THÈSE

préparée à

L'INRIA Sophia Antipolis

et présentée à

L'Université de Nice Sophia Antipolis

pour obtenir le grade de

DOCTEUR

Spécialité

Informatique

par

Stéphane COTIN

Sujet de la thèse :

MODÈLES ANATOMIQUES DÉFORMABLES EN TEMPS-RÉEL

Application à la simulation de chirurgie avec retour d'effort

Soutenue le 19 novembre 1997 devant un jury composé de :

Mme	**Marie-Paule**	**CANI-GASCUEL**	Rapporteurs
M.	**Philippe**	**CINQUIN**	
MM.	**Peter**	**SANDER**	Président
	Nicholas	**AYACHE**	Directeur
	Hervé	**DELINGETTE**	Co-Directeur
	Jacques	**MARESCAUX**	Examinateurs
	Gérald	**QUATREHOMME**	

Remerciements

Je tiens tout d'abord à adresser ma plus vive gratitude aux membres du jury :

- à Nicholas Ayache, directeur de cette thèse, qui m'a accueilli dans son laboratoire et m'a permis, durant ces trois années, de travailler dans des conditions exceptionnelles, et qui a su me conseiller et orienter habilement mes travaux vers leur aboutissement,
- à Hervé Delingette, pour son infinie patience, ses conseils avisés et sa gentillesse sans lesquels de nombreux obstacles n'auraient pu être franchis,
- à Marie-Paule Cani-Gascuel et Philippe Cinquin, qui ont eu la gentillesse d'accepter la lourde tâche de rapporteurs auprès du jury; je les remercie tout particulièrement pour l'attention et le temps qu'ils y ont consacrés, ainsi que pour leurs encouragements et la pertinence de leurs remarques,
- à Peter Sander, responsable du DEA à l'origine de cette thèse, pour m'avoir initié au monde de la Recherche et du traitement d'images,
- à Jacques Marescaux, directeur de l'IRCAD, pour son enthousiasme hors du commun en ce qui concerne l'avenir de ces travaux et de façon plus générale le futur de l'informatique médicale,
- à Gérald Quatrehomme, avec qui j'ai eu le plaisir de collaborer tout au long de ces trois années.

J'exprime ma plus sincère amitié à Jérôme Declerck (Declerck, 1997), avec qui j'ai partagé, dans le bureau/salon des inoubliables Translokos, aussi bien des moments d'intense réflexion que des périodes de détente pour le moins ... originales. Sa présence stimulante a rendu ces trois années bien agréables et la quasi simultanéité de nos soutenances nous a permis d'affronter la période tant redoutée de la rédaction avec enthousiasme voire même optimisme. Enfin, une derniére note pour le remercier de ses efforts pour m'initier à la musique classique.

La réalisation du travail présenté dans ce manuscrit a été l'occasion de découvrir le milieu médical, et en particulier de collaborer avec les chirurgiens et informaticiens de l'IRCAD. Je pense plus particulièrement à Vincent Tassetti, Yves Russier, Jean-Marie Clément et Christophe Koehl que je remercie pour leur intérêt, aide et soutien dans ces travaux.

Également un grand merci aux champions du réseau, aux rois de l'administration système que sont les ingénieurs du Semir, sans oublier Janet Bertot, "notre" ingénieur système.

Je tiens aussi à remercier les membres du projet Epidaure que j'ai cotoyés durant ces trois années :

- Grégoire Malandain, grand amateur des "Tontons Flingueurs" mais aussi auteur de la maxime "si tu ne sais pas, demande à Greg" qui en dit long sur ses connaissances scientifiques et extra-scientifiques,
- Johan Montagnat, toujours disponible pour donner un coup de main, que je remercie également pour m'avoir initié aux joies de l'escalade sur le mur de l'Inria,

- Guillaume Picinbono, pour avoir relu ce manuscrit avec attention et à qui je souhaite bonne chance pour se lancer à son tour dans la simulation de chirurgie,
- Xavier Pennec, dont la connaissance de LaTex a été appréciée à sa juste valeur, et que je remercie pour son excellente formule d'encouragement "May The Force Feedback Be With You", tout a fait de circonstance,
- Luc Soler, pour sa bonne humeur et pour son célèbre "Pause Café" téléphonique qui a retenti chaque matin, à 9h30 précises, signifiant ainsi le véritable début d'une nouvelle journée,
- Gérard Subsol, pour son intérêt constant dans ces travaux, son animation exemplaire du Groupe de Travail "Réalite Virtuelle", et ses remarquables dons de gardien de buts lors de nos parties de football du samedi matin,
- Jean-Philippe Thirion, à qui je souhaite de réussir sa transition vers le difficile monde de l'industrie,
- Morten Bro-Nielsen, dont la présence et les discussions ont sans aucun doute été le point de départ de cette recherche. J'ai l'étrange impression que nos chemins n'ont pas fini de se croiser...,
- Martà Fidrich, pour les nombreuses discussions que nous avons pu avoir et sa collaboration au projet de reconstruction faciale,
- Alexandre Guimond, pour sa constante bonne humeur et les bonnes parties de squash qui m'ont aidé à décompresser, durant la période de rédaction, et permis de passer mes nerfs sur cette petite balle de caoutchouc plutôt que sur la tête de Jérôme. Enfin, la plupart du temps...,
- Allen Sanderson, "un Américain à Antibes", pour sa vonlonté à apprendre la langue Française, et pour les involontaires mais tellement drôles méprises qui en ont découlé,
- Françoise Pezé, pour sa gentillesse et sa disponibilité, et en espérant que ses talents artistiques seront bientôt reconnus et appréciés en dehors de l'Inria,
- Hervé Delingette, qui mérite bien d'apparaître une seconde fois dans ces remerciements et à qui j'exprime toute mon amitié.

Mais l'Inria c'est aussi une grande famille, où l'on trouve toujours quelqu'un pour discuter d'un problème scientifique ou de tout autre chose. Alors je prends encore quelques lignes pour saluer les gens que j'ai rencontrés durant ces quatre années passées à Sophia Antipolis :

- Jérôme Pignon, avec qui j'ai passé d'inoubliables moments lors de mon DEA grâce à son rire très communicatif, et dont les talents de chanteur (et de compositeur) ... m'ont enchanté,
- Donatas Kvedarauskas, pour la narration de ses exploits cyclistes (Paris-Nice via Bordeaux en vélo), nos interminables parties de ping-pong et son café lituanien,
- "Les filles de la Doc", pour leur impressionnante capacité à dénicher n'importe quel article et surtout pour leur accueil toujours chaleureux,
- "Le Chef", incontournable personnalité de la cafétéria et dont les talents culinaires participent à la réputation de l'Unité de Recherche de Sophia Antipolis,

- Laetitia Grimaldi, pour sa patience devant mon incompétence à remplir correctement une feuille de mission,
- Diane Lingrand, pour nous avoir ravitaillé en gâteaux durant la difficile période de rédaction, et dont le cake au citron restera à jamais gravé dans nos mémoires,
- les thèsards du projet Rodéo pour nous avoir offert d'être testeurs de leur logiciel "Mi-Maze",
- Stéphane Lanteri, qui m'a ouvert les portes du projet Sinus et montré qu'il était possible, pour des personnes de formations différentes, de collaborer sur un projet commun.

Mais, en fin de compte, une thèse c'est aussi trois ans d'une vie rythmée par les réussites ou les déceptions de notre recherche quotidienne. Alors quand tout va mal ou, car cela arrive aussi, lorsqu'un épineux problème vient d'être enfin résolu, quoi de plus merveilleux que de pouvoir partager ces instants avec quelqu'un. C'est pourquoi je veux remercier tout particulièrement Agnès pour sa patience, son réconfort ou son enthousiasme, selon mes changements d'humeur. Merci d'avoir toujours été là quand il le fallait, merci de m'avoir supporté dans mes choix parfois difficiles; merci aussi de m'avoir rappelé qu'il y a d'autres choses importantes dans la vie.

Enfin, je voudrais remercier ma famille et surtout mes parents pour m'avoir donné le goût des études et surtout cette liberté de choisir mes propres directions. C'est sans aucun doute cela qui m'a conduit à me lancer sans hésitation dans cette thèse. Encore une fois, merci.

Que ceux qui ont lu ces trois pages sans y trouver leur nom me pardonnent.

Table des matières

Introduction **1**

I Modèles déformables pour la simulation **1**

1 Cadre général 4
2 Présentation du problème 5
3 État de l'art 6
3.1 Navigation endoscopique, enseignement, planification 6
3.2 Simulation chirurgicale avec modèles déformables 7
3.3 Simulation chirurgicale réaliste en temps-réel 9
4 Quels sont les problèmes à résoudre? 10
4.1 Modélisation géométrique 10
4.2 Modélisation physique/biomécanique 10
4.3 Développement d'un prototype 11
5 Contributions 11
6 Conclusion 12

1 Étude et modélisation biomécaniques **13**

1.1 Introduction 14
1.2 Principales lois de comportement 16
1.2.1 Élasticité linéaire 17
1.2.2 Élasticité non-linéaire 19
1.2.3 Comportement viscoélastique linéaire 19
1.3 Tests œdométriques 22
1.4 Tests rhéologiques 24
1.5 Conclusion 26

2 Méthode des éléments finis **29**

2.1 Introduction 30
2.2 Formulation variationnelle 31
2.3 Modélisation par la méthode des éléments finis 33
2.3.1 Maillage du domaine 34
2.3.2 Définition d'un élément fini 35
2.4 Mise en œuvre numérique 40
2.4.1 Étape 1 : triangulation du domaine 40

2.4.2 Étape 2: interpolation 41
2.4.3 Étape 3 : intégration numérique 42
2.4.4 Étape 4 : calcul de la forme bilinéaire 42
2.4.5 Étape 5 : calcul de la forme linéaire 43
2.4.6 Étape 6 : assemblage de la matrice de rigidité globale 45
2.4.7 Étape 7 : calcul de la solution en tout point du domaine 45
2.5 Conditions aux limites 46
2.5.1 Conditions de Dirichlet 46
2.5.2 Conditions de Neumann 49
2.6 Résolution du système linéaire 49
2.7 Conclusion 49

3 Déformations en temps réel 51
3.1 Introduction 52
3.2 Éléments d'optimisation pour la résolution d'un système linéaire 53
3.2.1 Méthode du gradient conjugué 55
3.2.2 Gradient conjugué pré-conditionné 57
3.2.3 Modèle géométrique, triangulation du domaine 61
3.2.4 Inversion de matrice et condensation 65
3.2.5 Conclusion sur l'utilisation de méthodes d'optimisation "classiques" . . . 67
3.3 Méthode SDeLL 68
3.3.1 Idée générale 68
3.3.2 Calcul de déformations et forces élémentaires 69
3.3.3 Calcul accéléré de la déformation et des contraintes 73
3.3.4 Résultats 76
3.3.5 Optimisation 81
3.3.6 Comparaison avec une inversion de matrice 86
3.4 Modification de la loi de comportement linéaire 88
3.4.1 Comportement élastique non-homogène 88
3.4.2 Approximation d'un comportement non-linéaire 92
3.5 Conclusion 99

4 Propriétés des modèles dynamiques 103
4.1 Introduction 104
4.2 Principe général 106
4.3 Modélisation de tissus mous 109
4.4 Forces internes 111
4.5 Choix de la géométrie 115
4.5.1 Modèles surfaciques 115
4.5.2 Modèles volumiques 117
4.6 Visualisation 119
4.7 Fracture, déchirements, découpes 120

4.8 Intégration numérique 120
4.8.1 Choix du pas de temps 121
4.8.2 Choix de la méthode d'intégration 122
4.8.3 Synchronicité 123
4.9 En conclusion 124

5 Modèle « masses/tenseurs » 125
5.1 Introduction 126
5.2 Principe général 127
5.3 Géométrie 129
5.3.1 Triangulation du domaine 129
5.3.2 Topologie - graphe des liaisons 129
5.3.3 Topologie d'un maillage non-structuré 132
5.4 Calcul des tenseurs de forces 133
5.4.1 Calcul de la matrice de rigidité élémentaire 133
5.4.2 Calcul du tenseur associé à une liaison ou à un nœud 134
5.4.3 Calcul des forces de liaison 135
5.4.4 Force de tension superficielle 136
5.4.5 Bilan des forces 136
5.5 Conditions aux limites 137
5.6 Intégration numérique 137
5.6.1 Méthode d'Euler 138
5.6.2 Formule de Runge-Kutta d'ordre 4 138
5.6.3 Formule de Runge-Kutta d'ordre 2 139
5.7 Découpes, déchirements, fractures 140
5.7.1 Découpe par subdivision de liaisons 140
5.7.2 Découpe par suppression d'éléments 140
5.7.3 Fracture, déchirement de tissus mous 143
5.8 Résultats 144
5.8.1 Déformations 144
5.8.2 Découpe par suppression d'éléments 145
5.8.3 Fracture / déchirement 145
5.8.4 Visualisation et animation 147
5.9 Conclusion 151

6 Modèles hybrides déformables 155
6.1 Introduction 156
6.2 Décomposition de domaine 156
6.3 Définition d'un modèle hybride 158
6.4 Création des sous-domaines 160
6.5 Mise en œuvre 161
6.5.1 Conditions aux limites 162

6.5.2 Obtention d'une position d'équilibre 162
6.6 Résultats 163
6.6.1 Déformation "hybride" 163
6.6.2 Déformation et découpes 164
6.6.3 Autre application 164
6.7 Conclusion 166

7 Intégration d'un système à retour d'effort 169
7.1 Introduction 170
7.2 Retour tactile et retour d'effort 170
7.3 Retour tactile 171
7.4 Retour d'effort 174
7.5 Architecture du simulateur 179
7.5.1 Architecture matérielle 182
7.5.2 Détection de collisions 183
7.5.3 Architecture logicielle 190
7.6 Conclusion - perspectives 196
7.6.1 Avantages de l'architecture du simulateur 196
7.6.2 Inconvénients, améliorations et future architecture 196

8 Simulation de chirurgie hépatique 199
8.1 Introduction 200
8.2 Création d'un modèle "générique" 200
8.2.1 Maillage de la surface 201
8.2.2 Définition des segments hépatiques 203
8.2.3 Modèle pour la simulation 203
8.3 Entraînement au geste opératoire 209
8.3.1 Un seul instrument - élasticité linéaire/non linéaire 209
8.4 Modèle d'un patient 211
8.4.1 Maillage de l'enveloppe du foie 211
8.4.2 Segmentation des vaisseaux 211
8.4.3 Définition des segments hépatiques 214
8.4.4 Modèle hybride 214
8.4.5 Simulation à l'aide de deux instruments 216
8.5 Étude rhéologique du parenchyme hépatique 220
1 Rappel des travaux présentés 224
2 Quelques améliorations à moyen terme 225
3 Perspectives 227

II Reconstruction faciale **229**

1 Reconstruction faciale **231**

1.1 Introduction 231

1.1.1 L'identification médico-légale 232

1.1.2 Les principales méthodes d'identification 233

1.1.3 La superposition faciale 234

1.1.4 Les techniques de restauration faciale 236

1.1.5 Les techniques de reconstruction faciale 237

1.1.6 Informatique et reconstruction faciale 238

1.2 Travaux précédents 238

1.2.1 Dans le domaine de l'anthropologie légale 239

1.2.2 Dans le domaine de l'informatique 240

1.3 Description de la méthode 241

1.3.1 Étape 1 : les données 241

1.3.2 Étape 2 : reconstruction 3D et visualisation 243

1.3.3 Étape 3 : reconstruction faciale 246

1.3.4 Premiers résultats 248

1.3.5 Nouveaux résultats 249

1.3.6 Modélisation des tissus faciaux 250

1.4 Validation des résultats 251

1.5 Discussion & conclusion 251

Annexes **253**

A Algorithmes **255**

A.1 Calcul des tenseurs de force 256

A.2 Calcul des forces internes 257

A.3 Calcul des forces internes (suite) 258

A.4 Mise à jour des tenseurs lors de la suppression d'un tétraèdre 259

B Schémas d'intégration numérique **261**

B.1 Schémas d'intégrations 262

B.1.1 Schéma d'intégration sur un tétraèdre 262

B.1.2 Schéma d'intégration sur un triangle 262

C Anatomie du foie **263**

C.1 Fonction 264

C.2 Couleur et consistance 264

C.3 Poids et dimensions 264

C.4 Configuration extérieure et rapport 264

D Systèmes à retour d'effort **269**
D.1 Introduction 270
D.2 Architecture de type joystick 270
D.3 Architecture de type bras manipulateur 273
D.4 Architecture de type pantographe 275

Bibliographie **275**

Première partie

Modèles déformables pour la simulation

Introduction

Dans ce chapitre nous donnons une vision globale de l'ensemble des travaux développés durant cette thèse, en présentant le cadre dans lequel se sont déroulées ces recherches, leur intérêt pour la communauté médicale ainsi que l'état de l'art dans le domaine de la simulation chirurgicale. Nous aborderons ensuite les problèmes majeurs à résoudre et les contributions apportées par nos travaux.

1 Cadre général

Au cours de ces deux dernières décennies, l'imagerie médicale a connu un développement considérable. Le traitement des images médicales, combiné avec l'apparition de nouvelles techniques d'imagerie, permet de fournir au praticien des outils de plus en plus performants, rendant ainsi l'examen clinique moins fastidieux, plus précis et plus rapide. De leur côté, les évolutions dans le domaine médical sont porteuses de nouvelles applications, définissant de nouveaux axes de recherche. Parmi ceux-ci, les domaines de la simulation et de la planification chirurgicales connaissent un essor considérable. La simulation d'opérations chirurgicales, en particulier, est actuellement le fruit d'un enjeu très important. Les applications potentielles touchent aussi bien l'enseignement de l'anatomie, l'entraînement aux procédures chirurgicales que la planification d'opérations complexes.

Nos travaux s'inscrivent dans le cadre d'un projet européen, le projet MASTER[1], initié par le professeur J. Marescaux, directeur de l'IRCAD. L'IRCAD, Institut de Recherche contre les Cancers de l'Appareil Digestif, regroupe des chirurgiens, des médecins, des biologistes et des chercheurs étudiant de nouveaux moyens de traitement des cancers digestifs, les plus fréquents de l'organisme. Cet institut, a crée un centre de recherche chirurgicale appliquée et une école de formation[2] aux techniques laparoscopiques. C'est pourquoi l'un des thèmes principaux du projet MASTER concerne la création d'interfaces facilitant la tâche du chirurgien et lui permettant, en particulier, une **simulation en temps réel du geste opératoire.**

Le projet MASTER regroupe aujourd'hui 12 partenaires sur 5 pays membres de Eurêka (Allemagne, Finlande, France, Italie, Royaume-Uni) et se déroule sur une période de 5 ans (1994-1999). Ainsi travaillent ensemble 5 industriels (Alcatel Business Systems, Dornier Medizintechnik, GEC Marconi, Immi Medical Robots, Lasermatic OY), 5 instituts de recherche (INRIA, IRCAD, Fraunhofer Gesellschaft IAO et IPA, le centre de recherche de Karlsruhe FZK) et 3 centres cliniques (Dundee, Rome, Tübingen) ainsi que le CHU de Strasbourg, représenté par l'IRCAD.

Les autres thèmes du projet MASTER concernent de façon générale l'étude, la réalisation et la validation expérimentale des « prototypes entrant dans le fonctionnement du bloc opératoire laparoscopique du début du troisième millénaire ». On trouve ainsi des sujets concernant :

- des aspects de miniaturisation d'instruments, de création d'instruments dits intelligents car apportant des informations sensorielles ou spatiales au chirurgien et capables de mobilité aujourd'hui impossible.
- des développements de systèmes de vision tridimensionnelle et haute définition.
- des développements de bras manipulateur et de robot pour des applications en chirurgie minimalement invasive.
- des créations de moyens de transmission d'images couleur animées de qualité chirurgicale pour autoriser un diagnostic à distance et de stockage des celles-ci.

1. MASTER : Minimal Access Surgery by Telecommunications and Robotics
2. Cette école se nomme EITS : European Institute of TeleSurgery.

2 Présentation du problème

Les progrès réalisés ces dernières années en chirurgie ont été marqués par l'émergence de la chirurgie dite minimalement invasive, dont le principe général consiste à ne plus ouvrir le corps du patient. Les domaines d'application de ce type de chirurgie croissent d'année en année, avec en particulier les techniques laparoscopique, cœlioscopique et arthroscopique. Dans le cas de la chirurgie laparoscopique, de petites incisions sont pratiquées dans la paroi abdominale, par lesquelles le chirurgien introduit un trocart permettant le passage des outils chirurgicaux ainsi qu'une micro-caméra (cf. figure 1).

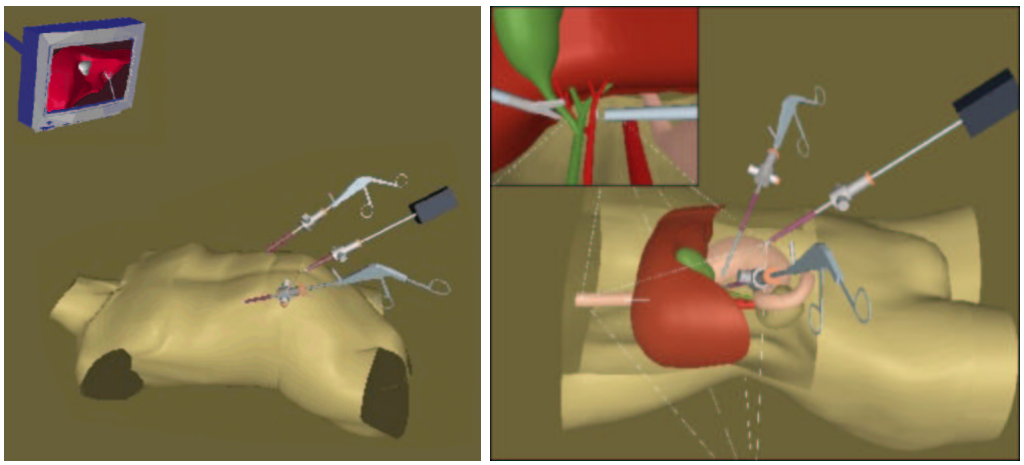


FIG. 1 – *Principe de la chirurgie laparoscopique. Une micro-caméra ainsi que deux ou trois instruments chirurgicaux sont introduits dans l'abdomen par de petites incisions pratiquées dans la paroi abdominale.*

Cette technique présente de nombreux avantages, concernant essentiellement la santé du patient mais aussi des aspects économiques. La faible taille des incisions nécessaires à l'introduction des trocarts permet de réduire les traumatismes per et postopératoires grâce à une cicatrisation plus rapide et de plus faibles risques d'infection. Le rétablissement du patient est par conséquent plus rapide et les durées d'hospitalisation réduites.

Face aux multiples avantages de la chirurgie laparoscopique, on peut s'attendre, dans les prochaines années, à un accroissement considérable de ce type d'opérations. Cependant, les conditions dans lesquelles opère le chirurgien sont sensiblement modifiées par rapport à une intervention classique. Tout d'abord, les degrés de liberté des instruments sont réduits en raison de leur passage par un point fixe, le trocart. Ensuite, la vision du champ opératoire est fortement modifiée par rapport à la réalité, celui-ci étant vu par l'intermédiaire d'un moniteur relié à la caméra endoscopique.

Le chirurgien doit donc apprendre à maîtriser cette nouvelle technique et les nouvelles sensations qui lui sont associées. Pour cela un entraînement s'impose, et face aux possibilités actuelles - simulateur mécanique, entraînement sur des cadavres ou sur des animaux - un simulateur présenterait de nombreux avantages. Parmi ceux-ci on peut noter la polyvalence, c'est-à-dire la possibilité de simuler l'opération de différents organes sans pour autant changer l'architecture du simulateur. D'autre part, un tel outil permettrait de s'entraîner sur différents cas pathologiques rarement rencontrés dans la réalité, préparant ainsi le chirurgien à une opé-

ration inhabituelle. Enfin, un simulateur permettrait d'atteindre une fréquence d'entraînement plus importante qu'à l'heure actuelle.

La collaboration étroite entre le projet EPIDAURE et l'IRCAD a permis de déterminer les besoins des chirurgiens dans le domaine de la simulation chirurgicale. Trois étapes principales, concernant le développement d'un prototype de simulateur de chirurgie laparoscopique, ont été définies : (a) entraînement au geste opératoire, (b) simulation d'opérations élémentaires et (c) simulation d'une opération réelle. L'entraînement au geste opératoire a pour but de permettre, à des étudiants ou des chirurgiens ne connaissant pas les techniques laparoscopiques, la manipulation des instruments afin d'acquérir la dextérité nécessaire à la réalisation d'un geste opératoire plus sûr. On se limite, pour cette phase d'entraînement, à des interactions instruments/organe sur un modèle générique. L'absence de perception tridimensionnelle du champ opératoire est compensée par la restitution du sens du toucher, rendue possible par l'intégration d'un système à retour de forces dans le simulateur. La simulation d'opérations chirurgicales simples est une phase d'entraînement plus avancée. Elle a pour but de reproduire un ensemble de gestes élémentaires utilisés en chirurgie laparoscopique, tels que la suture, l'incision de tissus mous, la cautérisation à l'aide d'un bistouri électrique, etc. Enfin, la simulation d'une opération réelle permettra de reproduire ou d'assister le chirurgien dans chaque phase des processus préopératoire et per-opératoire. Ainsi, à partir des images médicales d'un patient donné, le chirurgien pourra planifier l'opération puis s'entraîner sur un modèle virtuel afin de vérifier la validité de la planification. Enfin, il pourra répéter une partie ou la totalité de l'opération afin d'aborder l'intervention réelle avec une connaissance parfaite de la situation.

Nous ne nous intéresserons, par la suite, qu'aux deux premiers aspects de la simulation : entraînement au geste et répétition d'opérations élémentaires. Le dernier point, c'est-à-dire la planification et simulation d'une opération réelle, requiert des éléments qui dépassent le cadre des travaux exposés dans ce manuscrit.

3 État de l'art

L'état de l'art dans le domaine de la simulation chirurgicale est très récent et recouvre différents thèmes, allant de l'imagerie médicale à la robotique. Malgré la complexité du sujet, de nombreux résultats ont déjà été présentés, abordant la plupart des problèmes rencontrés dans le domaine. Notre but n'est pas de donner ici une liste exhaustive de ces travaux mais plutôt de montrer, au travers d'exemples caractéristiques, les points qu'il nous semble essentiel de résoudre pour parvenir à une simulation réaliste. Afin de présenter ces résultats, nous les avons classés en trois catégories, en tenant compte à la fois du degré de complexité de la simulation et des différents domaines impliqués.

3.1 Navigation endoscopique, enseignement, planification

La première catégorie comprend les simulateurs qui ne font pas intervenir de modèles déformables. Nous les appellerons aussi simulateurs *passifs*. Le but de tels simulateurs est essen-

tiellement centré autour de la planification et de l'enseignement. Ils permettent au chirurgien de naviguer dans un environnement tridimensionnel reconstruit à partir d'images médicales. La réalisation d'outils de segmentation d'images médicales tridimensionnelles est alors très importante pour permettre d'obtenir une surface des organes régulière et précise.

Geiger dans (Boissonnat et Geiger, 1993) a reconstruit un modèle tridimensionnel du fœtus et du bassin afin de déterminer si l'accouchement est possible sans césarienne. La même équipe a également proposé de construire l'arborescence des bronches afin de pouvoir définir le chemin optimal que l'endoscope devra emprunter pour atteindre la tumeur lors d'une bronchoscopie (Geiger et Kikinis, 1995). Les images volumiques utilisées pour la création des modèles proviennent de scannographies par rayons X. La segmentation est réalisée en 2D, coupe par coupe. Ensuite, chaque coupe est maillée par une triangulation de Delaunay. Enfin, le modèle tridimensionnel volumique est obtenu par construction d'une tétraédrisation entre chaque coupe triangulée. La construction d'un maillage volumique n'est utilisée, ici, que pour la détection des collisions. Dans la simulation de bronchoscopie, deux représentations du modèle sont utilisées. Une représentation tridimensionnelle pour simuler la vue endoscopique et une représentation bidimensionnelle montrant l'évolution de la sonde dans l'image médicale préopératoire. Enfin, un algorithme de détection de collision est utilisé pour guider le déplacement de la caméra endoscopique. Des travaux similaires, relatifs à des techniques d'endoscopie virtuelle, sont décrits dans (Varlet, 1997; Lorensen et al., 1995; Kensaku et al., 1995).

