu'un plan tangent a une structure d'espace vectoriel, qu'on appelera espace tangent T_xM à la variété M en un point x.

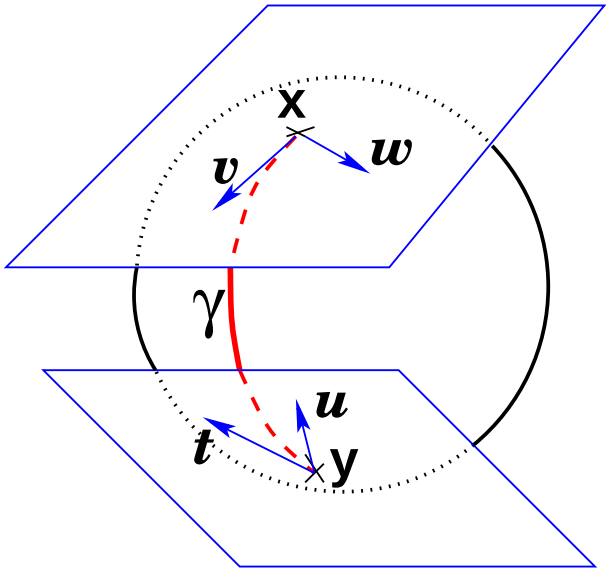

FIG. 3.1 – les plans tangents aux points x et y de la sphére sont différents : les vecteurs v et w de T_xM ne peuvent être comparés avec les vecteurs t et u de T_yM. Ainsi, il est naturel de définir un produit scalaire sur chaque plan tangent.

Le produit scalaire sur un espace tangent est appelé métrique riemannienne. Une variété différentielle dotée d'une métrique riemannienne est appelée variété riemannienne. On parle ensuite de géométrie riemannienne lorsque lon travaille sur ce type de variétés. Le produit scalaire doit de plus être différentiable partout sur la variété. La métrique riemannienne est finalement une collection continue de produits scalaires sur l'espace tangent à chaque point de la variété.

Maintenant considérons une courbe $\gamma(t)$ sur la sphère S_2 (figure 3.1). On peut calculer son vecteur tangent $\frac{d\gamma(t)}{dt}$ (vecteur vitesse instantanée) et sa norme $\|\frac{d\gamma(t)}{dt}\|$ (vitesse instantanée). Pour calculer la longueur de la courbe, on intègre les vitesses instantanées le long de la courbe. Par définition, la distance minimale entre 2 points d'une variété riemannienne est la longueur minimale de toutes les courbes rejoignant ces deux points. La courbe ayant cette longueur minimale est appelée la géodésique minimisante (elle nest pas forcément unique). Par la suite nous ferons l'hypothèse que la variété est géodésiquement complète, i.e. que le domaine de définition des géodésiques peut s'étendre à $\mathbb{R}$. Cela signifie que la variété n'a pas de frontière ni de point singulier pouvant être atteint en un temps fini (cas dune feuille de papier : cette variété possède une frontière et par conséquent les géodésiques ne sont pas définies sur $\mathbb{R}$). Une conséquence est qu'il existe toujours au moins une géodésique minimisante entre 2 points de la variété (théorme de Hopf-Rinow-De Rham).

3.2 Carte exponentielle

Soient x un point d'une variété M et $\overrightarrow{xy}$ un vecteur de l'espace tangent T_xM. On peut montrer qu'il existe une unique géodésique minimisante partant de x et avec comme vecteur tangent $\overrightarrow{xy}$. Ceci permet de développer M sur l'espace tangent TxM (imaginez une sphère «roulant»le long de son espace tangent) (fig. 3.2). La géodésique est alors transformée en une ligne droite sur l'espace tangent et les distances sont conservées. La fonction qui

fait correspondre à chaque vecteur $\overrightarrow{xy}$ de l'espace tangent le point de la variété atteint par la géodésique partant de x et avec comme vecteur tangent $\overrightarrow{xy}$ en une unité de temps est appelée la carte exponentielle : $y = \exp_x()$. Cette fonction réalise un difféomorphisme local de l'espace tangent T_xM sur M. La fonction réciproque, la carte logarithmique : $\overrightarrow{xy} = \log_x(y)$ fait correspondre à tout bipoint (x, y) de M le vecteur tangent $\overrightarrow{xy}$ tel que la géodésique joignant x à y a pour vecteur tangent $\overrightarrow{xy}$ en x. Nous verrons dans la section 3.3 que dans le cas général cette fonction n'est pas définie sur toute la variété.

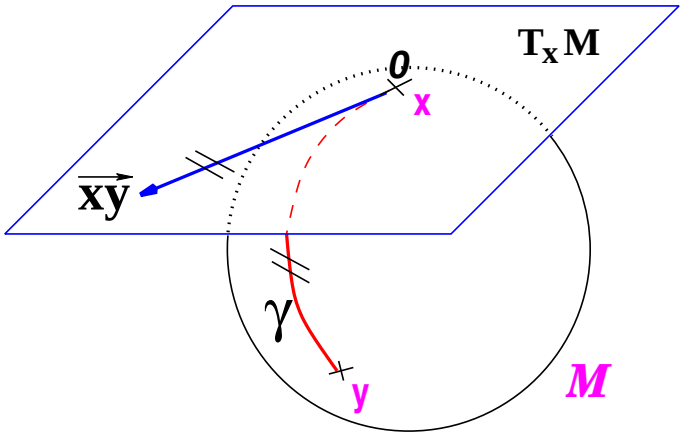

FIG. 3.2 – Les géodésiques partant de x sont des lignes droites dans l'espace tangent T_xM et les distances sont conservées.

Finalement, dans l'espace tangent T_xM, toutes les géodésiques partant de x sont des lignes droites : c'est donc la carte (au sens carte géographique) la plus «linéaire», c'est-à-dire minimisant le plus les erreurs dues à la courbure de la variété pour le point x.

3.3 Le lieu de coupure

Dans le cas général, la carte logarithmique est définie partout sur la variété sauf sur le lieu de coupure C_x : c'est le lieu des points où plusieurs géodésiques minimisantes partant de x se rencontrent. C'est le cas des points antipodaux sur la sphère S_2 où il existe une infinité de géodésiques les reliant (figure 3.3). Par conséquent, le lieu de coupure C_x de tout point x est son point antipodal et le lieu de coupure tangent est le cercle de rayon π (figure 3.3). La carte logarithmique est définie sur $M - C_xM$.

On suppose dans la suite que M n'a pas de lieu de coupure et est complet géodésiquement, c'est-à-dire que pour tout couple (x, y) de M il existe une et une seule géodésique les reliant.

3.4 Réinterprétation des opérations de base

Nous avons vu dans les sections précédentes que la carte exponentielle permet de faire correspondre à tout vecteur tangent un point de M et que réciproquement, la carte logarithmique fait la correspondance entre deux point (x, y) de M et un vecteur tangent. Le but est d'utiliser la structure d'espace vectoriel de T_xM pour mener nos calculs comme nous savons le faire. A travers les deux fonctions que nous venons de voir, il nous est possible de généraliser les opérations d'addition et de soustraction à des variétés riemannienne. La difficulté est de rester sur la variété quelque soit l'opération. Le tableau suivant reprend quelques opérations de base des espaces vectoriels et leurs correspondances en géométrie riemannienne :

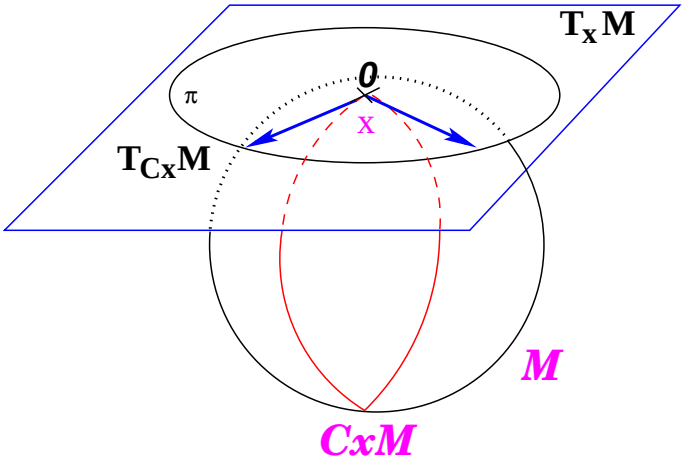

FIG. 3.3 – Lieu de coupure du point x de la sphère S_2. Une infinité de géodésiques relient x et son point antipodal (deux sont représentées en rouge). Si on déplie toutes les géodésiques sur l'espace tangent T_xM, on trouve le cerle de rayon π. La carte logarithmique est définie sur $M - C_xM$.

Espace Vectoriel	Variété Riemannienne
$\overrightarrow{xy} = y - x$	$\overrightarrow{xy} = \log_x(y)$
$y = x + \overrightarrow{xy}$	$y = \exp_x(\overrightarrow{xy})$
dist(x,y) $= \|y - x\|$	dist(x,y) $= \|\overrightarrow{xy}\|_x$

TAB. 3.1 – Réinterprétation de l'addition et de la soustraction sur une variété riemannienne.

Ces opérations de base vont nous permettre de généraliser aux variétés riemaniennes de nombreux algorithmes réservés jusque là aux espaces vectoriels. L'implémentation des cartes logarithmique et exponentielle est la clé de cette généralisation puisque toute opération géométrique peut s'exprimer à partir de ces opérations.

Cette section sur la réinterprétation des opérations de base met un terme aux rappels sur les variétés différentielles et la géométrie riemannienne. Dans le chapitre suivant, nous verrons la construction d'une métrique riemannienne, des géodésiques et des cartes exponentielle et logarithmique pour l'espace des tenseurs que nous utiliserons pour définir un cadre mathématique rigoureux et universel pour manipuler ce type de matrices.

CHAPITRE 4

Une Métrique Invariante par Transformation Affine pour l'Espace des Tenseurs

Intéressons nous maintenant à l'espace des matrices symétriques définies positives (tenseurs) Sym_n^+. Le but est de doter cette variété d'une métrique possédant des propriétés intéressantes : ainsi, nous verrons que choisir une métrique invariante par action du groupe des transformations linéaires GL_N conduit à donner à la variété une structure très régulière. En particulier, les tenseurs à valeurs propres nulles et infinies sont à une distance infinie de toute matrice définie positive. De plus, il existe une et une seule géodésique reliant deux tenseurs assurant de solides propriétés théoriques, notamment l'unicité de la moyenne (section 4.7).

4.1 Rappels sur quelques fonctions matricielles utilisées

Dans la suite, nous utilisons abondamment quelques fonctions essentielles sur les matrices symétriques définies positives.

L'exponentielle d'une matrice est définie par la série $\exp(\Sigma) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Sigma^k}{k!}$. Dans le cas des matrices symmétriques définies positives, on peut largement simplifier cette expression. Soit $\Sigma = UDU^T$ une diagonalisation de Σ : U est une matrice orthogonale (matrice des vecteurs propres) et D une matrice diagonale (matrice des valeurs propres strictement positives). Toute puissance k de Σ peut s'écrire dans la même base formée des vecteurs propres : $\Sigma^k = UD^kU$ (démonstration par récurrence basée sur le résultat des matrices orthogonales $UU^T = U^TU = I_d$). On peut donc factoriser U et U^T de part et d'autre de la série et écrire :

$$\exp(\Sigma) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Sigma^k}{k!} = U \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{D^k}{k!} U^T = U \ \exp(D)\, U^T = U \ DIAG(\exp(d_i))\, U^T$$

Cette série converge, quelque soit le tenseur. La fonction réciproque (le logarithme) n'est en général pas définie. Cependant, comme les tenseurs ont des valeurs propres strictement positives, la série définissant le logaritme converge et on obtient une formule aussi

simple que l'exponentielle :

$$\log(\Sigma) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} (\Sigma - I_d)^k = U \left(DIAG \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} (d_i - 1)^k \right) \right) U^T = U \left(DIAG(\log(d_i)) \right) U^T$$

La racine carrée (gauche) d'une matrice Σ est définie comme l'ensemble $\{\Sigma_L^{\frac{1}{2}}\} = \{A \in GL_n / AA^T = \Sigma\}$. De la même manière on définit la racine carrée droite de Σ : $\{\Sigma_R^{\frac{1}{2}}\} = \{A \in GL_n / A^T A = \Sigma\}$. Pour les tenseurs, la racine carrée est uniquement définie comme suit : $\Sigma^{\frac{1}{2}} = \{\Lambda \in GL_n / \Lambda^2 = \Sigma\}$.

La racine carrée existe toujours et est unique. Soit la décomposition suivante : $\Sigma = UD^2U^T$ (les valeurs propres sont strictement positives). Une racine carrée évidente est $\Sigma = UDU^T$, ce qui prouve l'existence. Soit Λ_1 et Λ_2 deux racines carrées de Σ. On a donc $\Lambda_1^2 = \Sigma$ et $\Lambda_2^2 = \Sigma$ qui commutent et qui peuvent être décomposées dans la même base. Ce qui signifie que les matrices diagonales D_1^2 et D_2^2 sont égales. Commes les valeur propres de D_1 et D_2 sont positives, elles sont aussi égales. D'où $\Lambda_1 = \Lambda_2$, ce qui prouve l'unicité. De plus, on a le résultat suivant :

$$\Sigma^{\frac{1}{2}} = \exp\left(\frac{1}{2} \log \Sigma\right)$$

4.2 Une distance invariante par transformation affine

La motivation derrière l'invariance par transformation affine est que la distance ne doit pas dépendre du repère de référence choisi. Soit un champ de tenseurs sur une grille régulière, comme ceux obtenus en IRM de diffusion : quelque soit le point de vue choisi, les distances entre tenseurs doivent rester identiques. D'où la nécessité d'une invariance par rotation, translation et facteur d'echelle, ce qui conduit naturellement á l'invariance par transformation affine.

Soit l'action du groupe linéaire $GL_n = \{M \in M_{n \times n} / det(M) \neq 0\}$ (groupe des transformations affines) sur l'espace des matrices symétriques Sym_n^+ :

$$A \star \Sigma = A \, \Sigma \, A^T, \qquad \forall A \in GL_n \qquad et \qquad \forall \Sigma \in Sym_n^+$$

L'action de ce groupe s'étend naturellement aux vecteurs tangents : si $\Gamma(t) = \Sigma + tW + O(t^2)$ est une courbe passant par Σ avec comme vecteur tangent W, alors la courbe $A \star \Gamma(t) = A\Sigma A^T + t\, AW\, A^T + O(t^2)$ passe par $A \star \Sigma$ avec comme vecteur tangent $A \star W$.
Selon [39], une distance invariante par action du groupe linéaire doit vérifier :

$$dist\,(A \star \Sigma_1, A \star \Sigma_2) = dist\,(\Sigma_1, \Sigma_2) \qquad \forall A \in GL_n$$

En prenant $A = \Sigma_1^{-\frac{1}{2}}$, on obtient :

$$dist\,(\Sigma_1, \Sigma_2) = dist\left(I_d, \Sigma_1^{-\frac{1}{2}} \Sigma_2 \Sigma_1^{-\frac{1}{2}}\right) = N\left(\Sigma_1^{-\frac{1}{2}} \Sigma_2 \Sigma_1^{-\frac{1}{2}}\right)$$

que nous appelerons pseudo-norme, ou distance à l'identité.
La distance doit être invariante par toute transformation rigide, en particulier par l'action

du groupe isotrope $H(I_d) = O_n = \{U \in M_{n\times n}/UU^t = I_d\}$ (groupe des transformations orthogonales). Donc :

$$N(\Sigma) = N\left(R\Sigma R^T\right), \qquad \forall R \in O_n$$

Il vient, en utilisant la décomposition spectrale de Σ : $\Sigma = UDU^T$:

$$N(\Sigma) = N(UDU^T) = N(D) \qquad car \qquad U \in O_n$$

La distance doit être une fonction symétrique des valeurs propres uniquement. De plus, la symétrie de la distance impose $N(\Sigma) = N(\Sigma^{-1})$:

$$N(\Sigma) = dist(I_d, \Sigma) = dist(\Sigma, I_d) = dist(\Sigma^{-\frac{1}{2}}\Sigma\Sigma^{-\frac{1}{2}}, \Sigma^{-\frac{1}{2}}\Sigma^{-\frac{1}{2}}) = dist(I_d, \Sigma^{-1}) = N(\Sigma^{-1})$$

Un bon candidat a la fonction distance est la somme des carrés des valeur propres :

$$N(\Sigma)^2 = \sum_{i=0}^{n} \log(\sigma_i)^2 \tag{4.1}$$

Cette distance vérifie les axiomes de symétrie et de positivité par construction. De plus, si $N(\Sigma) = 0$ alors $\sigma_i = 1\ \forall i$ et réciproquement : l'axiome de séparation est vérifié. Par contre, l'inégalité triangulaire, bien que toujours vérifiée expérimentalement reste non-prouvée : $\forall\ \Sigma_1, \Sigma_2, dist(\Sigma_1, \Sigma_2) \leq dist(Id, \Sigma_1) + dist(Id, \Sigma_2)$, ce qui sécrit également : $N(\Sigma_1^{-\frac{1}{2}}\Sigma_2\Sigma_1^{-\frac{1}{2}}) \leq N(\Sigma_1) + N(\Sigma_2)$ (voir par exemple [22]).

4.3 Une métrique riemannienne invariante par transformation affine

Nous avons déterminé au chapitre précédent une pseudo-norme ou distance à l'identité pour les tenseurs. Cette distance est un bon candidat en terme d'invariance par transformation affine. Une autre facon de déterminer la distance est de passer par la métrique riemannienne.

Considérons Sym_N^+ comme une variété différentielle de $\mathbb{R}^6$. Soient W_1 et W_2 deux vecteurs tangents (i.e. matrices symétriques sans contrainte sur la positivité des valeurs propres) au tenseur identité. Ce sont deux vecteurs de l'espace tangent $T_{I_d}M$. Considérons le produit scalaire classique entre deux matrices : $\langle W_1|W_2\rangle_{I_d} = Tr(W_1^T\ W_2)$. Maintenant considérons que W_1 et W_2 sont deux vecteurs tangents en Σ : $(W_1, W_2) \in T_\Sigma M$. Leur produit scalaire doit être invariant par toute transformation, soit :

$$\langle W_1|W_2\rangle_\Sigma = \langle A \star W_1|A \star W_2\rangle_{A\star\Sigma}, \qquad \forall A \in GL_n$$

En particulier, le produit scalaire doit être invariant pour $A = \Sigma^{-\frac{1}{2}}$:

$$\langle W_1|W_2\rangle_\Sigma \overbrace{=}^{def} \left\langle \Sigma^{-\frac{1}{2}}W_1\Sigma^{-\frac{1}{2}}|\Sigma^{-\frac{1}{2}}W_2\Sigma^{-\frac{1}{2}}\right\rangle_{I_d} = Tr\left(\Sigma^{-\frac{1}{2}}W_1\Sigma^{-1}W_2\Sigma^{-\frac{1}{2}}\right)$$

Pour exprimer les géodésiques sans passer par le calcul des symboles de Christoffel (méthode systématique en géométrie riemannienne) ([24, 27, 29]), on peut utiliser un résultat de la géométrie différentielle qui dit que les géodésiques pour les métriques invariantes sur des espace symétriques affines sont générés par l'action des sous-groupes à un paramètre du groupe de Lie qui agit sur l'espace (ici GL_n). Puisque les sous-groupe à un paramètre du groupe linéaire sont donnés par les exponentielles de matrice $\exp(tA)$, les géodésiques passant par Σ et avec vecteur tangent W s'écrivent :

$$\Gamma_{\Sigma,W}(t) = \exp(tA)\ \Sigma\ \exp(tA)^T \qquad avec \qquad W = A\Sigma + \Sigma A^T$$

Pour simplifer l'expression des géodésiques et exprimer A en fontion de W, on s'intéresse aux seules géodésiques passant par l'origine (l'identité). Ensuite, l'invariance de la métrique par action du groupe linéaire permettra d'exprimer les géodésiques passant par tout point Σ de Sym_n^+. Dans le cas où $\Sigma = I_d$, une solution de l'équation de Sylvester $W = A\Sigma + \Sigma A^T$ est $A = \frac{1}{2}W$. On en déduit donc l'expression des géodésiques passant par l'identité avec comme vecteur tangent W :

$$\Gamma_{I_d,W}(t) = \exp(\frac{t}{2}W)\exp(\frac{t}{2}W)^T = \exp(tW)$$

On peut remarquer que le vecteur tangent le long de la géodésique est le transport parallèle du vecteur tangent à l'origine :

$$\frac{d\Gamma(t)}{dt} = U\ DIAG(w_i \exp(tw_i))\ U^T = \Gamma(t)^{\frac{1}{2}}\ W\ \Gamma(t)^{\frac{1}{2}} = \Gamma(t)^{\frac{1}{2}} \star W$$

Ainsi, grâce à l'invariance de notre métrique, la norme du vecteur tangent le long de la géodésique est constant et égale à la norme de W : $\|\frac{d\Gamma(t)}{dt}\| = \|\Gamma(t)^{\frac{1}{2}} \star W\|_{\Gamma(t)^{\frac{1}{2}}} = \|W\|_{I_d}$. Par conséquent, la longueur de la géodésique entre les temps 0 et 1 est :

$$\mathcal{L} = \int_0^1 \left\| \frac{d\Gamma(t)}{dt} \right\|^2 dt = \|W\|_{I_d}^2$$

Si on résoud $\Gamma_{(I_d,W)}(1) = \Sigma$ (i.e. la géodésique partant de l'identité avec comme vecteur tangent W atteind Σ en un temps unitaire), on trouve :

$$\Gamma_{(I_d,W)}(1) = \exp(W) = \Sigma \qquad \Leftrightarrow \qquad W = \log(\Sigma)$$

d'où

$$\|W\|_{I_d}^2 = \|\log(\Sigma)\|_{I_d} = N(\Sigma)$$

On retrouve la pseudo-norme de l'équation 4.1.

Maintenant il nous reste à exprimer les géodésiques passant par n'importe quel point Σ. Pour cela, on utilise l'invariance de notre métrique :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{(\Sigma,W)}(t) &= \Sigma + tW + O(t^2) \\
\Gamma_{(\Sigma^{-\frac{1}{2}}\star\Sigma,\Sigma^{-\frac{1}{2}}W)}(t) &= I_d + t\Sigma^{-\frac{1}{2}} \star W + O(t^2) \\
\Sigma^{\frac{1}{2}} \star \Gamma_{(\Sigma^{-\frac{1}{2}}\star\Sigma,\Sigma^{-\frac{1}{2}}W)}(t) &= \Sigma + tW + O(t^2)
\end{aligned}$$

d'où

$$\Gamma_{(\Sigma,W)}(t) = \Sigma^{\frac{1}{2}} \star \Gamma_{(\Sigma^{-\frac{1}{2}} \star \Sigma, \Sigma^{-\frac{1}{2}} W)}(t)$$

Finalement,

$$\Gamma_{(\Sigma,W)}(t) = \Sigma^{\frac{1}{2}} \ \exp\left(t\, \Sigma^{-\frac{1}{2}}\, W\, \Sigma^{-\frac{1}{2}}\right) \ \Sigma^{\frac{1}{2}}$$

4.4 Cartes exponentielle et logarithmique

Rappelons une propriété des variétés riemannienne vue au 3.2 : les géodésiques réalisent un difféomorphisme local d'un espace tangent sur la variété : $\Gamma_{(\Sigma,W)}(1) = \exp_\Sigma(W)$. Cette fonction associe à tout vecteur tangent W de $T_\Sigma Sym_n^+$ le point de la variété atteind par la géodésique passant par Σ avec comme vecteur tangent W en une unité de temps. Cette fonction tire son nom du fait qu'elle correspond à l'exponentielle classique. C'est la cas pour une géodésique passant par l'identité, mais le cas général a une écriture plus complexe :

$$\exp_\Sigma(W) = \Sigma^{\frac{1}{2}} \ \exp\left(\Sigma^{-\frac{1}{2}}\, W\, \Sigma^{-\frac{1}{2}}\right) \ \Sigma^{\frac{1}{2}} \tag{4.2}$$

Dans notre cas, le difféomorphisme est global (la variété est géodésiquement complète et il n'y a pas de lieu de coupure) : la fonction réciproque (la carte logarithmique) est unique et définie sur toute la variété :

$$\log_\Sigma(\Lambda) = \Sigma^{\frac{1}{2}} \ \log\left(\Sigma^{-\frac{1}{2}}\, \Lambda\, \Sigma^{-\frac{1}{2}}\right) \ \Sigma^{\frac{1}{2}} \tag{4.3}$$

Cette carte réalise un difféomorphisme global de la variété sur l'espace tangent $T_\Sigma Sym_n^+$: elle associe à tout point Λ de Sym_n^+ le vecteur W de $T_\Sigma Sym_n^+$ tel que la géodésique reliant Σ et Λ a comme vecteur tangent W en Σ. De plus, comme il n'y a pas de lieu de coupure, les propriétés sur les statistiques décrites dans [38] sont vérifiées.
Comme vu au 3.4, ces deux fonctions sont les éléments essentiels pour une généralisation des algorithmes des espaces vectoriels aux variétés riemanniennes.

4.5 Systèmes de coordonnées induit et othonormal

Il est important de souligner que le système de coordonnées des espaces tangents n'est pas orhonormal en général. Le système de coordonnées de chaque espace est induit par le système de coordonnées standard (coeffecients de la matrice). En écrivant la métrique, on peut remarquer que :

$$\|\overrightarrow{\Sigma\,\Lambda}\|_\Sigma = \|\log_\Sigma(\Lambda)\|_\Sigma = \|\Sigma^{-\frac{1}{2}} \ \log_\Sigma(\Lambda)\, \Sigma^{-\frac{1}{2}}\|_{I_d} = \|\log(\Sigma^{-\frac{1}{2}} \star \Lambda)\|_2^2,$$

ce qui montre que $\overrightarrow{\Sigma\Lambda}_\perp = \log(\Sigma^{-\frac{1}{2}} \star \Lambda) \in T_{I_d} Sym_n^+$ est l'expression de $\overrightarrow{\Sigma\Lambda}$ dans une base orthonormée (sa norme est la norme L_2 matricielle classique). En effet, seul l'espace tangent à l'identité est doté d'une base orthonormale.Il faut donc bien faire attention à utiliser le produit scalaire de l'espace tangent au point où l'on se trouve sur la variété.

Parfois il convient de représenter de manière minimale un tenseur, c'est-à-dire par un vecteur de dimension égale à $n(n+1)/2$ qui est le nombre de degrés de liberté d'un tenseur $n \times n$. Par exemple, un tenseur 3×3 peut être représenté par un vecteur de dimension 6.

Cette fonction que l'on appelera Vec place l'élément a_{ij} de A à la $i.n+j$ ème place d'un vecteur de dimensions $n(n+1)/2$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \overset{Vec}{\longmapsto} \begin{bmatrix} a_{11} \\ \sqrt{2}\, a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}$$

De plus, les éléments hors diagonaux sont comptés deux fois avec la norme L_2 à l'identité : $\|W\|_2^2 = \sum_{i=1}^n w_{ii}^2 + 2\sum_{i<j\leq n} w_{ij}^2$, il faut donc appliquer un facteur correctif de $\sqrt{2}$ aux éléments hors diagonaux pour conserver des normes identiques.
Pour un vecteur $\overrightarrow{\Sigma\Lambda} \in T_\Sigma Sym_n^+$, sa représentation minimale dans une base orthonormée est :

$$Vec_\Sigma(\overrightarrow{\Sigma\Lambda}) = Vec_{Id}(\overrightarrow{\Sigma\Lambda}_\perp) = Vec_{I_d}\left(\log(\Sigma^{-\frac{1}{2}} \star \Lambda)\right) \tag{4.4}$$

Vec_Σ réalise un isomorphisme entre $T_\Sigma Sym_n^+$ et $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$. La fonction inverse sera notée $Vec_\Sigma^{(-1)}$.

Dans ce qui suit, nous allons aborder quelques applications de la métrique riemannienne pour les tenseurs avec notamment la descente de gradient géodésique.

4.6 Descente de gradient et EDP

Soit $f(\Sigma), \Sigma \in Sym_n^+$ une fonction à minimiser, Σ_t l'estimation courante de Σ et $W_t = \frac{\partial f}{\partial \Sigma}$ la dérivée matricielle de f à ce point (la dérivée est effectuée suivant chacun des coefficients σ_{ij} de Σ). Le principe de la descente de gradient est de suivre l'opposé du gradient pendant une courte période de temps et de réitérer le processus (calcul du nouveau gradient puis descente) pour minimiser f ([45]). On obtient litération t+1 comme suit : $\Sigma_{t+1} = \Sigma_t - \varepsilon W_t$. Or cette opération n'est valable que pour un ε très petit car on risque de sortir du cône positif des matrices définies positives et de voir apparaître à l'itération suivante des matrices à valeurs propres négatives. Une approche plus satisfaisante consiste à suivre la géodésique partant de Σ_t et ayant comme vecteur tangent W_t :

$$\Sigma_{t+1} = \Gamma_{\Sigma_t, W_t}(-\varepsilon) = \exp_{\Sigma_t}(-\varepsilon W_t) = \Sigma_t^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\varepsilon \Sigma_t^{-\frac{1}{2}} W_t \Sigma_t^{-\frac{1}{2}}\right) \Sigma_t^{\frac{1}{2}}$$

On appellera ce type d'optimisation une Descente de Gradient Géodésique, ou Geodesic Gradient Descent (GGD). Ce schéma de descente de gradient s'étend naturellement à l'équation d'évolution des EDP (équation d'Euler-Lagrange) :

$$\frac{\partial \Sigma(x,y)}{\partial t} = -W_t \qquad \Rightarrow \qquad \Sigma(x, t+dt) = \exp_{\Sigma_t}(dt\, W_t)$$

4.7 Un exemple : le calcul de moyenne

Soit $\Sigma_1, \Sigma_2 \dots \Sigma_N$ un ensemble de mesures du même tenseur aléatoire Σ. La moyenne au sens de Fréchet ou Karcher est l'ensemble des tenseurs minimisant la somme des distances

carrées : $C(\Sigma) = \sum_{i=1}^{N} dist(\Sigma, \Sigma_i)^2$. Il est à noter que cette moyenne n'est en général pas unique sur des variétés. Cependant, notre variété Sym_N^+ ne possède pas de lieu de coupure et est géodésiquement complet. Une conséquence importante est que la moyenne existe et est unique ([38]). Par conséquent, une condition nécessaire et suffisante pour minimiser C est que le gradient s'annule. En dérivant une fois de plus on obtient la Hessienne du critère qui est constante. On en déduit une descente de gradient de Newton du deuxième ordre et l'estimation de la moyenne au temps $t+1$ est donnée par :

$$\bar{\Sigma}_{t+1} = \exp_{\bar{\Sigma}_t}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log_{\bar{\Sigma}_t}(\Sigma_i)\right) = \bar{\Sigma}_t^{\frac{1}{2}}\ \exp\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log(\bar{\Sigma}_t^{\frac{1}{2}}\ \Sigma_i\ \bar{\Sigma}_t^{\frac{1}{2}})\right)\ \bar{\Sigma}_t^{\frac{1}{2}} \tag{4.5}$$

Le calcul de moyenne se résume à chercher le tenseur dont l'espace tangent est centré sur le barycentre des vecteurs $\overrightarrow{\Sigma\Sigma_i}$. On initialise la moyenne à l'une des réalisations puis on applique la formule itérative 4.5. Un exemple de calcul de moyenne sur variété est celui de la sphère S_2 : la moyenne de deux points de S_2 n'est en général pas un point de S_2, d'où la nécessité de revenir sur la variété et d'itérer le processus de calcul de moyenne.
Cette descente de gradient converge rapidement vers la valeur moyenne (moins de 10 itérations). Les figures 4.1 illustrent le calcul de moyenne avec 10000 tenseurs aléatoires.
Une description algortihmique du calcul de moyenne riemannienne de tenseurs est détaillée ci-dessous (algorithme 1).

Algorithm 1 Algorithme de calcul de moyenne riemannienne

1: **procedure** RIEMANIANMEAN(Σ)
Require: Σ est un tableau de N tenseurs.
2: $\overline{\Sigma} := \Sigma(1)$;
3: {*on initialise la moyenne au premier tenseur du tableau.*}
4: $\varepsilon := 1.10^{-8}$;
5: {*on comparera la distance entre 2 itérations successives à ε. Si cette distance est inférieure, alors il y a convergence.*}
6: ***while*** $d > \varepsilon$ ***do***
7: *W := 0 ;*
8: {*intialisation du vecteur tangent W à 0.*}
9: ***for all*** $i = 1 \dots N$ ***do***
10: *W := W+Log*$_{\overline{\Sigma}}(\Sigma(i))$;
11: {*on somme les vecteurs tangents dans l'espace tangent à l'estimation courante de la moyenne.*}
12: ***end for***
13: *W := W/N ;*
14: $d := \langle W|W\rangle_{\overline{\Sigma}}$
15: {*distance entre 2 itérations successive.*}
16: $\overline{\Sigma} := \exp_{\overline{\Sigma}}(W)$
17: {*on revient sur la variété avec la carte exponentielle et on réitère jusqu'à convergence.*}
18: ***end while***
19: **return** $\overline{\Sigma}$ *;*

4.8 Quelques statistiques sur les tenseurs

En se placant à l'espace tangent à la valeur moyenne, on peut généraliser la plupart des outils statistiques usuels ([38]). Par exemple, la matrice de covariance d'un ensemble de N tenseurs Σ_i de moyenne $\bar{\Sigma}$ est : $\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\overrightarrow{\bar{\Sigma}\Sigma_i}\otimes\overrightarrow{\bar{\Sigma}\Sigma_i}$ (où $\otimes$ désigne le produit tensoriel). En utilisant la fonction Vec (4.4), on retrouve un produit tensoriel de vecteurs. On écrit alors la matrice de covariance simplifiée comme suit :

$$Cov = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N} Vec_{\bar{\Sigma}}(\overrightarrow{\bar{\Sigma}\Sigma_i})\, Vec_{\bar{\Sigma}}(\overrightarrow{\bar{\Sigma}\Sigma_i})^T$$

On définit également la distance de Mahalanobis :

$$\mu^2_{(\bar{\Sigma},Cov)}(\Sigma) = Vec_{\bar{\Sigma}}(\overrightarrow{\bar{\Sigma}\Sigma})^T\, Cov^{(-1)}\, Vec_{\bar{\Sigma}}(\overrightarrow{\bar{\Sigma}\Sigma})$$

A noter que dans le cas des tenseurs 3×3, la matrice de covariance est de taille 6×6 et le résultat de la fonction Vec_{Σ} est un vecteur de dimension 6×1. Les équations de la matrice de covariance et de la distance de Mahalanobis sont correctement établies.

Remarque : Il est possible de construire un tenseur aléatoire gaussien centré en une moyenne $\bar{\Sigma}$ donnée. Il suffit de générer $n(n+1)/2$ coefficients gaussiens de moyenne nulle et de variance unité, de multiplier ce vecteur par la matrice de covariance désirée puis de revenir sur la variété en utilisant la carte exponentielle $\exp_{\bar{\Sigma}}$. On peut ainsi bruiter artificiellement des images de tenseurs (figures 6.3). Pour vérifier expérimentalement notre calcul de moyenne par descente de gradient le long des géodésiques, nous avons généré 10000 tenseurs gaussiens centrés en un tenseur aléatoire et avec une covariance égale à I_d. Nous avons calculé la moyenne grâce à l'équation 4.5. La figure 4.1 illustrent le temps de convergence (moins de 10 itérations). Nous avons également calculé l'histogramme des distances de Mahalanobis : la distribution suit de près une loi du χ^2_6 avec une moyenne de 6.031 et une variance de 12.38 (les valeurs attendues étant 6 et 12).

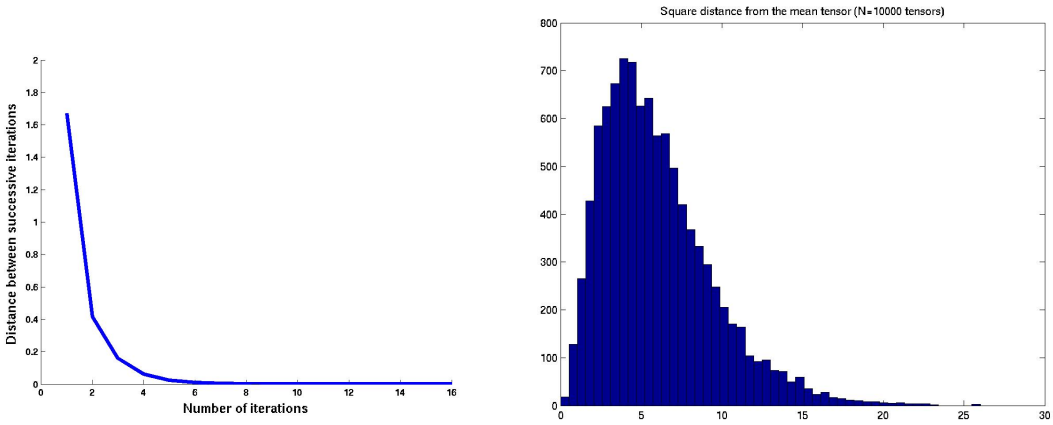

FIG. 4.1 – Moyenne de 10000 tenseurs aléatoires. **Gauche :** évolution de la distance entre deux itérations successives. La convergence est très rapide : moins de 10 itérations. **Droite :** histogramme des distances de Mahalanobis. La distribution suit une loi du chi^2_6 de moyenne 6.031 et de variance 12.38.

CHAPITRE 5

L'interpolation de Tenseurs

L'interpolation est une des opérations les plus répandues en géométrie et consiste à calculer des valeurs entre des mesures connues. En traitement d'image 3D, les interpolations les plus courantes sont les interpolations tri-linéraire (rapide et donnant de bien meilleur résultats qu'une interpolation dite du «voisin le plus proche») et l'interpolation cubique, ou plus général par fonctions splines ([50, 32]). Bien que nous ayons implémenté et testé ce dernier type d'interpolation, il ne sera pas décrit dans le rapport. Nous préférons détailler dans ce chapitre une méthode standard d'interpolation et son extension aux tenseurs.

La facon classique de définir l'interpolation sur une grille de dimension d où les mesures sont connues aux coordonnées entières $k \in Z^d$ est de considérer que l'interpolée $f(x)$ est une combinaison linéaire des mesures f_k prises dans un voisinage de x : $f(x) = \sum_k \omega_k(x)\, f_k$. Pour que cette fonction réalise une interpolation, il faut que la fonction de poids ω_k s'annule pour toutes les coordonnées entères sauf pour $x = k$ où elle doit être égale à 1. Ainsi l'interpolée $f(x)$ sera ègale aux mesures f_k aux coordonnées entières. De plus, les poids sont en général normalisés si bien que $\sum_k \omega_k(x) = 1$ pour toutes les positions x sur la grille.

5.1 Interpolation par moyenne pondérée

Afin de généraliser l'interpolation à notre variété, on considère que les poids ω_k sont normalisés : $\sum_k \omega_k(x) = 1 \forall x$. Ainsi on peut écrire :

$$f(x) = \sum_k w_k(x) f_k \Leftrightarrow \sum_k w_k f(x) = \sum_k w_k(x) f_k \Leftrightarrow \sum_k w_k(f_k - f(x)) = 0$$

Ainsi l'interpolation revient à calculer une moyenne au sens de Fréchet pour les tenseurs, c'est-à-dire à trouver le tenseur minimisant une somme de distances carrées : $C(\Sigma(x)) = \sum_k \omega_k(x) dist^2(\Sigma_k, \Sigma(x))$. D'après 4.7 on sait qu'il existe un unique tenseur minimisant C. On peut alors adapter notre descente de gradient géodésique proposée pour le calcul de moyenne (eq. 4.5) :

$$\Sigma_{t+1}(x) = \exp_{\Sigma_t(x)} \left(\sum_{k=1}^N w_k(x) \log_{\Sigma_t(x)}(\Sigma_k) \right) \tag{5.1}$$

$$= \Sigma_t(x)^{\frac{1}{2}} \exp \left(\sum_{k=1}^N w_k(x) \log \left(\Sigma_t(x)^{-\frac{1}{2}}\, \Sigma_k\, \Sigma_t(x)^{-\frac{1}{2}} \right) \right) \Sigma_t(x)^{\frac{1}{2}} \tag{5.2}$$

L'algorithme de calcul de moyenne pondérée s'écrit très facilement à partir de l'algorithme de calcul de moyenne riemannienne (algorithme 2) :

Algorithm 2 Algorithme de calcul de moyenne riemannienne pondérée

procedure WEIGHTEDRIEMANIANMEAN(Σ, ω)
Require: Σ est un tableau de N tenseurs, ω un tableau de N poids.

$Sum := 0$;
$\{Sum = \sum_{i=1}^{N} \omega(i)$ *et sert à normaliser la moyenne.*$\}$
for all $i = 1 \dots N$ ***do***
  $Sum := Sum + \omega(i)$;
end for

$\overline{\Sigma} := \Sigma(1)$;
$\varepsilon := 1.10^{-8}$;
while $d > \varepsilon$ ***do***
  $W := 0$;
  for all $i = 1 \dots N$ ***do***
    $W := W + \omega(i)\, Log_{\overline{\Sigma}}(\Sigma(i))$;
  end for
  $W := W/Sum$;
  $d := \langle W|W \rangle_{\overline{\Sigma}}$;
  $\overline{\Sigma} := \exp_{\overline{\Sigma}}(W)$;
end while
return $\overline{\Sigma}$;

5.2 Exemple : l'interpolation linéaire

L'interpolation linéaire est l'interpolation entre deux tenseurs Elle peut être vue de deux façons : soit en tant que moyenne pondérée entre deux tenseurs avec les poids classiques de ce type d'interpolation (t et $1-t$), soit comme la gédodésique reliant les deux tenseurs. L'expression de l'interpolation entre Σ_1 et Σ_2 est : $\Sigma(t) = \exp_{\Sigma_1}\left(t \log_{\Sigma_1}(\Sigma_2)\right) = \exp_{\Sigma_2}\left((1-t)\log_{\Sigma_2}(\Sigma_1)\right), t \in [0,1]$. Comme il n'y a que deux tenseurs, interpoler entre les deux revient en effet à suivre la géodésique les reliant. L'équation 5.1 est identique dans ce cas au calcul de la géodésique entre Σ_1 et Σ_2.
Comme l'espace des tenseurs est convexe, l'interpolation sur les coefficients des tenseurs est stable : on peut calculer $\Sigma'(t) = (1-t)\Sigma_1 + \Sigma_2$ et le résultat est une matrice définie positive. Les figures 5.1 montrent le résultat de l'interpolation linéaire sur les coefficients et avec la métrique riemannienne entre deux tenseurs 2D dont les valeurs propres sont (5,1) et (1,50) (tournés à 45°). L' évolution des valeurs propres, de leur somme (trace du tenseur) et de leur produit (volume de l'ellipse) sont également représentés.
Avec l'interpolation classique sur les coefficients, l'évolution de la trace est parfaitement linéaire (ce à quoi on s'attendait avec une interpolation sur les coefficients). La valeur propre principale croit de manière régulière et presque linéaire et la plus petite valeur propre passe par un maximum avant de decroître linéairement. Ce qui est plus problématique est le déterminant (volume) qui passe par un maximum. Si les tenseurs représentent des matrices de covariances d'une distribution gaussienne, cela signifierait que la probabilité

d'un point d'être une réalisation de notre distribution est plus grande entre les deux mesures qu'aux mesures elles-mêmes ! Avec la métrique riemannienne, l'évolution des valeurs propres est régulière (monotone) ainsi que le volume. On remarque aussi une rotation des vecteurs propres beaucoup plus douce avec la métrique riemannienne qu'avec l'interpolation classique, qui tend à largement favoriser les «gros»tenseurs.