L'intérêt de ce type de modélisation réside dans la possibilité de manipuler des représentations tridimensionnelles d'organes dans l'espace. Pour l'enseignement de l'anatomie, cette possibilité permet une bien meilleure compréhension que l'étude de planches anatomiques. Pour l'analyse préopératoire, le problème est différent. Bien que la planification soit plus aisée grâce à l'utilisation d'outils de visualisation tridimensionnels, il reste que la majorité des organes du corps humain est déformable, chacun avec des caractéristiques particulières, entraînant une réponse spécifique à une action extérieure. Ainsi, si l'on reprend l'exemple de la simulation d'accouchement, on ne peux pas considérer le fœtus comme étant rigide et par conséquent il est fort possible que l'accouchement soit possible dans la réalité alors que la simulation l'estime impossible en raison de cette hypothèse de rigidité. De même, la plupart des simulations utilisées pour la planification font cette hypothèse. Or que se passe-t-il dans la réalité lorsque, par exemple, la sonde utilisée pour une bronchoscopie, entre en contact avec une bronchiole? Cette dernière va nécessairement se déformer sous l'action de la sonde et entraîner une modification entre la position réelle de la sonde et sa position planifiée représentée dans l'image préopératoire.

3.2 Simulation chirurgicale avec modèles déformables

Un niveau de réalisme plus élevé est donc atteint par l'utilisation de modèles déformables, prenant en compte le comportement non-rigide des muscles, de la peau ou de l'ensemble des organes du corps humain. Il est alors possible de dépasser le stade de la planification pour envisager la simulation d'opérations chirurgicales. L'enseignement de l'anatomie peut également tirer parti de modèles déformables comme le montre le système développé par Pieper et son

équipe (Pieper et al., 1991) pour l'étude de la biomécanique de la partie inférieure du corps humain. Un système immersif, intégrant un modèle biomécanique des assemblages muscles-squelette a été développé à cet effet. Il fait appel à une modélisation géométrique de certains éléments ainsi qu'à l'utilisation d'un modèle déformable. Dans une application concernant la jambe, il est ainsi possible de sélectionner un muscle ou un tendon, de voir ses propriétés biomécaniques s'afficher puis d'étudier le comportement de ce muscle sous contrainte, pendant la flexion du genou par exemple (Rosen et al., 1995).

Les travaux que nous avons réalisé en DEA, sur le thème de la chirurgie cranio-faciale (Delingette et al., 1994), appartiennent plutôt au domaine de la planification. L'approche que nous avions proposée permet, dans le cas de malformations crâniennes, de découper des fragments d'os afin de les repositionner en une autre configuration puis, grâce à une modélisation simple des muscles faciaux, de prédire l'aspect final du visage de la personne. Les muscles et la peau sont représentés par des modèles déformables. Koch *et al.* dans (Koch et al., 1996) se sont également intéressés à ce problème. L'approche retenue est basée sur une modélisation par éléments finis d'un problème d'élasticité, utilisé pour le calcul de la nouvelle apparence du visage après correction de malformations maxillofaciales.

Parmi les premiers travaux sur la simulation chirurgicale figurent un simulateur pour la chirurgie du pied (Pieper et al., 1991) et de l'abdomen (Satava, 1992; Satava, 1993). Cette dernière simulation appartient cependant plutôt au domaine de la réalité virtuelle en raison de l'utilisation d'un casque permettant une vision stéréoscopique ainsi que de deux *Data Glove*[3] pour les interactions. La procédure simulée concerne la fermeture de la plaie consécutive à une incision de l'intestin. L'environnement comporte plusieurs organes mais d'une trop grande simplicité géométrique, incompatible avec le degré de détail dont ont besoin les chirurgiens. Le manque de réalisme des déformations entraîne également un trop grand niveau d'abstraction lors des interactions. Enfin, cette simulation visait à recréer les conditions d'une opération chirurgicale classique dans laquelle la manipulation des instruments est plus complexe qu'en chirurgie endoscopique.

Ces résultats, bien que préliminaires, ont montré qu'il était possible de développer de nouveaux outils d'aide à la chirurgie. Avec l'apparition des techniques de chirurgie laparoscopique, la manipulation des instruments devient plus facile à reproduire, permettant l'utilisation de systèmes mécaniques pour les interactions avec les modèles d'organes déformables. Kuehnapfel présente ainsi un environnement de simulation (KISMET) pour la chirurgie laparoscopique (Kuehnapfel et Neisius, 1993). L'application concerne l'ablation de la vésicule biliaire. La manipulation des instruments chirurgicaux est possible, via des instruments réels introduits dans un mannequin et équipés de capteurs de position. La simulation proposée, même si elle gagne en réalisme, présente encore de nombreuses lacunes. Celles-ci sont résolues, du moins partiellement, dans ce que nous avons considéré comme le dernier niveau de simulation.

3. Le Data Glove est un gant équipé de capteurs de position.

3.3 Simulation chirurgicale réaliste en temps-réel

De nombreuses applications en simulation de chirurgie utilisent des modèles déformables surfaciques (Cover et al., 1993), (Kuehnapfel et Neisius, 1993). Cela pose deux problèmes majeurs : (a) les déformations sont moins réalistes en ne tenant pas compte de la nature volumique de la plupart des organes, (b) il est impossible de simuler le résultat d'incisions, élément essentiel dans une simulation chirurgicale. Certaines approches utilisent un modèle surfacique permettant un comportement déformable similaire à un modèle volumique. C'est le cas, par exemple, des travaux de Meseure (Meseure et Chaillou, 1997) où la simulation de découpes reste, par contre, impossible. Le faible nombre de travaux présentant des modèles déformables volumiques s'explique par la grande complexité des calculs, rendant très difficile le maintien de déformations en temps-réel. Bro-Nielsen et Gibson ont cependant proposé, avec des approches très différentes, des méthodes permettant une représentation de déformations volumiques avec des temps de calcul raisonnables (Bro-Nielsen et Cotin, 1996; Gibson et al., 1997). Le modèle de Gibson permet également de représenter le résultat d'incisions des tissus mous. La modélisation physique utilisée par Bro-Nielsen, basée sur la théorie de l'élasticité, permet, par contre, de mieux prendre en compte la notion de milieu continu des solides déformables. De façon générale, la modélisation physique est un point très important car elle permet de prendre en compte, dans le calcul des déformations, les propriétés biomécaniques des tissus mous. Ainsi, Sagar (Sagar et al., 1994) a proposé une méthode pour simuler les réactions de l'œil humain lors de l'incision de la cornée. Pour cela, un modèle complexe du comportement de l'oeil est utilisé : déformations élastiques volumiques dans le cadre de grands déplacements. Le modèle géométrique utilisé est, par contre, relativement simple et aucun détail n'est donné en ce qui concerne les temps de calcul.

Un autre élément, indispensable à une simulation réaliste, concerne la possibilité, lors d'un entraînement au geste opératoire - ou lors d'une simulation d'intervention chirurgicale - d'interactions réalistes. Lorsque le chirurgien ou l'étudiant utilise un simulateur, il a besoin d'un retour visuel mais également kinestésique, associé au geste qu'il effectue. En laparoscopie, nous l'avons déjà mentionné, le retour de forces est encore plus justifié car il permet à l'opérateur de compenser un sens réduit de la vision, celle-ci étant déportée sur un moniteur vidéo.

Les constatations précédentes nous permettent alors d'imaginer quels éléments devrait intégrer un simulateur idéal : (a) le modèle géométrique devrait être d'une grande précision, compatible avec le degré de détails dont a besoin le chirurgien, (b) le modèle physique sous-jacent doit considérer des déformations volumiques, (c) ces déformations, pour être réalistes doivent reposer sur un certain nombre de paramètres issus de la biomécanique, (d) l'ensemble des gestes possibles avec un instrument chirurgical devrait être simulé, afin de pouvoir s'entraîner à tout type d'opération, en particulier l'incision de tissus mous; (e) enfin, il est indispensable de disposer d'un système à retour de forces. Or personne, à notre connaissance, n'a développé de système intégrant tous ces éléments. L'équipe du LIFL (Jambon et al., 1997) a mis au point un simulateur mécanique similaire à celui de KISMET, mais il ne dispose pas encore de retour d'efforts. Le problème du retour d'effort n'est d'ailleurs pas qu'un problème de robotique. La difficulté réside également dans le calcul des forces, nécessitant des fréquences très élevées.

4 Quels sont les problèmes à résoudre?

Les problèmes à résoudre sont de deux ordres. En premier, il nous parait indispensable d'aborder certains aspects de la simulation souvent laissés de côté, tels que la création d'un modèle géométrique adapté, le retour d'efforts, la possibilité de simuler des incisions de tissus mous ou encore la prise en compte, même sommaire, de paramètres biomécaniques dans le modèle déformable (sections 4.1 et 4.2). Ensuite se pose le problème de l'intégration d'un ensemble de "modules" permettant la réalisation d'un simulateur le plus complet possible (section 4.3). Certains des travaux présentés précédemment font état de modèles physiques réalistes, d'autres présentent des interfaces mécaniques intéressantes mais l'intégration de l'ensemble de ces éléments dans un même prototype reste un problème assez complexe et très ouvert.

4.1 Modélisation géométrique

Le premier point important dans une simulation de chirurgie concerne la modélisation géométrique des différents organes. Que ce soit pour la planification chirurgicale, l'entraînement au geste opératoire ou même l'enseignement, il est indispensable d'avoir une représentation géométrique la plus précise possible. Cette modélisation est possible par le biais de différentes méthodes de reconstruction tridimensionnelle permettant la segmentation de structures anatomiques dans des images volumiques.

Pour l'enseignement de l'anatomie ou la planification chirurgicale, ne faisant pas intervenir de modèles déformables, il est possible d'afficher et de manipuler des modèles géométriques complexes en temps-réel grâce aux technologies actuelles en matière de cartes graphiques. Par contre, pour rendre compte des déformations, les différentes techniques possibles se heurtent toutes à la même difficulté : plus le nombre de sommets dans le maillage de la surface est important, plus les temps de calculs sont longs. Par conséquent, l'utilisation d'algorithmes de décimation et/ou d'optimisation de maillages est nécessaire.

Enfin, la modélisation volumique d'une structure anatomique nécessite la création d'un maillage également volumique, sur la base d'une triangulation de la surface, par exemple. Pour des méthodes d'éléments finis, la création d'un tel maillage doit vérifier un ensemble de critères de conformité et de qualité.

4.2 Modélisation physique/biomécanique

La modélisation physique des tissus mous composant un organe a pour but le calcul de déformations de cet organe sous différentes contraintes. Le réalisme d'une simulation passe alors par le choix d'une loi de comportement la plus proche de la loi de comportement réelle. Les interactions entre les différentes structures anatomiques doivent aussi être prises en compte. Le degré de réalisme des déformations dépend également du type d'application. Pour un entraînement au geste opératoire, les retours visuel et d'effort sont plus important que la précision de la déformation. Pour une simulation plus orientée vers la planification, il devient beaucoup plus important d'avoir une déformation réaliste. Dans chaque cas, par contre, il est vital de

connaître les caractéristiques réelles de l'organe simulé afin de quantifier l'erreur entre le modèle utilisé pour la simulation et le modèle réel. La validation médicale de la simulation nécessite une telle étude.

L'étude de la déformation des tissus mous se rapporte au domaine de la biomécanique. Il existe une vaste bibliographie à ce sujet (Fung, 1993). Les travaux menés en biomécanique comprennent aussi bien la recherche de lois de comportement que la détermination expérimentale de paramètres quantitatifs propres à un type d'organe. Les tissus mous les plus étudiés comprennent la peau (Larabee, 1986), les vaisseaux (Fung, 1993), les muscles, le cerveau (Chinsei et Miller, 1997) et le cœur (Hunter et Smail, 1988).

4.3 Développement d'un prototype

La réalisation d'un simulateur chirurgical pour l'entraînement au geste opératoire est un problème complexe. Cependant, le développement d'un prototype reste le seul moyen de valider la totalité des algorithmes mis en œuvre. La possibilité d'interagir en temps-réel avec un organe virtuel permet de percevoir des sensations que la validation du modèle physique ne permet pas de déterminer à l'avance.

Pour parvenir à l'intégration de tous les éléments cités précédemment, avec des fréquences de calcul de l'ordre de 500Hz - nécessaires à l'utilisation d'un système à retour d'efforts - il est nécessaire de faire certains compromis entre réalisme et temps de calcul. Cela impose également le développement de nouveaux algorithmes, les ordres de grandeur entre les temps de calcul des méthodes actuelles étant tels que l'utilisation de machines parallèles ou la spéculation sur la puissance des futurs ordinateurs ne suffisent pas à garantir les fréquences requises. La table 1 résume les contraintes liées à chaque type de simulation.

	Modèle 3D surfacique	*Modèle 3D volumique*	*Modèle déformable*	*Contrainte de temps réel*
Enseignement de l'anatomie	•			
Enseignement de biomécanique	•		•	
Navigation / Planification	•	(•)		
Simulation (sans retour d'efforts)		•	•	• (30 Hz)
Simulation (avec retour d'efforts)		•	•	• (500 Hz)

TAB. 1 – *Tableau récapitulatif des diverses contraintes associées aux objectifs de la simulation.*

5 Contributions

Nos travaux ont consisté, dans un premier temps, à faire un état de l'art des travaux réalisés dans le domaine de la simulation chirurgicale ainsi que les thèmes associés : modèles déformables, analyse numérique, détection de collision, retour d'effort, calculs en temps réel, etc.

Nous avons alors étudié et mis en œuvre un ensemble de méthodes numériques destinées à accélérer les temps de calcul pour la résolution d'un problème d'élasticité linéaire. Nous

sommes ainsi arrivés à la conclusion qu'une méthode d'éléments finis combinée à différents algorithmes d'optimisation "classiques" ne permet pas d'atteindre les fréquences requises pour une simulation de chirurgie. En considérant certaines propriétés de modèles élastiques linéaires, nous avons alors développé un algorithme permettant la déformation en temps-réel de maillages volumiques de géométrie complexe. Les gains de temps obtenus, par rapport à une résolution par une méthode d'éléments finis, sont très importants.

Ceci nous a conduit au développement d'un premier prototype de simulateur de chirurgie laparoscopique, intégrant un système à retour d'efforts. Ce simulateur permet la manipulation interactive de modèles déformables tout en permettant de ressentir les efforts associés à la déformation. L'intégration du système à retour d'effort a également nécessité l'étude de solutions spécifiques pour l'architecture matérielle, la gestion des communications et la détection de collisions en temps-réel.

Nous avons ensuite étudié différentes méthodes pour simuler la découpe de tissus mous. Nous nous sommes intéressés, dans un premier temps, à des modèles de type masses/ressorts, souvent utilisés en simulation. Leur représentation permet de prendre en compte des modifications topologiques du maillage, et leur mise en œuvre est assez simple. Cependant, les modèles masses/ressorts ne prennent pas en compte la nature continue du milieu élastique. Par conséquent, les déformations manquent de réalisme. Nous avons alors introduit une formulation particulière, proche d'une méthode d'éléments finis mais gardant des points communs avec les modèles masses/ressorts. Ce modèle permet de représenter, avec un comportement volumique réaliste, des incisions et déchirements pouvant intervenir lors d'une opération chirurgicale.

Enfin, dans le but d'intégrer les deux modèles précédents dans une même simulation, et de pouvoir ainsi déformer et/ou découper un organe virtuel, nous avons eu recours à un formalisme proche de la décomposition de domaines. Cette approche permet de décrire un même maillage comme étant composé de deux sous-modèles, chacun suivant une loi de comportement et dont les influences mutuelles sont exprimées sous forme de conditions aux limites.

Nous avons ainsi commencé à développer un second prototype, intégrant un système à retour d'effort, dans lequel il sera possible de simuler des opérations chirurgicales simples. Ce prototype devrait être mis en service à l'EITS au début de l'année 1998.

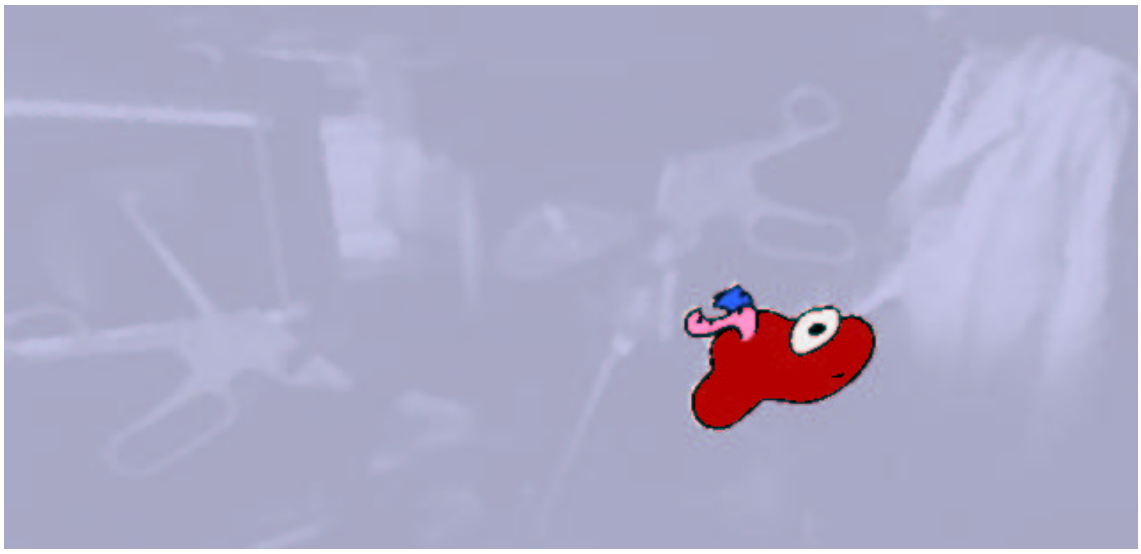
6 Conclusion

Quelque soit son domaine d'application, la simulation a toujours le même objectif : donner, dans des conditions les plus proches de la réalité, un moyen d'entraînement tel que le passage au monde réel se fasse naturellement et avec un taux de réussite optimal. Les applications potentielles des simulateurs de chirurgie sont considérables. Le recours à des animaux de laboratoire pour l'entraînement pourra être réduit, voire supprimé. En offrant la possibilité de recréer des situations inhabituelles, de s'entraîner sur des cas pathologiques, etc. les étudiants pourront acquérir plus rapidement la maîtrise gestuelle nécessaire en chirurgie endoscopique. Enfin, on peut imaginer également que de nouvelles techniques opératoires pourront être mise au point grâce à la simulation.

1.

Étude et modélisation biomécaniques

Dans ce chapitre nous présenterons quelques lois de comportement pouvant être utilisées pour la modélisation de tissus mous. Ces lois étant très générales, nous aborderons ensuite les méthodes expérimentales utilisées pour déterminer les caractéristiques biomécaniques d'un organe particulier et ainsi obtenir des paramètres spécifiques à cet organe. Nous aborderons également le problème de la détermination d'une loi de comportement pour un échantillon de tissus mous, par le biais d'expériences rhéologiques. Les méthodes expérimentales ainsi que les idées générales introduites dans ce chapitre seront utilisées en particulier dans la partie "résultats" de ce manuscrit.



1.1 Introduction

L'une des difficultés majeures de la modélisation d'organes déformables réside dans la détermination d'informations quantitatives sur la biomécanique des tissus mous. Supposons ainsi que la loi de comportement d'un organe soit une loi de Hooke. La détermination des paramètres mécaniques va alors constituer un premier moyen de s'approcher du comportement déformable réel de cet organe. Ce sont les tests œdométriques qui permettent l'évaluation quantitative de ces paramètres, en considérant une loi d'évolution quasi-statique. Mais les éléments nécessaires à une modélisation réaliste ne concernent pas seulement les propriétés élastiques d'un échantillon de tissu. Ils reposent également sur la détermination d'une loi de comportement ainsi que sur la prise en compte d'éventuels contacts avec des organes voisins. La détermination de la loi de comportement repose sur des tests dynamiques, effectués *in vitro* sur des échantillons de tissus. La détermination des contacts entre objets nécessite par contre une analyse *in vivo* sur l'organe entier, à l'aide de techniques d'imagerie médicale, par exemple.

On se rend donc compte que la détermination de paramètres biomécaniques est un problème complexe. Cela explique sans doute la différence importante entre les travaux issus de la communauté des biomécaniciens et ceux présentés dans le domaine de la simulation chirurgicale. Cela reste, cependant, le seul moyen d'obtenir des déformations réalistes, réellement utilisables dans le cadre d'une simulation. Bien entendu, les contraintes supplémentaires imposées en simulation temps-réel requièrent un certain nombre de compromis. Le choix d'une loi de comportement simplifiée en fait partie, mais il est alors indispensable de déterminer l'erreur induite par cette approximation, afin de quantifier le réalisme de la simulation.

Nous allons présenter maintenant quelques travaux ayant fait appel à un ensemble varié de lois de comportement. Nous ferons la distinction entre les applications en biomécaniques et les applications en simulation afin de mieux comprendre quels compromis sont nécessaires pour une simulation en temps-réel.

- **Dans le domaine de la biomécanique**

  Les travaux menés en biomécanique visent à proposer des modèles très proches de la réalité. On peut noter qu'une grande part d'entre eux est réservée à la validation de nouveaux modèles de comportement (voir par exemple (Fung, 1993)) alors que l'autre partie consiste plutôt à appliquer ces modèles à la résolution d'un problème précis. Ainsi, Kaiss *et al.* ont proposé, dans (Kaiss et Le Tallec, 1996), un modèle complexe du contact œil/trépan, pour la prédiction des déformations de la cornée lors d'une opération chirurgicale. La cornée et la sclère sont supposées constituées d'un matériau hyperélastique non-linéaire compressible. La sclère est ainsi modélisée par une loi de Saint Venant Kirchhoff alors que la cornée suit la loi d'un matériau transversalement isotrope. La résolution du problème de contact est faite sous certaines hypothèses, comme, par exemple, le fait que la cornée est en équilibre quasi-statique à chaque instant. Les temps de calcul varient entre 30 min. et 90 min. Les résultats obtenus sont très encourageants mais les auteurs reconnaissent cependant leur incapacité à obtenir des résultats qualitatifs précis, permettant une validation médicale.

  En marge de ce type de travaux, on peut également citer les résultats obtenus par Chen

et Bro-Nielsen. Chen a présenté dans (Chen et Zeltzer, 1992), un modèle de muscle assez complexe dans lequel le muscle est décrit comme un matériau élastique linéaire soumis à des contraintes non-linéaires exercées par les tendons. En dépit de l'approximation du comportement du muscle, les résultats obtenus semblent assez proches de la réalité. Pour une simulation de chirurgie cranio-faciale, Bro-Nielsen (Bro-Nielsen, 1995) a utilisé un modèle équivalent à celui de Saint Venant Kirchhoff. Dans ces deux cas, la contrainte de temps réel est cependant loin d'être respectée.

- **Dans le domaine de la simulation en temps-réel**

  Très peu de travaux ont réussi à combiner comportement réaliste et contrainte de temps-réel. En fait, peu d'auteurs ont utilisé des modèles de matériaux issus de la mécaniques des milieux continus, même aussi simples que des matériaux élastiques linéaires.

  Sagar *et al.* (Sagar et al., 1994) ont développé un environnement de simulation pour une procédure de chirurgie ophtalmologique virtuelle. Dans cette simulation, les auteurs ont particulièrement développé les aspects graphiques ainsi que la modélisation physique du comportement de l'œil. Ainsi, la cornée est modélisée par un matériau non-linéaire, le modèle de Mooney-Rivlin. Un solveur numérique basé sur une méthode d'éléments finis est utilisé pour le calcul de la déformation de la cornée. Les fréquences obtenues sont de 10Hz pour l'affichage et de 1Hz environ pour le calcul de la déformée. Peu de détails sont donnés sur le nombre de noeuds du maillage, mais les temps de calculs obtenus laissent supposer un très faible nombre de sommets - une centaine environ - dans le maillage.

  Parmi les principales références de travaux ayant eu recours à un modèle linéaire se trouvent (Bro-Nielsen, 1997), (Pieper et al., 1992), (Cotin et al., 1996) et (Koch et al., 1996). Parmi ceux-ci, seules les méthodes d'optimisation introduites dans (Bro-Nielsen, 1997) et (Cotin et al., 1996) ont permis, à notre connaissance, d'obtenir des fréquences de calcul suffisamment élevées pour une application en temps-réel.

Une première constatation s'impose : seuls des modèles entraînant une complexité numérique peu élevée - comme l'élasticité linéaire - peuvent, à l'heure actuelle, autoriser des interactions en temps-réel. Malgré tout, nous pensons qu'il est indispensable d'avoir recours à des éléments de biomécanique pour améliorer les simulations proposées jusqu'à présent. La première étape consiste, au minimum, en une étude de l'organe à simuler afin de valider et, éventuellement améliorer, les résultats. Ensuite, en faisant un certain nombre de compromis, il est envisageable de se rapprocher de la loi réelle de comportement. En gardant la possibilité de comparer le modèle utilisé pour la simulation et le modèle réel, on peut alors déterminer quelle est la marge d'erreur.

Nous allons maintenant présenter quelques lois comportementales parmi les plus utilisées pour représenter la déformation de tissus mous. Nous exposerons ensuite un ensemble de méthodes expérimentales permettant de déterminer, pour un échantillon de tissu, les paramètres de la loi de comportement permettant de représenter au mieux les caractéristiques déformables de cet échantillon. Enfin, nous aborderons les possibilités offertes par les techniques actuelles d'imagerie médicale pour la mesure de certains paramètres ou la détermination de conditions aux limites.

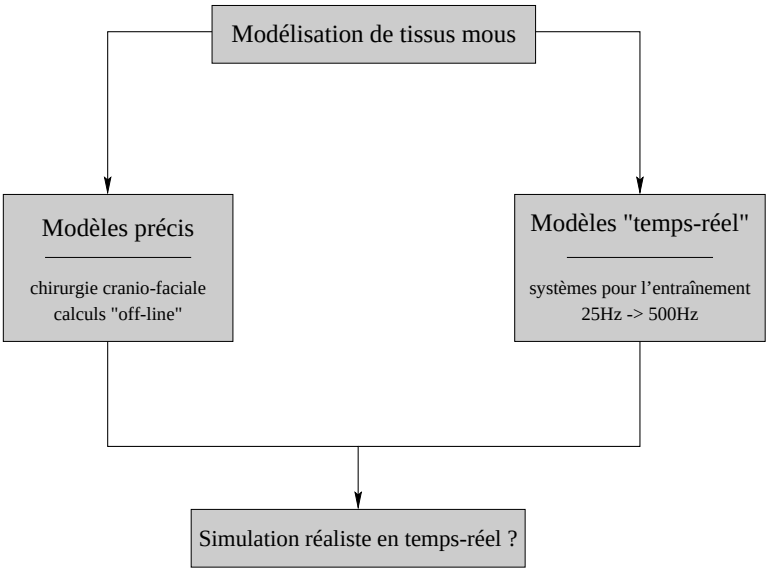


FIG. 1.1 – *Les modèles simples de lois de comportement utilisés pour la simulation en temps réel devront évoluer vers des modèles plus complexes afin d'augmenter leur niveau de réalisme.*

1.2 Principales lois de comportement

Le premier élément déterminant dans le calcul de la déformation d'un organe est le choix de la loi de comportement. C'est aussi la partie la plus complexe de l'étude. Pour y parvenir, des tests rhéologiques sont nécessaires, après avoir déterminé une loi connue ayant une forte probabilité de correspondre à la loi de comportement réel de l'organe. À l'issue des tests rhéologiques, on trouvera ainsi que tel tissu a un comportement élastique linéaire et on devra déterminer les limites de validité de la loi linéaire. Pour un autre échantillon, la loi sera peut-être viscoélastique non-linéaire; il faudra donc déterminer le coefficient d'amortissement. Il est également possible que la loi de comportement choisie initialement soit trop éloignée de la réalité, auquel cas il est nécessaire de recommencer les expériences, en choisissant un nouveau modèle théorique.

Les modèles les plus couramment utilisés sont les modèles élastiques. Leur caractéristique principale est une relation déterministe entre contrainte et déformation. À l'intérieur de cette classe de matériaux élastiques, se trouvent, par exemple, les modèles de Mooney-Rivlin, Saint Venant Kirchhoff et les matériaux élastiques linéaires. La différence entre ces lois de comportement réside dans les relations entre contraintes, déformations, forces et déplacements. Les modèles continus décrits dans ce chapitre peuvent tous être décrits par un ensemble de relations entre ces quatre entités. Un *déplacement* représente la variation de position d'une particule élémentaire du milieu continu. Si on considère un petit élément de volume du milieu continu, ce mouvement induit un changement dans la configuration de cet élément de volume, mesuré par un tenseur de *déformation*. Ce tenseur - en pratique une matrice 3x3 - permet d'exprimer l'élongation, le cisaillement, etc. exercés sur l'élément de volume. L'effet de *forces* externes appliquées sur un élément de volume est mesuré à l'aide du tenseur des *contraintes*. Notons enfin que les expressions décrivant les modèles élastiques dérivent de relations beaucoup plus

générales, issues de la mécanique des milieux continus. Pour plus de détails, il est possible de consulter (Ciarlet, 1987), par exemple.