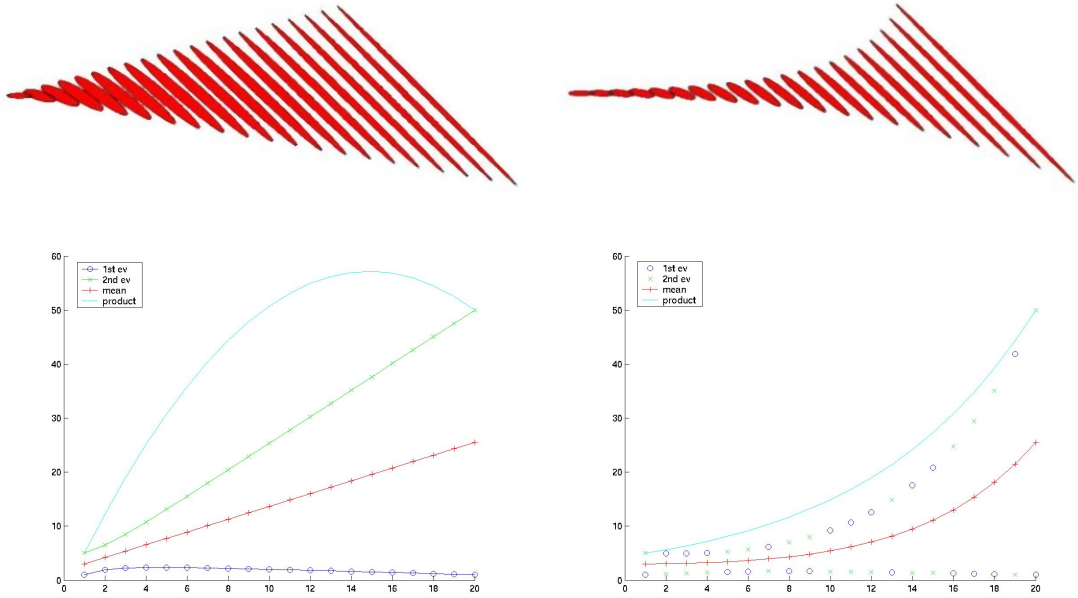

FIG. 5.1 – **Haut :** Interpolation linéraire entre deux tenseurs 2D de valeurs propres (5,1) et (1,50) tournés à 45°l'un de l'autre,. **Gauche :** interpolation classique sur les coefficients et **droite :** avec notre métrique riemannienne. **Bas :** évolution des valeurs propres, de leur moyenne et de leur produit (déterminant de la matrice ou volume de l'ellipse).

Algorithm 3 Interpolation linéaire entre 2 tenseurs Σ_1 et Σ_2

procedure LINEARINTERPOLATION (Σ_1, Σ_2, t)
Require: t compris entre 0 et 1.
$\Sigma_t := \exp_{\Sigma_1}(t.\log_{\Sigma_1}(\Sigma_2))$;
return Σ_t ;

5.3 Interpolation bi(tri)-linéaire

Les interpolations bi et tri-linéaires sur une grille 2D ou 3D suivent le schéma général vu au 5.1. Elles ne sont pas aussi simples que l'interpolation linéaire car elles mettent en jeu plus de deux points de référence. Le principe reste cependant assez simple : aprés avoir calculé les coefficients de l'interpolation bi(tri)-linéaire, il suffit de calculer une moyenne pondérée (eq. 5.1) pour obtenir l'interpolée. Des exemples d'interpolations bi et tri-linéaire sont présentés figure 5.2. On remarque que les aires (volumes) des ellipses (ellipsoides) sont plus importantes avec une interpolation sur coefficients qu'en utilisant la métrique riemannienne. Il y a également une transition beaucoup plus douce dans les directions des tenseurs avec cette dernière méthode.

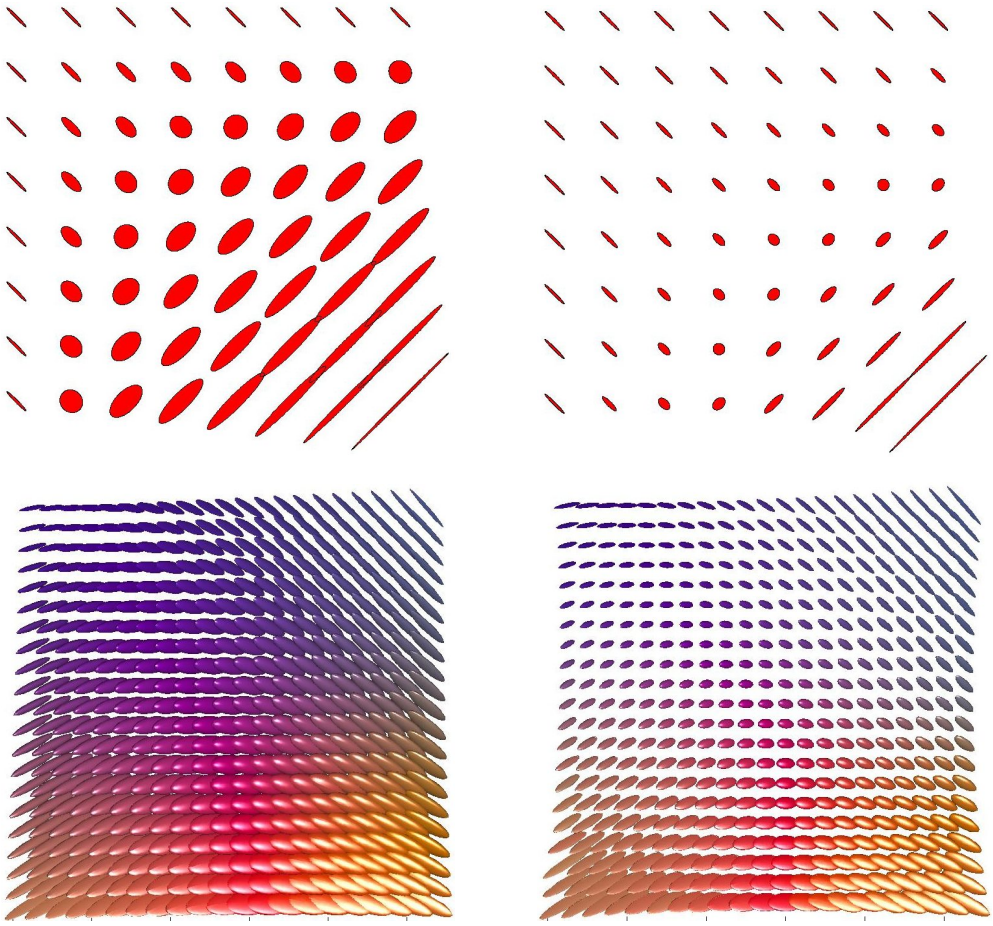

FIG. 5.2 – **Haut :** interpolation bi-linéaire entre 4 tenseurs 2D aux coins de la grille. **Bas :** une coupe de l'interpolation trilinéaire entre des tenseurs 3D. **Gauche :** interpolation sur les coefficients et **droite :** avec notre métrique riemannienne.

5.4 Interpolation de mesures non régulières

Lorsque les mesures ne sont disponibles que de manière éparse, c'est-à-dire à des positions x_i non régulières, la notion de voisinage n'est plus définie. Pour avoir accès à un champ dense de tenseurs (à chaque point d'une grille), nous avons développé une solution originale : les voisins naturels. Il s'agit de déterminer quels sont les voisins, parmi les points éparses connus, que l'on chosirait naturellement pour tout point de la grille. Suivant [47, 15], les coordonnées naturelles de tout point x de la grille sont les points x_i dont les cellules de voronoi sont réduites lors de l'insertion du point x dans le diagramme de voronoi. Le poids ω_i du voisin x_i correspond à la proportion de la cellule empruntée par x lors de la constitution du nouveau diagramme. Ainsi, chaque point x de la grille se voit attribuer une liste de voisins naturels x_i avec leur poids ω_i. Il reste alors à calculer une moyenne pondéré pour obtenir la valeur du tenseur au point x (eq. 5.1). Une limitation de cette approche est que les voisins naturels ne sont pas définis en dehors de l'enveloppe convexe définie par les points x_i (volume des cellules de voronoi infines en dehors de l'enveloppe).

Une autre idée est d'utiliser une fonction radiale pour déterminer l'influence d'un point sur son voisinage. Classiquement, on utilise une fonction gaussienne ou spline. Par exemple, une gaussienne associe un poids $\omega_i(x) = G_\sigma(x - x_i)$ à la mesure Σ_i au point x_i. En renor-

malisant les poids afin de pouvoir utiliser notre calcul de moyenne pondérée (eq. 4.5), on obtient :

$$\Sigma_{t+1}(x) = \exp_{\Sigma_t(x)} \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} G_\sigma(x - x_i)\, \overrightarrow{\Sigma_t(x)\Sigma_i}}{\sum_{i=1}^{N} G_\sigma(x - x_i)} \right) \tag{5.3}$$

Un exemple de ce type d'interpolation est présenté figure 7.1 en haut à droite. Cet algorithme offre plutôt une approximation qu'une interpolation puisque les poids ne sont pas égaux à zéro aux points de mesures. Nous verrons à la section 7.4 une méthode d'interpolation de données éparses par diffusion donnant de bien meilleurs résultats.

CHAPITRE 6

Filtrage des Champs de Tenseurs

En IRM de diffusion (voir introduction chapitre 2.2), une étape de pré-traitement des champs de tenseurs est nécessaire avant de pouvoir effectuer tout traitement ultérieur (suivi de fibres ou «fiber tracking») ou de tirer un quelconque diagnostic. En effet, les images pondérées en diffusion sont très bruitées et le champ de tenseurs est par conséquent lui aussi très bruité. Ce chapitre présente deux types de filtrage : le premier, un grand classique en imagerie, est le filtrage gaussien que nous étendrons aux champs de tenseurs. Le second est le filtrage anisotrope dont la principale propriété est de conserver les zones de discontinuités. Nous verrons également comment calculer le gradient et le laplacien d'un champ de tenseurs, ainsi qu'une description des algorithmes implémentés.

6.1 Filtrage gaussien

Dans le cas continu, le filtrage gaussien s'exprime comme la convolution d'un champ vectoriel $F_0(x)$ avec une gaussienne :

$$F(x) = \int_y G_\sigma(y-x)F_0(y)dy$$

L'influence de la gaussienne est limitée à un voisinage situé à 3σ de son centre. Dans le cas discret, en se limitant à un voisinage adapté, on peut normaliser les poids gaussiens. Finalement, le filtrage gaussien peut s'écrire comme un calcul de moyenne pondérée :

$$F(x) = \frac{\sum_{u\in\mathcal{V}(x)} G_\sigma(u)F_o(x+u)}{\sum_{u\in\mathcal{V}(x)} G_\sigma(u)} = \arg\min_F \sum_{u\in\mathcal{V}(x)} G_\sigma(u)\|F_0(x+u)-F\|^2$$

On minimise cette moyenne pondérée par la descente de gradient vue au 5.1. On initialise le processus aux mesures $\Sigma_0(x)$, puis on applique l'équation d'évolution suivante :

$$\Sigma_{t+1}(x) = \exp_{\Sigma_t(x)}\left(\frac{\sum_{u\in\mathcal{V}(x)} G_\sigma(u)\overrightarrow{\Sigma_t(x)\Sigma_t(x+u)}}{\sum_{u\in\mathcal{V}(x)} G_\sigma(u)}\right)$$

Les figures 6.1 montrent les résultats d'un filtrage gaussien sur les coefficients (les poids $G_\sigma(u)$ étant tous positif, le calcul de moyenne pondérée reste stable en opérant

sur les coefficients des tenseurs) et avec notre métrique riemannienne sur une coupe de tenseurs d'IRM de diffusion. On remarque que le filtrage sur coefficients avantage les tenseurs volumineux. Ainsi, on retrouve des mesures aberrantes dans les ventricules. De plus, les zones frontières entre les régions anisotropes (tenseurs de faible volume mais dont la direction est celles des fibres sous-jacentes) et isotropes (tenseurs volumineux car la diffusion n'est pas restreinte par les fibres) sont beaucoup plus lissées par le filtrage sur les coefficients avantageant les «gros»tenseurs.

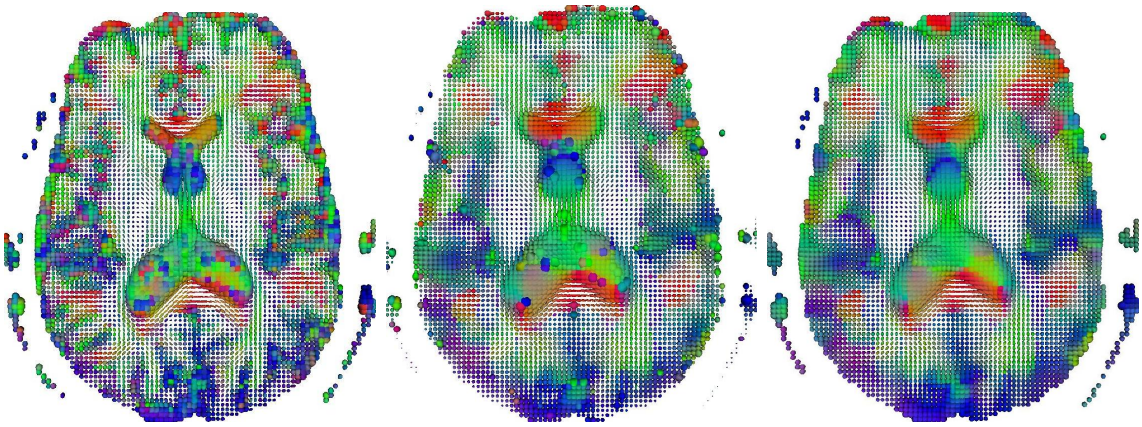

FIG. 6.1 – Régularisation d'une coupe de DTI par filtrage gaussien isotrope. **Gauche :** estimation brute des tenseurs. La couleur code la direction du vecteur propre principle (**rouge :** gauche-droite, **vert :** posteérieur-antérieur, /bf bleu : inférieur-supérieur). **Milieu :** filtrage gaussien sur les coefficients (fenêtre 5×5, $\sigma = 2.0$). **Droite :** filtrage gaussien avec la métrique riemannienne (les paramètres de filtrage sont identiques).

6.2 Gradient d'un Champ de Tenseurs

Pour la suite, nous aurons besoin de savoir calculer le gradient d'un champ de tenseurs. Pour simplifier cette tâche, on utilise la fonction Vec pour passer d'un tenseur $n \times n$ à un vecteur de dimension $n(n+1)/2$. Ainsi le calcul du gradient d'un champ de tenseurs se transforme en calcul du gradient d'un champ de vecteurs.
Soit un champ de vecteur de dimension N : $F(x) = (f_1(x_1, \dots x_d), \dots f_N(x_1, \dots x_d))$ sur $\mathbb{R}^d$ (dans notre cas d=3 et N=n(n+1)/2). Le gradient $\nabla F(x)$ s'écrit dans une base orthonormée :

$$\nabla F(x) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = [\partial_{x_1} F, \dots \partial_{x_d} F] = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}, & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_d} \end{pmatrix}$$

Dans notre cas, le gradient serait de dimensions $n \times n \times d$. En utilisant la fonction Vec, le gradient est de dimensions $d \times n(n+1)/2$. Pour des tenseurs de dimension 3×3, le gradient est de dimension 3×6 avec la fonction Vec au lieu de $3 \times 3 \times 3$ sans.
Le calcul du gradient d'un champ de vecteurs est le même que pour un champ scalaire : on procède par dfférences fines dans d directions orthogonales (classiquement suivant x, y et z). Cependant, pour rendre le calcul du gradient plus stable, on peut utiliser plus que d dérivées directionnelles. On estime la dérivée directionnelle par différence fine : $\partial_u F(x) = (F(x+u) - F(x)) / (\|u\|)$. Or le gradient est relié aux dérivées directionnelles par la formule : $\langle \nabla F(x) | u \rangle = (\nabla F(x))^T u = \partial_u F(x)$. On peut alors considérer le gradient

en un point x comme étant la matrice approchant le mieux, au sens des moindres carrés, les dérivées directionnelles dans un voisinage V de x(par exemple 6, 18 ou 26 en 3D) :

$$\nabla F(x) = \arg\min_{G} \sum_{u \in \mathcal{V}(x)} \|G^T u - \partial_u F(x)\|^2$$

On montre que la matrice G solution s'écrit :

$$G = \left(\sum_{u \in \mathcal{V}(x)} u \, \partial_u F(x)^T \right) \left(\sum_{u \in \mathcal{V}(x)} u \, u^T \right)^{(-1)}$$

$$\simeq \left(\sum_{u \in \mathcal{V}(x)} u \, \frac{(F(x+u) - F(x))^T}{\|u\|} \right) \left(\sum_{u \in \mathcal{V}(x)} u \, u^T \right)^{(-1)}$$

L'expérience montre que cette approche est bien plus stable qu'en ne prenant que d directions orthogonales et plus rapide que de calculer le gradient par convolution, avec la dérivée d'une gaussienne par exemple.
Souvent seule la norme du gradient nous intéresse pour quantifier les variations dans l'image : $\|\nabla F(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{d} \|\partial_{x_i} F(x)\|^2$. On peut de la même façon approximer cette norme avec les dérivées directionnelles dans un voisinage donné :

$$\|\nabla F(x)\|^2 = \frac{3}{Card(\mathcal{V}(x))} \sum_{u \in \mathcal{V}(x)} \frac{\|F(x+u) - F(x)\|^2}{\|u\|^2} \tag{6.1}$$

Pour un champ de tenseurs $\Sigma(x)$ défini sur $\mathbb{R}^d$, on procède de la même manière en remplacant les dérivées directionnelles par des vecteurs tangents :

$$\partial_u \Sigma(x) \simeq \frac{\log_{\Sigma(x)}(\Sigma(x+u))}{\|u\|} = \frac{\overrightarrow{\Sigma(x)\Sigma(x+u)}}{\|u\|}$$

Il faut faire attention de prendre en compte la métrique en chaque point $\Sigma(x)$ lors du calcul de la norme du gradient :

$$\|\nabla \Sigma(x)\|^2_{\Sigma(x)} = \sum_{i=1}^{d} \|\partial_{x_i} \Sigma(x)\|^2_{\Sigma(x)} \simeq \frac{3}{Card(\mathcal{V}(x))} \sum_{u \in \mathcal{V}(x)} \frac{\|\overrightarrow{\Sigma(x)\Sigma(x+u)}\|^2_{\Sigma(x)}}{\|u\|^2} \tag{6.2}$$

$$\simeq \frac{3}{Card(\mathcal{V}(x))} \sum_{u \in \mathcal{V}(x)} \frac{\|\log \ \Sigma^{-\frac{1}{2}}(x)\Sigma(x+u)\Sigma^{-\frac{1}{2}}(x) \ \|_2^2}{\|u\|^2} \tag{6.3}$$

6.3 Filtrage par EDP

Le but de la régularisation d'un champ scalaire, vectoriel ou de tenseurs F est de réduire sa variation spatiale. La mesure au premier ordre de cette variation est le gradient ∇F : un gradient fort indique une grande variation tandis qu'un gradient faible signifie peu de variations. Une mesure de la régularité est l'intégrale du gradient sur le domaine de définition Ω où de F : $Reg(F) = \int_\Omega \|\nabla F(x)\|^2 dx$. Le principe du filtrage par EDP est de partir d'un champ intial $F_0(x)$, puis de trouver à chaque étape le champ $F_t(x)$ qui minimise le critére de régularité par une descente de gradient. Il nous faut calculer le gradient du critère de régularisation $Reg(F)$. En écrivant le développement de Taylor du

Algorithm 4 Gradient d'un champ de tenseur $\Sigma(x, y, z)$

procedure GRADIENT($\Sigma(x, y, z)$)
Require: taille des voxels : sx, sy, sz.
$M := 0$;
{matrice de taille 3x3 initialisée à 0}
for all $z = -1 \ldots 1$ **do**
  for all $y = -1 \ldots 1$ **do**
    for all $x = -1 \ldots 1$ **do**
      $u = [sx.x,\ sy.y,\ sz.z]^T$;
      $M := M + u.u^T$;
    end for
  end for
end for
$invM = M^{(-1)}$;
$\{\ invM = \left(\sum_{u \in \mathcal{V}(x)} u\, u^T\right)^{(-1)}\ \}$

for all x, y, z **do**
  $\Sigma := \Sigma(x, y, z)$;
  $G := 0$;
  {matrice de taille 6x3 initialisée à 0}
  for all $k = -1$ to 1 **do**
    for all $j = -1$ to 1 **do**
      for all $i = -1$ to 1 **do**
        $\Sigma_u := \Sigma(x + i, y + j, z + k)$;
        $V_u = Vec_\Sigma(\Sigma_u)$;
        $u = [sx.i,\ sy.j,\ sz.z]^T$;
        $G := G + V_u\, u^T$;
      end for
    end for
  end for
  $G := G.invM$;
  $normOfG := trace(G\, G^T)$;
  {norme L_2 matricielle}
end for
return (G, normOfG) ;

FIG. 6.2 – Norme du gradient du champ de tenseur d'une coupe de DTI. **Gauche :** calculée sur les coefficients (eq 6.1). **Milieu :** les dérivées directionnelles ont été calculées avec la carte logarithmique (eq. 6.2), mais la norme n'a pas été corrigée pour la métrique en chaque point. Comme le résultat est très proche de la norme calculée sur les coefficients, nous affichons uniquement une image des différences. Les principales différences se situent dans les zones de fort gradient, où la correction de la courbure de la variété par notre métrique a le plus d'importance. Cependant, les différences restent faibles (moins de 10%). **Droite :** la norme riemannienne du gradient riemannien (eq. 6.2). On distingue beaucoup plus de structures dans le cerveau (délimitation de certains faisceaux de fibres) qui seront préservées avec le filtrage anisotrope.

critére pour une variation infiniment petite (développement de Taylor au premier ordre) dans la direction du champ H (H est tangent à F), il vient :

$$Reg(F + \varepsilon H) = Reg(F) + 2\varepsilon \int_\Omega \langle \nabla F(x) | \nabla H(x) \rangle \, dx + O(\varepsilon^2)$$

Le terme $\int_\Omega \langle \nabla F(x) | \nabla H(x) \rangle \, dx$ est la dérivée directionnelle (ou de Gâteau) $\partial_{\nabla H} Reg(F)$. Mais il nous faut $\nabla F(x)$. Or $\partial_H Reg(F) = \int_\Omega \langle \nabla Reg(F(x)) | H(x) \rangle \, dx$. Il nous faut donc relier $\partial_H Reg(F)$ et $\partial_{\nabla H} Reg(F)$, ce que nous allons faire dans le cas scalaire, vectoriel et enfin pour les tenseurs dans un souci de clarté pour le lecteur.

6.3.1 Le cas scalaire

Soit $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ un champ scalaire. Le critère de régularisation s'écrit : $Reg(f) = \int_\Omega \|\nabla f(x)\|^2$ et son développement de Taylor : $Reg(f+\varepsilon h) = Reg(f) + 2\varepsilon \int_{Omega} \langle \nabla f(x) | \nabla h(x) \rangle \, dx + O(\varepsilon^2)$. Il est nécessaire d'introduire quelques notations pour simplifier la suite. Le divergent sera noté $div(.) = \langle \nabla | . \rangle$ et le laplacien : $\Delta f = div(\nabla f)$. Ce dernier opérateur s'écrit également $\Delta f = \langle \nabla | \nabla f \rangle$. En utilisant les régles de la dérivation, on obtient :

$$div(h \nabla f) = \langle \nabla \mid h \nabla f \rangle = h \Delta f + \langle \nabla h \mid \nabla f \rangle$$

D'aprés le théorème de Green-Ostrogradsky ([23]), on sait que le flux sortant des frontières $\partial\Omega$ d'un domaine Ω est égal à l'intégrale de la divergence à l'intérieur du domaine. Soit n la normale à un point de la frontière. On a :

$$\int_{\partial\Omega} \langle h \nabla f | n \rangle \, dn = \int_\Omega div(h \nabla f) = \int_\Omega h \Delta f + \int_\Omega \langle \nabla h \mid \nabla f \rangle$$

Ce résultat est la généralisation de l'intégration par parties sur $\mathbb{R}^d$. En faisant l'hypothèse que le gradient est toujours orthogonal à la normale à tout point de la frontière (conditions

de Von Neumann) : $\langle \nabla f \mid n \rangle = 0$, le flux à travers les frontières disparait et il vient : $\int_\Omega \langle \nabla h(x) | \nabla f(x) \rangle \; dx = - \int_\Omega h \, \Delta f$, soit encore :

$$\partial_h Reg(f)(x) = 2 \int_\Omega \langle \nabla f(x) \mid \nabla h(x) \rangle \; dx = -2 \int_\Omega h(x) \, \Delta f(x) \, dx$$

Cette dernière formule peut s'exprimer avec le produit scalaire classique sur l'espace des fonctions de carré intégrable $L_2(\Omega, \mathbb{R})$ ($\langle f | g \rangle = \int_\Omega f g$) :

$$\partial_h Reg(f)(x) = -2 \, \langle \Delta f | h \rangle$$

D'où finalement, comme $\partial_H Reg = \langle \nabla Reg | H \rangle$:

$$\nabla Reg(f)(x) = -2 \, \Delta f(x)$$

L'équation d'évolution (Euler-Lagrange) de minimisation du critère $Reg(F)$ devient :

$$f_{t+1}(x) = f_t(x) - \varepsilon \nabla Reg(f)(x) = f_t(x) + 2 \, \varepsilon \Delta f_t(x)$$

Ce résultat est bien connu de limagerie scalaire. Le laplacien est lopérateur de diffusion dans une image. Si on laisse l'opérateur diffuser à l'infini, tous les pixels de l'image se retrouvent à la même valeur qui est la moyenne du champ initial. Le gradient est ainsi nul (le critère est minimisé).

6.3.2 Le cas vectoriel

En décomposant notre champ vectoriel $F(x)$ en N composantes indépendantes $f_i(x)$, on peut également décomposer le gradient $\nabla F(x)$ de dimension $d \times N$ en N composantes vectorielles $\nabla f_i(x)$ de dimension d (vecteurs colonnes). Ainsi, en choisissant une base orthonormée de $\mathbb{R}^N$, le critère de régularisation se transforme en N critères indépendants :

$$Reg(F)(x) = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \|\nabla f_i(x)\|^2 \; dx = \sum_{i=1}^{N} Reg(f_i)$$

Par conséquent chaque composante $f_i(x)$ est régularisée de manière indépendante par l'équation d'Euler-Lagrange : $\nabla Reg(f_i) = -2\Delta f_i$. On prend la convention que le laplacien est appliqué par composante, si bien que $\Delta F = div(\nabla F) = \nabla^T \nabla F = (\nabla f_1, \ldots \nabla f_N)$. Le gradient du critère de régularisation devient dans le cas vectoriel :

$$\nabla Reg(F) = -2\Delta F \qquad \text{pour} \qquad Reg(F) = \int_\Omega \|\nabla F(x)\|^2 \, dx$$

Et l'équation d'évolution est :$F_{t+1}(x) = F_t(x) + 2 \, \varepsilon \Delta F_t(x)$.

6.3.3 Les champs de tenseurs

Pour un champ de tenseurs, la procédure semble plus complexe. Cependant, un vecteur tangent à un champ de tenseurs (par exemple $\partial_u \Sigma(x)$) est un champ de vecteurs (au sens élément d'un espace vectoriel) associant à tout point x de $\mathbb{R}^d$ un vecteur de $T_{\Sigma(x)} Sym_n^+$. On peut alors étendre le cas vectoriel aux champs de tenseurs :

$$Reg(\Sigma) = \int_\Omega \|\nabla\Sigma(x)\|^2_{\Sigma(x)}\, dx = \sum_{i=1}^{d} \int_\Omega \|\partial_{x_i}\Sigma(x)\|^2_{\Sigma(x)}\, dx = \sum_{i=1}^{d} \int_\Omega \left\|\Sigma^{-\frac{1}{2}}(x)\, \partial_{x_i}\Sigma(x)\, \Sigma^{-\frac{1}{2}}(x)\right\|_2^2 dx \tag{6.4}$$

Le gradient s'exprime simplement :

$$\nabla Reg(\Sigma)(x) = -2\Delta\Sigma(x) = -2\sum_{i=1}^{d} \partial^2_{x_i}\Sigma(x)$$

Finalement, la descente de gradient pour ce critère est :

$$\Sigma_{t+1}(x) = \exp_{\Sigma_t(x)}\left(-\varepsilon\, \nabla Reg(\Sigma)(x)\right) = \exp_{\Sigma_t(x)}\left(2\,\varepsilon\, \Delta\Sigma(x)\right) \tag{6.5}$$

Pour l'implémentation numérique du laplacien, on remarquera que le développement de Taylor d'un champ de vecteur F en x donne : $\big(F(x+u)-F(x)\big)+\big(F(x-u)-F(x)\big)\big)/2\|u\|^2 = \partial^2_u F(x) + O(\|u\|^3)$. On approche alors la dérivée seconde d'un champ de tenseurs comme suit :

$$\partial^2_u\Sigma(x) \simeq \frac{\overrightarrow{\Sigma(x)\Sigma(x+u)} + \overrightarrow{\Sigma(x)\Sigma(x-u)}}{2\|u\|^2} \tag{6.6}$$

Dans cette dernière formule, tous les vecteurs appartiennent à $T_{\Sigma(x)}Sym^+_n$. La dérivée $\partial^2_u\Sigma(x)$ est donc définie sur $T_{\Sigma(x)}Sym^+_n$ et il n'y a pas de conflits entre différents plans tangents. Pour améliorer la robustesse du calcul du laplacien, on peut, comme pour le gradient, utiliser toutes les directions possibles du voisinage $\mathcal{V}$. En faisant l'hypothèse que le voisinage est symmétrique (i.e. u et $-u$ appartiennent à V), l'expression du laplacien devient :

$$\Delta\Sigma(x) = \frac{d}{Card(\mathcal{V})}\sum_{u\in\mathcal{V}} \partial^2_u\Sigma(x) \simeq \frac{d}{2\,Card(\mathcal{V})}\sum_{u\in\mathcal{V}} \frac{\overrightarrow{\Sigma(x)\Sigma(x+u)}}{\|u\|^2} \tag{6.7}$$

C'est de cette façon que nous avons implémenté le laplacien (algorithme 5).

6.4 Le filtrage anisotrope

En pratique, nous aimerions filtrer les zones homogènes et laisser intact les frontières entre ces zones. L'idée est de pénaliser le filtrage dans les zones où la norme du gradient est grande ([41, 25]). Pour cela, on utilise une fonction de poids $c(.)$ décroissante strictement entre $c(0) = 1$ et $c(+\infty) = 0$. Ce type de filtrage peut être réalisé directement avec notre implémentation du laplacien (eq. 6.7) en pondérant chacune des dérivées 2nde $\partial^2_u\Sigma(x)$ par $c(\|\partial_u\Sigma\|)$. Notre implémentation du laplacien par différences finies devient alors :

$$\begin{aligned}
\Delta_{aniso}\Sigma(x) &= \frac{d}{Card(\mathcal{V})}\sum_{u\in\mathcal{V}} c\left(\partial_u\Sigma(x)\right)\, \frac{\partial^2_u\Sigma(x)}{\|u\|^2} \\
&\simeq \frac{2\,d}{Card(\mathcal{V})}\sum_{u\in\mathcal{V}} c\left(\frac{\left\|\overrightarrow{\Sigma(x)\Sigma(x+u)}\right\|_{\Sigma(x)}}{\|u\|}\right)\, \frac{\overrightarrow{\Sigma(x)\Sigma(x+u)}}{\|u\|^2}
\end{aligned}$$

Algorithm 5 Filtrage isotrope d'un champ de tenseurs par EDP

```
procedure RiemanianLaplacian(Σ,x)

Require: taille des voxels : s_x, s_y, s_z.
Lap := 0;
{le laplacien est initialisé à 0}
for all k = −1 ... 1 do
    for all j = −1 ... 1 do
        for all i = −1 ... 1 do
            { Voisinage V(26)}
            u = [i, j, k];
            W_u = log_{Σ(x)}(Σ(x + u));
            norm2Ofu = (s_x.i)^2 + (s_y.j)^2 + (s_z.k)^2
            Lap := Lap + W_u/norm2Ofu;
        end for
    end for
end for
Lap := 3/13.Lap;
{ normalisation du laplacien : 2d/Card(V)=6/26=3/13}
return Lap ;

procedure IsotropicDiffusionOfTensors(Σ, int numIterations, float timeStep)

Σ_aux := Σ;
{Σ_aux est utilisé pour stocker les tenseurs après diffusion}
for all i = 1 ... numIterations do
    for all x do
        Lap := RiemanianLaplacian(Σ, x);
        Σ_aux(x) := exp_{Σ(x)}(timeStep.Lap);
    end for
    Σ := Σ_aux;
end for
return Σ ;
```

Les figures 6.3 et 6.4 présentent les résultats du filtrage anisotrope sur un champ de tenseurs synthétiques et un champ emprunté à l'IRM de diffusion. La fonction c utilisée est $c(x) = \exp(-x^2/\kappa^2)$, où κ est un paramètre contrôlant la quantité de régularisation appliquée au champ localement.
Sur la figure 6.3, nous avons généré un champ de tenseur avec une discontinuité puis nous avons rajouté un bruit gaussien comme vu au 4.8. Le filtrage anisotrope préserve parfaitement cette discontinuité tout en filtrant de part et d'autre. Les tenseurs retrouvés sont très proches des tenseurs initiaux : comme les deux régions sont parfaitement homogènes, après un nombre d'itérations suffisamment grand, chaque régions devient constante (gradient nul) et chaque tenseur est remplacé par la moyenne des 48 tenseurs bruités de part et d'autre de la discontinuité. Les tenseurs régularisés sont alors 7 fois plus précis que les tenseurs bruités. Sur la figure 6.4, nous présentons l'évolution d'une coupe de DTI, de la norme du gradient et de l'AF à différentes itérations du filtrage anisotrope. Il est intéressant de noter que l'AF est régularisée de manière anisotrope alors que nous n'agissons que sur le champ de tenseurs, ce qui prouve qu'à la fois les frontières entre zones isotropes et anisotropes et les changements de directions dans le champ de tenseurs sont préservés.
La figure 6.5 est une vue de près des ventricules pour voir avec plus de précision le résultat du filtrage isotrope et de différentes méthodes. Les frontières avec les ventricules sont très bien conservées avec le filtre anisotrope et à la fois les régions isotropes (ventricules) ou anisotropes (splenium et genu) sont régularisées. Notez aussi que les fibres en «U»à la frontière entre la substance grise et blanche sont conservées avec le filtre anisotrope, tandis qu'elles tendent à disparaitre avec un lissage gaussien.

FIG. 6.3 – **Gauche :** Champ de tenseurs synthétiques avec une discontinuité évidente. **Milieu :** un bruit gaussien a été rajouté sur les tenseurs. **Droite :** résultat de la régularisation avec préservation des discontinuités après 30 itérations ($\varepsilon = 0.01$).

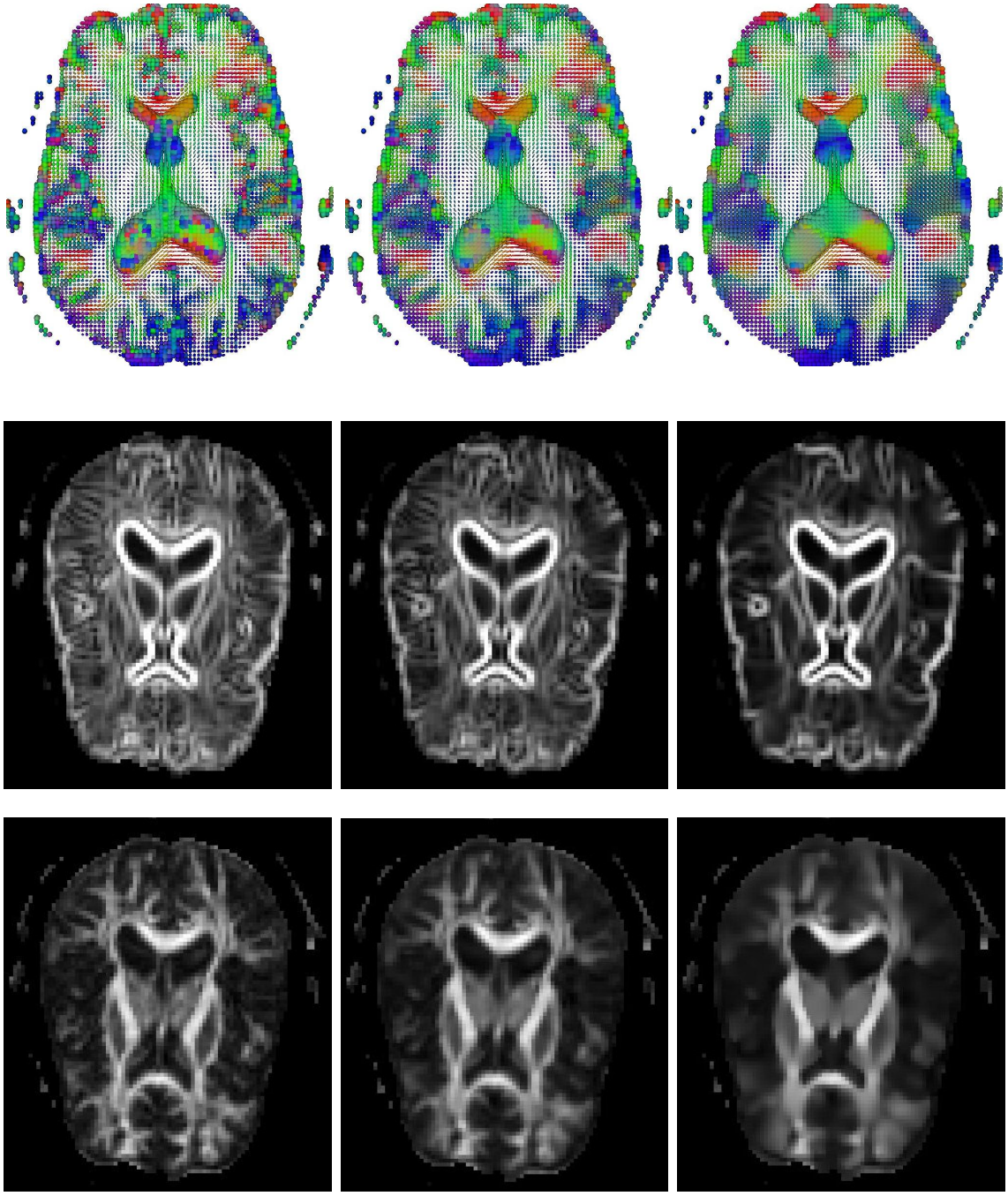

FIG. 6.4 – Filtrage anisotrope d'une coupe de DTI ($\varepsilon = 0.01$, $\kappa = 0.046$). De gauche à droite : champ initial, après 10 itérations, après 50 itérations. **Haut :** une vue 3D des tenseurs représentés par des ellipsoides. La couleur code la direction principale. Les résultats sont à comparer avec le filtrage gaussien isotrope de la figure 6.1. **Milieu :** norme du gradient riemannien. **Bas :** anisotropie fractionelle.

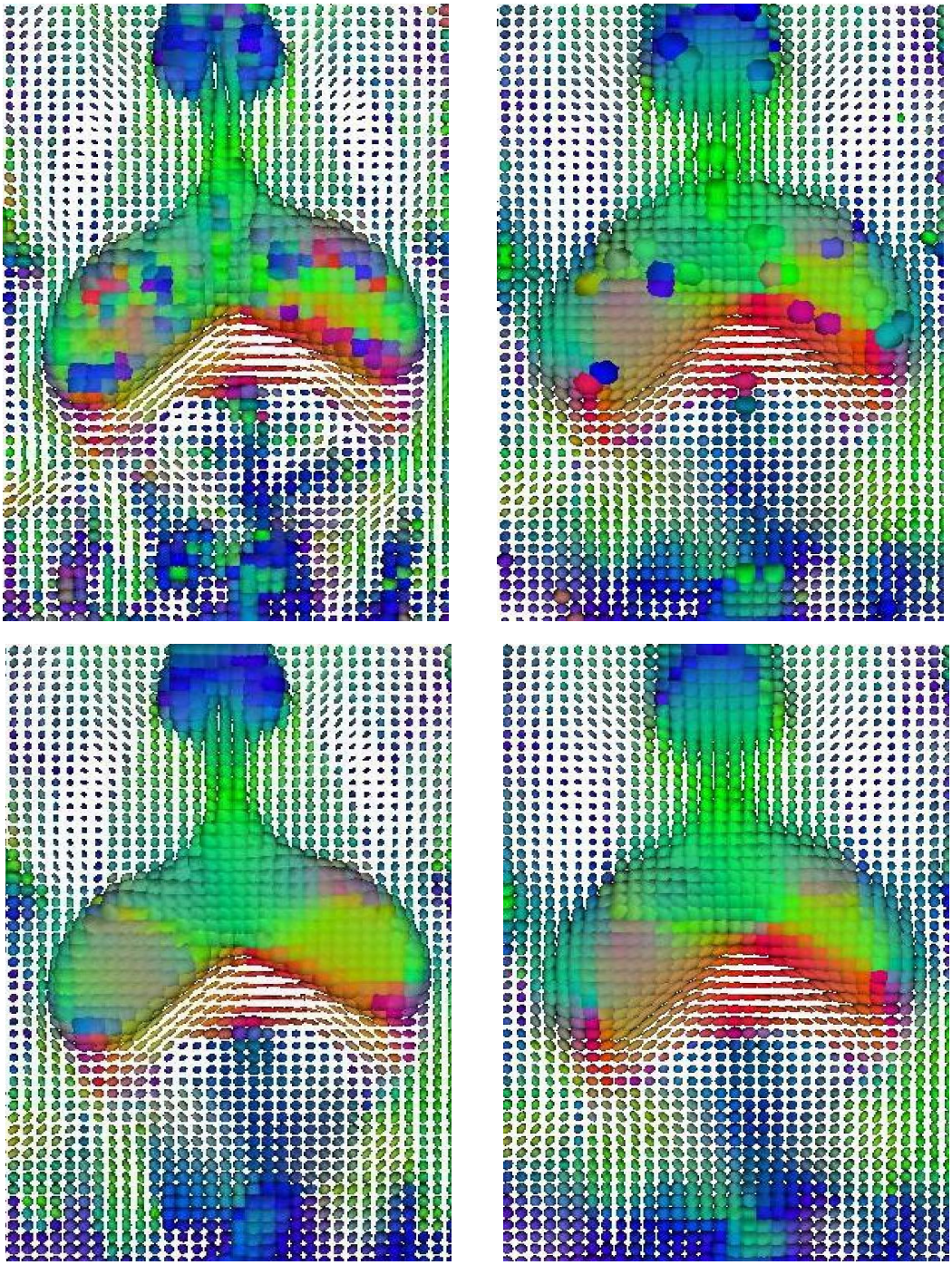

FIG. 6.5 – Gros plan sur les résultats des diférentes méthodes de filtrage aux alentours du splenium du corps caleux. Les couleurs codent le vecteur propre principal des tenserus (**rouge :** gauche-droite, **vert :** postérieur-antérieur, **bleu :** inférieur-supérieur). **En haut à gauche :** l'image originale. **En haut à droite :** filtrage gaussien sur les coefficients (fenêtre 5x5 , $\sigma = 2.0$). Cette méthode donne trop d'importance aux tenseurs avec de grandes valeurs propres, ce qui aboutit à des tenseurs aberrants dans les ventricules et dans le faisceau du splenium. **En bas à doite :** filtrage gaussien en utilisant la métrique riemannienne (fenêtre 5x5, $\sigma = 2.0$). Les tenseurs aberrants ont disparu mais les discontinuités ne sont pas préservées, par exemple à la frontière entre les ventricules et le faisceau cortico-spinal (milieu haut de l'image). **En bas à gauche :** filtrage anisotrope riemannien ($\varepsilon = 0.01$, 50 itérations). Les contours des ventricules sont très bien préservés et à la fois les régions isotropes (ventricules) et anisotropes (faisceau du splenium) sont régulariés. On remarque également que les fibres en «U»à la frontière entre les substances grise et blanche sont conservées avec un filtre anisotrope mais pas avec un lissage gaussien.