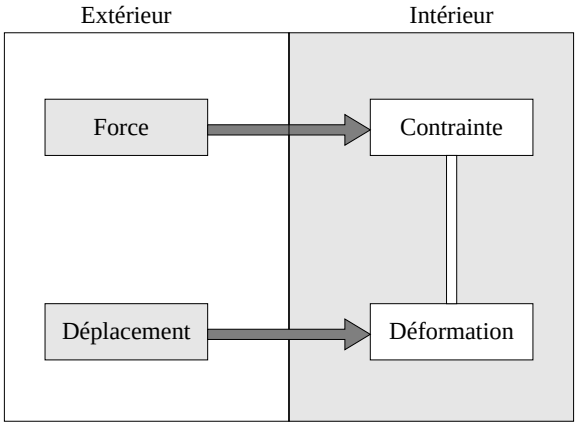


FIG. 1.2 – *La loi de comportement d'un matériau établit les relations entre contraintes, déformations, forces et déplacements.*

1.2.1 Élasticité linéaire

La théorie de l'élasticité linéaire tridimensionnelle a souvent été utilisée pour calculer la déformation de modèles volumiques. Cela s'explique par les propriétés des équations rendant plus facile la mise en oeuvre d'une méthode numérique de résolution. De plus, tous les matériaux possèdent un comportement linéaire, à condition que les contraintes et les déformations auxquelles ils sont soumis demeurent suffisamment faibles. Dans la pratique on estime que si la déformation ε est inférieure ou égale à 10^{-2} la condition de linéarité est vérifiée (Couarraze et Grossiord, 1991). Selon les caractéristiques mécaniques du solide, on peut avoir un domaine de linéarité étendu jusqu'à des valeurs de l'ordre de 10^{-1}.

Soit S un solide déformable suivant une loi élastique linéaire. Soit u le champ de déplacement associant à la position de chaque particule de S avant déformation, sa position dans la configuration déformée. Les composantes $\varepsilon_{jk}(u)$ du tenseur de déformation ε s'expriment, dans la théorie linéaire :

$$\varepsilon_{jk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) \qquad j = 1,2,3 \quad k = 1,2,3 \tag{1.1}$$

En analyse complètement tridimensionnelle interviennent six composantes de déformation. La matrice $[\boldsymbol{\varepsilon}]$ des déformations peut donc s'écrire :

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = [\boldsymbol{\varepsilon}_{x_1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{x_2}, \boldsymbol{\varepsilon}_{x_3}, \boldsymbol{\gamma}_{x_1x_2}, \boldsymbol{\gamma}_{x_1x_3}, \boldsymbol{\gamma}_{x_2x_3}]^T \tag{1.2}$$

Soit $\boldsymbol{u}$ le déplacement d'une particule donnée, la relation déplacement/déformation peut s'écrire sous forme matricielle :

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = [\boldsymbol{L}]\boldsymbol{u} \tag{1.3}$$

Dans le cas de l'élasticité linéaire, $[\boldsymbol{L}]$ désigne l'opérateur linéaire suivant :

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{x_1} \\ \varepsilon_{x_2} \\ \varepsilon_{x_3} \\ \gamma_{x_1x_2} \\ \gamma_{x_1x_3} \\ \gamma_{x_2x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \dfrac{\partial}{\partial x_2} \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = [\boldsymbol{L}]\boldsymbol{u} \tag{1.4}$$

Les relations contrainte/déformation (loi de Hooke) donnent alors les composantes $\sigma_{jk}(u)$ du tenseur des *contraintes* σ :

$$\sigma_{jk} = \sum_{l=1}^{3} \sum_{m=1}^{3} E_{jklm} \varepsilon_{lm}(u) \tag{1.5}$$

Soit sous forme matricielle :

$$[\boldsymbol{\sigma}] = [\boldsymbol{E}][\boldsymbol{\varepsilon}] \tag{1.6}$$

où $[\boldsymbol{E}]$ est la matrice définissant les propriétés élastiques du matériau.

Remarque : les coefficients élastiques E_{jklm} sont indépendants du tenseur de déformation, ils sont symétriques, c'est-à-dire :

$$E_{jklm} = E_{kjlm} = E_{lmjk} \tag{1.7}$$

et elliptiques, c'est-à-dire :

$$E_{jklm}\varepsilon_{jk}\varepsilon_{lm} \geq \alpha\, \varepsilon_{jk}\varepsilon_{jk}, \quad \alpha \text{ constant } > 0, \quad \forall \varepsilon_{jk} = \varepsilon_{kj} \tag{1.8}$$

Dans le cas d'un matériau *non homogène*, les coefficients d'élasticité sont fonction des variables x_1, x_2, x_3. On peut aussi noter que la loi de comportement (1.5) correspond au cas d'un matériau *anisotrope*. Dans le cas d'un matériau isotrope, les coefficients E_{jklm} sont donnés par :

$$E_{jklm} = \lambda\delta_{jk}\delta_{lm} + \mu(\delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{jm}\delta_{kl}) \quad \forall\, \varepsilon_{jk} = \varepsilon_{kj} \tag{1.9}$$

où λ et μ sont les *coefficients de Lamé* et δ est le symbole de Kronecker. La relation (1.5) peut alors s'écrire :

$$\sigma_{jk}(u) = \lambda\varepsilon_{ll}(u)\delta_{jk} + 2\mu\varepsilon_{jk}(u) \tag{1.10}$$

1.2.2 Élasticité non-linéaire

Nous nous contentons de donner ici les principales propriétés de deux modèles élastiques classiques non-linéaires. Ces deux modèles font partie d'une catégorie de matériaux appelés *matériaux hyperélastiques*. Une description plus détaillée pourra être trouvée dans (Ciarlet, 1987) ou dans (Bro-Nielsen, 1997).

- **Modèle de Mooney-Rivlin**
  Le modèle de Mooney-Rivlin décrit une relation non-linéaire entre déformation et contraintes ainsi qu'entre déplacements et déformations. Il existe deux formulations de cette loi de comportement, selon que le matériau est considéré compressible ou non.
  Le modèle de Mooney-Rivlin a été utilisé en simulation de chirurgie pour représenter le comportement de tissus humains (Sagar et al., 1994).
- **Modèle de Saint Venant Kirchhoff**
  Le modèle de Saint Venant Kirchhoff décrit une relation linéaire entre déformation et contraintes mais non-linéaire entre déplacements et déformations. C'est le plus utilisé des modèles non-linéaires hyperélastiques. En linéarisant les relations *déformation*/déplacement, sous l'hypothèse de petits déplacements, on obtient alors la formulation de la loi élastique linéaire exposée précédemment.
  Le modèle de Saint Venant Kirchhoff a, par exemple, été utilisé dans le domaine de l'animation par ordinateur (Terzopoulos et Fleisher, 1988).

1.2.3 Comportement viscoélastique linéaire

Un matériau est dit viscoélastique linéaire si, soumis à une contrainte $\sigma(t)$ et une déformation $\varepsilon(t)$, il suit une loi du type :

$$P(\sigma(t)) = Q(\varepsilon(t)) \tag{1.11}$$

où P et Q sont des opérateurs linéaires de la forme :

$$P = \sum p_r \frac{d^r}{dt^r} \tag{1.12}$$

et

$$Q = \sum q_r \frac{d^r}{dt^r} \tag{1.13}$$

Le comportement d'un corps viscoélastique linéaire est intermédiaire entre le comportement d'un solide élastique parfait et d'un liquide visqueux newtonien. C'est pourquoi il est souvent modélisé par un assemblage de ressorts et d'amortissements en série ou en parallèle. Les modèles les plus classiques sont les modèles de Kelvin-Voigt, de Boltzmann et de Maxwell-Kelvin Voigt. L'équation rhéologique d'un solide élastique parfait s'écrit :

$$\varepsilon(t) = J\sigma(t) \tag{1.14}$$

où J est un coefficient constant, dépendant de la nature du solide, appelé compliance élastique. On définit alors $G = \frac{1}{J}$ le module de cisaillement.

L'équation rhéologique d'un liquide visqueux newtonien est :

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\sigma(t)}{C} \tag{1.15}$$

où C est le coefficient de viscosité.

Si on soumet alors un matériau à des contraintes de cisaillement $\sigma(t)$ et des déformations $\varepsilon(t)$ sinusoïdales de même fréquence ω, on peut définir son module de cisaillement complexe $G(\omega)$ par :

$$G(\omega) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon(t)} \tag{1.16}$$

Le module de cisaillement complexe $G(\omega)$ peut se décomposer en $G(\omega) = G'(\omega) + i\, G''(\omega)$, où G' est appelée composante de stockage et G'' composante de perte. L'argument de G est noté δ et appelé angle de perte. On a donc :

$$tan\ \delta = \frac{G''}{G'} \tag{1.17}$$

Ces relations seront utiles lors des tests rhéologiques, de même que les modèles théoriques, que nous allons introduire maintenant, seront utilisés pour caractériser le comportement d'un matériau viscoélastique.

Le comportement viscoélastique linéaire le plus général est défini en construisant un modèle constitué d'un assemblage de ressorts et d'amortisseurs. Il s'agit d'un assemblage symbolique : l'équation rhéologique sera obtenue en utilisant les équations rhéologiques des constituant élémentaires, et en respectant les lois d'association en série et en parallèle des différents éléments. Il ne faut donc pas commettre l'erreur d'établir un lien quelconque entre la structure réelle du matériau et la structure de son modèle représentatif, bien qu'en pratique c'est ce qui est fait dans les modèles masses/ressorts. Mais nous y reviendrons plus en détail au chapitre (4).

- **Modèle de Kelvin - Voigt**

  Un solide de Kelvin-Voigt est constitué d'un ressort et d'un amortisseur en parallèle (cf. figure 1.3). Si on le soumet à une contrainte σ et une déformation ε, la loi de comportement s'écrit :

  $$C\dot{\varepsilon} + k\varepsilon = \sigma \tag{1.18}$$

  avec C la constante de viscosité de l'amortisseur et k la raideur du ressort. Si on considère que la contrainte $\sigma(t)$ et la déformation $\varepsilon(t)$ sont sinusoïdales de même fréquence ω, on a :

  $$\sigma(t) = \sigma_0 e^{i\omega t + \phi} \tag{1.19}$$

  et

  $$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{i\omega t} \tag{1.20}$$

Dans ce cas, G est donné par $G(\omega) = k + iC\omega$ et on en déduit immédiatement :

$$\begin{cases} G' = k \\ G'' = C\omega \end{cases} \tag{1.21}$$

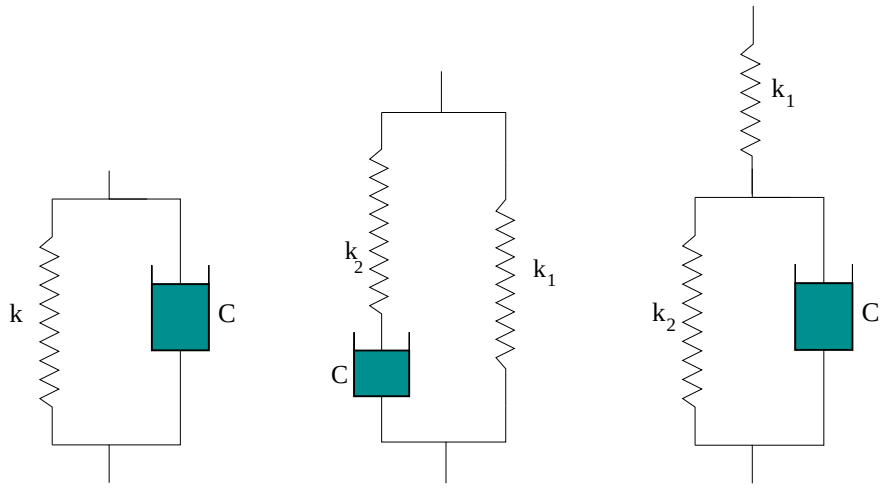


FIG. 1.3 – **À gauche** *: modèle de Kelvin Voigt.* **Au centre** *: modèle de Boltzmann ou modèle de Maxwell à trois éléments.* **À droite** *: modèle de Maxwell Kelvin Voigt.*

- **Modèle de Boltzmann**

Le modèle de Boltzmann décrit un comportement viscoélastique par un assemblage de deux ressorts et d'un amortisseur, comme illustré dans la figure 1.3. Les relations sont les suivantes :

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \\ \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \end{cases} \tag{1.22}$$

Pour le ressort, la déformation ε_1 s'exprime :

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{k_1} \tag{1.23}$$

La branche du modèle contenant le ressort et l'amortisseur en série est régie par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{\varepsilon_2} = \frac{\dot{\sigma_2}}{k_2} + \frac{\sigma_2}{C} \tag{1.24}$$

En introduisant le système (1.22) et la dérivée de l'équation (1.23) dans la relation (1.24), on obtient :

$$(k_1 + k_2)\dot{\varepsilon} + \frac{k_1 k_2}{C}\varepsilon = \dot{\sigma} + \frac{k_2}{C}\sigma \tag{1.25}$$

En considérant une contrainte et une déformation harmoniques, l'équation précédente devient :

$$G(\omega) = k_1 + \frac{k_2\omega^2}{(\frac{k_2}{C})^2 + \omega^2} + i\frac{\frac{k_2^2}{C}\omega}{(\frac{k_2}{C})^2 + \omega^2} \tag{1.26}$$

L'équation (1.26) donne les modules de conservation G' et de perte G'' :

$$\begin{cases} G'(\omega) = k_1 + \dfrac{k_2\omega^2}{(\frac{k_2}{C})^2 + \omega^2} \\ G''(\omega) = \dfrac{\frac{k_2^2}{C}\omega}{(\frac{k_2}{C})^2 + \omega^2} \end{cases} \tag{1.27}$$

La fonction de relaxation G est définie pour une déformation constante. Donc l'équation différentielle (1.25) devient :

$$\dot{G} + \frac{k_2}{C}G = \frac{k_1 k_2}{C} \tag{1.28}$$

La solution de cette équation est de la forme : $G(t) = k_1 + \lambda e^{-\frac{k_2}{C}t}$, avec λ constant. À $t = 0$ nous avons $G_0 = k_1 + k_2$ d'où $\lambda = k_2$. La solution finale est alors définie par :

$$G(t) = k_1 + k_2 e^{-\frac{k_2}{C}t} \tag{1.29}$$

- **Modèle de Maxwell - Kelvin Voigt**

  Dans la configuration particulière de ressorts et d'amortisseurs du modèle de Maxwell - Kelvin Voigt, nous avons les relations suivantes entre contraintes et déformations :

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma}{k_1}$$

  En suivant la même démarche que pour le modèle de Boltzmann, on arrive à l'expression suivante de $G(t)$:

$$G(t) = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} + \frac{k_1^2}{k_1 + k_2} e^{-\frac{k_1 + k_2}{C}t} \tag{1.30}$$

1.3 Tests œdométriques

Les tests œdométriques décrits ici sont réalisés dans le but de déterminer les paramètres mécaniques élastiques linéaires de tissus mous, sous l'hypothèse que le matériau est isotrope homogène. Ces tests permettent d'obtenir le module de compressibilité K et le coefficient de Poisson ν. On peut alors en déduire les coefficients de Lamé. Ces tests sont bien entendu réalisés *in vitro*, en essayant cependant de réduire au minimum le temps écoulé entre le prélèvement de l'échantillon et l'expérience. On cherche ainsi à éviter une trop grande différence de comportement entre l'échantillon *in vitro* et l'échantillon *in vivo*.

Le protocole expérimental consiste à placer un échantillon cylindrique de tissus dans une enceinte également cylindrique et rigide. Un vérin hydraulique est alors utilisé pour comprimer l'échantillon dans l'enceinte. Contrairement aux tests décrits au chapitre (3), la déformation radiale de l'échantillon est rendue impossible par les parois du cylindre. Seuls le déplacement axial du piston et la charge appliquée sur ce cylindre par l'échantillon sont enregistrés. On

peut ainsi tracer la courbe reliant la force mesurée à la déformation induite. La déformation (la compression) de l'échantillon de tissus est calculée à partir de la position de départ du piston et de sa position d'arrivée. La courbe n'étant pas parfaitement linéaire, les paramètres mécaniques sont évalués dans la partie linéaire de la courbe.

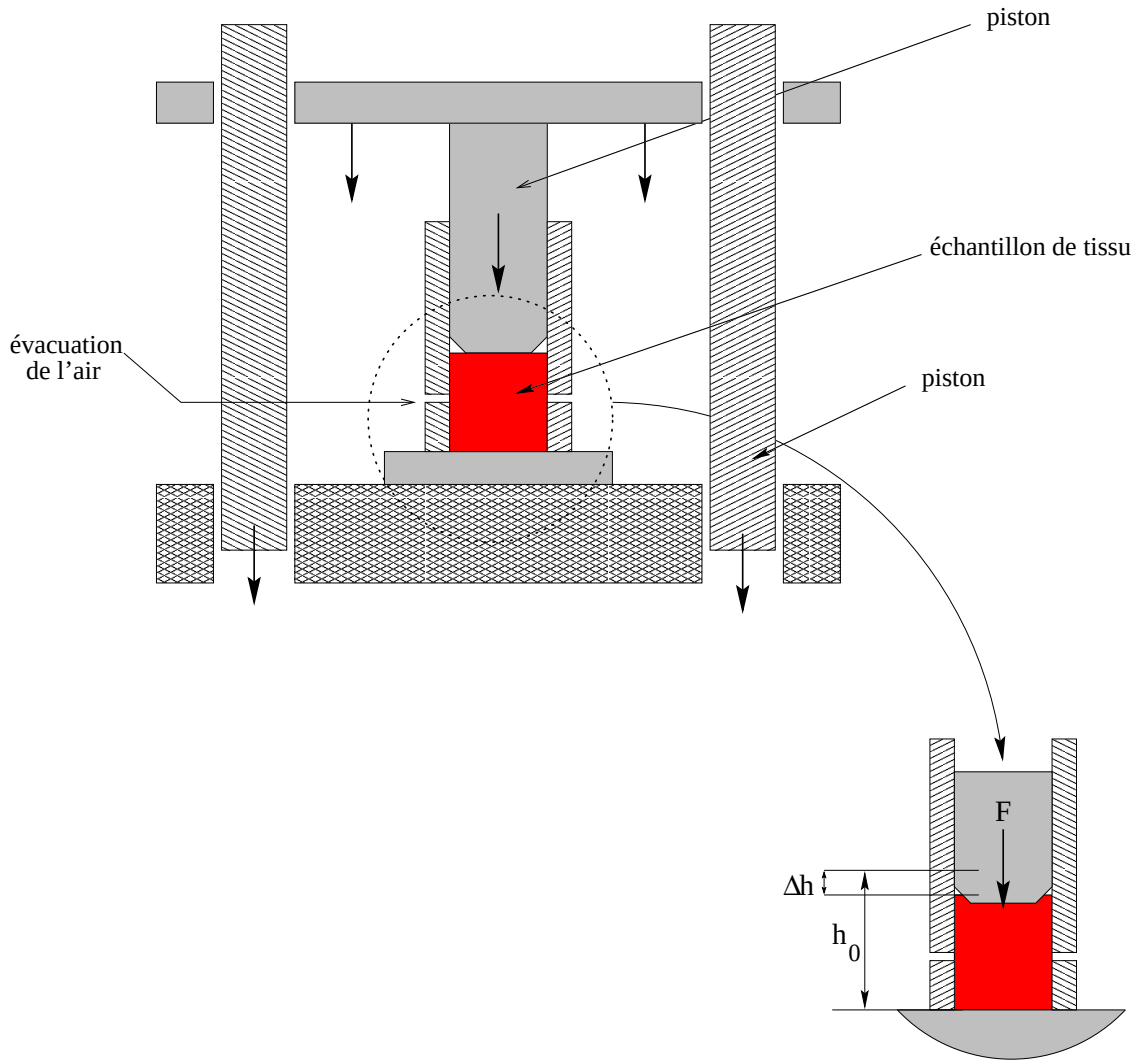


FIG. 1.4 – *Dispositif expérimental de mesure du coefficient de compressibilité.*

Le module de compressibilité d'un matériau élastique est déterminé par la relation suivante :

$$P = -K\frac{\Delta V}{V} = -K\frac{\Delta h}{h_0} = \frac{F}{s} \tag{1.31}$$

où P représente la pression exercée sur l'échantillon, V le volume initial du matériau, ΔV la variation de volume et K le module de compressibilité.

Dans le cas correspondant à la figure (1.4), comme la déformation de l'échantillon est contrainte par le cylindre, seule la variation de hauteur est significative. On définit le module de compressibilité K par :

$$K = \frac{F}{s}\frac{h_0}{\Delta h} \tag{1.32}$$

où F est la force appliquée et s la section de l'échantillon cylindrique (s est constante au cours du temps).

On a par ailleurs les relations suivantes, qui serviront au calcul des coefficients de Lamé λ et μ et du coefficient de Poisson ν.

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu = \frac{E_Y}{3(1-2\nu)} \tag{1.33}$$

$$\nu = \frac{E_Y}{2(1+\nu)} \tag{1.34}$$

$$\lambda = \frac{E_Y \nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \tag{1.35}$$

Les tests expérimentaux donnent une valeur moyenne du coefficient de compressibilité K. Pour cette valeur de K on fait alors varier la valeur du module d'Young E_Y et on mesure l'évolution du coefficient de Poisson ainsi que les coefficients de Lamé en fonction de E_Y. La plage de valeurs dans laquelle varie E_Y est déterminée empiriquement.

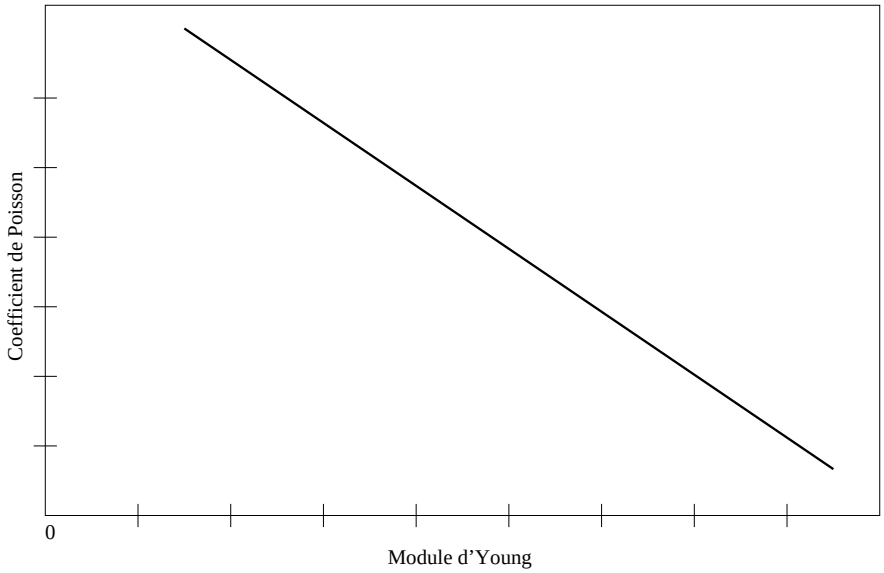


FIG. 1.5 – *Variation du coefficient de Poisson ν en fonction du module d'Young E_Y pour une valeur de K fixée.*

1.4 Tests rhéologiques

Nous décrivons ici la phase expérimentale permettant de déterminer les paramètres d'un modèle viscoélastique. Le dispositif utilisé est un rhéomètre plateau/plateau en rotation, similaire à celui décrit à la figure (1.6). Les conditions expérimentales sont assez simples : un échantillon de tissus mous est comprimé entre deux plateaux. Un de ces plateaux est rotatif et l'expérience consiste par conséquent à appliquer une série d'oscillations périodiques à ce plateau, entraînant une contrainte de cisaillement dans l'échantillon. Après détermination du

domaine de linéarité des déformations, nécessaire pour l'application des relations décrites à la section (1.2.3), un ensemble de courbes expérimentales est tracé par le rhéomètre. La comparaison de ces courbes aux courbes théoriques des modèles de Kelvin-Voigt, Maxwell, etc. permet de déterminer la loi de comportement la plus proche de celle du tissu étudié.

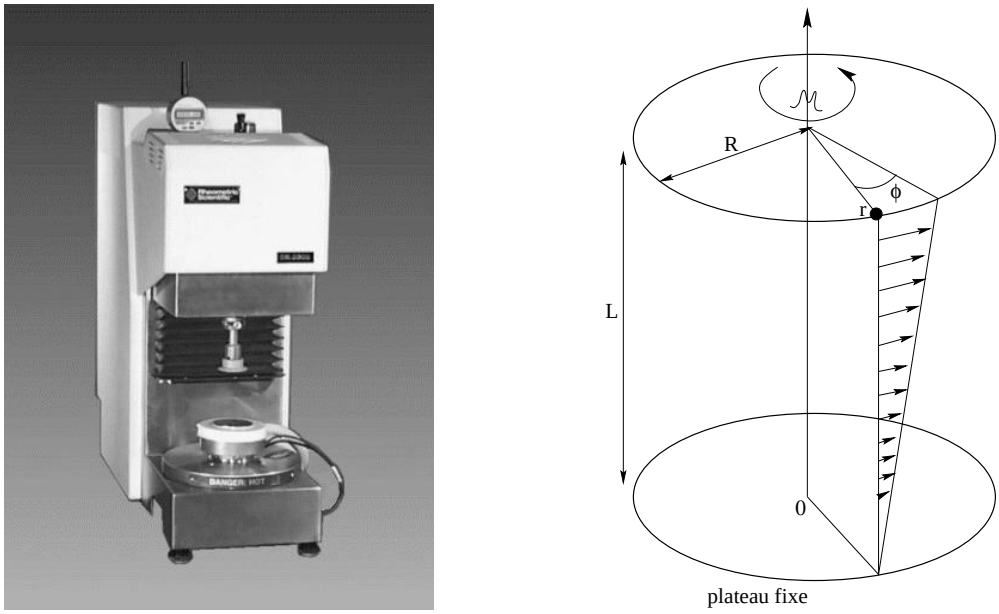


FIG. 1.6 – *Le rhéomètre est un dispositif permettant, par application de contraintes sinusoïdales, la mesure de paramètres mécaniques dynamiques de tissus mous.*

Considérons le rhéomètre décrit à la figure (1.6). Il comporte deux plateaux, l'un fixe, l'autre soumis à un couple $\mathcal{M}$. On introduit ainsi une contrainte de cisaillement dans l'échantillon de tissu. En appliquant un couple sinusoïdal $\mathcal{M}(t)$ au plateau mobile, celui-ci acquiert une rotation sinusoïdale déphasée $r(t)$. En utilisant les grandeurs complexes associées, on obtient :

$$r = r_0 e^{i\omega t}$$

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 e^{i(\omega t + \Phi)}$$

où Φ est le déphasage entre r et $\mathcal{M}$.

On en déduit (cf. (Couarraze et Grossiord, 1991)) que :

$$\begin{aligned} G' &= \frac{\mathcal{M}_0}{r_0 b} cos\Phi \\ G'' &= \frac{\mathcal{M}_0}{_0 b} sin\Phi \end{aligned} \tag{1.36}$$

où b représente une constante propre au type de rhéomètre utilisé. Dans notre cas $b = \frac{\pi}{2}\frac{R^4}{L}$, avec R le rayon des plateaux et L la distance entre ceux-ci. On en déduit alors les expressions de G' et G'' pour ce type de rhéomètre :

$$\begin{cases} G' = \dfrac{\mathcal{M}_0}{r_0}\dfrac{2L}{4\pi R^4}cos\Phi \\ \\ G'' = \dfrac{\mathcal{M}_0}{r_0}\dfrac{2L}{4\pi R^4}sin\Phi \end{cases} \tag{1.37}$$

La phase expérimentale est alors très simple : pour déterminer G' et G'', on fait fonctionner le rhéomètre en mode oscillatoire, alors qu'un des plateaux du rhéomètre applique une contrainte sur l'échantillon de tissus. On commence par faire une recherche du domaine de linéarité puis une série de tests est effectuée à différentes fréquences et contraintes. La machine détermine alors G' et G'' d'après la relation 1.37. Il ne reste plus alors qu'à comparer courbes expérimentales et courbes théoriques pour décider de la meilleure loi de comportement du matériau.

1.5 Conclusion

Nous avons présenté, dans ce chapitre, deux techniques expérimentales pour la mesure de paramètres biomécaniques. Nous y ferons référence plus tard pour la validation du modèle que nous proposerons au chapitre (3). En parallèle, nous avons donné quelques lois classiques souvent utilisées pour modéliser le comportement de matériaux déformables tels que les tissus mous. Ces lois comptent parmi les plus simples et, en se reportant au livre de Fung (Fung, 1993) par exemple, on peut se rendre compte de l'étendue des modèles proposés. Malgré tout, certains problèmes, que nous estimons fondamentaux pour une application en simulation de chirurgie, ne sont pas résolus par les théories et méthodes expérimentales actuelles.