Algorithm 6 Filtrage anisotrope d'un champ de tenseurs par EDP

```
procedure AnisotropicDiffusionOfTensors(Σ, int numIterations, float timeStep, float κ)
Require: taille des voxels : s_x, s_y, s_z.

for all n = 1 ... numIterations do
    [G, norm2OfG] = RiemanianGradient(Σ);
    for all x do
        Lap := 0;
        {le laplacien est initialisé à 0}
        for all k = −1 ... 1 do
            for all j = −1 ... 1 do
                for all i = −1 ... 1 do
                    { Voisinage V(26)}
                    u := [i, j, k];
                    norm2Ofu = (s_x.i)^2 + (s_y.j)^2 + (s_z.k)^2
                    c_u := exp(−norm2OfG(x+u)/κ^2);
                    W_u = log_{Σ(x)}(Σ(x + u));
                    Lap := Lap + W_u * c_u/norm2Ofu;
                end for
            end for
        end for
        Lap := 3/13.Lap;
        { normalisation du laplacien : 2d/Card(V)=6/26=3/13}
        Σ_aux(x) := exp_{Σ(x)}(timeStep.Lap);
    end for
    Σ := Σ_aux;
end for
return Σ;
```

CHAPITRE 7

Régularisation et Restoration de Champs de Tenseurs

Le terme de régularisation vu au chapitre précédent induit une diffusion pure du champ de tenseurs. Or la diffusion est efficace pour réduire le bruit mais entraine également une perte d'information. De plus, le temps de diffusion est relié à la quantité de lissage dans l'image. Après un temps suffisamment long, le champ de tenseur devient homogène (le gradient est nul : c'est le minimum de notre critère) et la valeur des tenseurs est égale à la moyenne du champ. On comprendra qu'atteindre le minimum du seul critère de régularisation n'a que très peu d'intérêt.
Afin de ne pas trop s'éloigner des mesures $\Sigma_0(x)$, une approche plus fondée mathématiquement consiste à ajouter au terme de régularisation un terme d'attache aux données $Sim()$ et de minmiser leur somme :

$$C(\Sigma) = \frac{1}{2}\, Sim(\Sigma, \Sigma_0) + \frac{\lambda}{2}\, Reg(\Sigma)$$

Comme précédemment, l'équation dévolution du champ est :

$$\Sigma_{t+1}(x) = \exp_{\Sigma_t(x)}\left(-\varepsilon\ \left(\nabla Sim(\Sigma, \Sigma_0) + \lambda\, \nabla Reg(\Sigma)(x)\right)\right)$$

7.1 Le terme de régularisation

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, le terme de régularisation peut s'écrire simplement comme la norme du gradient du champ $Reg(F) = \int_\Omega \|\nabla F(x)\|^2\, dx$. Pour préserver les discontinuités on peut adapter le gradient de ce critère (le laplacien) pour rendre le comportement de la régularisation anisotrope (section 6.4). Cependant, la convergence n'est plus assurée dans notre cas puisque la régularisation anisotrope ne dérive plus d'un critère d'énergie bien posé. Certaines références peuvent être trouvés ici : [58, 45].
L'idée est de remplacer le terme de régularisation usuel $Reg(F) = \int_\Omega \|\nabla F(x)\|^2\, dx$ par une fonction croissante Φ de la norme du gradient : $Reg(F) = \int_\Omega \Phi(\|\nabla F(x)\|)\, dx$. Avec certaines propriétés sur la régularité de Φ, on trouve que le gradient de ce critère s'écrit ([2]) :

$$\begin{aligned}
\nabla Reg(F)(x) &= -2\,\mathrm{div}\left(\tfrac{\Phi'(\|\nabla F(x)\|)}{\|\nabla F(x)\|}\nabla F(x)\right) \\
&= \tfrac{-2}{\|\nabla F(x)\|}\left(\Phi'\left(\|\nabla F(x)\|\right)\ \Delta F(x) + \nabla\Phi'\left(\|\nabla F\|\right)(x)^T\ \nabla F(x)\right)
\end{aligned}$$

Ce nouveau schéma peut bien entendu être adapté à notre cadre riemannien. Cependant,

une implémentation efficace en terme algorithmique est plus délicate mais nos efforts sont dirigés dans cette direction à ce jour. Pour la suite, on choisit de garder le terme de régularisation isotrope basé sur la norme carrée du gradient.

7.2 Un terme d'attache aux données aux moindres carrés

En général, on considère que les mesures sont corrompues par un bruit gaussien uniforme (isotrope), centré et indépendant à chaque position. Un critère de similarité bien adapté serait un moindre carré : $Sim(F) = \int_\Omega \|F(x) - F_0(x)\|^2 \, dx$. Comme à la section précédente, on écrit le développement de Taylor de ce critère pour une faible variation de F :

$$Sim(F + \varepsilon\, H) = Sim(F) + 2\,\varepsilon \int_\Omega \langle H(x) \mid F(x) - F_0(x) \rangle \; dx + O(\varepsilon^2).$$

Cette fois on a directement l'expression de la dérivée directionelle $\partial_H Sim(F)$ avec un produit scalaire entre H et le gradient, si bien que nous trouvons :

$$\nabla Sim(F) = 2 \; (F(x) - F_0(x))$$

L'extension à notre variété est quasiment immédiate. La seule différence est que nous prenons en compte la métrique riemannienne :

$$Sim(\Sigma) = \int_\Omega dist^2 \left(\Sigma(x) \; , \; \Sigma_0(x)\right) \; dx = \int_\Omega \left\| \overrightarrow{\Sigma(x)\Sigma_0(x)} \right\|^2_{\Sigma(x)} \; dx$$

On peut montrer que le gradient de la distance carrée est : $\nabla_\Sigma dist^2(\Sigma \; , \; \Sigma_0) = -2\, \overrightarrow{\Sigma\Sigma_0}$. C'est un vecteur tangent à Σ, c'est-à-dire appartenant à $T_\Sigma Sym_n^+$. Au point x le critère s'écrit :

$$\nabla Sim(\Sigma)(x) = -2\, \overrightarrow{\Sigma(x)\Sigma_0(x)} \tag{7.1}$$

Ce qui est un résultat équivalent au cas vectoriel adpaté à notre variété. En rajoutant le terme de régularisation isotrope, le gradient du critère devient :

$$\begin{aligned} C(\Sigma) = & \quad \tfrac{1}{2}\, Sim(\Sigma) & + \frac{\lambda}{2}\, Reg(\Sigma) \\ \nabla C(\Sigma)(x) = & \; - \overrightarrow{\Sigma(x)\Sigma_0(x)} & - \lambda\, \Delta\Sigma(x) \end{aligned}$$

L'équation d'évolution est :

$$\Sigma_{t+1}(x) = \exp_{\Sigma_t(x)} \left(\varepsilon \left(\overrightarrow{\Sigma_t(x)\Sigma_0(x)} + \; \lambda\, \Delta\Sigma_t(x) \right) \right)$$

7.3 Un terme d'attache aux données pour un champ éparse de tenseurs

On suppose maintenant que les mesures sont connues sur une grille non dense, c'est-à-dire que nous avons N mesures Σ_i à N positions x_i irrégulières (cas des statistiques de forme que nous verrons au chapitre 9). En faisant l'hypothèse d'un bruit gaussien indépendant à chaque position, on a le critère d'attache suivant :

$$Sim(\Sigma) = \sum_{i=1}^{N} dist^2 \left(\Sigma(x_i) \; , \; \Sigma_i\right) = \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} dist^2 \left(\Sigma(x) \; , \; \Sigma_i\right) \; \delta(x - x_i) \, dx$$

Algorithm 7 Régularisation d'un champ dense de tenseurs

procedure REGULARIZATION(Σ, int numIterations, float timeStep, float λ)

$\Sigma_{init} = \Sigma$;
for all $i = 1 \ldots numIterations$ **do**
  for all x **do**
    $Lap := RiemanianLaplacian(\Sigma, x)$;
    $Attach := \log_{\Sigma(x)}(\Sigma_{init}(x))$;
    $\Sigma_{aux}(x) := \exp_{\Sigma(x)}(timeStep.(Attach\ +\ \lambda.Lap))$;
  end for
  $\Sigma = \Sigma_{aux}$;
end for
return Σ ;

Le champ $\Sigma(x)$ est attaché aux mesures aux positions x_i par le dirac $\delta(x-x_i)$. Le problème ici est que le critère n'est pas dérivable puisque nous avons une distribution de diracs. Pour régulariser le problème, on considère qu'un dirac est la limite quand σ tend vers 0 d'une gaussienne. En utilisant ceci, notre critère devient, lorsque σ tend vers 0 :

$$Sim_\sigma(\Sigma) = \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} dist^2\left(\Sigma(x)\ ,\ \Sigma_i\right)\ G_\sigma(x - x_i)\, dx \tag{7.2}$$

D'un point de vue pratique, nous devons utiliser une valeur de σ de l'ordre de la dimension de la grille pour qu'une mesure ait au moins une influence sur son voisinage direct.
Le critère est maintenant dérivable et son développement de Taylor pour une faible variation est :

$$Sim_\sigma(\Sigma + \varepsilon\Lambda) = Sim_\sigma(\Sigma) - 2\,\varepsilon \int_\Omega \left\langle \Lambda(x) \mid \sum_{i=1}^{N} G_\sigma(x - x_i)\, \overrightarrow{\Sigma(x)\Sigma_i} \right\rangle dx + O(\varepsilon^2),$$

D'où le gradient du critère :

$$\nabla Sim_\sigma(x) = -2 \sum_{i=1}^{N} G_\sigma(x - x_i)\, \overrightarrow{\Sigma(x)\Sigma_i} \tag{7.3}$$

7.4 Interpolation par diffusion

Une technique apparue récemment en imagerie couleur et que nous allons étendre au cas des tenseurs est le «inpainting»([19]) : cela consiste à interpoler par EDP une région d'une image à partir de données voisines. Les résultats en imagerie couleur sont exceptionnels.
En regroupant le terme d'attache aux données éparses (7.2) et le terme de régularisation isotrope (6.4), on recherche le champ de tenseurs qui minimise ses variations spatiales tout en restant proche des données connues aux positions x_i :

$$C(\Sigma) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} G_\sigma(x - x_i)\, dist^2\left(\Sigma(x_i)\ ,\ \Sigma_i\right) + \frac{\lambda}{2} \int_\Omega \|\nabla\Sigma(x)\|^2_{\Sigma(x)}\, dx$$

Le gradient de ce critère est :

$$\nabla C(\Sigma)(x) = -\sum_{i=1}^{N} G_\sigma(x - x_i)\, \overrightarrow{\Sigma(x)\Sigma_i} - \lambda\, \Delta\Sigma(x)$$

En utilisant le calcul par différences finies (eq. 6.7), la descente de gradient géodésique nous donne l'équation d'évolution suivante :

$$\Sigma_{t+1}(x) = \exp_{\Sigma_t(x)}\left(\varepsilon\left\{\sum_{i=1}^{N} G_\sigma(x-x_i)\,\overrightarrow{\Sigma(x)\Sigma_i} + \lambda' \sum_{u\in\mathcal{V}} \frac{\overrightarrow{\Sigma(x)\Sigma(x+u)}}{\|u\|^2}\right\}\right), \lambda' = \frac{\lambda.d}{2Card(\mathcal{V})} \tag{7.4}$$

Il faut maintenant trouver un point de départ, c'est-à-dire la valeur intiale du champ $\Sigma(x)$. Ceci peut être facilement fait par une interpolation par une fonction radiale, comme la gaussienne renormalisée détaillée à la section 5.4. La figure 7.1 montre les résultats de cet algorithme sur l'interpolation de 4 tenseurs à des positions quelconques sur une grille. On remarque que sans le terme d'attache aux données, le champ est bien transformé en un champ homogène égal à la moyenne des 4 tenseurs. Avec le terme d'attache, une faible valeur de λ suffit à régulariser le champ entre les mesures connues tout en convergeant vers un champ non homogène.

Algorithm 8 Algorithme d'interpolation par diffusion de tenseurs éparses

1: **procedure** INTERPOLATIONTHROUGHDIFFUSION(Σ, Σ_{knowm}, pos, int numIterations, float timeStep, float λ, float σ)

Require: Σ doit être initialisé par une interpolation gaussienne renormalisée (section 5.4). Σ_{knowm} est une liste de N tenseurs connus aux positions *pos*.

2:
3: **for all** $i = 1 \ldots numIterations$ **do**
4: **for all** x **do**
5: $Lap := RiemanianLaplacian(\Sigma, x)$;
6: $Attach := 0$;
7: **for all** $n = 1 \ldots N$ **do**
8: $W_n := \log_{\Sigma(x)}(\Sigma_{known}(n))$;
9: $dist2 := \|x - pos(n)\|^2$;
10: $\omega_n := 1/(\sqrt{2\pi}\,\sigma).\exp(-dist2/\sigma^2)$;
11: $Attach := Attach + \omega_n.W_n$;
12: **end for**
13: $\Sigma_{aux}(x) := \exp_{\Sigma(x)}(timeStep.(Attach + \lambda.Lap))$;
14: **end for**
15: $\Sigma := \Sigma_{aux}$;
16: **end for**
17: **return** Σ;

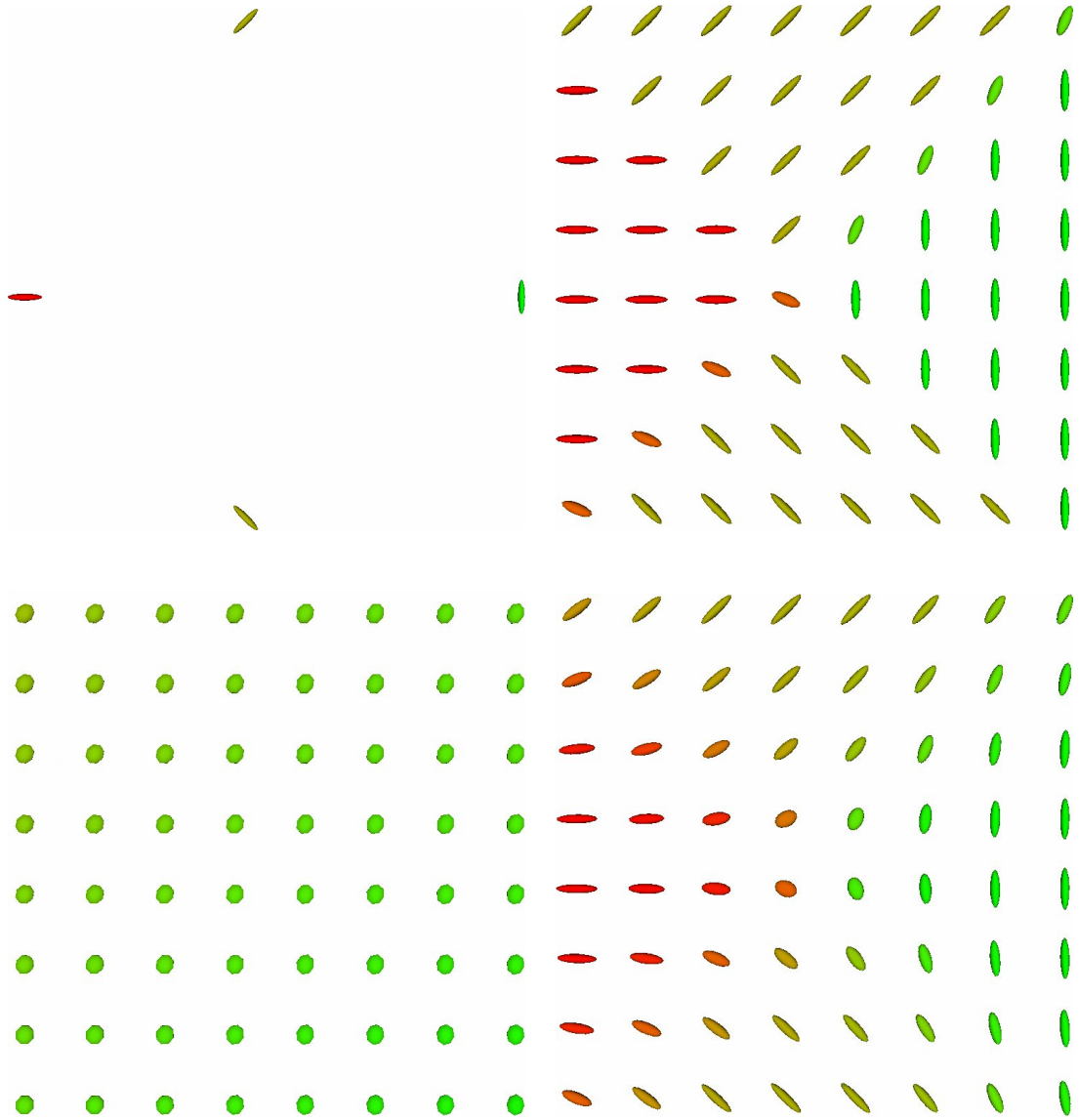

FIG. 7.1 – Interpolation et extrapolation d'un champ de tenseurs à partir de mesures éparses avec notre processus de diffusion. **En haut à gauche :** les 4 tenseurs initiaux. **En haut à droite :** initialisation du champ de tenseurs par interpolation par une gaussienne renormalisée. **En bas à gauche :** résultat de la diffusion sans le terme d'attache aux données (1000 itérations, $\varepsilon = 1$, $\lambda = +\infty$)). **En bas à droite :** résultat de la diffusion avec le terme d'attache aux données (1000 itérations, $\varepsilon = 1$, $\lambda = 0.01$, $\sigma = 1$ pixel de la grille de reconstruction). L'algorithme a en réalité convergé au bout de 100 itérations.

CHAPITRE 8

Estimation du Champ de Tenseurs en IRM de Diffusion

Nous avons vu au 2.2 qu'une séquence en IRM de diffusion était composée d'une série d'image B_i pondérée en diffusion par un gradient g_i et d'une image B_0 sans gradient de diffusion. Chaque image B_i est reliée à B_0 par l'équation de diffusion (modèle de Stejskal et Tanner eq. 2.3) :

$$B_i(x) = B_0(x)\ \exp\left(-b\, g_i^T\ D(x)\, g_i\right)$$

ou $D(x)$ est le tenseur de diffusion au point x. Nous explorons dans la suite deux méthodes d'estimation du champ de tenseurs : une méthode classique basée sur la linéarisation du modèle de diffusion largement utilisée jusqu'à maintenant et une méthode originale mettant en oeuvre la métrique riemannienne pour les tenseurs.

8.1 Estimation classique

Ce problème d'estimation n'est pas linéaire puisqu'il fait intervenir la fonction exponentielle. En prenant les logarithmes des deux membres de l'équation 2.3, on retombe sur un problème linéaire :

$$\begin{aligned} \log(B_i(x)) &= \ log(B_0(x)) - b\, g_i^T D(x) g_i \\ \frac{1}{b}\ \log\left(\frac{B_0(x)}{B_i(x)}\right) &= \qquad g_i^T D(x) g_i \end{aligned}$$

En remarquant que $g_i^T D(x) g_i = \left\langle g_i\, g_i^T | D(x) \right\rangle = Vec(g_i\, g_i^T)^T\ Vec(D(x))$ avec la fonction Vec du 4.4, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \frac{1}{b}\ \log\left(\frac{B_0(x)}{B_i(x)}\right) &= \ Vec(g_i\, g_i^T)^T\ Vec(D(x)) \\ &= \qquad G_i^T\ D^{Vec}(x) \end{aligned}$$

avec $G_i = Vec(g_i\, g_i^T)$ et $D^{Vec}(x) = Vec(D(x))$.
L'équation ainsi linéarisée, on peut procéder à une estimation aux moindres carrés du champ de tenseurs. C'est la méthode largement utilisée en IRM de diffusion. Or cela suppose un bruit gaussien uniforme sur le logarithme des acquisitions et non sur les acquisitions elles-mêmes. L'hypothèse de départ est fausse pour un moindre carré. De plus, rien ne nous assure que le tenseur D estimé à chaque position est défini positif : le bruit sur les

images, la chute de signal par endroits (limitation physique des scanners) peuvent causer l'apparition de 10% de tenseurs avec des valeurs propres négatives. D'où la nécessité de répéter les acquisitions pour améliorer le rapport signal sur bruit et surtout d'utiliser un grand nombre de gradients ([56]) pour sur-déterminer le système. Cependant, l'estimation aux moindres carrés donne des résultats satisfaisants et nous allons détailler la méthode.

Un critère d'estimation aux moindres carrés s'écrit :

$$C(D) = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{b} \log \left(\frac{B_0(x)}{B_i(x)} \right) \; - \; G_i^T \; D^{Vec}(x) \right)^2 \; dx$$

Le développement de Taylor pour une faible variation du champ de tenseurs de diffusion nous permet de déterminer le gradient :

$$\nabla C(D)(x) = -2b \sum_{i=1}^{N} \left(\log \left(\frac{B_0(x)}{B_i(x)} \right) - b \, G_i^T \; D^{Vec}(x) \right) \; G_i^T$$

On peut exprimer la solution de $\nabla C(D)(x) = 0$ de manière explicite :

$$\begin{aligned} \nabla C(D)(x) = & \quad 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} \left(\log \left(\frac{B_0(x)}{B_i(x)} \right) - b \, G_i^T \; D^{Vec}(x) \right) \; G_i^T = & \quad 0 \end{aligned}$$

L'équation sécrit matriciellement (on oublie le x pour ne pas surcharger les notations) :

$$\frac{1}{b} \left[\log \left(\frac{B_0}{B_1} \right) \ldots \log \left(\frac{B_0}{B_N} \right) \right] \begin{bmatrix} G_1^T \\ \vdots \\ G_N^T \end{bmatrix} = (D^{Vec})^T \; \begin{bmatrix} G_1 & \ldots & G_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1^T \\ \vdots \\ G_N^T \end{bmatrix}$$

Soit $\overline{\overline{G}}$ la matrice des gradients et $\overline{B}$ le vecteur des logarithmes des rapports des images. La dernière équation s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} \, \overline{B} \, \overline{\overline{G}}^T = & \quad (D^{Vec})^T \, \overline{\overline{G}} \, \overline{\overline{G}}^T \\ \Leftrightarrow \frac{1}{b} \, \overline{\overline{G}} \, \overline{B}^T = & \quad \overline{\overline{G}} \, \overline{\overline{G}}^T \; D^{Vec} \end{aligned}$$

Finalement :

$$D^{Vec} = \frac{1}{b} \; \left(\overline{\overline{G}} \, \overline{\overline{G}}^T \right)^{(-1)} \; \left(\overline{\overline{G}} \, \overline{B}^T \right) \tag{8.1}$$

On peut montrer que la matrice $\overline{\overline{G}} \, \overline{\overline{G}}^T$ de taille 6×6 est inversible. De plus, elle reste inchangée pour une série de gradients donnée et donc peut être calculée de manière efficace une fois pour tout le champ.
Cette estimation aux moindres carrés n'est pas satisfaisante puisque le bruit supposé gaussien est minimisé sur le log des images et non sur les images elles-mêmes. D'autres types d'estimation ont été étudiées, notamment avec les M-estimateurs ([43, 34]) mais n'assutant pas plus la contrainte de positivité. [54, 55] a proposé une méthode variationnelle pour l'estimation des tenseurs, assurant l'obtention de valeurs propres positives.

Dans ce qui suit, nous proposons une méthode d'estimation basée sur la métrique riemannienne pour les tenseurs assurant leur positivité et la réduction du bruit sur les images originales.