Tout d'abord, les rhéomètres actuels impliquent que les mesures soient faites *in vitro*, souvent sur des échantillons cylindriques et selon une seule direction. Ceci pose donc deux problèmes. Tout d'abord, les propriétés mécaniques des tissus *in vitro* sont en général sensiblement différentes des propriétés réelles *in vivo*. Ensuite, la plupart des mesures étant réalisées en appliquant des contraintes uniaxiales, il n'est possible de ne prendre en compte que des matériaux homogènes et isotropes. Ceci pose de nombreux problèmes de validation lorsque l'on veut étendre les résultats obtenus sur un échantillon à l'organe entier. On peut cependant penser que, dans un futur proche, il sera possible d'utiliser de nouvelles techniques d'imagerie pour déterminer les paramètres élastiques *in vivo*. Ainsi, dans (Manduca et al., 1996) sont décrites des expériences de mesures de paramètres élastiques utilisant une technique d'imagerie dérivée de l'IRM et appelée *Magnetic Resonance Elastography (MRE)*. Le principe consiste à propager des contraintes sous forme d'ondes acoustiques, dont l'effet sur les tissus mous peut être visualisé dans les images obtenues. Les premières expériences ont montré qu'il est ainsi possible d'estimer les paramètres élastiques pour de petites déformations.

En conclusion de ce chapitre, nous pouvons dire que l'intégration de paramètres biomécaniques dans un modèle d'organe destiné à la simulation, est un problème complexe, nécessitant des dispositifs expérimentaux spécialisés. Cela montre également qu'il est difficile de prétendre

réaliser une simulation "générique", sur différents organes, étant donnée la variété de lois de comportement et de paramètres de ces lois. Nous avons, par conséquent, décidé de nous intéresser principalement à la *simulation de chirurgie hépatique*, dont l'intérêt médical sera exposé au chapitre (8). Cette restriction, nécessaire pour le choix d'une loi de comportement, ne restreint pas pour autant les résultats que nous allons présenter au seul cas du foie : tous les tissus mous dont le comportement peut être approché par la même loi sont susceptibles d'être modélisés par notre méthode. Nous avons ainsi fait l'hypothèse d'une loi de comportement linéaire élastique, ne disposant pas, durant la majeure partie de cette thèse, de mesures biomécaniques concernant les tissus hépatiques. Comme nous allons le voir dans les deux chapitres suivants, cette hypothèse de linéarité nous a permis d'aborder, par un problème simple, la mise en oeuvre d'une méthode de résolution par éléments finis. Les propriétés de la théorie linéaire s'avéreront également très utiles pour aborder le problème du temps-réel.

2.

Méthode des éléments finis

Nous décrivons dans ce chapitre la méthode des éléments finis telle que nous l'avons appliquée pour notre problème. Cette description relativement détaillée a pour but d'aider à la compréhension des différents algorithmes et notions introduits dans les chapitres suivants. Sans perte de généralité, nous prendrons comme exemple la résolution du problème de l'élasticité linéaire. Nous verrons ensuite comment prendre en compte différentes conditions aux limites.

2.1 Introduction

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, une modélisation réaliste des déformations d'un organe repose en partie sur le choix d'une loi de comportement correcte. Cependant, la méthode de résolution des équations du modèle présente également une grande importance. Ainsi, dans la majorité des travaux menés dans le domaine de la biomécanique, les auteurs ont eu recours à une modélisation tridimensionnelle par éléments finis pour la résolution de problèmes d'élasticité, viscoélasticité, etc. Dans une modélisation par éléments finis, le solide est décomposé en surfaces ou volumes élémentaires tels que des triangles ou des tétraèdres. Les paramètres de la déformation sont, dans le cas le plus simple, les positions des sommets du maillage ainsi obtenu. La déformation est alors définie sur chaque élément par des fonctions d'interpolation polynomiales. La continuité entre éléments est garantie par la construction du maillage et la définition des fonctions de forme. Il n'y a, en général, pas de problème de représentation géométrique du modèle ou de sa déformée, puisqu'on peut utiliser le maillage défini par les éléments finis, en particulier lorsque l'on utilise des éléments tétraédriques, associés à une triangulation de la surface.

La méthode des éléments finis (*MEF*) est utilisée depuis de nombreuses années pour la résolution de différents problèmes, en particulier en mécanique des structures ou en dynamique des fluides (Zienkiewicz, 1977). Elle est particulièrement bien adaptée à la résolution des équations aux dérivées partielles. Elle s'applique aux problèmes stationnaires ou dépendant du temps, linéaires ou non, à une, deux ou trois variables d'espace indépendantes. La méthode des éléments finis présente un avantage essentiel sur la méthode des différences finies : le choix du maillage du domaine est beaucoup plus souple. Ainsi, on peut choisir, de façon quasiment arbitraire, la position et le nombre de nœuds dans ce maillage. Pour des applications dans le domaine médical, où la plupart des structures anatomiques sont d'une géométrie complexe, cette possibilité est indispensable.

Les modèles éléments finis ont été parfois utilisés pour le calcul de déformations de tissus mous, muscles, etc. sous différentes contraintes mécaniques. Ainsi, depuis quelques années, cette méthode est utilisée comme une alternative aux classiques modèles masses/ressorts (Baumann et Glauser, 1996; Meseure et Chaillou, 1997; Kuehnapfel et Neisius, 1993); un des principaux avantages par rapport à ces modèles étant - en dehors de la précision numérique - l'indépendance du résultat par rapport à la topologie du maillage. Ainsi, Keeve (Keeve E., 1996) a utilisé des éléments finis prismatiques dans une simulation de chirurgie plastique où les tissus adipeux sont modélisés par une loi linéaire. Pour un autre type d'application, Gourret *et al.* (Gourret et al., 1989) calculent la déformation de la peau et des tissus des doigts d'une main lors de la simulation de la préhension d'un objet lui-même déformable.

La méthode des éléments finis reste par contre une méthode complexe à mettre en oeuvre et très coûteuse en temps de calculs. C'est pour cette raison que la plupart des travaux présentés dans le domaine de la simulation de chirurgie en temps-réel n'utilise pas cette technique. Ainsi, les travaux de (Baumann et Glauser, 1996; Meseure et Chaillou, 1997; Kuehnapfel et Neisius, 1993), par exemple, font référence à une modélisation différente du comportement, ne nécessitant pas l'utilisation d'une telle méthode de résolution. Les résultats obtenus sont alors

souvent éloignées de la réalité physique, en raison d'une double approximation, due à la fois à la loi de déformation et à la méthode de résolution.

Nous avons souhaité présenter, de façon assez détaillée, la méthode des éléments finis pour trois raisons principales. La première raison est de montrer que la mise en œuvre de cette technique n'est pas d'une complexité très élevée dès lors que l'on s'intéresse à des problèmes linéaires. La seconde raison est relative à l'historique de nos travaux. C'est en développant une méthode de résolution par éléments finis pour la résolution d'un problème d'élasticité linéaire, et en cherchant ensuite à optimiser les temps de calculs, que nous avons eu l'idée de la méthode présentée au chapitre (3). Enfin, certaines notations et concepts introduits dans ce chapitre, seront utiles à la compréhension du chapitre (5).

Ce chapitre s'articule autour des points suivants : formulation variationnelle, présentation de la *MEF* et mise en œuvre numérique, puis, résolution du système linéaire et introduction de conditions aux limites.

Sans perte de généralité, nous décrivons la méthode pour la résolution d'un problème d'élasticité linéaire, en utilisant des éléments tétraédriques de continuité C^0. Pour une approche plus générale, concernant des problèmes non-linéaires ou des éléments de forme différente ou de continuité plus élevée, le lecteur pourra consulter les livres de Zienkiewicz (Zienkiewicz, 1977) ou de Bathe (Bathe, 1982).

2.2 Formulation variationnelle

Soit Ω la configuration d'un corps élastique avant déformation. Nous admettrons que le domaine Ω est suffisamment lisse. Sous l'action d'un champ de forces volumiques f_Ω, de forces surfaciques f_Γ et en accord avec un ensemble de conditions aux limites, le corps élastique est déformé et prend une nouvelle configuration Ω^*. Le problème est alors de déterminer le champ de déplacement u qui associe à la position $\boldsymbol{p}$ de chaque particule du corps avant déformation, sa position $\boldsymbol{p^*}$ dans la configuration finale. Si nous admettons que l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ est rapporté à un système orthogonal $(O, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3})$, c'est-à-dire $\boldsymbol{Op} = x_1\boldsymbol{e_1} + x_2\boldsymbol{e_2} + x_3\boldsymbol{e_3}$, alors dans ce système, le champ de déplacement peut s'écrire :

$$u(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{pp^*} = \sum_{i=1}^{3} u_i(x_1, x_2, x_3)\boldsymbol{e_i} \tag{2.1}$$

Les trois fonctions $u_i : x = (x_1, x_2, x_3) \to u_i(x) \in \mathbb{R}$ sont les inconnues du problème.

Rappelons simplement qu'à partir du champ de déplacement u, les relations contrainte/déformation (loi de comportement), dans le domaine linéaire, s'écrivent :

$$\sigma_{jk} = \sum_{l=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} E_{jklm}\varepsilon_{lm}(u) \tag{2.2}$$

Avec la restriction que le milieu continu est fixé sur une partie Γ_0 de la frontière Γ de Ω, on définit l'espace $\boldsymbol{V}$ des déplacements admissibles par :

$$\boldsymbol{V} = \{\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3) \in (H^1(\Omega))^3 \ , \ \boldsymbol{v}\,|_{\Gamma_0} = 0\} \tag{2.3}$$

avec

$$H^1(\Omega) = \{\boldsymbol{v} \in L^2(\Omega) \ , \ \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\}$$

et

$$f_\Omega \in (L^2(\Omega))^3 \ , \ f_\Gamma \in (L^2(\Gamma_1))^3$$

Alors, si on suppose que $a(\cdot,\cdot)$ est une forme bilinéaire continue sur $\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V}$ et $\boldsymbol{V}$-*elliptique* et L une forme linéaire continue sur $\boldsymbol{V}$, le problème $(\mathcal{P})$:

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in \boldsymbol{V} \text{ tel que} \\ \forall\, v \in \boldsymbol{V} \ , \ a(u,v) = L(v) \end{cases} \tag{2.4}$$

admet une et une seule solution (Ciarlet, 1987).

Dans le cas particulier où la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ est symétrique la solution u de $(\mathcal{P})$ est aussi la solution du problème de minimisation :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in \boldsymbol{V} \text{ tel que} \\ J(u) = \min\limits_{v \in V} \ J(v) \end{cases} \tag{2.5}$$

où J est une fonctionnelle quadratique définie sur $\boldsymbol{V}$ par :

$$J(v) = \frac{1}{2}\, a(v,v) - L(v) \tag{2.6}$$

Or l'énergie de déformation, associée à un champ de déplacement v, s'exprime :

$$E(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega \sigma_{jk}(v)\varepsilon_{jk}(v)dx \tag{2.7}$$

Grâce à la relation (1.5), cette relation peut s'écrire :

$$E(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega E_{jklm}(x)\varepsilon_{jk}(v)\varepsilon_{lm}(v)dx \tag{2.8}$$

Soit $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ une partition de la frontière Γ munie d'une normale unitaire $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, n_3)$, le milieu continu étant fixé le long de la partie Γ_0 de Γ comme illustré par la figure 2.1. Si nous supposons que le milieu continu Ω est soumis à l'action d'un champ de forces externes volumiques (de densité) f_Ω et à l'action d'un champ de forces externes surfaciques (de densité) f_Γ, appliquées le long de la partie Γ_1 de Γ, alors le travail effectué par ces champs de forces pour un champ de déplacement v est donné par :

$$f(v) = \int_\Omega f_\Omega \cdot v \, dx + \int_{\Gamma_1} f_\Gamma \cdot v \, d\gamma \tag{2.9}$$

La propriété de symétrie $\varepsilon_{jk} = \varepsilon_{kj}$ et (1.7) nous permettent alors d'associer à la forme quadratique (2.8) la forme bilinéaire symétrique suivante :

$$a(u,v) = \int_\Omega E_{jklm}(x)\varepsilon_{jk}(u)\varepsilon_{lm}(v)dx \tag{2.10}$$

qui peut aussi s'écrire :

$$a(u,v) = \int_\Omega E_{jklm}(x)\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\frac{\partial v_l}{\partial x_m}dx \tag{2.11}$$

Ces relations induisent la formulation suivante pour le problème de l'élasticité :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Trouver } u \in \boldsymbol{V} \\ \text{minimisant la fonctionnelle} \\ J\ :\ v \in \boldsymbol{V} \to J(v) = \dfrac{1}{2}a(v,v) - f(v)\end{array}} \tag{2.12}$$

Comme le problème de minimisation (2.12) est équivalent au problème $(\mathcal{P})$ on a aussi :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Trouver } u \in \boldsymbol{V} \text{ tel que} \\ a(u,v) = f(v)\ ,\ \forall v \in \boldsymbol{V}\end{array}} \tag{2.13}$$

où la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ et la forme linéaire $f(\cdots)$ sont respectivement définies par (2.11) et (2.9). Ces deux problèmes admettent une solution et une seule.

La solution $\boldsymbol{u}$ des problèmes (2.12) et (2.13) peut s'écrire, grâce aux relations (1.1), (1.5), (1.9) et dans le cas d'un matériau isotrope, sous la forme vectorielle suivante, connue comme une des formulations du problème de l'élasticité linéaire :

$$-\mu\Delta\boldsymbol{u} - (\lambda+\mu)\boldsymbol{grad}\, div(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f} \text{ dans } \Omega \tag{2.14}$$

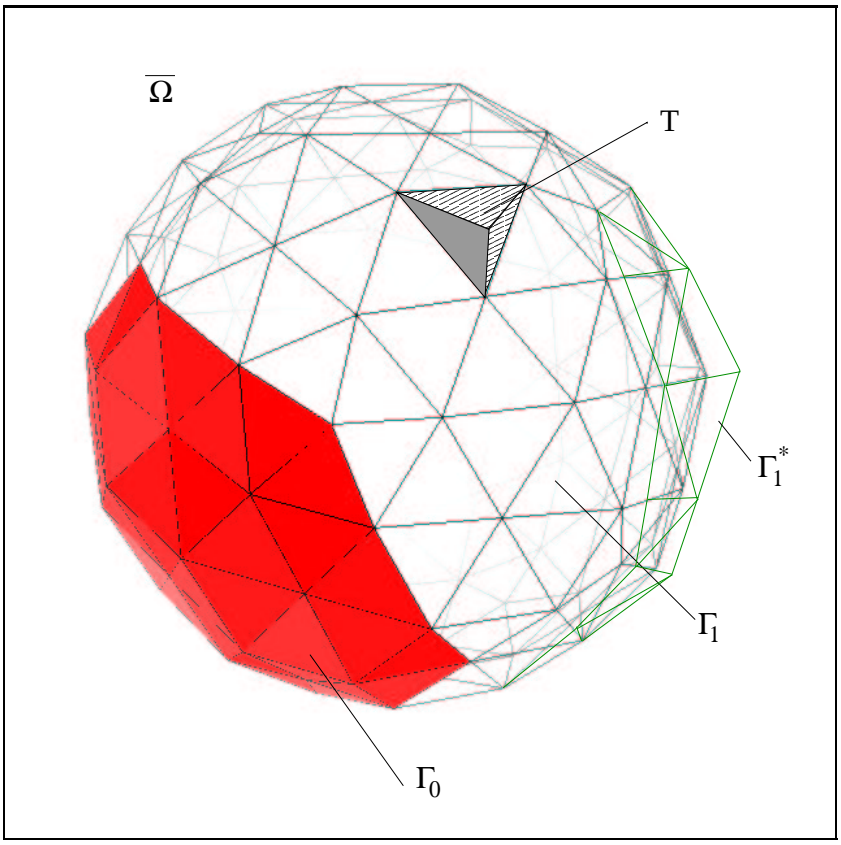
2.3 Modélisation par la méthode des éléments finis

Généralement, il n'est pas possible de résoudre le problème (2.12) directement. Une solution consiste donc à construire une séquence d'espaces dimensionnels finis $\boldsymbol{V_h}$ dans lesquels est approximée la solution $\boldsymbol{u}$ du problème continu. Les espaces $\boldsymbol{V_h}$ doivent être construits de telle sorte que l'inclusion $\boldsymbol{V_h} \subset \boldsymbol{V}$ soit satisfaite. Ceci implique une certaine régularité de $\overline{\Omega}$ ainsi que d'autres conditions détaillées dans (Ciarlet, 1987).

De plus, l'utilisation de schémas d'intégration numérique, nous permet de définir les formes bilinéaire $a_h(.,.)$ et linéaire $f_h(.)$ approchées et ainsi d'établir le problème approché P_h :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que, pour tout } v_h \in V_h \\ a_h(u_h,v_h) = f_h(v_h)\end{array}} \tag{2.15}$$

Enfin, dans le cas particulier de la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ est symétrique, la résolution du problème $(\mathcal{P}_h)$ est équivalente à la résolution d'un système linéaire où la matrice est définie positive.



$$\begin{cases} \Gamma_0 & = & \text{partie fixe de la frontière } \Gamma \\ \Gamma & = & \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \text{ correspond à la frontière avant déformation} \\ \Gamma^\star & = & \Gamma_0 \cup \Gamma_1^\star \text{ correspond à la frontière après déformation} \end{cases}$$

FIG. 2.1 – *Déformation d'un solide $\overline{\Omega}$ polyhédrique avec condition aux limites.*

2.3.1 Maillage du domaine

Pour la suite nous allons admettre que le domaine Ω peut être approximé par un domaine polyhédrique $\overline{\Omega}$. Ainsi, il est possible de diviser le domaine en un ensemble fini de polyèdres (tétraèdres, cubes, prismes, etc.) qui définiront la géométrie des éléments finis. Soit $\mathcal{T}$ la décomposition en tétraèdres de $\overline{\Omega}$ ou maillage de $\overline{\Omega}$. Ce maillage doit vérifier certaines propriétés, en particulier, deux tétraèdres distincts appartenant à $\mathcal{T}$ ont :

- soit une intersection vide,
- soit une intersection réduite à un sommet commun,
- soit une intersection réduite à un côté commun,
- soit une intersection réduite à une face commune.

La régularité du maillage est aussi un élément très important. Dans le cas de triangulations, le rapport entre le rayon des cercles inscrit r et circonscrit R définit la qualité de la triangulation. Plus cette valeur est proche de $1/2$ plus on se rapproche d'un triangle équilatéral et meilleure est la qualité.

Dans le cas de maillages tétraédriques, plusieurs critères sont possibles. Soient V_T le volume d'un tétraèdre, S_T sa surface, V_{R_i} le volume de sa sphère inscrite, V_{R_c} le volume de sa sphère circonscrite, L_{max} la longueur de sa plus grande arête et R_{S_i} le rayon de sa sphère inscrite. Sa qualité peut alors être définie par un des critères suivants :

- V_{R_i}/V_T
- V_T^2/S_T^3
- R_{S_i}/L_{max}

La qualité maximale est définie par la valeur de chacun de ces critères pour un tétraèdre équilatéral.

L'étude et la réalisation d'un mailleur d'éléments finis est un problème complexe. Nous n'aborderons pas ce point dans ce chapitre et par la suite nous aurons recours à un logiciel commercial pour créer une tétraédrisation sur la base d'une triangulation de la surface. Le problème de la création d'une triangulation conforme sera détaillé au chapitre (3).

2.3.2 Définition d'un élément fini

La définition complète d'un élément fini ne dépend pas seulement de la géométrie que l'on donne à l'élément. A chaque ensemble T du maillage $\mathcal{T}$ du domaine $\overline{\Omega}$ il est nécessaire d'associer :

- un espace P_T de dimension finie n_T, généralement de type polynômial.
- un ensemble Σ_T de n_T degrés de liberté, c'est-à-dire n_T formes linéaires Φ_i, $1 \leq i \leq n_T$, définis sur l'espace P_T.

Le triplet (T, P_T, Σ_T) est un élément fini si l'ensemble Σ_T est P_T-unisolvant, c'est-à-dire qu'il existe n_T fonctions, p_i, $i = 1, .., n_T$, de l'espace P_T, linéairement indépendantes, telles que :

$$\Phi_j(p_i) = \delta_{ij} \quad , \quad 1 \leq i, j \leq n_T \tag{2.16}$$

Les fonctions p_i, $i = 1, .., n_T$, sont appelées les **fonctions de forme** ou **fonctions de base** des éléments finis, puisque la relation (2.16) implique :

$$\forall p \in P_T \quad , \quad p = \sum_{i=1}^{n_T} \Phi_i(p)\, p_i \tag{2.17}$$

2.3.2.1 Eléments finis tétraédriques

A partir de maintenant, nous considérerons seulement le cas d'éléments tétraédriques et pour simplifier les notations nous appellerons un élément fini T plutôt que (T, P_T, Σ_T). Les éléments tétraédriques sont les éléments les plus simples permettant de représenter un milieu continu à trois dimensions. Malgré leur apparente simplicité géométrique, ces éléments sont très bien adaptés à la modélisation de solides de formes complexes telles que celles rencontrées dans le domaine médical.

Par contre, il est évident que le nombre de tétraèdres simples que l'on doit utiliser pour obtenir un degré de précision donné doit être élevé. Il en résulte un très grand nombre d'équations simultanées à résoudre.

Pour avoir une idée de la quantité de calculs requis pour résoudre un problème tridimensionnel, supposons que la précision d'un élément tétraédrique soit comparable à celle d'un élément triangulaire pour l'analyse bidimensionnelle. Supposons que l'étude du problème bidimensionnel fasse intervenir un domaine de forme carrée, représenté par un maillage d'environ 20x20 = 400 nœuds, alors le nombre d'équations simultanées est alors voisin de 800 puisqu'il y a deux composantes de déplacement par nœud. Avec une numérotation appropriée des nœuds, la largeur de bande fait intervenir 20 nœuds c'est-à-dire 40 variables.

Le domaine tridimensionnel équivalent est un cube de 20x20x20 = 8000 nœuds. Le nombre total d'équations simultanées est maintenant de l'ordre de 24000 puisqu'il y a, pour chaque nœud, 3 composantes. De plus la largeur de bande implique maintenant l'interconnexion d'environ 20x20 = 400 nœuds, soit 1200 variables.

En sachant que la masse des calculs est approximativement proportionnelle au nombre d'équations et au carré de la largeur de bande (Zienkiewicz, 1977), on peut mesurer la complexité supplémentaire inhérente à la résolution de problèmes tridimensionnels.

2.3.2.2 Fonction de forme

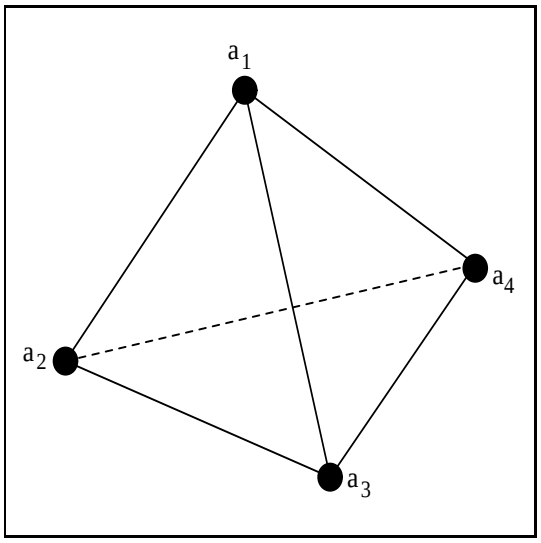
Un élément fini tétraédrique T de continuité C_0 est défini par quatre points non coplanaires a_j , $j = 1, 2, 3, 4$ et des frontières rectilignes. On suppose que T est un tétraèdre non dégénéré.

Comme le problème de l'élasticité linéaire nécessite l'évaluation de fonctions de déplacement simples, on peut se restreindre à des éléments finis de type Lagrange pour lesquels l'ensemble de degré de liberté Σ_T implique seulement les valeurs de la fonction u à quelques nœuds a_i judicieusement choisis des éléments finis, c'est-à-dire $\Phi_i(u) = u(a_i)$.

Les figures (2.2) et (2.3) illustrent les définitions données au paragraphe (2.3.2). Ici, P_m représente l'espace des polynômes en x_1, x_2, x_3 de degré inférieur ou égal à m. La connaissance de la valeur de la fonction en un nœud de l'élément est indiquée par un cercle noir. Ces tétraèdres représentent deux types classiques d'éléments finis de Lagrange. De façon analogue, il est possible de définir des tétraèdres de type P_k , $k \geq 3$.

La fonction de forme la plus simple est une fonction *linéaire*, définie sur des éléments tétraédriques de type P_1 c'est-à-dire que sur chaque tétraèdre on va chercher une approximation du déplacement u polynomiale du premier degré en x_1, x_2, x_3. Si on se rapporte alors à la définition générale, on voit que l'ensemble Σ_T défini sur un tétraèdre de type P_1 est un ensemble de quatre formes linéaires $\Phi_i = p \in P_T \rightarrow p(a_i) \in \mathbb{R}$, i = 1, .., 4. Afin de définir ces quatre fonctions de forme, on considère les quatre fonctions affines λ_i valant 1 en a_i et 0 en a_j avec $j \neq i$. Les fonctions $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ de x_1, x_2, x_3 définissent les coordonnées barycentriques du point $\boldsymbol{x}$ de coordonnées x_1, x_2, x_3.

Soient (a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}) les coordonnées du nœud a_j, comme T est un tétraèdre non dégénéré,

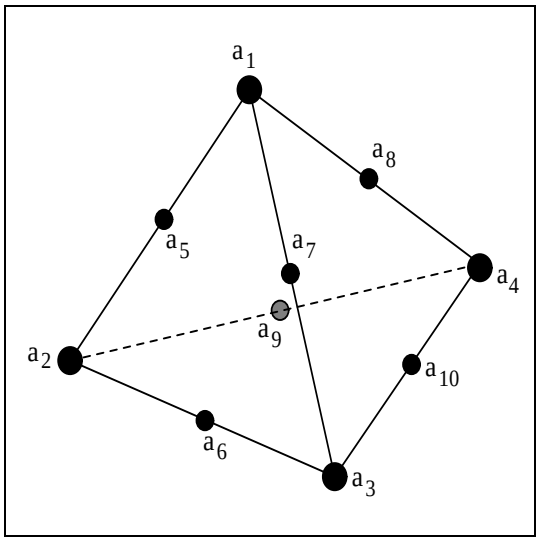


$P_T = P_1 \quad ; \quad dim(P_T) = n_T = 4$
$\Sigma_T = p(a_i) \quad , \quad 1 \leq i \leq 4$

Pour toute fonction $p \in P_1$:

$$p = \sum_{i=1}^{4} p(a_i) p_i \quad \text{avec} \quad p_i = \lambda_i$$

FIG. 2.2 – *Tétraèdre de type P_1. Les nœuds correspondent aux sommets du tétraèdre. La fonction de forme définie sur ce tétraèdre est linéaire.*



$P_T = P_2 \quad ; \quad dim(P_T) = n_T = 10$
$\Sigma_T = p(a_i) \quad , \quad 1 \leq i \leq 10$

Pour toute fonction $p \in P_2$:

$$p = \sum_{i=1}^{10} p(a_i) p_i$$

avec

$p_i = \lambda_i(2\lambda_i - 1) \quad , \quad i = 1, .., 4$
$p_{i+4} = \lambda_i \lambda_{[i+1]mod3} \quad , \quad i = 1, .., 3$
$p_{i+7} = \lambda_i \lambda_4 \quad , \quad i = 1, .., 3$

FIG. 2.3 – *Tétraèdre de type P_2. La fonction de forme définie sur ce tétraèdre est quadratique.*

la matrice suivante est inversible :

$$[\boldsymbol{A}] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

Les *coordonnées barycentriques* $\lambda_j = \lambda_j(x)$ de x pour $j = 1, ., 4$ sont telles que :

$$\begin{cases} x_i &= \sum_{j=1}^{4} a_{ij}\lambda_j(x) \quad , \quad i = 1,2,3 \\ 1 &= \sum_{j=1}^{4} \lambda_j(x) \end{cases} \tag{2.19}$$

Comme la matrice $[\boldsymbol{A}]$ est inversible, le système admet une seule et unique solution :

$$\lambda_j(x) = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ji}x_i + \beta_j \quad , \quad j = 1,2,3,4 \tag{2.20}$$

où

$$\alpha_{ji} = (-1)^{(i+j)}\frac{det\,[\boldsymbol{B}]_{ji}}{det\,[\boldsymbol{A}]} \quad , \quad \beta_j = (-1)^j\frac{det\,[\boldsymbol{B}]_{j4}}{det\,[\boldsymbol{A}]} \tag{2.21}$$

Les matrices $[\boldsymbol{B}]_{ji}$, $1 \leq i,j \leq 4$ sont obtenues en supprimant la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne de la matrice $[\boldsymbol{A}]$.

Les fonctions λ_i définissent également une base canonique de l'espace P_1 des polynômes du premier degré en x_1, x_2, x_3 relativement au tétraèdre T.

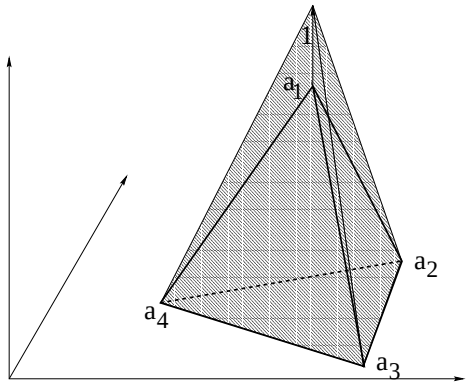


FIG. 2.4 – *Fonction de forme linéaire pour un élément tétraédrique de type P_1. La fonction vaut 1 en a_1 et 0 aux autres nœuds.*

Les exemples suivants ont pour but de permettre de mieux comprendre la définition des fonctions de forme, leur variété et leur importance.

2.3.2.3 Fonction de déplacement

On cherche maintenant à déterminer, sur chaque tétraèdre, la fonction de déplacement $u(x_1, x_2, x_3)$. Etant donné un point $\boldsymbol{x}$ de $\mathbb{R}^3$, de coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3), ses déplacements $\boldsymbol{u}$ de composantes (u_1, u_2, u_3) à l'intérieur de T sont définis de façon unique par les valeurs de u aux nœuds du tétraèdre.

Sachant que les fonctions λ_i définissent une base canonique sur T, la solution est immédiate :

$$u(x_1, x_2, x_3) = \sum_{j=1}^{4} u(a_j)\lambda_j$$

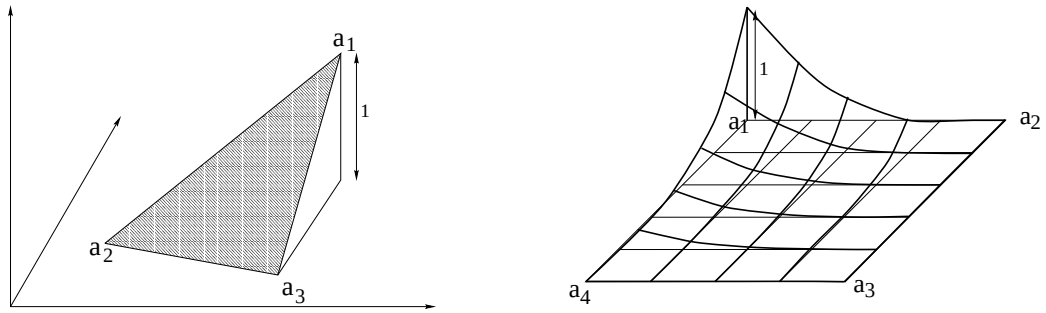


FIG. 2.5 – *À gauche, fonction de forme linéaire pour un élément simple triangulaire. À droite, fonction de forme quadratique pour un élément fini rectangulaire. Dans ce cas il a été rajouté un nœud au milieu de chaque arête par rapport à un élément "linéaire", comme pour les tétraèdres de type P_2.*

où $u(a_i)$ est la valeur prise par la fonction u au nœud a_i.

On peut ensuite définir une base de l'espace des fonctions P_1 par morceau sur $\overline{\Omega}$ en généralisant, à la triangulation complète, les relations précédentes.

2.3.2.4 Intégration numérique

Afin de calculer les intégrales qui apparaissent de chaque côté des équations du système (2.15), il est nécessaire d'utiliser des schémas d'intégration numérique. Le choix du schéma dépend du type d'élément et du degré de précision souhaité. Il peut également être utile d'introduire la notion de *tétraèdre de référence* $\hat{T}$. Il peut s'agir de n'importe quel tétraèdre de $\mathbb{R}^3$ tel que tout autre tétraèdre $T \in \mathcal{T}$, d'intérieur non-vide, soit l'image de ce tétraèdre de référence par une transformation affine inversible F_T définie par :

$$F_T \ : \ \hat{x} \in \hat{T} \rightarrow F_T(\hat{x}) = B_T\,\hat{x} + b_T \tag{2.22}$$

où B_T est une matrice inversible et b_T est un vecteur de $\mathbb{R}^3$, tels que:

$$F_T(\hat{a_i}) = a_i \ , \ i = 1, 2, 3, 4 \tag{2.23}$$

avec $\hat{a_i}$ et a_i les sommets respectifs de $\hat{T}$ et T.

Maintenant, si l'on considère un schéma d'intégration numérique général sur le tétraèdre $\hat{T}$:

$$\int_T \hat{\Phi}(\hat{x})\,d\hat{x} \simeq \sum_{l=1}^{L} \hat{\omega}_l\,\hat{\Phi}(\hat{b}_l) \tag{2.24}$$

où $\hat{b}_l$ et $\hat{\omega}_l$ dénotent respectivement les **nœuds** et les **poids** associés au schéma d'intégration.

À la fonction Φ définie sur le tétraèdre T, nous associons la fonction $\hat{\Phi}$ définie sur le tétraèdre $\hat{T}$ par $\hat{\Phi} = \Phi \cdot F_T$. Ainsi nous obtenons :

$$\int_T \Phi(x)\,dx = det[\boldsymbol{B_T}] \int_{\hat{T}} \hat{\Phi}(\hat{x})\,d\hat{x} \tag{2.25}$$

nous supposons que le Jacobien de la transformation F_T est positif, c'est-à-dire $det[\boldsymbol{B_T}] > 0$.

Ainsi le schéma d'intégration numérique sur le tétraèdre T est :

$$\int_T \Phi(x)\, dx \simeq \sum_{l=1}^{L} \omega_{l,T}\, \Phi(b_{l,T}) \tag{2.26}$$

avec

$$\omega_{l,T} = det[\boldsymbol{B_T}]\, \hat{\omega}_l \text{ et } b_l = F_T(\hat{b}_l)\ ,\ 1 \leq l \leq L \tag{2.27}$$

De façon analogue, il est possible de définir les schémas d'intégration numérique sur les faces triangulaires T' situées sur Γ_1 :

$$\int_{T'} \Phi(x)\, d\gamma \simeq \sum_{l=1}^{L'} \omega'_{l,T'}\, \Phi(b'_{l,T'}) \tag{2.28}$$

En utilisant ces schémas d'intégration numérique, nous pouvons donc définir $a_h(.,.)$ et $f_h(.)$ intervenant dans la formulation (2.15).

$$\boxed{a_h(u_h, v_h) = \sum_{T\in\mathcal{T}} \sum_{l=1}^{L} \omega_{l,T} E_{jkmn}(x) \frac{\partial u_{hj}}{\partial x_{hk}} \frac{\partial u_{hm}}{\partial x_{hn}}(b_{l,T})} \tag{2.29}$$

$$\boxed{f_h(v_h) = \sum_{T\in\mathcal{T}} \sum_{l=1}^{L} \omega_{l,T}(f_j^{\Omega} v_{hj})(b_{l,T}) + \sum_{T'\in\mathcal{T}'} \sum_{l'=1}^{L'} \omega'_{l,T'}(f_j^{\Gamma} v_{hj})(b'_{l,T'})} \tag{2.30}$$

2.4 Mise en œuvre numérique

Pour la mise en œuvre numérique, nous faisons les hypothèses suivantes :

- le maillage du domaine est composé d'un ensemble de tétraèdres.
- les éléments utilisés seront des éléments tétraèdriques de Lagrange de type P_1 c'est-à-dire des éléments de continuité C_0.
- la frontière Γ du domaine est décomposée en deux sous-ensembles Γ_0 et Γ_1. La partie Γ_0 est fixée alors que la partie Γ_1 peut être soumise à l'action d'un champ de forces (de densité) f_Γ ou bien à d'autres types de contraintes.
- pour l'intégration numérique nous utilisons les schéma 1 et 2 décrits en annexe (B).

2.4.1 Étape 1 : triangulation du domaine

A partir d'une triangulation de la frontière du domaine, le volume de ce dernier est maillé par un ensemble de tétraèdres. Pour cela, il est souvent nécessaire d'avoir recours à des logiciels spécialisés, en raison de la complexité du problème en 3D. Cette étape doit respecter les contraintes énoncées précédemment dans (2.3.1). La triangulation de la surface est supposée réalisée (cf. sections 3 et 8) et être de bonne qualité au sens du critère défini en (2.3.1). Soit N_t le nombre de tétraèdres et N_v the nombre de sommets du maillage. Nous définissons une

fonction de transfert bi-univoque g associant à l'indice I , $I = 1, .., N_t$ du tétraèdre et à son indice *local* de sommet i , $i = 1, .., N_v$, l'indice *global* de ce sommet, c'est-à-dire :

$$g : (I, i) \to g(I, i) \in \{1, .., N_v\} \tag{2.31}$$

Une fois la triangulation réalisée, il reste à définir la contribution de chaque tétraèdre dans le système global.

2.4.2 Étape 2: interpolation

Soit T un tétraèdre quelconque du maillage $\mathcal{T}$. Soit a_i , $i = 1, .., 4$, les sommets de T. Alors, les coordonnées barycentriques de tout point $x = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$ sont données par les relations (2.19), (2.20), (2.21), c'est-à-dire :

$$\lambda_j(x) = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ji} x_i + \beta_j \quad , \quad j = 1, 2, 3, 4 \tag{2.32}$$

Inversement, les coordonnées cartésiennes sont données par :

$$x_i = \sum_{i=1}^{4} a_{ij} \lambda_j \quad , \quad j = 1, 2, 3, 4 \tag{2.33}$$

où les coefficients (a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}) sont les coordonnées cartésiennes du sommet a_j , $j = 1, .., 4$.

Nous avons vu dans (2.3.2.3) que l'interpolée $\tilde{v_T}$ d'une fonction v, associée à T, est donnée par :

$$\tilde{v_T} = \sum_{j=1}^{4} v(a_j) \lambda_j \tag{2.34}$$

soit en notation matricielle :

$$\tilde{v_T} = [\boldsymbol{N_T}][\boldsymbol{V_T(v)}] \tag{2.35}$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} [\boldsymbol{V_T(v)}] & = & [\boldsymbol{v(a_1)}\ \boldsymbol{v(a_2)}\ \boldsymbol{v(a_3)}\ \boldsymbol{v(a_4)}]^t \\ [\boldsymbol{N_T}] & = & [\boldsymbol{\lambda_1}\ \boldsymbol{\lambda_2}\ \boldsymbol{\lambda_3}\ \boldsymbol{\lambda_4}] \end{array} \right. \tag{2.36}$$

D'après (1.1), nous avons à calculer les premières dérivées partielles des fonctions de base λ_j , $j = 1, .., 4$. Grâce à (2.32) nous obtenons :

$$\frac{\partial \lambda_j(x)}{\partial x_i} = \alpha_{ji} \ , \ i = 1, 2, 3 \ ; \ j = 1, 2, 3, 4 \tag{2.37}$$

$$\frac{\partial \tilde{v_T}}{\partial x_i} = [\boldsymbol{N'_{T_i}}][\boldsymbol{V_T(v)}] \ , \ i = 1, 2, 3 \tag{2.38}$$

avec :

$$[\boldsymbol{N'}_{\boldsymbol{T}_i}] = [\boldsymbol{\alpha_{1i}}\ \boldsymbol{\alpha_{2i}}\ \boldsymbol{\alpha_{3i}}\ \boldsymbol{\alpha_{4i}}]\ ,\ i = 1, 2, 3 \tag{2.39}$$

2.4.3 Étape 3 : intégration numérique

Les schémas d'intégration numérique (cf. annexe B), utilisés dans le calcul de $a(.,.)$ et $f(.)$, sont les suivants :

- schéma 1 pour l'intégration numérique sur tout tétraèdre de Ω
- schéma 2 pour l'intégration numérique sur tout triangle de la frontière Γ de Ω

2.4.4 Étape 4 : calcul de la forme bilinéaire

D'après la relation (2.11), la forme bilinéaire approchée est, pour tout $u_h, v_h \in V_h$:

$$a_h(u_h, v_h) = \sum_{T\in\mathcal{T}} \sum_{l=1}^{L} \omega_{l,T} E_{jkmn}(x) \frac{\partial v_{hj}}{\partial x_{hk}} \frac{\partial v_{hm}}{\partial x_{hn}}(b_{l,T}) \tag{2.40}$$

ou encore, en notation matricielle :

$$a_h(u_h, v_h) = \sum_{T\in\mathcal{T}} \sum_{l=1}^{L} \omega_{l,T} [\boldsymbol{U_h}(\boldsymbol{b_{l,T}})]^t [\boldsymbol{E_T}(\boldsymbol{b_{l,T}})][\boldsymbol{V_h}(\boldsymbol{b_{l,T}})] \tag{2.41}$$

où les matrices $[\boldsymbol{U_h}]^t$ et $[\boldsymbol{E_T}]$ sont données par :

$$[\boldsymbol{U_h}] = \left[\frac{\partial u_{h1}}{\partial x_1}\ \frac{\partial u_{h1}}{\partial x_2}\ \frac{\partial u_{h1}}{\partial x_3}\ \frac{\partial u_{h2}}{\partial x_1}\ \frac{\partial u_{h2}}{\partial x_2}\ \frac{\partial u_{h2}}{\partial x_3}\ \frac{\partial u_{h3}}{\partial x_1}\ \frac{\partial u_{h3}}{\partial x_2}\ \frac{\partial u_{h3}}{\partial x_3}\right]^t \tag{2.42}$$

$$[\boldsymbol{E_T}] = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & \mu & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & \mu & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & \lambda+2\mu \end{bmatrix} \tag{2.43}$$

dans le cas d'un matériau isotrope. Pour un matériau **non-homogène**, les coefficients d'élasticité sont fonction de la variable x.
La matrice $[\boldsymbol{V_h}]$ est obtenue de façon similaire à $[\boldsymbol{U_h}]$.

Grâce à la relation (2.38) la matrice $[\boldsymbol{U_h}]$ peut s'écrire :

$$[\boldsymbol{U_h}] = [\boldsymbol{\Gamma_T}]\ [\boldsymbol{V_T}(\boldsymbol{u_h})] \tag{2.44}$$

avec

$$[\boldsymbol{\Gamma_T}] = \left[\begin{array}{c|c|c} N'_{T_1}N'_{T_2}N'_{T_3} & 0 & 0 \\ \hline 0 & N'_{T_1}N'_{T_2}N'_{T_3} & 0 \\ \hline 0 & 0 & N'_{T_1}N'_{T_2}N'_{T_3} \end{array}\right] \tag{2.45}$$

En utilisant le schéma d'intégration 1 (avec comme nœud d'intégration le centre de gravité de T) pour l'intégration sur tout tétraèdre T de la triangulation $\mathcal{T}$, nous pouvons écrire la forme bilinéaire approchée $a_h(u_h, v_h)$:

$$a_h(u_h, v_h) = \sum_{T\in\mathcal{T}} \{[\boldsymbol{V_T(u_h)}]^t (Volume(T)[\boldsymbol{\Gamma_T}]^{\boldsymbol{t}}[\boldsymbol{E_T}][\boldsymbol{\Gamma_T}])[\boldsymbol{V_T(v_h)}]\} \tag{2.46}$$

L'expression entre parenthèses, c'est-à-dire :

$$[\boldsymbol{K^e}] = Volume(T)[\boldsymbol{\Gamma_T}]^t[\boldsymbol{E_T}][\boldsymbol{\Gamma_T}] \tag{2.47}$$

est généralement appelée *matrice de rigidité élémentaire.*

2.4.5 Étape 5 : calcul de la forme linéaire

D'après la relation (2.30), la forme linéaire de la partie droite de l'équation peut s'écrire sous la forme :

$$f_h(v_h) = \sum_{T\in\mathcal{T}} \sum_{l=1}^{L} \omega_{l,T}(f_j^{\Omega} v_{hj})(b_{l,T}) + \sum_{T'\in\mathcal{T}'} \sum_{l'=1}^{L'} \omega'_{l,T'}(f_j^{\Gamma} v_{hj})(b'_{l,T'}) \tag{2.48}$$

Si nous utilisons le schéma 1 d'intégration numérique sur tout tétraèdre T de $\mathcal{T}$ et le schéma 2 pour l'intégration sur tout triangle T' de $\mathcal{T}'$. Nous définissons :

$$[\boldsymbol{W_h}] = [\boldsymbol{v_{h1}}\ \boldsymbol{v_{h2}}\ \boldsymbol{v_{h3}}]^t \tag{2.49}$$

$$[\boldsymbol{P}] = [\boldsymbol{p_1}\ \boldsymbol{p_2}\ \boldsymbol{p_3}]^t \tag{2.50}$$

$$[\boldsymbol{Q}] = [\boldsymbol{q_1}\ \boldsymbol{q_2}\ \boldsymbol{q_3}]^t \tag{2.51}$$

$$[\boldsymbol{W_h}] = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda \end{bmatrix} [\boldsymbol{V_T(v_h)}] \tag{2.52}$$

D'après la définition du schéma 1 d'intégration, nous obtenons :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{l=1}^{L} \omega_{l,T}(f_j^{\Omega} v_{hj})(b_{l,T}) = [\boldsymbol{V_T(v_h)}][\boldsymbol{F_1^e}]^t \\ \text{avec} \\ [\boldsymbol{F_1^e}] = Volume(T)[\boldsymbol{\gamma}][\boldsymbol{P}] \end{cases} \tag{2.53}$$

où la matrice $[\gamma]$ est donnée par :

$$[\gamma] = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda \end{bmatrix} \tag{2.54}$$

Considérons maintenant l'intégration sur les faces T' situées sur Γ_1. Ces faces sont triangulaires. Si nous appelons b_1, b_2, b_3 les sommets du triangle T' appartenant au tétraèdre T, nous pouvons écrire :

$$[\boldsymbol{V_{T'}}] = [\boldsymbol{v(b_1)}\ \boldsymbol{v(b_2)}\ \boldsymbol{v(b_3)}] \tag{2.55}$$

$$[\boldsymbol{N_{T'}}] = [\boldsymbol{\mu_1}\ \boldsymbol{\mu_2}\ \boldsymbol{\mu_3}] \tag{2.56}$$

où $(\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3)$ désignent les coordonnées barycentriques dans le triangle T' de sommets b_1, b_2, b_3. alors,

$$\tilde{v}\ |_{T'} = [\boldsymbol{N_{T'}}]\ [\boldsymbol{V_{T'}(v)}] \tag{2.57}$$

$$[\boldsymbol{V_{T'}(v_h)}] = [\boldsymbol{V_{T'}(v_{h1})}\ \boldsymbol{V_{T'}(v_{h2})}\ \boldsymbol{V_{T'}(v_{h3})}]^t \tag{2.58}$$

Ceci nous permet d'écrire l'expression de $[\boldsymbol{W_h}]^t$ sur le triangle T' comme suit :

$$[\boldsymbol{W_h}] = \begin{bmatrix} \Lambda' & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda' & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda' \end{bmatrix} [\boldsymbol{V_{T'}(v_h)}] \tag{2.59}$$

D'après la définition du schéma 2 d'intégration numérique, nous obtenons :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{l'=1}^{L'} \omega'_{l,T'}(f_j^{\Gamma} v_{hj})(b'_{l,T'}) = [\boldsymbol{V_{T'}(v_h)}][\boldsymbol{F_2^f}]^t \\ \text{avec} \\ [\boldsymbol{F_2^{(T)}}] = Surface(T')[\gamma'][\boldsymbol{Q}] \end{cases} \tag{2.60}$$

où la matrice $[\gamma']$ est donnée par :

$$[\gamma'] = \begin{bmatrix} \Lambda' & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda' & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda' \end{bmatrix} \tag{2.61}$$

Maintenant il reste à *assembler* les contributions de chaque tétraèdre $T \in \mathcal{T}$ afin d'obtenir la *matrice de rigidité globale* $[\boldsymbol{K}]$ du système ainsi que le membre de droite $\boldsymbol{f}$ dans sa globalité.

2.4.6 Étape 6 : assemblage de la matrice de rigidité globale

D'après les relations (2.46), (2.47), (2.53) et (2.60), le second problème approché peut s'écrire :

$$\sum_{T\in\mathcal{T}} \{[\boldsymbol{V_T(v_h)}]^t[\boldsymbol{K^e}][\boldsymbol{V_T(u_h)}]^t\} = \sum_{T\in\mathcal{T}_h} [\boldsymbol{V_T(v_h)}][\boldsymbol{F_1^e}]^t + \sum_{T'\in\mathcal{T'}_h} [\boldsymbol{V_{T'}(v_h)}][\boldsymbol{F_2^f}]^t \tag{2.62}$$

pour tout $v_h \in \boldsymbol{V_h}$.

Alors il nous reste à évaluer la contribution de chaque tétraèdre (et triangle) dans la matrice de rigidité globale, afin d'écrire l'équation précédente sous la forme :

$$[\boldsymbol{V_T(v_h)}]^t[\boldsymbol{K}][\boldsymbol{V_T(u_h)}] = [\boldsymbol{V_T(v_h)}]^t\boldsymbol{f} \tag{2.63}$$

Puisque la relation (2.63) doit être vérifiée pour tout $v_h \in \boldsymbol{V_h}$, c'est-à-dire pour tout $[\boldsymbol{V_T(v_h)}]$, l'ensemble des degrés de liberté "inconnus" $[\boldsymbol{V(u_h)}]$ est solution du système d'équations suivant :

$$[\boldsymbol{K}][\boldsymbol{V(u_h)}] = \boldsymbol{f} \tag{2.64}$$

Soit encore $[\boldsymbol{K}]\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ pour utiliser une notation plus classique.

En pratique, la contribution de chaque tétraèdre dans la matrice de rigidité $[\boldsymbol{K}]$ est obtenue de la façon suivante :

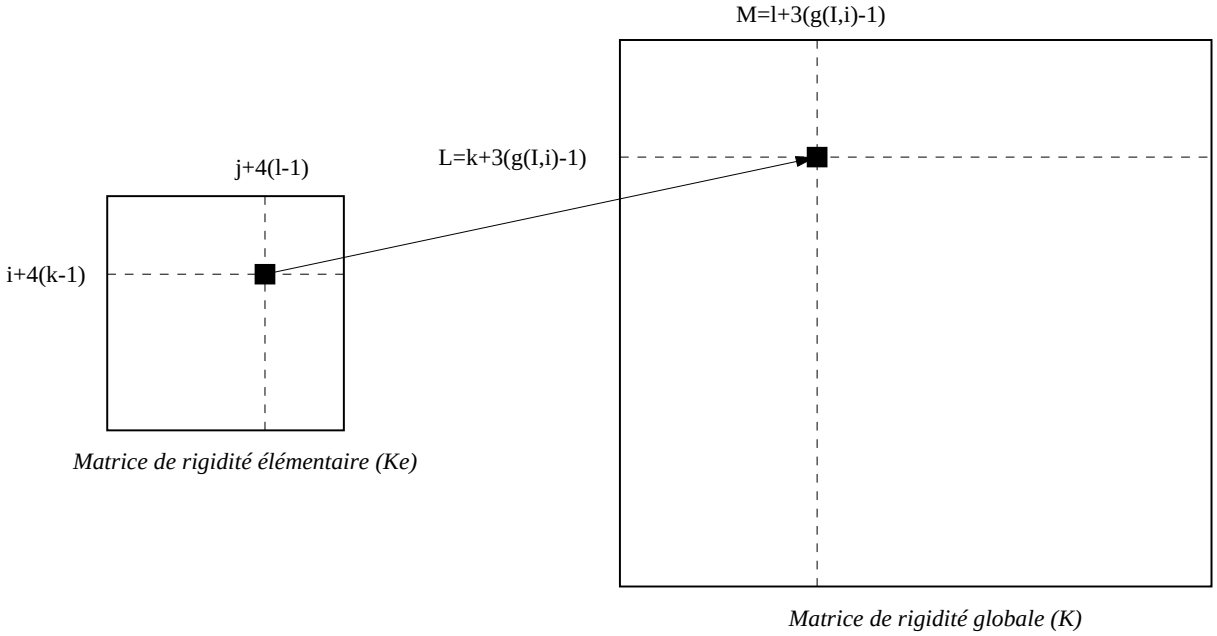
- la fonction u_h est déterminée par la donnée de ses degrés de liberté, c'est-à-dire $[\boldsymbol{V(u_h)}]$. Cet ensemble comprend $3\,N_v$ éléments puisqu'il y a N_v sommets dans le maillage et trois degrés de liberté par sommet (les valeurs prises par chaque composante de la fonction).
- la matrice de rigidité globale est une matrice $3\,N_v \times 3\,N_v$. Cette matrice est symétrique et creuse.
- pour chaque élément fini T de $\mathcal{T}$, nous calculons la matrice de rigidité locale $[\boldsymbol{K^e}]$. Chaque élément de cette matrice est ensuite ajouté à l'élément correspondant dans la matrice de rigidité globale $[\boldsymbol{K}]$, selon le schéma (2.6).

2.4.7 Étape 7 : calcul de la solution en tout point du domaine

L'équation (2.64), nous donne le vecteur $\boldsymbol{u}$, c'est-à-dire la valeur de chaque composante u_1, u_2, u_3 du déplacement en chaque nœud du maillage. Nous pouvons alors en déduire la fonction u_h et ses premières dérivées partielles sur *tout le domaine* en utilisant les relations suivantes :

$$u_h\,|_T = [\boldsymbol{N_T}][\boldsymbol{V_T(u_h)}] \tag{2.65}$$

$$\frac{\partial u_h}{\partial x_i}\,|_T = [\boldsymbol{N'_T}][\boldsymbol{V_T(u_h)}] \quad i = 1, 2, 3 \tag{2.66}$$



$$[\boldsymbol{K}]_{(L,M)} = [\boldsymbol{K}]_{(L,M)} + [\boldsymbol{K^e}]_{(i+4(k-1),j+4(l-1))}$$

$k, l = 1, 2, 3$ (indices du nœud dans la matrice de rigidité locale)
$i, j = 1, 2, 3, 4$ (indice du nœud dans la matrice de rigidité globale)

FIG. 2.6 – *Opération d'assemblage de la matrice de rigidité.*

2.5 Conditions aux limites

2.5.1 Conditions de Dirichlet

Supposons connue la valeur du déplacement $\boldsymbol{u}$ au nœud i de la triangulation $\mathcal{T}$: $u_{h1}(i) = \overline{u_1}$, $u_{h2}(i) = \overline{u_2}$, $u_{h3}(i) = \overline{u_3}$. Ce type de contrainte est une condition aux limites de Dirichlet, c'est-à-dire que l'on connaît la valeur que prend la fonction u en certains nœuds du maillage.

Il y a deux raisons pour lesquelles nous introduisons ce type de contrainte. Tout d'abord, si aucun nœud du maillage n'est fixé, la matrice $[\boldsymbol{K}]$ est singulière et il est donc impossible de résoudre le système linéaire associé. Dans ce cas le déplacement imposé est nul. L'autre raison est liée à la manière de générer une déformation du maillage. En général, des forces sont appliquées sur la surface du maillage, comme nous l'avons supposé au début de ce chapitre. Mais il peut arriver que la déformation résulte du déplacement de certains nœuds de la surface. C'est en particulier le cas en simulation, lorsqu'un système à retour d'efforts est utilisé pour les interactions. Dans ce cas, le déplacement imposé est non nul, mais il s'agit toujours de conditions de Dirichlet.