8.2 Estimation riemannienne

Un critère correct d'estimation du champ de tenseurs devrait être :

$$C(D) = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \left(B_i(x) - B_0(x)\ \exp\left(-b\, g_i^T\ D(x)\ g_i\right)\right)^2 dx \tag{8.2}$$

Encore une fois le développement de Taylor nous donne le gradient de ce critère :

$$\nabla C(D)(x) = 2b \sum_{i=1}^{N} \left(B_i(x) - B_0(x) \exp(-b\, g_i^T\ D(x)\ g_i)\right)\ B_0(x) \exp(-b\, g_i^T\ D(x)\ g_i)\ g_i\ g_i^T$$

On pose $B_{g_i}(x) = B_0(x) \exp(-b\, g_i^T\ D(x)\ g_i)$ (B_i est l'image acquise tandis que B_{g_i} est l'image reconstituée avec l'estimation courante du champ D) :

$$\nabla C(D)(x) = 2b \sum_{i=1}^{N} \left(B_i(x) - B_{g_i}(x)\right)\ B_{g_i}(x)\ g_i g_i^T$$

Et ensuite il ne reste qu'à appliquer la descente de gradient géodésique en prenant la matrice symétrique $g_i g_i^T$ comme vecteur tangent à l'estimation courante D_t. L'équation d'évolution de l'estimation est :

$$D_{t+1}(x) = \exp_{D_t(x)}\left(-\varepsilon\, \nabla C(D)(x)\right) = \exp_{D_t(x)}\left(-2b\varepsilon\ \sum_{i=1}^{N} \left(B_i(x) - B_{g_i}(x)\right)\ B_{g_i}(x)\ g_i g_i^T\right)$$

La carte exponentielle nous assure la positivité du tenseur et l'estimation au moindres carrés est bien effectuée sur les images et non sur leur logarithme.
Cependant, plusieurs problèmes sont sous-jacents à cette descente de gradient. Premièrement, le gradient est numériquement instable : il est composé d'une différence de termes tendants à être égaux multipliés par la valeur de b (généralement égale à 1000 s/mm^2) et par le niveau de gris de l'image reconstituée. Cela peut conduire à une matrice à valeurs propres élevées dont l'exponentielle est numériquement instable (une valeur propre supérieure à 20 provoque un dépassement de la limite numériquement lorque l'on prend l'exponentielle). Le pas de temps ε peut être réglé de manière à rendre cette matrice acceptable numériquement, mais alors le nombre d'itérations avant convergence risque d'être important. Nous avons décider d'opter pour une renormalisation du gradient par la Hessienne du critère, menant à une descente de gradient du 2ème ordre : $D_{t+1} = -H(C(D))^{(-1)}\, \nabla C(D)$

Deuxième problème : les images sont reconstituées avec la même image $B_0(x)$ qui elle même est corrompue par le bruit. Une approche encore plus robuste consisterait à estimer aux moindres carrés l'image B_0 et de procéder à une optimisation alternée entre estimation du champ de tenseurs et estimation de B_0.

Pour renforcer la robustesse de l'estimation, on peut procéder à une régularisation du champ de tenseurs par diffusion (section 7) en même temps que l'estimation. Cela est en particulier très utile lorsque le nombre d'acquisitions est égal à 6 : il y a autant d'équations que d'inconnues et des mesures aberrantes peuvent conduire à des tenseurs aberrants. Nous travaillons actuellement sur ce type d'estimation.

Il nous reste maintenant à déterminer la hessienne du critère 8.2 ainsi que son gradient

et sa hessienne suivant B_0. Pour cela, il suffit de différencier le gradient en calculant sont développement de Taylor pour une faible variation du champ de tenseurs.
La hessienne du critère 8.2 est :

$$H(C(D))(x) = 2b^2 \sum_{i=1}^{N} S_{g_i}(x)\ (2S_{g_i}(x) - S_i(x))\ (g_i\, g_i^T)^2$$

La descente de gradient du deuxième ordre est alors :

$$d_s = -H\,(C(D))^{(-1)}\ \nabla C(D) \Rightarrow d_s = \frac{1}{b}\ \frac{\sum_{i=1}^{N} S_{g_i}(x)\,(S_i(x) - S_{g_i}(x))\ g_i\, g_i^T}{\sum_{i=1}^{N} S_{g_i}(x)\ (2S_{g_i}(x) - S_i(x))\ (g_i\, g_i^T)^2}$$

d'où l'équation d'évolution suivante :

$$D_{t+1} = \exp_{D_t}(d_s) = \exp_{D_t}\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} S_{g_i}(x)\,(S_i(x) - S_{g_i}(x))\ g_i\, g_i^T}{b\ \sum_{i=1}^{N} S_{g_i}(x)\ (2S_{g_i}(x) - S_i(x))\ (g_i\, g_i^T)^2}\right)$$

On initialise généralement le champ au résultat de l'estimation classique vue au 8.1. La convergence est rapide (la hessienne normalise notre descente de gradient) et une vingtaine d'itérations est nécessaire.

Si on dérive le critère 8.2 suivant B_0, on obtient :

$$\nabla C(B_0)(x) = 2\sum_{i=1}^{N} (S_{g_i}(x) - S_i(x)) \exp\left(-b\, g_i^T\ D\, g_i\right)$$

Sa hessienne est :

$$H(C(B_0))(x) = 2\sum_{i=1}^{N} \exp\left(-b\, g_i^T\ D\, g_i\right)^2$$

Finalemant, l'équation d'évolution suivant B_0 est :

$$B_{O\,t+1} = B_{0\,t} - \left(\sum_{i=1}^{N} \exp\left(-b\, g_i^T\ D\, g_i\right)^2\right)^{(-1)} \sum_{i=1}^{N} (S_{g_i}(x) - S_i(x)) \exp\left(-b\, g_i^T\ D\, g_i\right)$$

B_0 est initialisé à l'image de diffusion sans gradient.

Les figures 8.1 comparent l'image B_1 intiale, l'image B_1 reconstituée après une estimation du champ de tenseurs aux moindres carrés (eq. 8.1) puis l'image B_1 après l'estimation riemannienne. Le jeu de données comprend 25 directions. L'image B_1 a été retenue car l'image B_0 ne présentait pas de différence visible.
D'autres tests sont en cours pour quantifier l'amélioration possible du champ de tenseurs, du tracking de fibres et de l'anisotropie fractionnelle.

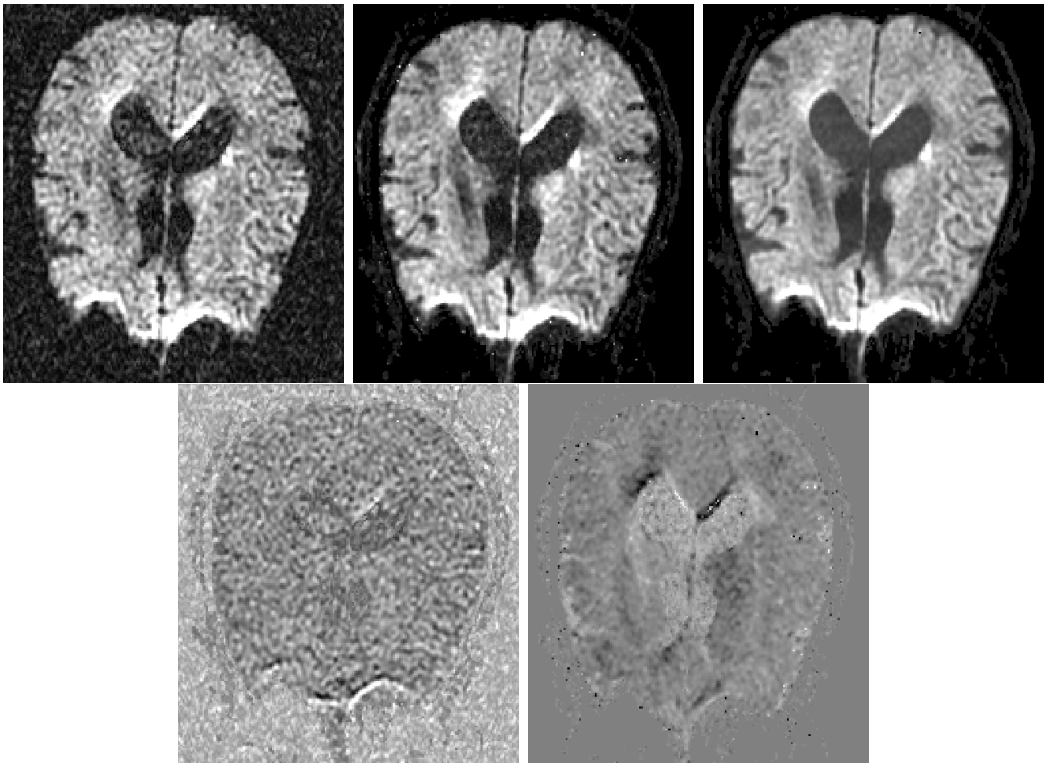

FIG. 8.1 – Comparison des différentes méthodes d'estimation sur l'image B_1 reconstruite (25 directions). **Haut :** de gauche à droite : image B_1 intiale, après estimation aux moindres carrés, après estimation riemannienne. L'estimation classique cause l'apparition de points aberrants (points blancs dans l'image) dus aux erreurs sur les images de diffusion : ce sont les voxels où le logarithme des rapports des images (8.1) devient instable et le tenseur résultant est aberrant, voir négatif. L'estimation riemannienne corrige ce problème et quasiment aucune mesure aberrante n'apparait. **Bas :** de gauche à droite : image des différences entre l'image B_1 intiale et après estimation riemannienne, puis image des différences entre estimation classique et riemannienne. Les différences sont grandes en valeur absolue (de l'ordre de 20). L'estimation riemannienne a éliminé une grande partie du bruit sur l'image initiale. Les différences entre l'estimation aux moindres carrés classique et riemannienne apparaissent aux zones de fort gradient (frontière avec les ventricules par exemple), là où la courbure de l'espace des tenseurs a le plus d'importance (même constatation que pour le gradient d'un champ de tenseurs section 6.2).

CHAPITRE 9

Application à la Statistique de Forme : Modélisation de la variabilité Anatomique du Cerveau

Les progrès réalisés ces dernières années en IRM permettent d'acquérir des images anatomiques de plus en plus précises, mais aussi des images métaboliques et fonctionnelles. On peut ainsi relier structure et fonction très précisément pour un sujet donné. Toute fois, que ce soit pour la localisation d'activités fonctionnelles (IRM fonctionnelle ou IRMf), métaboliques (tumeurs) ou d'évolutions anatomiques (maladies neuro-dégénératives), les études ne prennent de sens qu'au niveau des populations. Ceci implique donc de savoir comparer les images de cerveaux différents le plus précisément possible pour pouvoir mettre en avant des mesures locales statistiquement. L'objectif de cette étude est de modéliser statistiquement la variabilité anatomique du cortex et des structures cérébrales sous-jacentes telle que l'on peut les observer dans les images cérébrales 3D.
Le second objectif de cette étude est de fournir une carte de la variabilité du cerveau afin de contraindre un algorithme de recalage non rigide. Le recalage est un problème très délicat en imagerie médicale. C'est l'opération qui consiste à mettre deux images volumiques en correspondance de manière automatique. Deux grandes classes de transformations existent : le recalage rigide (rotation + translation) et le recalage non-rigide (déformations fluide ou élastique par exemple). Si nous pouvons prédire de quelle manière varie chaque position du cerveau, nous pourrions contraindre un algorithme de recalage non-rigide dans les endroits où il manque de l'information, ou même accélérer le recalage en favorisant les déformations dans les bonnes directions.
Une telle modélisation impose d'avoir un grand nombre d'images à disposition pour que le modèle ait une réelle valeur statistique. Ainsi, nous décrirons dans une première partie la base de données mise à notre disposition par l'équipe du LONI (Los Angeles), puis nous présenterons ensuite la stratégie adoptée pour fournir la carte de la variabilité anatomique du cerveau.

9.1 Données

Nous disposons d'une base de données constituée de plus de 500 IRM T1 (anatomique) de cerveaux recalés (recalage affine) sur l'atlas ICBM305 (moyennage de 305 IRM T1) (figure 9.1), pour lesquelles 36 paires de sillons corticaux ont été segmentées et labellisées manuellement par des experts suivant un protocole rigoureux (consultable à ladresse http://www.loni.ucla.edu/ khayashi/Public/medial_surface/).

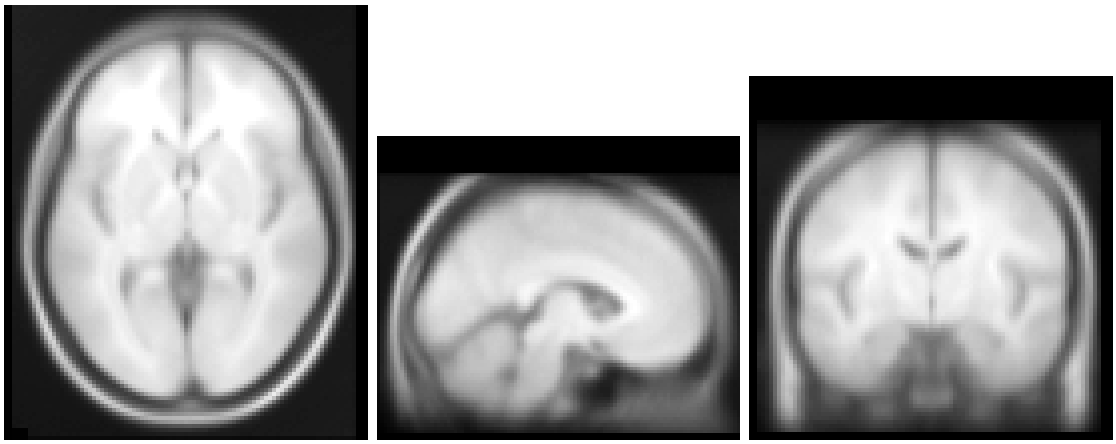

FIG. 9.1 – De gauche à droite : coupe axiale, sagittale et coronale de l'atlas ICBM 305. Cet atlas est le résultat du moyennage de 305 IRM T1. Les atlas sont très utilisés comme image cible lors du recalage. Résolution : $91 \times 109 \times 91$, taille d'un voxel : $2mm \times 2mm \times 2mm$.

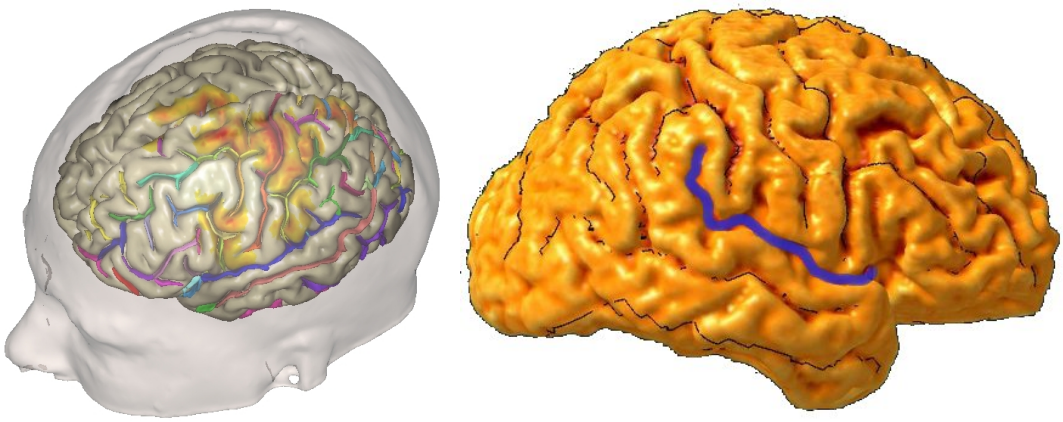

FIG. 9.2 – **Gauche :** rendu surfacique de la peau et du cortex. Les surfaces de couleur dans les replis du cortex sont les sillons. **Droite :** les lignes sulcales correspondent aux lignes de fond des sillons. La scissure de Sylvius est délimitée en bleu.

Les sillons sont les zones anatomiques correspondant aux «vallées»de la surface corticale du cerveau (figure 9.2). Nombre de ces sillons sont connus par les neuro-anatomistes et leur fonction ainsi que la façon dont ils varient d'un individu à l'autre a toujours intéressé le monde de la médecine ([51, 26, 52, 60, 36]). Il est intéressant de noter que certaines paires de sillons sont communes à tous les individus tandis que certaines n'apparaissent que chez quelques uns. Il est donc naturel pour nous de ne s'intéresser qu'aux sillons communs. Dans la problématique du recalage, il serait intéressant de pouvoir faire correspondre les sillons entre eux pour augmenter la précision des tests statistiques. Ce sont autant de raisons qui expliquent le choix de la segmentation des lignes sulcales (figure 9.2). De plus, elles sont représentables par une ligne (comme une ligne de crête) et donc plus facilement étiquetables (le suivi des lignes sulcales restent néanmoins une opération délicate) et manipulables.

Nous avons remplacé chaque ligne sulcale par une BSpline approximante. Il y a deux raisons à cela : premièrement, le suivi des sillons par un expert n'est jamais parfait du

fait de l'imperfection des images (volume partiel, bruit) et, deuxièmement, il est difficile de suivre manuellement une ligne dans un volume 3D. Ainsi, chaque point sélectionné par l'expert devient un point de contrôle pour une BSpline approximante.
A chaque sillon correspond plusieurs centaines d'instances (centaines d'images) et par conséquent plusieurs centaines de BSplines approximantes. On peut voir une instance comme la réalisation d'un processus de courbe aléatoire. Il convient alors de parler de sillon moyen. Par la suite nous parlerons de matrice de covariance d'un point d'un sillon. En effet, un même point de plusieurs sillons est lui-même un processus aléatoire dont on peut calculer la matrice de covariance. C'est finalement ce qui nous intéresse : nous voulons accéder à la variabilité de chaque point de l'espace par le biais de sa matrice de covariance et les sillons seront les zones du cerveau où l'on pourra extraire cette information localement.

La section suivante décrit la stratégie que nous avons établi, du traitement des images de la base de données du LONI jusqu'à la construction de la carte de la variabilité.

9.2 Stratégie

La problématique est la suivante : nous disposons d'informations locales sur la variabilité du cerveau (le long des sillons) et nous aimerions accéder à une information globale, c'est-à-dire connaitre la variabilité de tout le cerveau. La stratégie que nous avons déployé consiste à interpoler par diffusion (section 7.4) à tout le volume cette information connue localement.
Nous disposons de plusieurs centaines de courbes par sillon, chaque courbe étant paramétrée par son abscisse curviligne (BSplines). Pour savoir qu'elle est la variabilité des points d'un sillon, il faut tout d'abord une étape de mise en correspondance des points de chaque courbe avec les autres. Ensuite, on pourra calculer une ligne moyenne et en déduire la covariance de chacun des points constituant le sillon. Ce sera l'information sur la varibilité locale. Cependant, comme chaque courbe est une BSpline, on peut calculer autant de points appartenant à la courbe que l'on veut et par conséquent autant de matrices de covariance. Il conviendra alors d'extraire un modèle de la covariance le long des sillons, par exemple en ne retenant que les matrices qui apportent de l'information significative sur la variabilité du sillon. Dernière étape : il s'agira d'interpoler ces matrices de covariance à tout le volume par un processus de diffusion de données éparses comme vu au 7.4. On obtiendra ainsi la variabilité des points sur une grille régulière à partir de la variabilité de certains points connus.

En résumé, notre stratégie comprend 4 étapes :

1. Mise en correspondance des sillons entre eux ;
2. Calcul d'un sillon moyen puis extraction des matrices de covariance le long des sillons ;
3. Selection d'un sous-ensemble de ces matrices pour réduire le flot d'information ;
4. Diffusion de ces matrices dans tout le volume ;

La dernière étape est largement critiquable : en quelle mesure est-ce correct d'interpoler une mesure connue sur la surface du cerveau au volume entier ? Cette interpolation prend son sens dans un voisinage des sillons, mais peut paraitre absurde à l'intérieur du cerveau ou d'autres structures influent sur la variabilité des points. Dans un premier temps nous nous contenterons de ce type d'interpolation, mais il conviendrait de l'améliorer en la

limitant au cortex grace à un masque 3D puis de la combiner avec des statistiques sur les structures sous-jacentes comme les ventricules ou même les principaux faisceaux de fibres.

9.3 Mise en correspondance

Les sillons restent des courbes dont la forme générale est proche et le critère d'appariement de deux points de deux sillons est la minimisation de la variabilité tangentielle (dans la direction de la tangente à la courbe). Soient deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ paramétrées par leur abscisse curviligne. A une abscisse curviligne s de $\mathcal{C}_1$ correspond un point x_1 et on cherche, dans un voisinage de cette abscisse curviligne s, le point x_2 de $\mathcal{C}_2$ pour lequel le biais tangentiel est minimal. Le calcul des correspondances est effectué par programmation dynamique et ne sera pas détaillé dans ce rapport. Je renvoie le lecteur aux travaux de V. Arsigny pour plus d'informations sur la mise en correspondance de courbes par programmation dynamique ([1]).

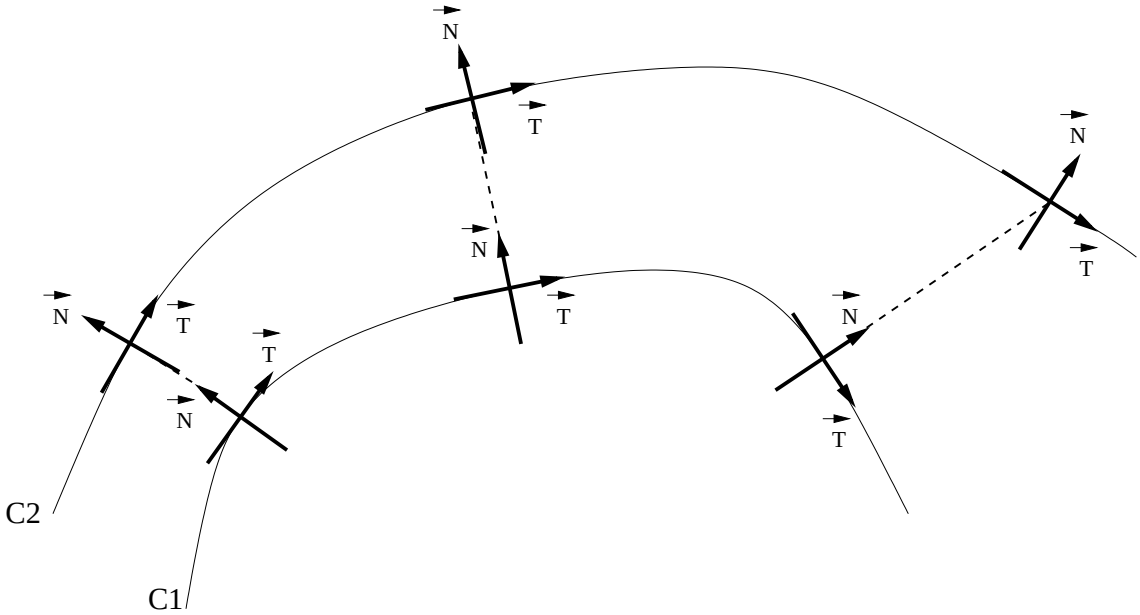

FIG. 9.3 – Mise en correspondance des points de deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. 3 points de $\mathcal{C}_1$ sont mis en correspondance avec 3 points de $\mathcal{C}_2$. La mise en correspondance de $\mathcal{C}_1$ à $\mathcal{C}_2$ n'est pas équivalente à celle de $\mathcal{C}_2$ à $\mathcal{C}_1$. Dans l'algorithme utilisé, on ne calcule que les correspondances du sillon moyen à toutes les instances.