2.5.1.1 Méthode 1 : modification de la matrice de rigidité

Afin de prendre en compte de telles conditions aux limites, une première solution consiste à modifier directement la matrice de rigidité. Supposons que l'on veuille imposer le déplacement $(\overline{u_1}, \overline{u_2}, \overline{u_3})$ au nœud i du maillage - le plus souvent i sera un nœud de la triangulation de la frontière du domaine. Alors, le système linéaire suivant, où $n = 3\,N_v$

$$\begin{bmatrix} K_{1,1} & \cdots & K_{1,3(i-2)} & K_{1,3(i-1)} & K_{1,3i} & \cdots & K_{1n} \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\ K_{3(i-2),1} & \vdots & & & & & \vdots \\ K_{3(i-1),1} & \vdots & & & & & \vdots \\ K_{3i,1} & \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ K_{n,1} & \cdots & K_{n,3(i-2)} & K_{n,3(i-1)} & K_{n,3i} & \cdots & K_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{3(i-2)} \\ u_{3(i-1)} \\ u_{3i} \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{3(i-2)} \\ f_{3(i-1)} \\ f_{3i} \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \tag{2.67}$$

devient

$$\begin{bmatrix} K_{1,1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & K_{1n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ K_{n,1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & K_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{3(i-2)} \\ u_{3(i-1)} \\ u_{3i} \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 - K_{1,3(i-2)}\overline{u_1} - K_{1,3(i-1)}\overline{u_2} - K_{1,3i}\overline{u_3} \\ \vdots \\ \overline{u_1} \\ \overline{u_2} \\ \overline{u_3} \\ \vdots \\ f_n - K_{n,3(i-2)}\overline{u_1} - K_{n,3(i-1)}\overline{u_2} - K_{n,3i}\overline{u_3} \end{bmatrix} \tag{2.68}$$

On impose ainsi explicitement la valeur de la solution finale en certains points. Cette méthode, bien que largement utilisée, n'est pas correcte d'un point de vue mathématique. En effet, en modifiant ainsi la matrice et le second membre, on change la dimension de l'espace vectoriel dans lequel on résoud le système d'équations et on ne peut garantir que la solution finale corresponde bien à un minimum global. Une solution plus correcte, correspondant à la même façon de procéder, est la méthode des pénalités. Dans cette méthode, on ne fixe pas explicitement à 1 la valeur de l'élément K_{ij} et à 0 la ligne K_i et la colonne K_j. On multiplie simplement la valeur de K_{ij} par une constante, dont la valeur numérique est très grande devant les autres éléments de $[\boldsymbol{K}]$. On va ainsi "privilégier" la valeur de la solution au nœud correspondant, d'où le nom de "méthode des pénalités". Cette méthode ne s'avère cependant pas idéale en raison de la difficulté du choix de la constante. Si la valeur est trop grande, on risque d'avoir un conditionnement de la matrice très élevé, rendant la résolution du système linéaire difficile. Si la valeur est trop faible en regard des autres valeurs de $[\boldsymbol{K}]$, la condition imposée sur $\boldsymbol{u}$ ne sera pas exactement respectée.

2.5.1.2 Méthode 2 : multiplicateurs de Lagrange

La solution idéale (en théorie) reste donc la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Une des raisons justifiant l'utilisation de cette méthode repose sur le fait que les multiplicateurs de Lagrange s'appliquent à la formulation variationnelle du problème considéré et ne consistent donc pas en une modification du système linéaire associé. Le nouveau système sera donc associé à la minimisation d'une fonctionnelle prenant en compte les conditions aux limites. On est ainsi assuré d'obtenir une solution correspondant à minimum global, ce qui n'est pas forcément vérifié dans les deux méthodes précédentes. En effet, pour que le problème de minimisation, équivalent au système linéaire $[\boldsymbol{K}]\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$, ait pour solution un minimum global, l'espace défini par les éléments finis doit rester convexe. En imposant la valeur de la solution en certains nœuds, on ne garanti plus cette convexité et la solution obtenue ne correspond pas forcément à la solution globale.

La formulation variationnelle associée au problème de l'élasticité linéaire peut s'écrire sous la forme :

$$\Pi = \frac{1}{2}u^T K u - u^T f \tag{2.69}$$

avec les conditions $\dfrac{\partial \Pi}{\partial u_i} = 0$ pour tout i. Supposons alors que l'on veuille imposer ainsi le déplacement d'un degré de liberté u_i :

$$u_i = {u_i}^\star$$

Dans la méthode des multiplicateurs de Lagrange, on modifie le membre de droite de (2.69) de façon à obtenir :

$$\Pi^\star = \frac{1}{2}u^T K u - u^T f + \lambda(u_i - {u_i}^\star) \tag{2.70}$$

où λ est une variable supplémentaire, et en imposant que $\delta\Pi^\star = 0$, on obtient :

$$\delta u^T K u - \delta u^T f + \lambda \delta u_i + \delta\lambda(u_i - {u_i}^\star) = 0 \tag{2.71}$$

Comme δu et $\delta\lambda$ sont arbitraires, nous obtenons finalement :

$$\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{K} & \overline{\boldsymbol{K}} \\ \hline \overline{\boldsymbol{K}}^{\boldsymbol{T}} & \boldsymbol{0} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{u} \\ \hline \boldsymbol{\lambda} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{f} \\ \hline \boldsymbol{u}^\star \end{array}\right] \tag{2.72}$$

où $[\overline{\boldsymbol{K}}]$ est une matrice composée de vecteurs $\boldsymbol{e_i}$ tels que toutes les valeurs de $\boldsymbol{e_i}$ soient nulles sauf la $i$ème valeur égale à un.

Il est intéressant de remarquer que la valeur du multiplicateur de Lagrange λ_i associé au degré de liberté imposé $u_i^\star$ est équivalent à la composante f_i de la force qu'il aurait fallu appliquer en $\boldsymbol{u}^\star$ pour provoquer la même déformation (Bathe, 1982).

2.5.2 Conditions de Neumann

Les conditions aux limites de Neumann consistent à imposer, non plus la valeur du déplacement en certains nœuds, mais la valeur de la dérivée partielle du déplacement par rapport à la normale à la frontière Γ. Les conditions aux frontières de Neumann sont parfois appelées conditions de forces aux limites. La correspondance entre les deux vient de la mécanique des structures ou la force - la contrainte - appliquée est souvent considérée comme la quantité "duale" du déplacement.

Pour une application en simulation, nous n'introduirons pas de conditions de Neumann. Nous aurons simplement des conditions de Dirichlet et, éventuellement, des forces externes utilisées pour comparer certains résultats du chapitre (3).

2.6 Résolution du système linéaire

La résolution du système linéaire obtenu à l'issue de la construction de la matrice de rigidité et de la prise en compte des conditions aux limites peut être réalisée par différents type de solveurs numériques. Le choix d'une méthode de résolution particulière dépend à la fois du problème - linéaire, non-linéaire - et des caractéristiques de la matrice. Nous avons étudié avec attention ce problème car, dans le cadre d'une simulation en temps-réel, c'est un facteur déterminant - les autres calculs pouvant être réalisés "off-line". On pourra en particulier tenir compte de la faible densité de la matrice (cf. figure 2.7) pour optimiser mémoire et temps de calculs. Nous discuterons de ces problèmes au chapitre suivant (3) car c'est la recherche de méthodes d'optimisation qui nous a conduit à l'algorithme utilisé dans le simulateur.

2.7 Conclusion

Nous avons présenté, dans ce chapitre, les principales étapes de la résolution d'un problème d'élasticité linéaire par une méthode d'éléments finis. Nous avons également introduit la notion de conditions aux limites ainsi que différentes façons de les prendre en compte. L'équivalence entre le déplacement imposé en un nœud et la force à appliquer en ce nœud pour produire une déformation identique nous sera utile pour le calcul des forces lors d'interactions avec retour d'effort.

La création du maillage est un problème spécifique, en particulier pour la représentation de structures anatomiques segmentées à partir d'images médicales. Nous reviendrons sur ce point au chapitre suivant.

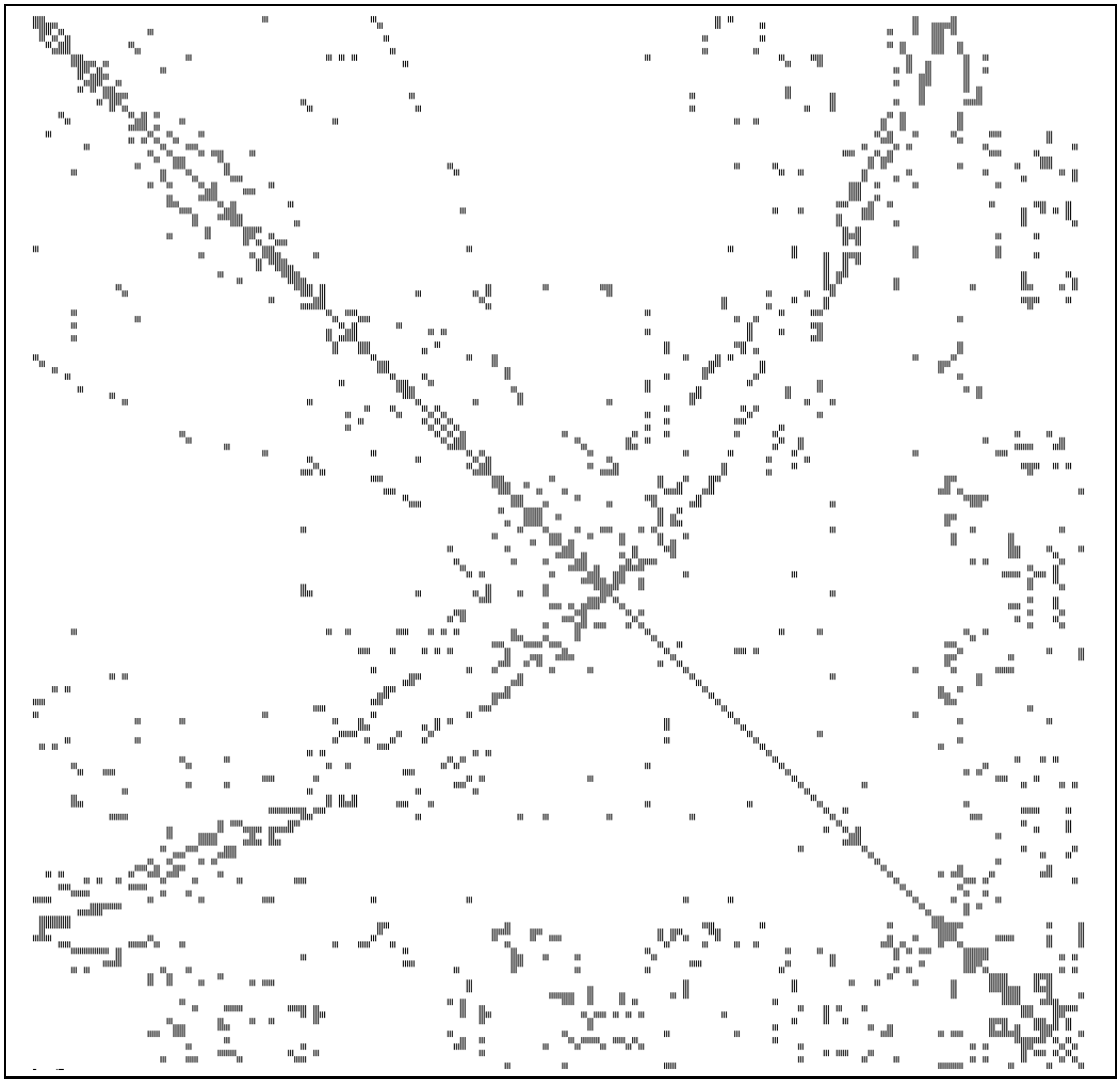


FIG. 2.7 – *Représentation symbolique de la matrice de rigidité. Les pixels noirs correspondent aux éléments non-nuls de la matrice.*

3.

Déformations en temps réel

Dans ce chapitre, nous allons présenter la méthode que nous avons développée afin de calculer, en temps réel, le champ de déplacement et les forces impliquées lors d'une déformation d'un matériau suivant une loi de comportement élastique linéaire. La contrainte de linéarité est un point essentiel de la méthode et peut paraître restrictive du point de vue du type des déformations possibles. Nous décrirons, par conséquent les solutions retenues pour introduire des caractéristiques élastiques non homogènes dans le modèle élastique linéaire, ainsi qu'une méthode approchée d'un comportement non-linéaire. Nous montrerons que les résultats obtenus sont très satisfaisants dans le cadre de la simulation, en particulier vis à vis des méthodes couramment employées.

3.1 Introduction

Dans le chapitre (1) nous avons insisté sur l'importance de la modélisation physique du milieu continu que représentent les différents tissus mous du corps humain. Dans la présentation de la méthode des éléments finis, nous avons introduit les principales étapes de la résolution d'un problème tel que l'élasticité linéaire tridimensionnelle. Parmi ces points figurent la représentation du milieu continu par un maillage et la résolution d'un système d'équations associé au problème. Dans le cas d'une simulation en temps-réel, nécessitant le calcul de la déformation de tissus mous, les notions de modèle physique et modèle géométrique prennent une importance particulière.

La théorie des milieux continus, comme nous l'avons vu au chapitre (1), permet d'établir des relations entre la forme d'un corps, les contraintes et déformations internes à ce solide et les forces extérieures appliquées sur celui-ci. Ainsi, Terzopoulos (Terzopoulos et al., 1987), Waters (Waters, 1992) et Platt (Platt et Barr, 1988) ont montré les avantages des modèles physiques sur les modèles jusque là utilisés en animation par ordinateur. Parmi ces modèles, l'utilisation de solides élastiques a été décrite dans la littérature (Bainville et al., 1995; Song et Reddy, 1995; Chen et Zeltzer, 1992; Speeter, 1992). En général, des modifications et surtout des simplifications sont introduites par les auteurs pour réduire les calculs ou induire un comportement donné. C'est en particulier le cas en simulation de chirurgie où, pour respecter la contrainte de temps-réel, les auteurs ont eu parfois recours à des formulations de la loi de comportement très éloignées de la réalité. Ceci explique l'utilisation fréquente de modèles masses/ressorts (Meseure et Chaillou, 1997; Baumann et Glauser, 1996; Kuehnapfel et Neisius, 1993) et rarement de modèles élastiques (Bro-Nielsen, 1997; Bainville, 1996; Bro-Nielsen et Cotin, 1996; Cotin et al., 1996). L'approche de Bainville reflète assez bien la nécessité de définir des compromis entre le réalisme médical de la simulation et les contraintes de temps-réel. Le point de départ de cette approche - relativement ambitieuse - consiste à décrire l'évolution d'un ensemble de solides rigides et déformables sous l'action d'un certain nombre de forces - de contact, de gravité, etc. La loi de comportement est un modèle hyperélastique quasi-statique. Une méthode d'éléments finis est également utilisée pour la résolution numérique. Malheureusement, les temps de calcul élevés - plusieurs minutes - rendent cette approche, *a priori* intéressante, difficilement exploitable. Notre approche sera, en quelque sorte, opposée. Nous partirons d'un modèle relativement simple - mais cependant basé sur la mécanique des milieux continus - afin d'obtenir des temps de réponse optimaux. Nous étudierons ensuite différents moyens d'améliorer le modèle afin de mieux prendre en compte les aspects biomécaniques (non-homogénéité, non-linéarité, anisotropie, etc.).

Le choix de la représentation géométrique prend également une grande importance en simulation de chirurgie, où le degré de réalisme requis implique l'utilisation de modèles géométriques complexes. Or le nombre de sommets du maillage a un impact direct sur la dimension des matrices et des vecteurs du système linéaire $[\boldsymbol{K}]\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ et le temps de calcul nécessaire pour la résolution d'un tel système est alors bien trop important pour permettre des déformations en temps réel. Sachant que l'on veut intégrer un système à retour d'effort dans le simulateur, les contraintes de temps réel imposent de pouvoir calculer entre 300 et 500 fois par seconde la dé-

formation et les contraintes associées. Les méthodes employées en mécanique des structures ont parfois recours à des algorithmes parallélisés. Cette solution, si elle permet un gain de temps considérable, n'est cependant pas satisfaisante dans notre cas pour les raisons suivantes : (a) supposons que pour un maillage complexe d'un organe, le temps de calcul de la déformation soit de 2 minutes, sur une architecture mono-processeur. Il serait nécessaire de diviser par 60000 ce temps de calcul pour arriver à la fréquence souhaitée; (b) l'utilisation d'une architecture distribuée implique des temps de communication entre les différents processeurs qui restent incompatibles avec les fréquences imposées. Il semble donc que le recours au parallélisme ne soit pas une solution adaptée à notre problème.

Comme nous connaissons peu les lois de déformations de la plupart des organes, surtout lorsqu'ils sont composés de plusieurs types de tissus, ayant chacun leur comportement propre, nous avons décidé d'utiliser une loi de comportement linéaire. Une telle loi est en effet une bonne approximation de très nombreux matériaux dès lors que les déplacements restent faibles. Nous faisons également l'hypothèse qu'à chaque instant, le système est dans un état d'équilibre statique. Cette hypothèse, faite dans de nombreuses situations (Bainville, 1996; Kaiss et Le Tallec, 1996; Bro-Nielsen, 1997; Gourret et al., 1989), permet de ne pas prendre ne compte l'accélération et la vitesse dans le calcul des déformations. On parle ainsi d'évolution quasi statique. Cette hypothèse présente plusieurs avantages, en particulier une simplification du problème à résoudre mais aussi une suppression des oscillations au voisinage de l'équilibre et une réduction de la complexité du traitement des contacts entre objets. Cette hypothèse n'est pas trop réductrice lorsque l'on s'intéresse à des applications chirurgicales où les mouvements sont relativement lents. Malgré tout, l'hypothèse d'une telle loi de comportement ne suffit pas à réduire les temps de calcul dans des limites acceptables. Il est nécessaire d'avoir recours à de nouveaux algorithmes.

Ce chapitre s'articule de la façon suivante : après avoir abordé le problème de la résolution du système linéaire $[\boldsymbol{K}]\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ dans la section (3.2), nous étudierons deux méthodes d'optimisation intéressantes : le pré-conditionnement et la condensation de matrices. Ces solutions n'étant pas suffisamment efficaces pour atteindre des fréquences de l'ordre de 500 Hz, nous présenterons, dans la section (3.3), une nouvelle méthode d'optimisation. Il existe alors certaines propriétés liées aux matériaux élastiques linéaires dont nous tirerons parti pour développer cette méthode. Nous présenterons ensuite différentes modifications permettant de prendre en compte des matériaux non-homogènes (section 3.4.1) ou une loi de comportement non-linéaire (section 3.4.2).

3.2 Éléments d'optimisation pour la résolution d'un système linéaire

Les solveurs itératifs classiques (Jacobi, Gauss-Seidel, gradient conjugué, etc.) sont en général peu utilisés dans les méthodes d'éléments finis pour l'analyse en mécanique des structures. Les raisons sont les suivantes :

- les matrices de rigidité issues des méthodes d'éléments finis sont en général mal condi-

tionnées.

- ces solveurs n'ont pas encore démontré leur robustesse quant à la résolution de problèmes complexes en mécanique des structures (Farhat et Roux, 1994).
- les temps de calcul dépendent du nombre d'itérations et ne sont donc pas prévisibles.

Cependant, l'utilisation de schémas itératifs pour la résolution de systèmes d'équations linéaires offre certains avantages, en particulier la minimisation de l'espace mémoire nécessaire et la possibilité de paralléliser les algorithmes.

Les solveurs itératifs peuvent être efficaces pour résoudre des systèmes du type $[\boldsymbol{K}]\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ à condition que le conditionnement [1] de la matrice $\kappa([\boldsymbol{K}])$ soit petit, c'est-à-dire que la matrice $[\boldsymbol{K}]$ soit bien conditionnée. Malheureusement ce n'est pas le cas pour la plupart des problèmes rencontrés en mécanique des structures et donc en élasticité linéaire.

Par exemple, des systèmes découlant de l'analyse par éléments finis de grandes structures possèdent un conditionnement qui varie typiquement entre 10^5 et 10^{12} (Farhat et Roux, 1994). Ceci est une des raisons pour lesquelles les schémas de résolution itératifs ne sont pas toujours utilisés en mécanique des structures, contrairement à d'autres domaines comme la dynamique des fluides.

Trois facteurs peuvent avoir un effet défavorable sur le conditionnement $\kappa([\boldsymbol{K}])$: la granularité du maillage, la distorsion du maillage, et les grandes variations des coefficients de rigidité au niveau des éléments. Il est connu que pour des problèmes d'élasticité linéaire, le conditionnement d'un système d'équations obtenu par une méthode d'éléments finis croît avec l'augmentation du nombre d'éléments et par conséquent avec une diminution de la taille des mailles (Fried, 1972). Un maillage fin peut ainsi correspondre à une valeur de $\kappa([\boldsymbol{K}])$ pouvant dépasser 10^6. Il a aussi été observé que l'augmentation du rapport *longueur/largeur* d'un élément rectangulaire peut entraîner une augmentation très importante du conditionnement (Farhat et Roux, 1994). Enfin, alors qu'un élément rectangulaire plan à quatre nœuds entraîne un conditionnement variant typiquement de 10^2 à 10^4, un élément de type plaque mince peut entraîner un conditionnement supérieur à 10^8 en raison de la différence entre la rigidité associée à l'élongation et celle associée à la courbure (Fried, 1972).

En raison de tous ces facteurs influant sur le conditionnement de la matrice, les solveurs itératifs sont souvent bannis de la plupart des logiciels d'éléments finis. Cependant, pour des objets de grande taille, entraînant des matrices de rigidité de dimensions considérables, il n'est pas rare d'arriver aux limites des capacités actuelles des stations de travail, essentiellement en ce qui concerne la mémoire. Dans ces cas, les solveurs itératifs offrent trois avantages pour la résolution de systèmes d'équations linéaires :

- ils prennent en compte efficacement le fait que la matrice de rigidité est creuse, nécessitant ainsi moins d'espace mémoire que les méthodes directes. Il est alors possible de considérer de grandes structures ou des maillages fins d'objets complexes.

1. Le conditionnement d'une matrice est le rapport $\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$ où λ_{max} est la plus grande valeur propre et λ_{min} la plus petite.

- ils offrent un moyen de contrôler la précision de la solution. Ceci peut être utile dans le cas où le temps de calcul est un facteur important de l'application. Il est alors possible d'obtenir un compromis entre vitesse d'exécution et précision numérique.
- les algorithmes utilisés dans la plupart des méthodes itératives sont plus adaptés à la parallélisation que les méthodes directes.

3.2.1 Méthode du gradient conjugué

Nous avons vu que la résolution d'un système linéaire $[\boldsymbol{K}]\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$, où $[\boldsymbol{K}]$ est une matrice symétrique positive définie, est équivalent à la résolution du problème de minimisation suivant :

$$min_{v \in \mathbb{R}^{N_K}} \Phi(v) = \frac{1}{2} v^t K v - f^t v \tag{3.1}$$

où N_K représente la dimension de la matrice de rigidité $[\boldsymbol{K}]$. Une famille d'algorithmes à pas variable pour la résolution de (3.1) peut être définie comme suit :

étant donné une solution initiale u_0
pour $k \geq 0$ *et* u_k *connus, calculer* u_{k+1} *par :*
$u_{k+1} = u_k - \rho_k p_k$

La méthode du gradient conjugué (Elman, 1982; Press et al., 1991) est une procédure itérative qui calcule une séquence de solutions approchées $\boldsymbol{u_i}$ de $[\boldsymbol{K}]\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$, en commençant par une solution initiale empirique u_0. En l'absence d'erreur de troncature, la solution exacte $\boldsymbol{u} = [\boldsymbol{K}]^{-1}\boldsymbol{f}$ est obtenue en, au plus, N_K itérations. En pratique, cependant, une solution avec une précision suffisante peut être obtenue en relativement moins d'étapes. C'est pour cette raison que la méthode du gradient conjugué est considérée comme une méthode itérative.

De nombreuses formulations mathématiques de cette méthode existent. Celle que nous décrivons ci-dessous est la plus efficace en terme de nombre d'opérations par itérations.

Le nombre d'opérations élémentaires par itération est de $5N_K$ multiplications plus un produit matrice-vecteur. Comme la plupart des méthodes itératives, le gradient conjugué nécessite relativement peu de capacité mémoire. Il est simplement nécessaire de stocker quatre vecteurs de dimension N_K : $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{p}$, et $[\boldsymbol{K}]\boldsymbol{p}$. Il n'est en effet pas nécessaire de stocker $[\boldsymbol{K}]$ et $\boldsymbol{f}$ sous forme explicite, les seules références faites à $[\boldsymbol{K}]$ étant sous la forme du produit matrice-vecteur $[\boldsymbol{K}]\boldsymbol{p}$. Le membre de droite, $\boldsymbol{f}$, quant à lui, est uniquement utilisé pour le calcul de r_0.

Premiers éléments d'optimisation

Dans notre cas, cependant, nous devons stocker explicitement la matrice de rigidité car de nombreuses références lui sont faites, en dehors de la procédure du gradient conjugué. Nous avons pour cela défini une structure de matrice creuse, permettant de ne stocker que les éléments non-nuls de la matrice. Cette représentation de matrices creuses est plus simpliste que celle décrite dans (Press et al., 1991) et utilisée dans de nombreux algorithmes de calcul numérique. Elle n'est donc pas optimale en terme de minimisation de l'espace mémoire nécessaire au

Algorithme 1 Gradient conjugué

1: choisir u_0
2: $r_0 \Leftarrow f - Ku_0$
3: $p_0 = K^T u_0$
4: $i \Leftarrow 1$
5: **repeat**
6: $\quad a_i \Leftarrow \dfrac{(r_i, r_i)}{(p_i, [K]p_i)}$
7: $\quad x_{i+1} \Leftarrow x_i + a_i p_i$
8: $\quad r_{i+1} \Leftarrow r_i - a_i K p_i$
9: $\quad b_i \Leftarrow \dfrac{(r_{i+1}, r_{i+1})}{(r_i, r_i)}$
10: $\quad p_{i+1} \Leftarrow r_{i+1} + b_i p_i$
11: $\quad i \Leftarrow i + 1$
12: **until** convergence

stockage de la matrice. Par contre, nous avons mise en oeuvre un algorithme de multiplication matrice-vecteur adapté à cette structure.

La structure de données, permettant de réduire le nombre de colonnes, est :

Matrice creuse :

- *dimension réelle : (row, col)*
- *dimension réduite : (row, rcol)*
- *élément (i,j) avec $i \leq row$ et $j \leq rcol$:*
  - *indice réel $\underline{j}$ de la colonne ($\underline{j} \leq col$)*
  - *valeur associée*

Le nombre maximal d'éléments non-nuls dans une ligne, *rcol*, est déterminé en calculant le nombre maximal de liaisons entre les différents nœuds du maillage. Ce calcul est réalisé lors de la lecture du fichier décrivant la géométrie, avant le calcul de la matrice de rigidité. L'espace mémoire requis pour le stockage de la matrice creuse représente, en moyenne, 5% de celui nécessaire au stockage de la matrice initiale.

Le calcul du produit matrice-vecteur, intervenant très souvent dans l'algorithme du gradient conjugué, a été réécrit de façon à prendre en compte le fait que la matrice est creuse. Le calcul de la ligne i du produit $[\boldsymbol{K}]\boldsymbol{p}$ se réduit à :

$$([\boldsymbol{K}]\boldsymbol{p})_i = \sum_{j=1}^{j \leq rcol} K_{i\underline{j}} p_{\underline{j}}$$

où $\underline{j}$ représente l'indice réel de la colonne contenant un élément non-nul.

On réduit ainsi le nombre d'opérations élémentaires (additions, multiplications) d'un facteur égal au rapport entre le nombre d'éléments non-nuls de la matrice et le nombre total d'éléments.

Résultats

Après avoir mis en œuvre la méthode d'éléments finis décrite au chapitre (2), nous avons effectué une série de calculs utilisant le gradient conjugué[2] combiné à notre algorithme de multiplication matrice-vecteur optimisé. Les résultats sont reportés dans les tableaux (3.1) et (3.2) ainsi que dans la figure (3.1). La conclusion essentielle de ces premiers résultats est que les temps de calculs obtenus, même avec de "petits" maillages, restent trop élevés pour des applications nécessitant le temps-réel. On vérifie également, par ces résultats, certaines caractéristiques de la *MEF* énoncées précédemment : influence des propriétés élastiques et de la taille - ou de la qualité - du maillage.

maillage	nombre de tétraèdres	nombre de nœuds	temps CPU
dodécaèdre	71	33	<1 s
cube	956	265	2 s
foie (simplifié)	3902	939	7 s
foie	9517	1969	20 s
visage	24664	4817	60 s

TAB. 3.1 – *Temps de calculs pour la résolution du système linéaire associé à des maillages de taille croissante, ayant les mêmes propriétés élastiques. La méthode de résolution est le gradient conjugué. Le temps de calcul varie à peu près linéairement en fonction du nombre de tétraèdres ou de nœuds dans le maillage*

nombre de tétraèdres/nœuds	valeur de λ	valeur de μ	itérations	temps CPU
9517 / 1969	10	260	485	20 s
9517 / 1969	5000	260	3375	140 s

TAB. 3.2 – *Temps de calculs pour des maillages identiques mais avec des propriétés élastiques différentes. On voit clairement l'influence du conditionnement de la matrice sur les temps de calculs.*

3.2.2 Gradient conjugué pré-conditionné

Les résultats précédents montrent - et confirment - l'influence des représentation physiques et géométriques dans l'efficacité d'une méthode de résolution par éléments finis. Nous n'allons pas revenir sur le choix d'une loi élastique linéaire de même qu'on ne peut éviter les variations de conditionnement de la matrice de rigidité en fonction des paramètres de cette loi. Deux solutions directes sont alors envisageables : réduire le conditionnement de $[\boldsymbol{K}]$ par un *pré-conditionnement* et/ou jouer sur la qualité du maillage ou l'optimisation de la représentation géométrique. Des solutions pour améliorer la qualité du maillage ont été apportées par Duval dans (Duval, 1996) mais sont plus adaptées au domaine de la mécanique des structures qu'au domaine médical. Nous reviendrons plus tard sur ce point (section 3.2.3).