9.4 Calcul d'un sillon moyen et des matrices de covariance

Le sillon moyen au sens de Karcher ou Fréchet est la courbe minimisant la somme des distances carrées à toutes les instances :

$$\overline{\mathcal{C}} = \arg\min_{\mathcal{C}} \sum_{i=1}^{N} dist^2\left(\mathcal{C}, \mathcal{C}_i\right) \tag{9.1}$$

Reste le choix de la fonction distance entre les courbes. Les sillons ont des formes très tortueuses et dans ce cas il est préférable de prendre la distance la plus simple qui soit,

c'est-à-dire la norme L_2 induite par le produit scalaire des fonctions de carré intégrable :

$$dist^2(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = \int_0^1 (\mathcal{C}_1(s) - \mathcal{C}_2(s))^2 ds, \qquad \forall\, (\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$$

Comme chaque instance est représentée par une BSpline, le calcul de moyenne se fait en opérant sur les points de contrôle. En pratique, nous procédons à une optimisation alternée entre mise en correspondance de la moyenne à toutes les instances et calcul de la moyenne avec ces nouvelles correspondances. En effet, après chaque calcul de moyenne, la position du sillon moyen a changé et il est nécessaire de faire une nouvelle mise en correspondance des points de la nouvelle moyenne avec les instances, puis de recalculer une moyenne,etc. On initialise la moyenne à une des réalisations du sillon puis on alterne entre mise en correspondance et optimisation des points de contrôle pour minimiser le critère 9.1 (figures 9.4 et 9.4).

Une fois le sillon moyen et les correspondances à toutes les instances calculés, on peut extraire les matrices de covariance de chacun des points constituants le sillon.
Soit cor_i la fonction qui à une abscisse curviligne relative au sillon moyen donne l'abscisse curviligne correspondante de l'instance i. La matrice de covariance (ou tenseur de covariance) s'écrit :

$$cov(s) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} \left[\mathcal{C}_i(cor_i(s)) - \overline{\mathcal{C}}(s)\right] \left[\mathcal{C}_i(cor_i(s)) - \overline{\mathcal{C}}(s)\right]^T}$$

Un exemple de matrices de covariance affichées le long d'un sillon moyen est présenté figure 9.6. Les tenseurs ne sont pas tous orthogonaux à la tangente à la courbe du fait des approximations lors de la mise en correspondance. De plus, les premiers et derniers tenseurs semblent beaucoup plus gros que les autres du fait de l'initialisation de la mise en correspondance et de son arrêt : on considère que les premiers points de chacune des instances correspondent ainsi que les derniers. Cela résulte en une grande variabilité aux extrémités des sillons. Par ailleurs, l'information est dense : on peut estimer autant de tenseurs de covariance que lon souhaite. Il y a grand intérêt à procéder à une régularisation des tenseurs le long des sillons ainsi qu'à extraire un modèle de la variabilité pour réduire le flot d'information. Le modèle proposé par la suite permet de ne conserver que quelques tenseurs tout en régularisant les tenseurs le long des sillons.

9.5 Vers un modèle de variabilité locale

En se basant sur l'interpolation riemannienne vue au 5.1, on est en mesure, en ne gardant que quelques tenseurs à des endroits stratégiques et en interpolant entre, de reconstituer les tenseurs de covariance le long du sillon entier. Cela aura pour effet de régulariser les tenseurs tout en n'en gardant qu'un sous-ensemble caractéristique. Ainsi notre modèle sera composé dune courbe moyenne et de points de cette courbe dont on connait le tenseur de covariance. Grâce à la métrique riemannienne, on est en mesure de calculer la distance entre les tenseurs de covariance le long d'un sillon et les tenseurs reconstitués à partir de notre modèle. Si on se fixe un nombre de tenseurs pour le modèle, on peut optimiser leur choix en minimisant la distance entre les tenseurs interpolés et les données. Ainsi, on peut déterminer quels sont ceux qui sont les plus caractéristiques d'un sillon, i.e. dont l'interpolation le long du sillon est la plus proche des données brutes. De manière plus générale,

FIG. 9.4 – 36 paires de sillons de 98 cerveaux affichés (bleu et vert) avec les lignes moyennes (rouge). Les instances sont affichées en deux couleurs pour plus de visibilité. **Haut :** vue de haut. **Bas :** vue de côté.

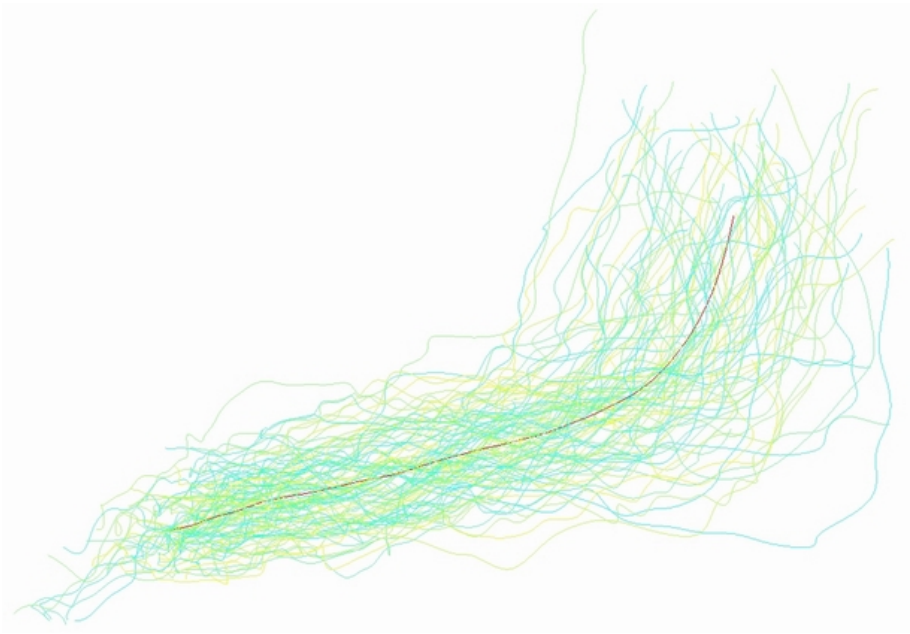

FIG. 9.5 – Scissure de Sylvius moyenne (rouge) et 98 instances (vert et bleu). Les instances ont deux couleurs afin de faciliter la visualisation. On remarque une variabilité non stationnaire du sillon, i.e. la variabilité dépend de la position spatiale.

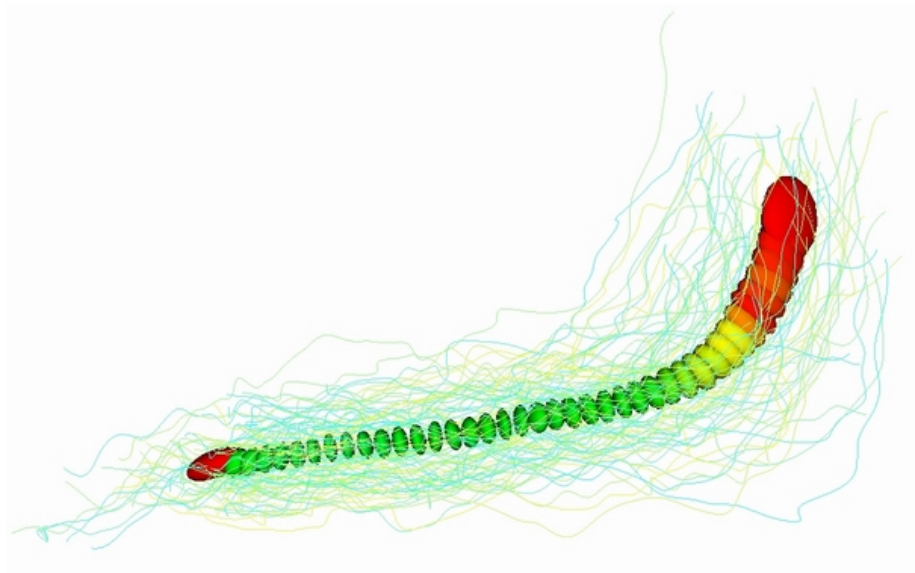

FIG. 9.6 – Matrices de covariance affichés le long de la scissure de Sylvius. Les tenseurs sont affichés à $1\,\sigma$ pour faciliter la visualisation (99% des instances sont comprises dans $3\,\sigma$). Bien que les ellipsoides ont une évolution continue le long du sillon moyen, une étape de régularisation est nécessaire pour éliminer les gros tenseurs dus à l'initialisation de l'algorithme de mise en correspondance (tenseurs aux extrémités). La couleur code la trace du tenseur, i.e. la variabilité spatiale moyenne du point.

en fixant une distance maximum entre les données et le modèle interpolé, on va rechercher combien de tenseurs sont nécessaires et quels sont ceux qui sont le plus représentatifs d'un sillon (figures 9.7 et 9.5). L'algorithme 9.5 décrit le processus de sélection des tenseurs pour le modèle.

Algorithm 9 Algorithme de selection d'un sous-ensemble de matrices de covariance

```
procedure MODELING (Σ, Pos, int gap, float maxDist)
Require: Σ est une liste de tenseurs de covariance connus aux positions Pos le long d'un
    sillon moyen. gap est le nombre de tenseurs à ne pas prendre en compte au début et à
    la fin de la liste (dus aux erreurs de mise en correspondance).

firstIndex := gap ;
lastIndex := N-gap+1 ;
numberOfTensorsToKeep := 4 ;
d := ∞ ;
while d > maxDist do
  Index := LinearlySpacedValuesBetween(firstIndex, lastIndex, numberOfTensorsToKeep) ;
  oldIndex := Vector of N values at FirstIndex ;
  while oldIndex ≠ Index do
    oldIndex := Index ;
    for all i=2 ... numberOfTensorsToKeep-1 do
      for all k=Index(i-1)+1 ... Index(i+1)-1 do
        Σ_1 := Σ(Index(i − 1));
        Σ_2 := Σ(Index(i + 1));
        Σ_k := Σ(k);
        {interpolation entre Σ_1 et Σ_k puis Σ_k et Σ_2.}
        Σ_1k = LinearInterpolation(Σ_1, Σ_k);
        Σ_k2 = LinearInterpolation(Σ_k, Σ_2);
        Σ_12 = concatenation(Σ_1k, Σ_k2);
        newd := dist(Σ_12, Σ(Index(i − 1) ... Index(i + 1)));
        if newd < d then
          d := newd;
          Index(i) := k;
        end if
      end for
    end for
  end while
end while
return (Index, numberOfTensorsToKeep) ;
```

9.6 Diffusion des données à tout le volume

Notre modèle de la variabilité locale est constitué d'un certain nombres de tenseurs de covariance Σ_i connus à des positions x_i. La prochaine étape consiste à diffuser les tenseurs par l'équation d'évolution 7.4. On choisit un σ de l'ordre de la dimension de la grille pour que chaque tenseur connu ait une influence au moins sur ses voisins directs. L'initialisation est réalisée par une gaussienne normalisée comme au 5.4 avec une variance de l'ordre de 5

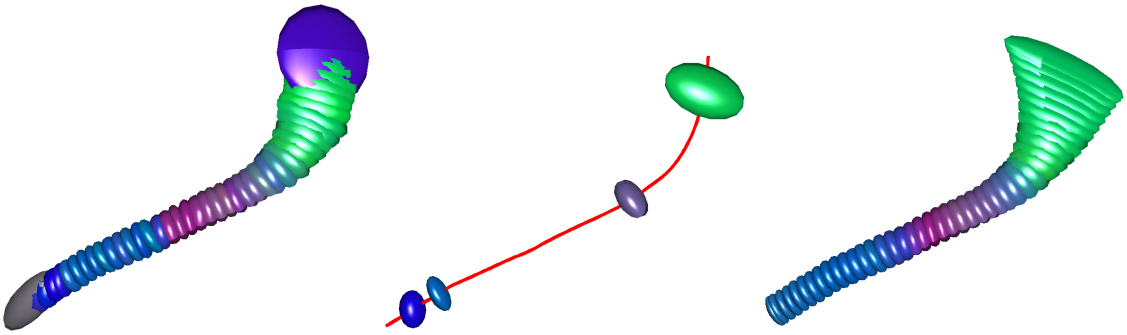

FIG. 9.7 – Séléction d'un sous-ensemble de tenseurs puis reconstitution par interpolation des matrices de covariance le long de la scissure de Sylvius. **Gauche :** matrices de covariance initiales (100). **Milieu :** sous-ensemble de tenseurs sélectionnés pour la modélisation. **Droite :** interpolation des 4 tenseurs sélectionnés pour retrouver le même nombre de tenseurs qu'intialement. La couleur code la direction principale du tenseur. Taux de compression : 100/4=25.

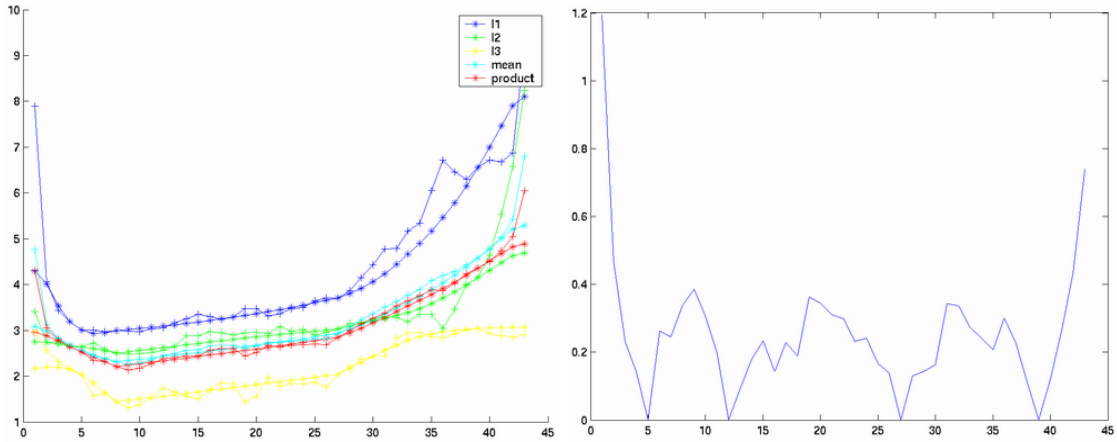

FIG. 9.8 – **Gauche :** Evolution des valeurs propres le long de la scissure de sylvius. + : matrices initiales. $\star$: matrices après modélisation et interpolation. En jaune, vert et bleu : évolution des 3 valeurs propres. En cyan : évolution de la trace. En rouge : évolution de la racine cubique du produit (volume des ellipsoides). Les valeurs propres sont régularisées avec les tenseurs sans s'éloigner des données initiales. **Droite :** graphe des distances entre le modèle interpolé et les données initiales. Les 4 valeurs nulles correspondent aux 4 tenseurs sélectionnés pour le modèle.

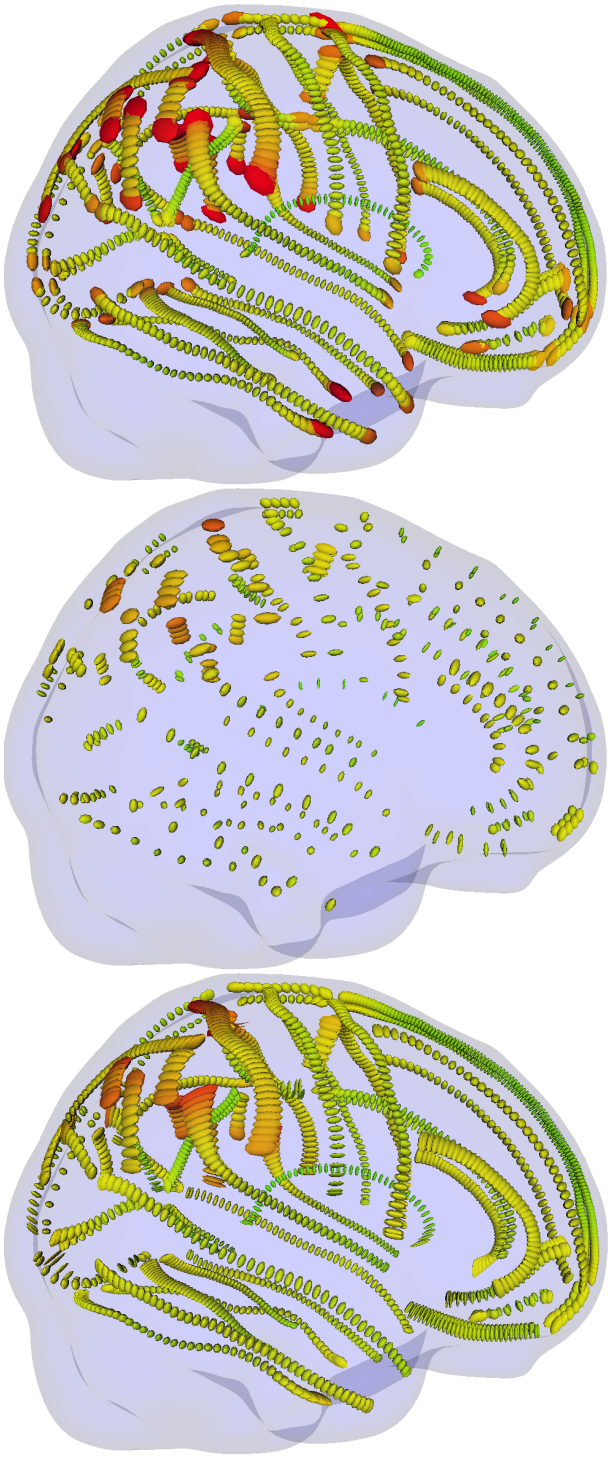

FIG. 9.9 – Estimation et modélisation de la variabilité de 36 paires de sillons. **Haut :** matrices de covariance initiales. **Milieu :** tenseurs sélectionnés pour modéliser localement la variabilité du cerveau (section 9.5). **Bas :** tenseurs reconstitués le long de chaque sillon moyen. On note une plus grande régularité des ellipsoide ainsi que la disparition des gros tenseurs aux extrémités.

à 10 fois les dimensions de la grille afin d'étendre l'influence des tenseurs de covariance le plus loin possible et d'accélérer la diffusion.

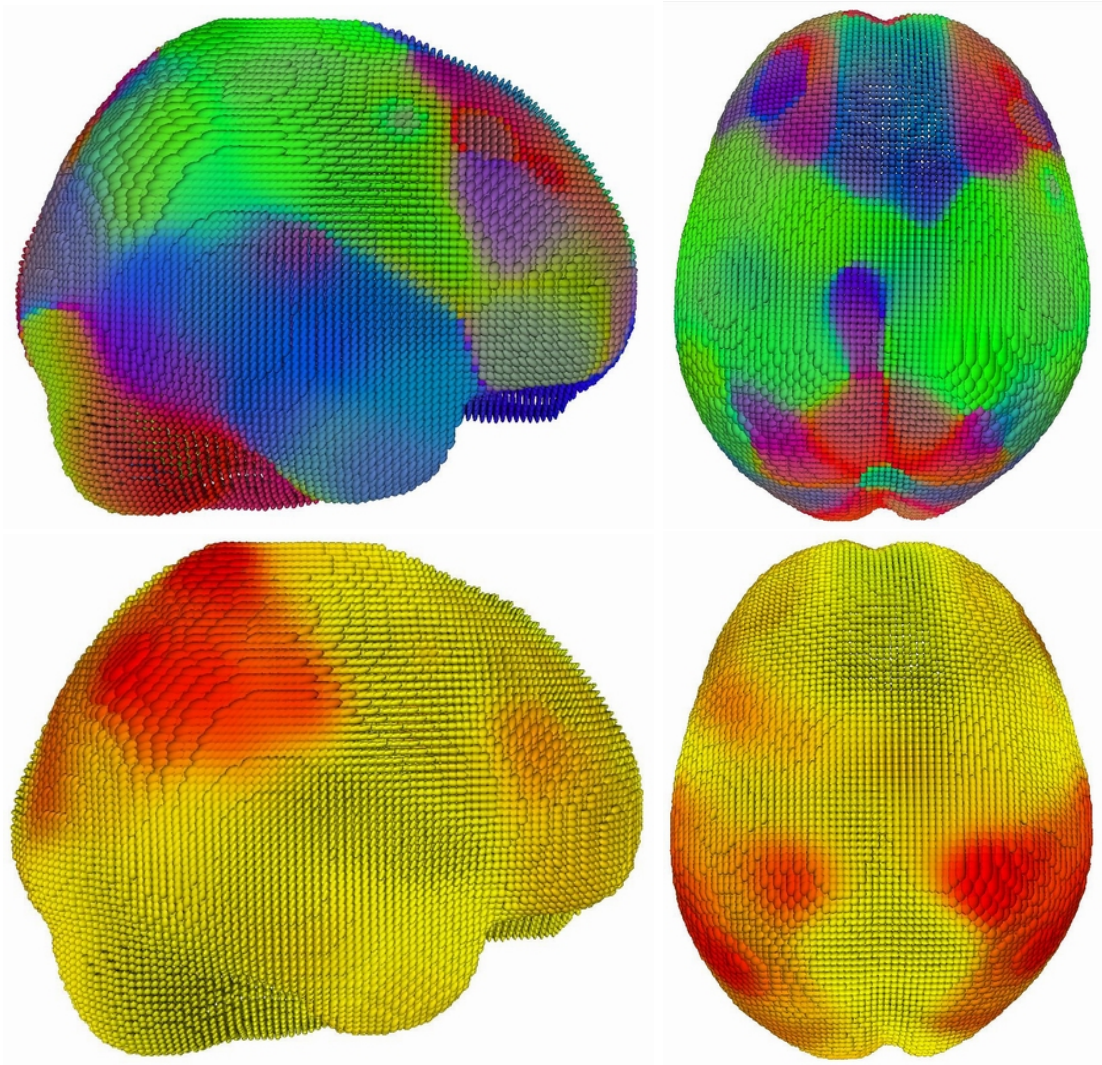

FIG. 9.10 – Résultat de l'interpolation par diffusion des tenseurs sélectionnés (figure 9.7) à tout le volume de l'atlas ICBM 305. **Haut :** la couleur code la direction. **Bas :** la couleur code la trace des tenseurs. Les zones rouges sont les zones de forte variabilité. Les deux régions de grande variabilité clairement visibles sur les deux hémisphères sont les régions du cerveau qui se développent le plus tardivement chez l'homme et qui présentent ainsi le plus de différences d'un individu à l'autre (résultats confirmés par le Pr. Paul Thompson, directeur du LONI, lors de notre visite à Los Angeles.)