Revenons à la méthode du gradient conjugué et au conditionnement de la matrice de rigidité.

2. Nous utilisons le gradient conjugué bien qu'il ne soit pas très bien adapté à ce type de problème car ses propriétés garantissent qu'il est au moins aussi efficace qu'une inversion de matrice.

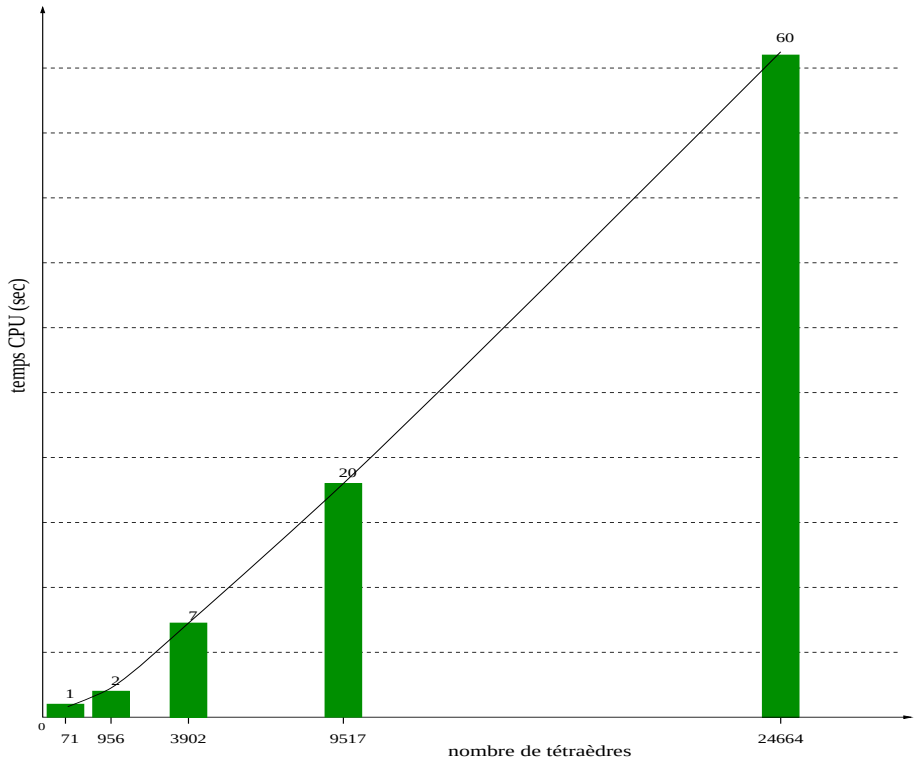


FIG. 3.1 – *Les temps de calcul dépendent linéairement, dans une première approximation, du nombre de tétraèdres dans le maillage.*

.

La borne de l'erreur à la i^{eme} itération est (Farhat et Roux, 1994) :

$$E(\boldsymbol{u_i}) \leq 2[\frac{1-1/\sqrt{\kappa([\boldsymbol{K}])}}{1+1/\sqrt{\kappa([\boldsymbol{K}])}}]^i E(\boldsymbol{u_0}) \tag{3.2}$$

où $E()$ représente une mesure de l'erreur entre $\boldsymbol{u_i}$ et $\boldsymbol{u}$.

Alors, une valeur approchée du nombre d'itérations nécessaires pour rendre l'erreur relative $E(u_i)/E(u_0) \leq \varepsilon$ s'écrit (Farhat et Roux, 1994) :

$$i = [\frac{1}{2} ln \frac{2}{\varepsilon}] \sqrt{\kappa([\boldsymbol{K}])} \tag{3.3}$$

Il apparaît donc clairement que la réduction du nombre d'itérations passe par une diminution du nombre de conditionnement de $[\boldsymbol{K}]$. Le principe général du pré-conditionnement consiste à construire une matrice $[\boldsymbol{P}]$ telle que l'inverse de $[\boldsymbol{P}]$ soit proche de $[\boldsymbol{K}]^{-1}$. De cette façon, le conditionnement de la matrice $[\boldsymbol{P^{-1}}][\boldsymbol{K}]$ va diminuer sensiblement et, d'après la relation (3.3), les méthodes itératives telles que le gradient conjugué vont converger plus rapidement vers la solution.

Soit $[\boldsymbol{P}] = [\boldsymbol{P_1}][\boldsymbol{P_2}]$ une matrice non singulière. La solution du problème linéaire $[\boldsymbol{K}]\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ s'obtient en résolvant le problème suivant :

$$[\tilde{\boldsymbol{K}}]\tilde{\boldsymbol{u}} = [\boldsymbol{P_1^{-1}}][\boldsymbol{K}][\boldsymbol{P_2^{-1}}][\boldsymbol{P_2}]\boldsymbol{u} = \boldsymbol{P_1^{-1}}\boldsymbol{f} = \tilde{\boldsymbol{f}} \tag{3.4}$$

À partir de cette relation il est possible de déduire les deux suivantes, qui ne sont en fait que deux cas particuliers (en considérant $[\boldsymbol{P_1}] = [\boldsymbol{P}]$ et $[\boldsymbol{P_2}] = Id$ par exemple) .

- pré-conditionnement à gauche : $[\tilde{\boldsymbol{K}}]\tilde{\boldsymbol{u}} = [\boldsymbol{P^{-1}}][\boldsymbol{K}]\boldsymbol{u} = [\boldsymbol{P^{-1}}]\boldsymbol{f} = \tilde{\boldsymbol{f}}$
- pré-conditionnement à droite : $[\tilde{\boldsymbol{K}}]\tilde{\boldsymbol{u}} = [\boldsymbol{K}][\boldsymbol{P^{-1}}]\boldsymbol{u} = [\boldsymbol{P^{-1}}]\boldsymbol{f} = \tilde{\boldsymbol{f}}$

Bien entendu, toute la difficulté consiste à minimiser le coût de l'application du pré-conditionnement pour que le gain de temps dans le calcul final soit effectif.

La matrice de pré-conditionnement $[\boldsymbol{P}]$ n'est, en général, pas explicitement calculée. En effet, bien que $[\boldsymbol{K}]$ soit une matrice creuse, $[\tilde{\boldsymbol{K}}]$ ne le sera pas nécessairement. Dans l'utilisation d'une méthode de gradient conjugué préconditionné, le coût supplémentaire, en terme de temps de calcul, se déroule au niveau du calcul des produits matrice-vecteur "pré-conditionnés", impliquant $[\boldsymbol{P^{-1}}]$ (ou $[\boldsymbol{P_1^{-1}}]$ et $[\boldsymbol{P_2^{-1}}]$). Le coût principal, en terme de mémoire, concerne la matrice $[\boldsymbol{P}]$, qui doit être stockée pour un calcul efficace de $[\boldsymbol{P^{-1}}]\boldsymbol{u}$ (ou $[\boldsymbol{P_1^{-1}}]\boldsymbol{u}$ et $[\boldsymbol{P_2^{-1}}]\boldsymbol{u}$). Ceci peut poser des problèmes importants pour des matrices de taille élevée, comme c'est le cas lorsque l'on considère des maillages de structures anatomiques. Cette contrainte justifie en grande partie le choix de la méthode de pré-conditionnement que nous allons exposer ici.

Décomposition *ILU*

De nombreuses techniques de pré-conditionnement existent, le problème principal résidant dans le choix de la matrice $[\boldsymbol{P}]$. Ce choix étant souvent empirique (Farhat et Roux, 1994), nous avons opté pour la méthode suivante, basée sur une factorisation "partielle" de $[\boldsymbol{K}]$. Cette méthode est appelée factorisation ILU (pour *Incomplete LU factorization*). Elle repose sur l'heuristique suivante : pour assurer une mise en œuvre peu coûteuse (en CPU et en mémoire) du pré-conditionnement, on force la matrice $[\boldsymbol{P}]$ à être creuse. Pour cela, seuls certains éléments de $[\boldsymbol{P}]$ sont autorisés à être non-nuls. La factorisation ILU de $[\boldsymbol{P}]$ est obtenue de la façon suivante (Elman, 1982) :

on pose $[\boldsymbol{P}] = [\boldsymbol{L}][\boldsymbol{U}]$ *avec* $[\boldsymbol{L}]$ *et* $[\boldsymbol{U}]$ *deux matrices triangulaires*
- $[\boldsymbol{L}]$ *matrice triangulaire inférieure*
- $[\boldsymbol{U}]$ *matrice triangulaire supérieure avec chaque élément de la diagonale à* 1

Soit alors Z un ensemble d'indices contenus dans l'ensemble $\{(i,j)$ tel que $1 \leq i,j \leq N_k\}$ des indices des éléments de $[\boldsymbol{P}]$. La factorisation ILU satisfait aux conditions suivantes :

- si $(i,j) \in Z$ alors $L_{ij} = 0$ et $U_{ij} = 0$
- si $(i,j) \notin Z$ alors $P_{ij} = K_{ij}$

L'algorithme suivant (2) calcule les valeurs non-nulles de $[\boldsymbol{P}]$. Il est basé sur une modification de la méthode du pivot de Gauss (Press et al., 1991; Elman, 1982).

Cet algorithme est bien défini à condition que $L_{ii} \neq 0$ pour tout i. Meijerink et van der Vorst (van der Vorst et Sleijpen, 1993; Elman, 1982) ont montré que cette méthode est particulièrement efficace pour la résolution de problèmes symétriques - tels que celui de l'élasticité linéaire -

Algorithme 2 Factorisation ILU

1: **for** $i = 1$ to N_k **do**
2: **for** $j = 1$ to N_k **do**
3: **if** $(i, j) \notin Z$ **then**
4: $s_{ij} = K_{ij} - \sum_{t=1}^{min(i,j)-1} L_{it} U_{tj}$
5: **if** $i \leq j$ **then**
6: $L_{ij} = s_{ij}$
7: **end if**
8: **if** $i > j$ **then**
9: $U_{ij} = s_{ij} / L_{ii}$
10: **end if**
11: **end if**
12: **end for**
13: **end for**

lorsqu'elle est combinée à une méthode de gradient conjugué. On parle alors de gradient conjugué préconditionné. L'algorithme du gradient conjugué préconditionné (voir algorithme 3) est très similaire à la version non-préconditionnée. Il nécessite par contre la résolution d'un système linéaire auxiliaire $[\boldsymbol{P}]\boldsymbol{z_i} = \boldsymbol{r_i}$ où $[\boldsymbol{P}]$ est le pré-conditionneur de $[\boldsymbol{K}]$. Le fait d'utiliser pour $[\boldsymbol{P}]$ une factorisation ILU favorise alors grandement la résolution de ce système.

Algorithme 3 Gradient conjugué pré-conditionné

1: choisir u_0
2: $r_0 \Leftarrow f - Ku_0$
3: $z_0 \Leftarrow$ solution de $[P]z_0 = r_0$
4: $p_0 = K^T u_0$
5: $k \Leftarrow 1$
6: **repeat**
7: $a_i \Leftarrow \dfrac{(r_i, z_i)}{(p_i, [K]p_i)}$ avec $z_i \Leftarrow$ solution de $[P]z_i = r_i$
8: $x_{i+1} \Leftarrow x_i + a_i p_i$
9: $r_{i+1} \Leftarrow r_i - a_i K p_i$
10: $b_i \Leftarrow \dfrac{(r_{i+1}, z_{i+1})}{(r_i, z_i)}$ avec $z_i \Leftarrow$ solution de $[P]z_{i+1} = r_{i+1}$
11: $p_{i+1} \Leftarrow z_i + b_i p_i$
12: $k \Leftarrow k + 1$
13: **until** convergence

méthode	tétraèdres	nœuds	itérations	erreur	temps CPU
gradient conjugué	956	265	259	0.0000075	2 s
gradient conjugué préconditionné	956	265	62	0.0000055	5 s
gradient conjugué	9517	1969	870	0.0000070	19 s
gradient conjugué préconditionné	9517	1969	233	0.0000050	20 s

TAB. 3.3 – *Réduction du nombre d'itérations dans la méthode du gradient conjugué préconditionné par rapport à la méthode du gradient conjugué. Par contre, aucun gain, en terme de temps de calcul, n'est obtenu avec la méthode du gradient conjugué préconditionné.*

Résultats

La méthode du gradient conjugué préconditionné ne donne malheureusement pas les résultats attendus. En effet, bien que nous ayons obtenu une réduction importante du nombre d'itérations du gradient conjugué, le gain de temps est, par contre, presque nul. Cela peut s'expliquer par notre mise en œuvre de l'algorithme, qu'il est sans doute possible d'optimiser. Par manque de temps et surtout de connaissances dans ce domaine, nous n'avons pas poursuivi dans cette voie.

3.2.3 Modèle géométrique, triangulation du domaine

Le choix de la représentation géométrique est très important en simulation de chirurgie. Tout d'abord, le degré de réalisme requis implique l'utilisation de modèles géométriques complexes. L'utilisation d'artifices graphiques tels que le *mapping* de texture n'est pas une solution envisageable. Bien qu'elle permette de donner une impression de détail avec peu de noeuds dans le maillage, cette technique n'est convainquante que sur le modèle à l'équilibre. Lors d'une déformation, on se rendra rapidement compte du trop faible nombre de sommets dans le maillage. Par contre, le nombre de sommets dans la triangulation a un impact direct sur la dimension des matrices et vecteurs du système linéaire $[\boldsymbol{K}]\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$; cela devient donc rapidement un facteur limitatif pour des applications temps-réel.

De nombreux auteurs, travaillant sur la réalisation de mailleurs pour des méthodes d'éléments finis, ont étudié le problème de l'amélioration de la qualité des maillages (voir (Zienkiewicz, 1977) ou (Duval, 1996) pour une bibliographie sur ces travaux). Leur approche est cependant différente de notre problème : nous cherchons à réduire le nombre de sommets dans le maillage alors que les méthodes proposées visent plutôt à déplacer les sommets pour améliorer la qualité du maillage (voir chapitre 2 pour la définition de quelques critères de qualité). De plus, la géométrie particulière des maillages rencontrés en mécanique des structures est très différente de celle d'une structure anatomique en raison de la géométrie très irrégulière de la plupart des organes.

Nous ne nous intéresserons, dans cette section, qu'au problème de la génération d'une triangulation de la surface du solide à modéliser. Le passage de cette triangulation à une décomposition du volume en un ensemble de tétraèdres sera réalisé par un logiciel commercial.

Extraction d'iso-surface

Afin d'extraire la surface externe - la frontière - d'un organe à partir d'une image volumique, nous pouvons avoir recours à deux techniques différentes : la première est basée sur l'algorithme des *marching cubes* (Lorensen et Cline, 1987), la seconde consiste à utiliser un modèle déformable de type *snake* (Kass et al., 1988) mais en trois dimensions.

Pour extraire une structure à partir d'une image volumique d'après l'algorithme des *marching cubes*, on considère les voxels comme les sommets d'une grille tridimensionnelle, composée de cellules parallélipédiques. Chaque voxel est alors étiqueté comme étant supérieur ($f \geq I$) ou inférieur ($f < I$) à un certain seuil I, où f représente l'intensité du voxel et I une iso-valeur. Ainsi, l'iso-surface - ou surface d'iso-intensité - est l'interface entre les régions de l'image f : $f \geq I$ (l'intérieur) et $f < I$ (l'extérieur). Dans chaque cellule, les sommets des iso-polygônes sont obtenus par interpolation tri-linéaire, entraînant une précision sub-voxel (Thirion et Gourdon, 1995). L'inconvénient d'une telle précision est le très grand nombre de polygones générés (cf. figure 3.5) pour représenter la surface. De plus, si la distance entre les coupes de l'image volumique est trop élevée, on obtient des cellules fortement anisotropes, et, par conséquent, la surface générée présente des effets de "marches d'escalier" (cf. figure 3.2).

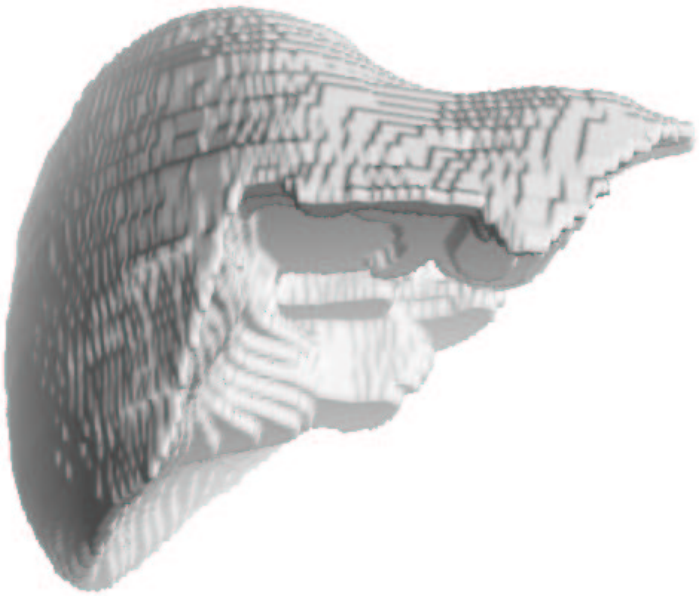


FIG. 3.2 – *Surface du foie extraite, par une technique d'iso-surface, à partir d'une image volumique. On voit bien les effets de "marches d'escalier" dûs à une forte anisotropie des voxels.*

Maillages simplexes

Nous allons brièvement introduire dans cette section le concept de *maillage simplexe* et son importance au niveau de la création des modèles géométriques des organes.

Parmi l'ensemble des modèles utilisés pour la représentation de surfaces, les triangulations et les grilles régulières sont les plus courantes. Les surfaces triangulées peuvent être de topologie complexe et, de plus, être raffinées ou décimées localement. Mais il est difficile de formaliser la déformation ou certains processus de régularisation des triangulations en raison de la connectivité variable des sommets. Les grilles régulières, de leur côté, peuvent être représentées par des B-splines et leurs déformations facilement calculées. Cependant, leur connectivité ne peut pas être localement modifiée de même qu'elles ne permettent pas de représenter certaines surfaces dont la topologie entraîne la présence de pôles sur le maillage.

Les maillages simplexes, introduits par Delingette (Delingette, 1994b), représentent un nouveau moyen de représenter la surface d'objets tridimensionnels. Les principales propriétés d'un maillage simplexe résident dans la constante connectivité entre les sommets - chaque sommet à trois voisins - et la dualité avec une triangulation. Les maillages simplexes sont très bien adaptés à la segmentation d'objets à partir de données volumiques - nuages de points, images médicales, etc. Un maillage simplexe est un modèle déformable, équivalent à une extension tridimensionnelle d'un *snake*. Ainsi, il peut être déformé sous l'action de forces de régularisation et de forces externes. Les maillages simplexes sont également des maillages adaptatifs, permettant, par exemple, d'avoir une densité de sommets plus importante aux endroits de forte courbure. Ils peuvent également être décimés ou raffinés, en fonction de la distance des sommets aux données.

Regardons maintenant quelles propriétés des maillages simplexes seront utiles pour la définition d'une triangulation régulière, peu dense, de la frontière d'une structure anatomique. Dans notre cas, il est très intéressant de considérer les maillages simplexes du point de vue de leur dualité avec les triangulations. Cette propriété de dualité échange les triangles en sommets, les arêtes en arêtes et les sommets en polygones (cf. figure 3.3). Il est important de noter que, même si les maillages simplexes et les triangulations sont topologiquement duaux, il ne le sont pas au niveau géométrique. Par conséquent, on ne peut pas définir d'isomorphisme transformant un maillage simplexe en une triangulation.

Deux niveaux différents d'adaptation du maillage aux données sont possibles. Le premier consiste à adapter l'espace entre les sommets afin d'obtenir une plus grande concentration de nœuds dans les zones de courbure moyenne élevée. Cet algorithme permet ainsi d'obtenir une description optimale de la surface pour un nombre de sommets donné. Le second algorithme permet de raffiner localement le maillage en ajoutant des sommets dans les zones du maillage qui n'approximent pas suffisamment précisément les données. On contrôle ainsi la qualité globale du maillage.

La figure (3.4) illustre le principe du maillage adaptatif, en considérant comme donnée, l'iso-surface d'un cube. Le maillage initial correspond à un maillage semi-régulier d'une sphère. Après déformation vers les données et adaptation, les sommets se retrouvent concentrés aux endroits de forte courbure. Le niveau de concentration est contrôlé par un paramètre du modèle déformable.

Bien que l'algorithme d'adaptation permette de déplacer certains sommets vers les zones de courbure élevée, la description de la surface reste limitée par le nombre initial de nœuds dans le maillage. Afin de pallier ce problème, Delingette (Delingette, 1994b) a introduit une méthode

$$\begin{cases} \text{1 Triangle} & \Leftrightarrow & \text{1 Vertex} \\ \text{1 Edge} & \Leftrightarrow & \text{1 Edge} \\ \text{1 Vertex} & \Leftrightarrow & \text{1 Face} \end{cases}$$

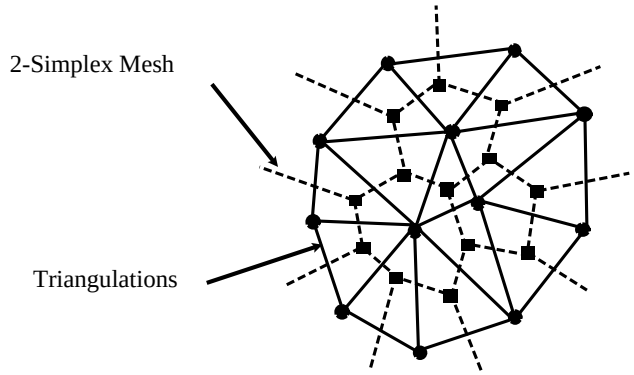


FIG. 3.3 – *Dualité entre maillages simplexes et triangulations.*

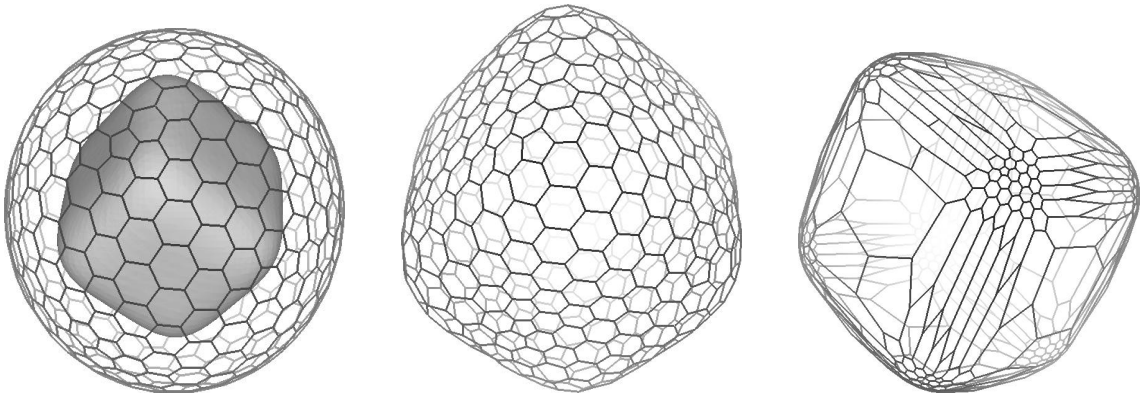


FIG. 3.4 – **À gauche** *: le maillage initial et l'iso-surface.* **Au centre** *: le maillage a pris la forme d'un cube.* **À droite** *: l'algorithme d'adaptation a entraîné une concentration des nœuds vers les coins du cube.*

pour raffiner un maillage simplexe de façon à mieux contrôler la précision de la reconstruction.

Les faces du maillage simplexe sont raffinées selon leur courbure, leur distance aux données, leur aire et leur élongation. La procédure de raffinage est itérative et permet, en introduisant la notion d'aire et d'élongation, de raffiner les faces allongées se trouvant dans les zones plates du modèle (cf. figure 3.4).

Une autre contrainte de régularité dans le processus de raffinement du maillage a été introduite par Delingette dans (Delingette, 1997). Après avoir calculé l'aire totale du maillage simplexe, l'aire relative de chaque face par rapport à l'aire totale est calculée. Les faces sont ensuite triées par ordre croissant d'aire relative. Les faces dont l'aire dépassé un seuil donné sont alors subdivisées. La triangulation obtenue par dualité présente alors des faces dont la variation d'aire est bornée, ce qui est très utile pour des méthodes d'éléments finis.

Triangulation

En combinant les différentes possibilités d'adaptabilité des maillages simplexes, il est ainsi possible d'obtenir une triangulation de la surface d'un solide présentant des caractéristiques intéressantes de lissage et de précision. Bien entendu, les maillages simplexes n'ont pas été développés dans un contexte de modélisation par éléments finis et il est sans doutes possible d'obtenir de meilleures triangulations de la surface, selon les critères de qualité introduits dans le chapitre (2). L'exemple de la figure (3.5) montre ainsi deux représentations de la surface d'un organe. Dans le premier cas (iso-surface) le nombre de triangles est de 44142. La segmentation à l'aide de maillage simplexe a permis de réduire ce nombre à 2762, avec une précision similaire.

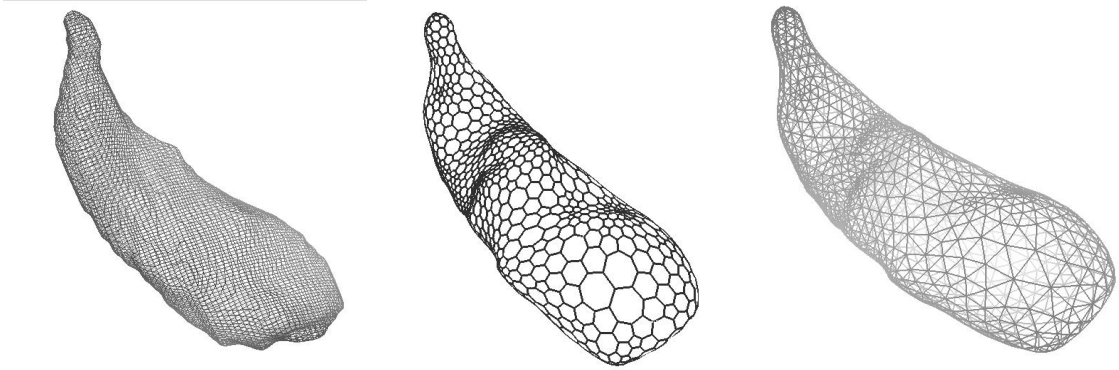


FIG. 3.5 – **À gauche** *: la triangulation initiale de l'iso-surface d'une vésicule biliaire comporte 44142 triangles.* **Au centre** *: la même vésicule segmentée par un maillage simplexe. Le nombre de faces est beaucoup plus faible.* **À droite** *: la triangulation duale du maillage simplexe avec seulement 2762 triangles.*

Maillage volumique

Dès lors que l'on dispose d'une triangulation de la surface du domaine et que cette triangulation est de bonne qualité, la décomposition du volume en tétraèdres devient un problème plus simple à aborder. Pour cela, nous avons utilisé un mailleur commercial, *Simail*[3], basé sur un algorithme de Delaunay-Voronoï, qui construit une tétraédrisation telle que les faces des tétraèdres se trouvant sur la frontière du domaine correspondent à la triangulation initiale.

3.2.4 Inversion de matrice et condensation

La réduction du temps de calcul pour des problèmes d'élasticité linéaire dans le cadre de la simulation de chirurgie a été décrite dans (Bro-Nielsen et Cotin, 1996; Bro-Nielsen, 1997). Notre contribution à ces travaux est essentiellement à mettre au compte des nombreuses discussions que nous avons pu avoir avec Morten Bro-Nielsen. Étudiant le même problème, avec des idées très proches, nous en avons également tiré des solutions similaires. Nous allons cependant

3. Simail est un produit de Simulog S.A. - 1, rue James Joule - 78286 Guyancourt Cedex - France

montrer, dans cette section et dans la section (5) les différences fondamentales existant entre nos deux approches.

Description de la méthode

La technique utilisée dans (Bro-Nielsen et Cotin, 1996) repose sur une condensation de la matrice de rigidité (Zienkiewicz, 1977) combinée à l'utilisation d'un algorithme optimisé pour le calcul de produits matrice-vecteur. Il est ainsi possible de calculer plus rapidement la solution du système linéaire $[\boldsymbol{K}]\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ et, par conséquent, il est envisageable d'avoir des déformations en temps-réel de solides élastiques.

- **Principe général**

  Le système linéaire $[\boldsymbol{K}]\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ modélise le comportement d'un solide, c'est-à-dire d'un objet volumique. La décomposition en volumes élémentaires permet d'obtenir une décomposition du volume en un certain nombre de tétraèdres et de nœuds. Parmi ces nœuds, une partie se trouve sur la surface et une autre partie à l'intérieur du modèle. Lors d'une simulation, destinée à l'apprentissage du geste opératoire, on peut se contenter de simuler les interactions avec un organe virtuel, sans modéliser la découpe de tissus mous. Dans ce cas, seuls les nœuds visibles, c'est-à-dire les nœuds se trouvant sur la surface, présentent un intérêt.