9.7 Premier test statistique : étude de la symétrie - asymétrie des sillons

La taille de la base de données dont nous disposons permet de mettre en place un grand nombre de tests statitiques qui feront l'objet de la conclusion de ce rapport. Nous avons conduit un premier test sur la symétrie de la variabilité des sillons. Il s'agit de tester en quelle mesure deux sillons symétriques ont un comportement similaire, i.e. si le sillon gauche varie d'une certaine manière, comment bouge son symétrique. Intuitivement,

deux sillons symétriques très proches comme le cingulum au centre du cerveau vont probablement avoir une évolution symétrique. Par contre, il serait intéressant de voir si deux sillons éloignés, comme la scissure de Sylvius, ont ce même comportement ou bien évoluent indépendamment l'un de l'autre.
Pour mener cette étude, nous avons fait correspondre (section 9.3) les sillons moyens de deux sillons symétriques, puis nous avons mesuré la distance entre les tenseurs de covariance. Une grande valeur indique que les tenseurs sont différents, c'est-à-dire que les positions où sont calculés les tenseurs varient indépendamment l'une de l'autre. Une valeur faible indique que les positions évoluent de la même manière dans les deux hémisphères. Pour mieux visualiser le résultat, nous avons colorié les tenseurs de covariance avec cette distance : si deux tenseurs sont très différents ils auront une couleur chaude, si ils sont proches ils auront une couleur froide (la table des couleurs va du bleu au rouge).
Le résultats sont présentés figure 9.11.

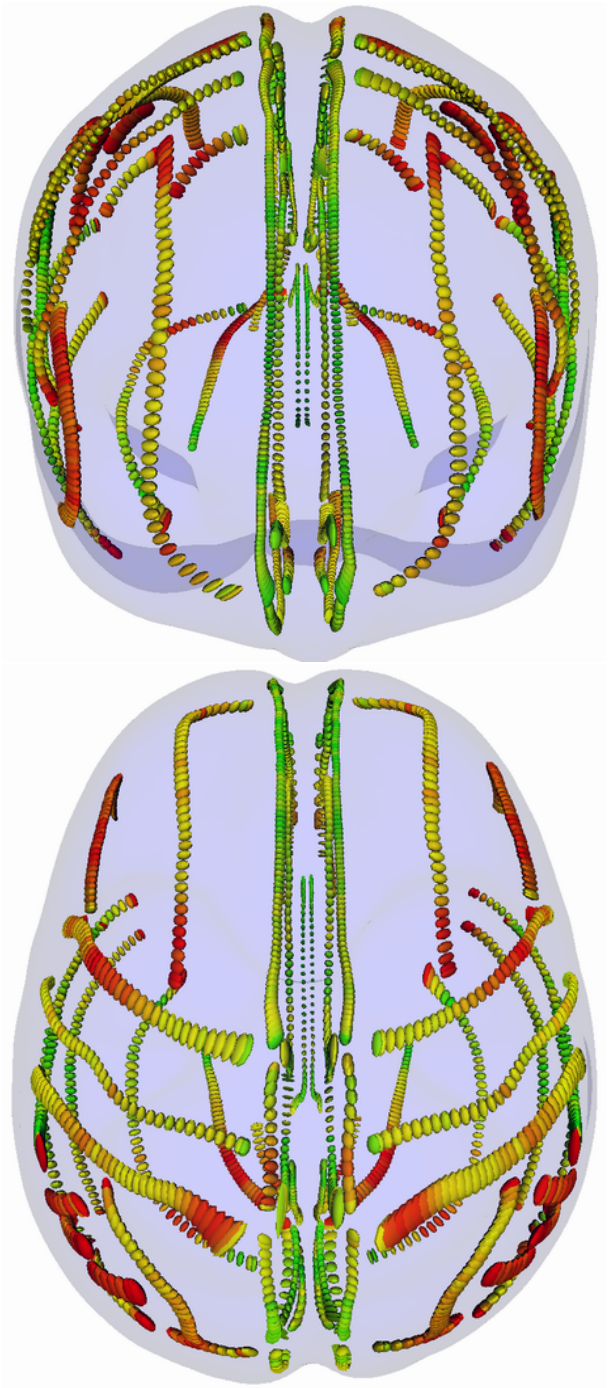

FIG. 9.11 – Tenseurs coloriés par la distance entre tenseurs symétriques correspondants. Les couleurs chaudes indiquent une différence dans la variabilité tandis que les couleurs froides sont signes de variabilité symétrique. Certains sillons en périphérie du cerveau ont une variabilité symétrique. La prochaine étape est de présenter ces résultats à des neuro-anatomistes pour les interpréter.
Haut : vue de devant. **Bas :** vue de haut.

CHAPITRE 10

Conclusions et Futur

Nous avons proposé dans ce rapport une métrique invariante par transformation affine qui dote l'espace des matrices symétriques définies positives d'une structure de varitété régulière. En particulier, les tenseurs nul et infinis sont à une distance infinie de toute matice symétrique définie positive : le cône de ces matrices est remplacé par une variété riemannienne. Nous avons les propriétés fondamentales qu'une et une seule géodésique relie deux tenseurs et que nous pouvons définir un système de coordonnées orthonormal sur chaque espace tangent à la variété. La structure obtenue ainsi est très proche d'un espace vectoriel, à ceci près que l'espace est courbe.
Nous avons illustré les solides propriétés théoriques de cette métrique avec quelques outils statistiques simples. Par exemple, la moyenne de Karcher est définie sur les variétés riemannienne comme un calcul variationnel sur la distance. Avec notre métrique, l'existence et l'unicité de la moyenne est assurée ce qui n'est pas le cas en général.

Une contribution importante de ce stage a été l'application de ce cadre riemannien à d'importants challenges en traitement de données géométriques, comme l'interpolation, le filtrage, la diffusion et la restoration de champs de tenseurs. Nous avons montré entre autre que l'interpolation et le filrage gaussien peuvent être implémenté de manière efficace comme un calcul de moyenne pondérée. Cependant, si les pondérations sont triviales à déterminer pour les interpolations bi ou tri-linéaires, le problème devient plus difficile pour des données échantillonnées de manière irrégulière. La solution proposée est de considérer ce type d'interpolation comme une restoration : nous voulons retrouver un champ régulier de tenseurs entre des mesures éparses. Ce type de problème est généralement résolu en utilisant une évolution par EDP. Nous avons montré que la régularisation classique (minimiser la norme carrée du gradient), ainsi que le filtrage anisotrope peuvent être étendus aux champs de tenseurs grâce à notre cadre riemannien. Nous avons également fourni les schémas numériques pour calculer le gradient et le laplacien d'un champ de tenseurs.

D'un point de vue théorique, ces travaux sont une puissante application du cadre général développé à l'inria depuis [40, 39] pour travailler avec des objets géométriques. Ce cadre repose d'un côté sur le choix de la métrique riemannienne permettant d'utiliser tous les outils performants de la géométrie différentielle tels que les cartes exponentielle et logarithmique, la descente de gradient géodésique, et de l'autre côté sur des problèmes de minimisations de combinaisons linéaires d'intégrales.

De nombreuses directions de recherche restent à parcourir, en particulier pour le choix de la métrique à utiliser. Dans le domaine applicatif, nous travaillons actuellement sur d'autres schémas numériques pour calculer les EDP par descente de gradient, pouvant aboutir à une amélioration notable de la précision et de l'efficacité. Nous voulons également appliquer ce cadre riemannien au problème complexe du recalage des IRMs de diffusion : le recalage non-rigide de deux champs de tenseurs est la clé de toute étude sur un grand nombre d'images de diffusion et peu de méthodes ont été développées jusque là. Pour finir, nous devons encore confronté précisément nos résultats avec les méthodes déjà existantes pour les valider dans le cadre d'applications dédiées aux DTI. Nous préparons en parallèle une librairie c++ qui sera intégrée à la librairie ITK (Insight ToolKit) déjà largement distribuée à travers la communauté. Cette librairie s'inscrit comme étant la référence en matière de traitement d'images médicales.

Notre deuxième application, la modélisation de la variabilité anatomique du cerveau, demeure un challenge de taille. Nous voulons nous diriger vers une modélisation plus fine, avec notamment la diffusion des tenseurs de covariance à tout le cerveau avec relâche de la contrainte dans la direction tangentielle aux sillons. En effet, la mise en correspondance des sillons entre eux minimise la variabilité tangentielle et cette hypothèse est discutable (il peut y avoir une variabilité tangentielle), mais en l'absence d'informations complémentaires cette hypothèse semble la plus correcte. Cependant, on peut empêcher que cette information ne soit diffusée pour ne pas introduire de biais supplémentaire. Les expérimentations de cette interpolation par diffusion avec annulation de la varibilité tangentielle sont en cours.
La taille la base de données exceptionnelle nous permettra de mener un grand nombre de tests statistiques sur les sillons. Une piste privilégiée consistera à mesurer sur les sillons la fonction de Green (matrice de covariance des mesures correspondant à deux points donnés de l'espace). Ceci permettra de faire de l'inférence statistique. L'extrapolation de la fonction de Green permettra d'établir une carte prévisionnelle de l'influence de la localisation d'un point sur tout autre point du cerveau. Il s'agira d'obtenir un modèle qui soit efficace pour contraindre le recalage non-rigide d'images médicales cérébrales. On pourra adapter par exemple l'approche de recalage régularisé par diffusion anisotrope développé dans le laboratoire par R.-C. Stephanescu ([49]) ou l'algorithme PASHA développé précédemment par P. Cachier ([12, 11]). L'importance de la base de données utilisée permettra de valider pleinement la méthode en effectuant un apprentissage sur un sous-ensemble des sillons anatomiques et des images disponibles et en testant sur les sillons des autres images (indépendance totale des données). Une autre méthode de validation consistera à montrer l'amélioration de la sensibilité des tests statistiques de localisation de fonctions bien cartographiées (par exemple des tâches visuelles ou motrices) dans des études de groupe en IRM fonctionnelle ([28]).
Au delà des résultats nouveaux attendus en neuro-anatomie, la modélisation fine de la variabilité conjointe de toutes les régions du cerveau permettra de bien mieux contraindre la mise en correspondance de cerveaux de sujets différents. Grâce à ces contraintes, on s'attend à un accroissement important de la sensibilité des tests statistiques locaux lors d'études de groupe. Les principaux domaines applicatifs concerneront les neurosciences, où une meilleure localisation d'activités fonctionnelles (IRMf) dans les analyses de groupe permettra une meilleure compréhension des relations structure/fonction, la neurologie clinique où sont visées les maladies neuro-dégénératives (Parkinson, sclérose en plaque, Alzheimer), certaines maladies neuro-psychiatriques (épilepsie, la schizophrénie) et la neuro-oncologie.

Ces études commenceront dès octobre lors de mon arrivée en thèse à l'INRIA Sophia Antipolis, sous la direction de Nicholas Ayache et de Xavier Pennec, que je remercie pour leur soutien et leurs précieux conseils lors de ces six mois de stage.

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. Arsigny. Optimal line matching in 3d with application to brain sulci comparison. *INRIA Internal Report*, 2003.

[2] G. Aubert and P. Kornprobst. Mathematical problems in image processing. *Applied Mathematical Sciences*, 147, 2001.

[3] R. Bammer, M. Auer, S.L. Keeling, M. Augustin, L.A. Stables, R.W. PrOkesch, R. Stollberger, M.E. Moseley, and F. Fazekas. Diffusion tensor imaging unsing single-shot sense-epi. *Magnetic Resonance in Medicine*, 48 :128–136, 2002.

[4] P.J. Basser, J. Mattiello, and D. Le Bihan. Estimation of the effective self-diffusion tensor from the nmr spin echo. *Journal of Magnetic Resonance*, 103 :247–254, 1994.

[5] P.J. Basser, S. Pajevic, C. Pierpaoli, J. Duda, and A. Aldroubi. In vivo fiber tractography using dt-mri data. *Magnetic Resonance in Medicine*, 44 :625–632, 2000.

[6] P.J. Basser and C. Pierpaoli. Microstructural and physiological features of tissues elucidated by quantitative-diffusion-tensor mri. *Journal of magnetic Resonance*, 111 :209–219, 1996.

[7] R. Bathia. On the exponential metric increasing property. *Linear Algebra and its Applications*, 375 :211–220, 2003.

[8] D. Le Bihan, E. Breton, D. Lallemand, P. Grenier, E. Cabanis, and E. Laval-Jeantet. Mr imaging of intravoxel incoherent motions : Application to diffusion and perfusion in neurologic disorders. *Radiology*, 161 :401–407, 1986.

[9] D. Le Bihan, J.-F. Mangin, C. Poupon, C. Clark, S. Pappata, N. Molko, and H. Chabriat. Diffusion tensor imaging : Concepts and applications. *Journal Magnetic Resonance Imaging*, 13(4) :534–546, 2001.

[10] F. Bloch. Nuclear induction. *Physical Review*, 70 :460–474, 1946.

[11] P. Cachier, E. Bardinet, D. Dormont, X. Pennec, and N. Ayache. Iconic feature based nonrigid registration : The pasha algorithm. *CVIU - Special Issue on Nonrigid Registration*, 89(2-3) :272–298, 2003.

[12] P. Cachier, J.-F. Mangin, X. Pennec, D. Rivière, D. Papadopoulos-Orfanos, J. Régis, and N. Ayache. Multisubject non-rigid registration of brain mri using intensity and geometric features. *4th Int. Conf. on Medical Image Computing and Computer Assisted Intervention (MICCAI'01)*, 2208 :734–742, 2001.

[13] J.S.W. Campbell, K. Siddiqi, B.C. Vemuri, and G.B. Pike. A geometric flow for white matter fiber tract reconstruction. *IEEE International Symposium on Biomedical imaging*, pages 505–508, 2002.

[14] M.P. Do Carmo. *Riemannian Geometry.* Birkhauser, Mathematics : Theory and Applications, 1992.

[15] F. Cazals and J.-D. Boissonnat. Natural coordinates of points on a surface. *Comp. Geometry Theory and Applications*, 19 :155–173, 2001.

[16] C. Chefd'hotel, C. Tschumperlé, R. Deriche, and O. Faugeras. Regularizing flows for constrained matrix-valued images. *J. Math. Imaging and Vision*, 20(1-2) :147–162, 2004.

[17] O. Cicarelli, A.T. Toosy, G.J.M. Parker, C.A.M. Wheeler-Kingshott, G.J. Barker, D.H. Miller, and A.J. Thompson. Diffusion tractography based group mapping of major white matter pathways in the human brain. *Neuroimage*, 19 :1545–1555, 2003.

[18] O. Coulon, D. Alexander, and S. Arridge. Diffusion tensor magnetic resonance image regularization. *Medical Image Analysis*, 8(1) :47–67, 2004.

[19] R. Deriche D. Tschumperlé. Vector-valued image regularization with pdes : A common framework for different applications. *CVPR*, 2003.

[20] P. Fillard and G. Gerig. Analysis tool for diffusion tensor mri. In *MICCAI'03*, volume 2879 of *LNCS*, pages 16–23. Springer Verlag, 2003.

[21] P. Fillard, J. Gilmore, J. Piven, W. Lin, and G. Gerig. Quantitative analysis of white matter fiber properties along geodesic paths. In *MICCAI'03*, volume 2879 of *LNCS*, pages 16–23. Springer, 2003.

[22] W. Förstner and B Moonen. A metric for covariance matrices. *Tech. Report of the Dpt of Geodesy and Geoinformatics*, (1999.6) :113–128, 1999.

[23] S. Gallot, D. Hulin, and J. Lafontaine. *Riemannian Geometry.* Springer Verlag, 1993.

[24] R. Gamkrelidze. *Encyclopaedia of Mathematical Sciences.* Springer Verlag, 1993.

[25] G. Gerig, R. Kikinis, O. Kübler, and F. Jolesz. Nonlinear anisotropic filtering of mri data. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 11(2) :221–232, 1992.

[26] G. Le Goualher, E. Procyk, L. Collins, R. Venugopal, C. Barillot, and A.C. Evans. Automated extraction and variability analysis of sulcal neuroanatomy. *IEEE Trans. on Medical Imaging*, 18(3) :206–217, 1999.

[27] S. Helgason. *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces.* Academic Press, 1978.

[28] P. Hellier, C. Barillot, I. Corouge, B. Gibaud, G. Le Goualher, D.L. Collins, A. Evans, G. Malandain, N. Ayache, G.E. Christensen, and H.J. Johnson. Retrospective evaluation of intersubject brain registration. *IEEE Trans. on Medical Imaging*, 22(9) :1120–1130, 2003.

[29] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of differential geometry.* John Whiley & Sons, 1969.

[30] C. Lenglet, R. Deriche, and O. Faugeras. Inferring white matter geometry from diffusion tensor mri : Application to connectivity mapping. In *8th European Conference on Computer Vision*, 2004.

[31] T.E. McGraw, B.C. Vemuri, Y. Chen, M. Rao, and T. Mareci. Neuronal fiber tracking in dt-mri. *preprint*, 2002.

[32] E. Meijering. A chronology of interpolation : From ancient astronomy to modern signal and image processing. *IEEE*, 90(3) :319–342, 2002.

[33] K.D. Merboldt, W. Hanicke, and J. Frahm. Self-diffusion nmr imaging using stimulated echoes. *Journal of Magnetic Resonance*, 64 :479–486, 1985.

[34] C. Nikou. *Contribution au recalage d'images médicales multimodales : approches par fonctions de similarité robustes et modèles déformables sous contraintes statistiques.* Thèse de sciences, Université Louis-Pasteur-Strasbourg I, 1999.

[35] K. Nomizu. Invariant affine connections on homogeneous spaces. *American J. of Math.*, 76 :33–65, 1954.

[36] T. Ochiai, S. Grimault, D. Scavarda, G. Roch, T. Hori, D. Rivière, and J.-F. Mangin. Sulcal pattern and morphology of the superior temporal sulcus. *Neuroimage*, 2004.

[37] X. Pennec. Probabilities and statistics on riemanian manifolds : Basic tools for geometric measurements. In *Nonlinear Signal and Image Processing (NSIP'99)*, volume 1, pages 194–198, 1999.

[38] X. Pennec. Probabilities and statistics on riemannian manifolds : A geometric approach. Research Report 5093, 2004.

[39] X. Pennec and N. Ayache. Uniform distribution, distance and expectation problems for geometric features processing. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 9(1) :49–67, 1998.

[40] Xavier Pennec. *L'incertitude dans les problèmes de reconnaissance et de recalage - Applications en imagerie médicale et biologie moléculaire.* Thèse de sciences, Ecole Polytechnique, 1996.

[41] P. Perona and J. Malik. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence (PAMI)*, 12(7) :629–639, 1990.

[42] C. Pierpaoli and P.J. Basser. Toward a quantitative assessment of diffusion anisotropy. *Magnetic Resonance in Medicine*, 36 :893–906, 1996.

[43] Cyril Poupon. *Détection des faisceaux de fibres de la substance blanche pour l'étude de la connectivité anatomique cérébrale.* Thèse de sciences, Ecole Nationale Supérieure de Télécommunications, 1999.

[44] E.M. Purcell, H.C. Torrey, and R.V. Pound. Resonance absorption by nuclear magnetic moments in a solid. *Physical Review*, 69, 1946.

[45] G. Sapiro. *Geometric partial differential equations and image analysis.* Cambridge University Press, 2001.

[46] N.R. Selden, D.R. Gitelman, N. Salamon-Murayama, T.B. Parrish, and N.M. Mesulman. Trajectories of cholinergic pathways within the cerebral hemispheres of the human brain. *Brain*, 121 :2249–2257, 1998.

[47] R. Sibson. A brief description of natural neighboor interpolation. pages 21–36, 2001.

[48] E.O. Stejskal and J.E. Tanner. Spin diffusion measurements : spin echoes in the presence of a time-dependent field gradient. *Journal of Chemical Physics*, 42 :288–292, 1965.

[49] R.-C. Stephanescu, X. Pennec, and N. Ayache. Grid enabled non-rigid registration with a dense transformation and a priori information. In *MICCAI'03*, volume 2879 of *LNCS*, pages 804–811. Springer Verlag, 2003.

[50] P. Thévenaz, T. Blu, and M. Unser. Interpolation revisited. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 19(7) :739–758, 2000.

[51] P.M. Thompson, C. Schwartz, R.T. Lin, and A.W. Toga. Three-dimensional statistical analysis of sulcal variability and probabilistic atlases of the human brain. *The Journal of Neuroscience*, 16(13) :4261–4274, 1996.

[52] P.M. Thompson, R.P. Woods, M.S. Mega, and A.W. Toga. Mathematical/computational challenges in creating deformable and probabilistic atlases of the human brain. *Human Brain Mapping*, 9(2) :81–92, February 2000.

[53] D. Tschumperlé and R. Deriche. Orthonormal vector sets regularization with pde's and applications. *International Journal on Computer Vision (IJCV)*, 50(3) :237–252, 2002.

[54] D. Tschumperlé and Rachid Deriche. Dt-mri images : estimation, regularization and application. In *International Conference on Computer Aided Systems Theory*, 2003.

[55] D. Tschumperlé and Rachid Deriche. Variational frameworks for dt-mri estimation and visualization. In *International Conference on Computer Vision*, 2003.

[56] D.S. Tuch, T.G. Reese, M.R. Wiegell, N.G. Makris, J.W. Belliveau, and V.J. Wedeen. High angular resolution diffusion imaging reveals intravoxel white matter fiber heterogeneity. *Magnetic Resonance Medicine*, 48 :577–582, 2002.

[57] B. Vemuri, Y. Chen, M. Rao, T. McGraw, T. Maerci, and Z. Wang. Fiber tract mapping from diffusion tensor mri. *IEEE Workshop on Variational and Level Sets Methods in Computer Vision*, 2001.

[58] J. Weikert. Anisotropic diffusion in image processing. 1998.

[59] C.-F. Westin, S. Maier, H. Mamata, A. Nabavi, F. Jolesz, and R. Kikinis. Processing and visualization for diffusion tensor mri. *Medical Image Analysis*, 6(2) :93–108, 2002.

[60] R.P. Woods. Characterizing volume and surface deformation in an atlas framework : theory, applications and implementation. *Neuroimage*, 18 :769–788, 2003.

[61] M. Young, J. Scannell, and G. Burns. The analysis of cortical connectivity. *Neuroscience Intelligence Uncit*, 1995.