  En utilisant une technique appelée *condensation* (Kardestuncer, 1987), il est possible de *"supprimer"* les nœuds internes du système d'équations linéaires sans changer le comportement du modèle. La dimension de la matrice résultante est alors $3N_s$x$3N_s$ où N_s représente le nombre de nœuds sur la surface. La dimension initiale de la matrice $[\boldsymbol{K}]$ étant de N_Kx$N_K = 3(N_s + N_i)$x$3(N_s + N_i)$ avec N_i le nombre de nœuds internes. On a donc un système linéaire de dimension identique à une méthode surfacique mais en conservant un comportement volumique.

- **Formulation "condensée" du problème**

  Supposons, que la fonction de transfert bi-univoque g utilisée pour la numérotation globale des nœuds (voir chapitre 2) permette d'avoir, en premier, les indices des nœuds de la surface et ensuite les nœuds internes. Le système linéaire peut alors être écrit en utilisant une matrice de rigidité par blocs :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K_{ss}} & \boldsymbol{K_{si}} \\ \boldsymbol{K_{is}} & \boldsymbol{K_{ii}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u_s} \\ \boldsymbol{u_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f_s} \\ \boldsymbol{f_i} \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

  où les indices 's' correspondent aux nœuds de la surface et les indices 'i' aux nœuds internes.

  En posant alors

$$[\boldsymbol{\breve{K}_{ss}}] = [\boldsymbol{K_{ss}}] - [\boldsymbol{K_{si}}][\boldsymbol{K_{ii}}]^{-1}[\boldsymbol{K_{is}}] \tag{3.6}$$

  et

$$\boldsymbol{\breve{f}_s} = \boldsymbol{f_s} - [\boldsymbol{K_{si}}][\boldsymbol{K_{ii}}]^{-1}\boldsymbol{f_i} \tag{3.7}$$

on obtient le nouveau système linéaire :

$$[\breve{\boldsymbol{K}}_{ss}]\boldsymbol{u}_s = \breve{\boldsymbol{f}}_s \tag{3.8}$$

Remarques : la matrice $[\breve{\boldsymbol{K}}_{ss}]$ est plus dense que la matrice initiale $[\boldsymbol{K}]$. Cela pose donc un problème pour l'utilisation de la méthode du gradient conjugué, par exemple. Par contre, la force $\boldsymbol{f_i}$ est, en général, nulle si l'on ne considère que des forces de contacts - ne s'exerçant que sur la surface - et donc le terme $[\boldsymbol{K_{si}}][\boldsymbol{K_{ii}}]^{-1}\boldsymbol{f_i}$ s'annulle.

- **Résolution du système condensé**
  La résolution du système linéaire "condensé" est réalisée par une inversion explicite de la matrice de rigidité. Comme ce calcul peut être réalisé "off-line", il n'intervient pas en fait sur les performances de la simulation elle-même. Il ne reste alors plus qu'à évaluer le produit $[\breve{\boldsymbol{K}}_{ss}]^{-1}\breve{\boldsymbol{f}}_s$ pour déterminer la déformation sous l'action d'une champ de forces. En pratique, cette multiplication est optimisée par une technique appelée *Selective Matrix Vector Multiplication* (Bro-Nielsen, 1997).

Résultats

La méthode développée par Bro-Nielsen permet de calculer plus rapidement la solution du système linéaire $[\boldsymbol{K}]\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$. Toutefois, les fréquences atteintes restent trop faibles pour permettre l'utilisation d'un système à retour de forces. Ainsi, dans (Bro-Nielsen et Cotin, 1996), la fréquence obtenue avec un maillage de 250 nœuds est d'environ 20 Hz[4]. De plus, l'utilisation, dans le cadre de la simulation, de périphériques similaires aux instruments chirurgicaux - avec ou sans retour d'effort - requiert de calculer la déformation du solide en imposant des déplacements en certains nœuds. Ces nœuds correspondent aux points de contact entre l'instrument et la surface de l'organe. La solution proposée par Bro-Nielsen repose sur le calcul d'une déformation induite par un champ de forces extérieures. Comme l'introduction de conditions aux limites nécessite de modifier la matrice de rigidité (cf. chapitre 2), il serait nécessaire de recalculer l'inverse de cette matrice, ce qui est impossible en temps-réel.

3.2.5 Conclusion sur l'utilisation de méthodes d'optimisation "classiques"

En conclusion de cette section on peut dire que les méthodes actuelles d'optimisation ne permettent pas d'atteindre des fréquences de calcul telles que celles que nous nous sommes imposées. Ceci s'explique par la taille importante des maillages dont nous avons besoin pour modéliser avec précision les organes et par l'influence des propriétés élastiques sur le conditionnement de la matrice.

Il est sans doute possible d'améliorer ces résultats avec de meilleurs algorithmes ou même en

4. La machine utilisée est une Silicon Graphics Onyx quadri-processeurs.

ayant recours au parallélisme. Malgré tout, l'ensemble de ces résultats semble indiquer que les algorithmes actuels ne sont pas adaptés pour prendre en compte les contraintes de temps-réel inhérentes à l'entraînement au geste opératoire.

3.3 Méthode SDeLL

3.3.1 Idée générale

La méthode que nous allons présenter repose sur les différentes propriétés des matériaux élastiques linéaires. Puisque nous avons fait le choix, dès le départ, de considérer un tel matériau, nous avons eu l'idée de tirer parti de la linéarité. Jusqu'à présent, le choix d'une telle loi de comportement était uniquement liée aux bonnes propriétés du système linéaire associé. Pourtant, en y regardant d'un peu plus près, la relation suivante apparaît au moins évidente : si on applique une force $\boldsymbol{F}$ en un point du maillage, cette force va induire une certaine déformation. Si on applique une force égale à $2\boldsymbol{F}$, les nœuds du maillage vont se déplacer deux fois plus que précédemment. Ceci est dû à la relation linéaire entre la contrainte σ et la déformation ε (cf. chapitre 1).

L'idée générale est notre algorithme est de déterminer une relation entre une déformation quelconque d'un solide élastique linéaire et un ensemble de déformations induites par des *déplacements élémentaires* de nœuds de la surface. Ce principe explique l'utilisation de l'acronyme *SDeLL* pour Superposition de Déformation éLémentaires Linéaires. Une relation similaire existe entre *déplacements élémentaires* et forces externes.

La méthode se décompose en deux étapes :

- la première étape est réalisée "off-line". Elle consiste en un ensemble de *pré-calculs* permettant de déterminer un ensemble de déformations *élémentaires* induites par un déplacement *élémentaire* de nœuds situés sur la surface du maillage. Ces déformations élémentaires sont représentées sous forme matricielle dans une structure de données. Nous avons utilisé le terme de déplacement élémentaire (ou déplacement canonique) par analogie au fait qu'un déplacement quelconque va pouvoir s'exprimer à partir de celui-ci par combinaison linéaire.
- la seconde étape décrit un algorithme utilisé en temps-réel pour le calcul de la déformation du solide, sur la base des pré-calculs précédents.

Mais pour cela la relation linéaire ne suffit pas, nous avons besoin des définitions suivantes.

Quelques propriétés

- **Théorème de superposition** : considérons un solide déformable tel que celui représenté sur la figure (2.1). Ce corps est soumis à l'action d'un système de forces $\{F_\lambda\}$. Si le déplacement résultant en chaque point est directement proportionnel au système de forces appliquées, le même déplacement résultant peut être obtenu en appliquant séparément chacune des forces dans un ordre quelconque et en sommant ensuite en chaque point les

effets produits séparément. C'est ce qui est énoncé dans le théorème de superposition. Par exemple, le déplacement résultant Δ_1 au point 1 est égal à :

$$\Delta_1 = \delta_{11}F_1 + \delta_{12}F_2 + \cdots + \delta_{1\lambda}F_\lambda + \cdots$$

avec δ_{1i} le déplacement du point 1 induit par $F_i = 1$, toutes les autres forces F_j étant nulles.

- **Théorème de réciprocité de Maxwell** : considérons un solide sur lequel sont appliquées deux forces F_1 et F_2. Lorsque la loi de comportement est celle de Hooke, le travail effectué par les forces est indépendant de l'ordre dans lequel est effectué le chargement. Il en résulte que le travail effectué est le même. Le théorème de réciprocité de Maxwell peut s'énoncer comme suit : le déplacement au point 2 induit par une force unitaire appliquée au point 1 est égal au déplacement au point 1 induit par une force unitaire appliquée au point 2. Cette propriété se retrouve dans la nature symétrique de la matrice de rigidité.
- **Loi de Hooke** : dans le domaine élastique linéaire, la force est proportionnelle au déplacement et la valeur du rapport entre la contrainte σ et la déformation ε est constante pour un matériau donné.

3.3.2 Calcul de déformations et forces élémentaires

Considérons le maillage du solide à déformer. De même que nous l'avons fait pour la méthode de condensation, nous distinguerons les nœuds internes et les nœuds surfaciques. Rappelons également les notations suivantes :

- N_KxN_K représente la dimension de la matrice de rigidité ($N_K = 3N_v$)
- N_s est le nombre de nœuds sur la frontière du solide
- N_i est le nombre de nœuds internes
- N_v est le nombre total de nœuds ($N_v = N_i + N_s$)

Définition des conditions aux limites

Avant de pouvoir calculer une déformation élémentaire, il est nécessaire de spécifier les conditions aux limites. Nous introduisons deux types de conditions aux limites : celles qui servent à modéliser les différents liens anatomiques entre un organe et son "environnement" et celles qui vont nous permettre d'induire une déformation dans le solide.

- **Nœuds contraints à un déplacement nul**

  Nous commençons par définir un ensemble de conditions aux limites de Dirichlet :

$$\boldsymbol{u_i} = \overline{\boldsymbol{u_i}} = \mathbf{0} \text{ avec } 1 \leq i \leq N_s \tag{3.9}$$

  Comme nous l'avons vu précédemment (chapitre 2), il est nécessaire de fixer au moins trois nœuds sur le maillage afin de supprimer la possibilité d'une transformation rigide lors du calcul de la déformation. Le choix des nœuds fixes est un problème important

car, comme nous l'avons mentionné au chapitre (1), des conditions aux limites dépend en grande partie la déformation finale, quelque soit la loi de comportement choisie. Puisque nous cherchons à modéliser des organes, nous aurons recours à des éléments d'anatomie pour le choix des conditions aux limites (voir par exemple l'annexe C pour l'anatomie du foie). Les points d'insertions ligamentaires, par exemple, seront déterminants pour le choix de conditions aux limites. Bien entendu, l'idéal serait d'avoir recours à une segmentation précise à partir d'images médicales volumiques.

Remarque : il est possible de définir un ensemble de nœuds dont seulement une des composantes (ou degré de liberté - ddl) aura un déplacement imposé de valeur nulle. Nous en verrons une application à la section (3.4.2).

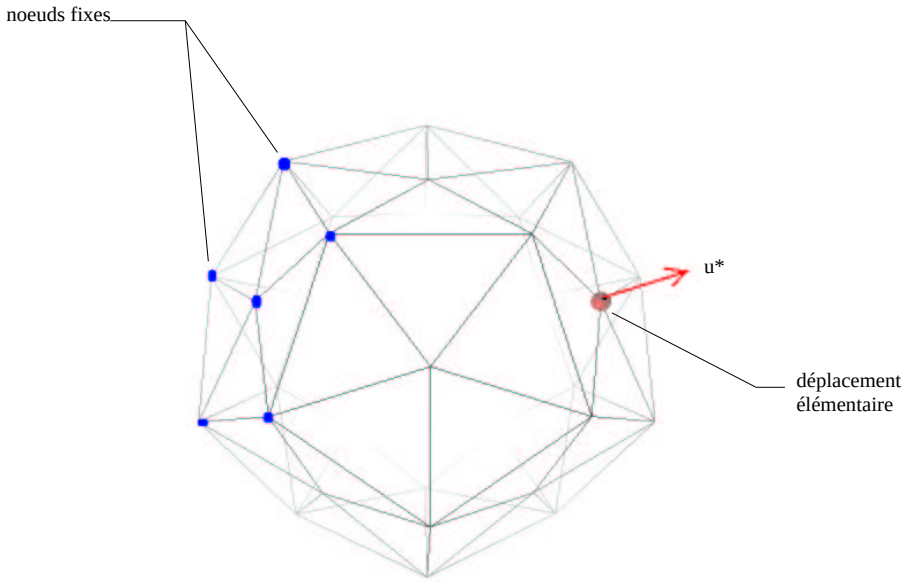


FIG. 3.6 – *Les différentes conditions aux limites : une partie des nœuds de la surface a un déplacement nul - ou un certain nombre de composantes du déplacement. D'autres nœuds peuvent avoir un déplacement réduit, sous l'action d'une force similaire à une force de rappel. Le déplacement élémentaire sera alors imposé successivement en chacun des autres nœuds non-contraints de la surface.*

- **Nœuds contraints par une force de rappel**

  Il faut cependant noter que pour de nombreux organes, en particulier les organes abdominaux, les conditions aux limites que nous venons d'introduire sont souvent trop restrictives, les tissus ayant quand même tendance à ce déplacer légèrement aux points d'insertion ligamentaire. C'est pourquoi nous avons ajouté un autre type de condition aux limites, pouvant être interprété comme le résultat de l'attachement d'un nœud à un ressort de longueur infinie (cf. figure 3.7). Selon la raideur k_s du ressort, il est possible de simuler des contraintes "fortes" ou des contraintes "faibles", c'est-à-dire que le nœud i, attaché au ressort, peut se déplacer plus ou moins librement par rapport à sa position d'équilibre. Une grande partie des attaches ligamentaires peut se modéliser de cette façon. Cette contrainte, exprimée sous la forme d'une force externe $\boldsymbol{f_i}$, peut s'écrire comme

suit :

$$\boldsymbol{f_i} = k_s(\boldsymbol{u_i} \cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{n} \tag{3.10}$$

où k_s représente la constante de raideur du ressort, $\boldsymbol{n}$ est un vecteur unitaire collinéaire au ressort et $\boldsymbol{u_i}$ le déplacement du nœud i. Cette relation est valide sous l'hypothèse suivante :

$$\|\boldsymbol{l_0}\| \gg \|\boldsymbol{u}\|$$

avec $\|\boldsymbol{l_0}\|$ la longueur à vide du ressort. Cette expression particulière de la force de rappel du ressort est nécessaire afin d'avoir une relation linéaire entre la force et le déplacement, afin de pouvoir continuer à appliquer les principes de superposition et de linéarité énoncés plus haut.

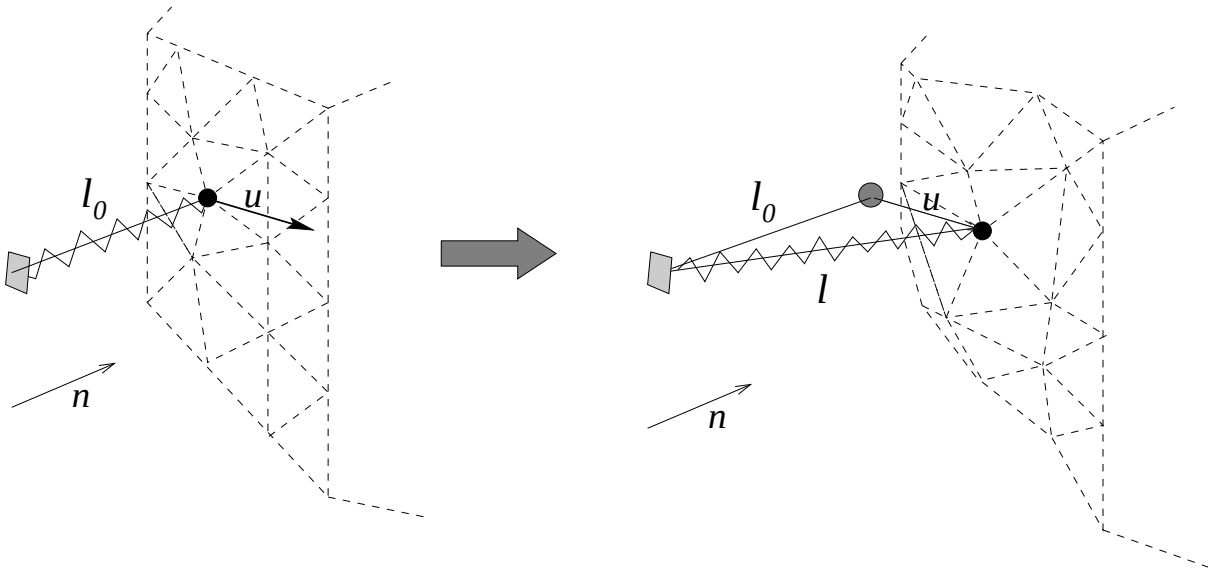


FIG. 3.7 – *Introduction d'une nouvelle condition aux limites destinée à modéliser un attachement ligamentaire. Une extrémité du ressort est attachée à un nœud alors que l'autre est fixe. Le ressort est supposé de longueur infinie, afin d'avoir une relation linéaire entre la force de rappel et le déplacement du nœud.*

- **Nœuds contraints à un déplacement non-nul**

La déformation d'un solide élastique est presque toujours représentée comme le résultat de l'application d'un champ de forces externes (cf. chapitre 2). Cela résulte d'une certaine réalité physique. Cependant, dans notre cas, il est indispensable de pouvoir représenter la déformation issue d'un contact sans connaître les forces mises en jeu. Un problème similaire a été étudié par Gourret *et al.* dans (Gourret et al., 1989). Les conditions aux limites sont toujours des conditions de Dirichlet et on utilisera des multiplicateurs de Lagrange pour prendre en compte ces conditions (cf. chapitre 2).

Calcul des tenseurs de déplacement et de force

Supposons maintenant que $\mathcal{C}$ représente l'ensemble des nœuds de déplacement nul. La seconde étape de l'algorithme va consister à imposer en chaque nœud k tel que $1 \leq k \leq N_s$ et $k \notin \mathcal{C}$, un déplacement canonique $\boldsymbol{u_k^*}$ puis à calculer le champ de déplacement et la force induits. Soit m le nombre de ces nœuds.

- pour chaque degré de liberté k_i $(i = 1, 2, 3)$ de chaque nœud k non contraint de la surface du maillage, un déplacement élémentaire $u_{k_i}^*$ est imposé. La valeur numérique de ce déplacement est fixée à la valeur maximale possible en élasticité linéaire, ceci afin de réduire les erreurs numériques. Nous avons vu au chapitre (1) que pour les tissus mous, on peut estimer cette valeur à environ 10% de la taille totale du maillage.
  Soient $d_1(\mathcal{T})$, $d_2(\mathcal{T})$ et $d_3(\mathcal{T})$ les dimensions du maillage dans les directions associées à k_1, k_2 et k_3, alors la composante $u_{k_i}^*$ du déplacement élémentaire imposé $\boldsymbol{u_k^*}$ vaut $\dfrac{d_i(\mathcal{T})}{10}$.
  La valeur du déplacement élémentaire imposé aux différents degrés de liberté des nœuds k de la surface, $1 \leq k \leq N_s$ et $k \notin \mathcal{C}$, est la même quel que soit k. On notera alors les composantes du déplacement canonique : δ_1, δ_2 et δ_3.

$$\boldsymbol{u_k^*} = [u_{k_1}^*, u_{k_2}^*, u_{k_3}^*]^T = [\delta_1, \delta_2, \delta_3]^T$$

- on résoud alors le système linéaire

$$\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{K} & \overline{\boldsymbol{K}} \\ \hline \overline{\boldsymbol{K}}^{\boldsymbol{T}} & \boldsymbol{0} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{u} \\ \hline \boldsymbol{\lambda} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{f} \\ \hline \boldsymbol{u_k^*} \end{array}\right]$$

  prenant en compte le déplacement élémentaire. Il est également possible de prendre en compte les conditions aux limites en modifiant la matrice de rigidité, plutôt que d'utiliser des multiplicateurs de Lagrange (cf. chapitre 2). La résolution du système linéaire est obtenue par une méthode de gradient conjugué et en pratique, nous avons obtenu des résultats numériques très similaires avec les deux méthodes. Seul le nombre d'itérations du gradient conjugué est plus important avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Mais on est sûr, dans ce dernier cas, d'obtenir une solution correspondant à un minimum global.
  Lorsque la solution du système est obtenue, les quantités suivantes sont calculées :

  - le déplacement de chaque nœud n non contraint - ou nœud libre - $(n \neq k)$ du maillage. La relation entre le déplacement $\boldsymbol{u_n}$ du nœud n et le déplacement élémentaire $\boldsymbol{u_k^*} = [\delta_1, \delta_2, \delta_3]^T$ est représentée sous la forme d'une matrice 3×3 (ou tenseur de déformation) que nous noterons $[\boldsymbol{T_{nk}^u}]$. La figure (3.8) permet de voir le lien entre ces quantités.
    Nous verrons qu'il est possible de réduire le nombre de tenseurs (cf. section 3.3.5) en ne conservant que ceux associés à un déplacement induit significatif.
  - les composantes de la force élémentaire $\boldsymbol{f_k}$ au nœud k associée au déplacement $\boldsymbol{u_k^*}$. Elle est également représentée sous la forme d'une matrice 3×3 correspondant au

tenseur (de force) reliant $\boldsymbol{f_k}$ à $\boldsymbol{u_k^*}$. Nous noterons cette matrice 3×3 $[\boldsymbol{T_k^f}]$.
- l'ensemble des tenseurs est stocké dans une structure de données associée au maillage.

Coût de l'opération

Si n_{nc} est le nombre de nœuds non contraints ($n_{nc} \leq N_s - 3$), le système linéaire doit être résolu $3n_{nc}$ fois. L'algorithme de gradient conjugué que nous utilisons pour résoudre chaque système linéaire est identique à celui introduit à la section(3.2). Il est donc sensible à tous les paramètres énoncés dans cette même section (paramètres d'élasticité, conditionnement de la matrice, conformité du maillage, etc.). Les temps de calcul sont donc variables. L'étape de pré-calculs peut ainsi durer de quelques minutes à plusieurs heures selon la taille du maillage (nombre de nœuds) et la précision désirée. Par exemple, le temps nécessaire au pré-calculs sur un maillage comportant 193 sommets et 725 tétraèdres est de 30 minutes environ. Pour une taille du maillage plus important (1969 sommets - dont 719 sur la surface - et 9517 tétraèdres), le temps nécessaire aux pré-calculs avoisine les 7 heures[5]. Il est possible de réduire ces temps de calcul, comme nous le verrons à la section (3.3.5). La mémoire nécessaire au stockage des différents tenseurs est de :

$$3(n_{nc}+1) \times 9(N_i + n_{nc}) \times sizeof(double)$$

Nous allons également voir plus loin comment réduire l'espace mémoire.

Les résultats des pré-calculs sont finalement stockés dans un fichier, pour être réutilisés lors d'une simulation en temps-réel. Comme ils dépendent de l'ensemble des nœuds fixés ainsi que des paramètres d'élasticité, il est nécessaire de générer un fichier de pré-calculs associé à un comportement élastique donné, avec des conditions limites spécifiques pour une géométrie donnée.

3.3.3 Calcul accéléré de la déformation et des contraintes

Calcul du champ de déplacement

Le déplacement $\boldsymbol{u_n}$ d'un nœud n du maillage (nœud se trouvant sur la surface ou dans le volume) induit par la contrainte $\boldsymbol{u_k^*}$ appliquée au nœud k, s'obtient par l'équation linéaire (3.11). Soit $[\boldsymbol{u_k^*}] = [u_{k_1}^*, u_{k_2}^*, u_{k_3}^*]^T$, alors :

$$\boldsymbol{u_n} = [\boldsymbol{T_{nk}^u}]\frac{\boldsymbol{u_k^*}}{\|\boldsymbol{u_k^*}\|} \tag{3.11}$$

pour tout nœud $k \neq n$. En général, plus d'un nœud de la surface du maillage va se déplacer lors d'un contact avec un autre objet. Le déplacement total d'un nœud du maillage sera alors la somme de tous les déplacements induits par chacun des nœuds contraints $\boldsymbol{u_{kl}^*}, l = 1, .., m$.

5. Ces temps de calculs ont été obtenus sur une station de travail Dec Alpha Station 233Mhz.

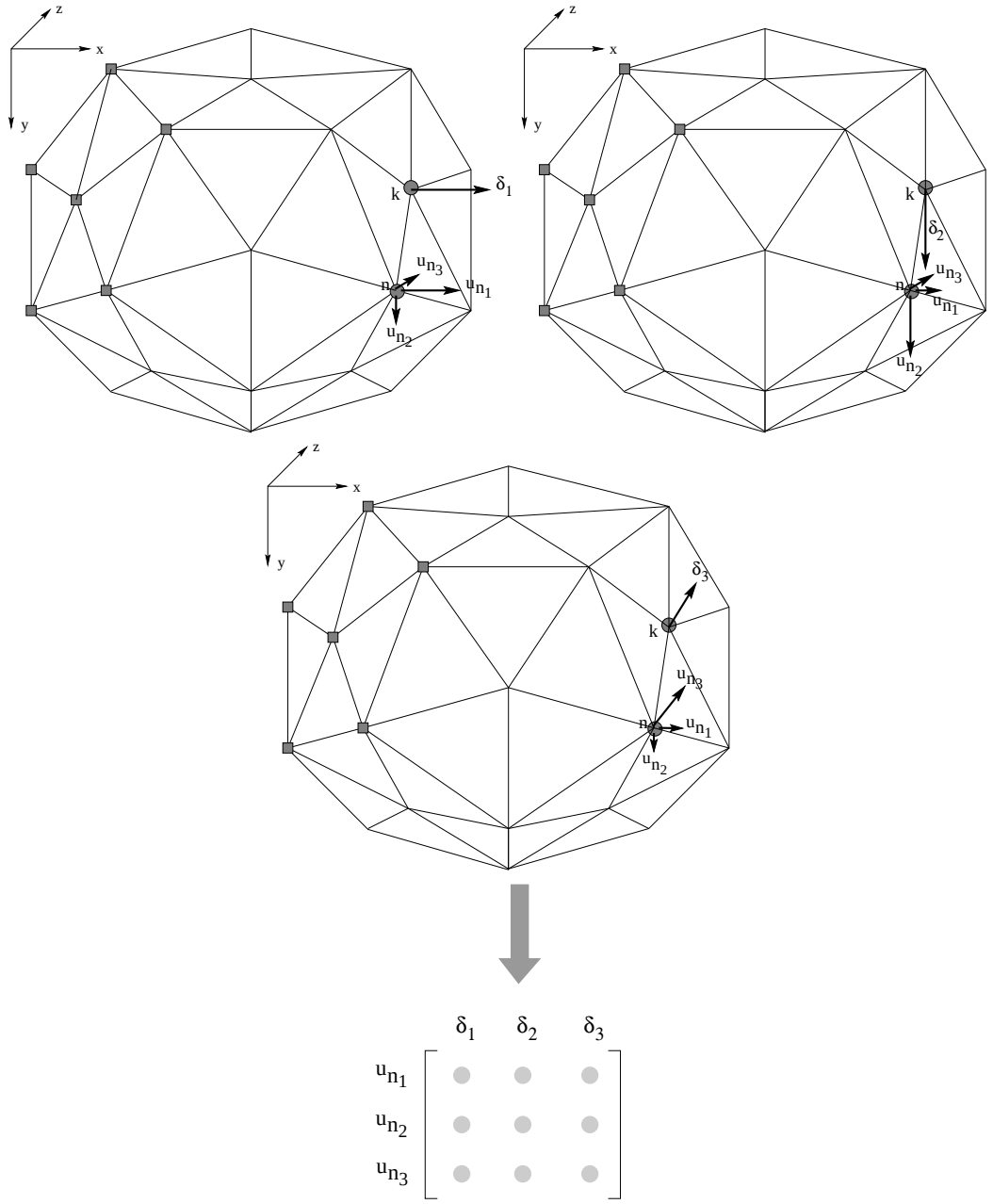


FIG. 3.8 – *Les composantes u_{n_1}, u_{n_2} et u_{n_3} du déplacement du nœud n sont reliées au déplacement élémentaire du nœud k par une matrice 3x3 appelée tenseur de déformation. Il en est de même pour la force associée au déplacement du nœud k.*

Adaptation du principe de superposition

Malheureusement, le principe de superposition tel que nous l'avons énoncé précédemment, n'est pas directement applicable puisque les nœuds contraints sont également influencés par ce principe. Par exemple, si on considère deux nœuds ayant pour déplacement imposé $\boldsymbol{u^*_{k1}}$ et $\boldsymbol{u^*_{k2}}$, nous pouvons remarquer sur la figure (3.9) que le déplacement final de chacun de ces deux nœuds sera plus grand que le déplacement imposé. En d'autres termes, le maillage va se déformer plus qu'il ne devrait.

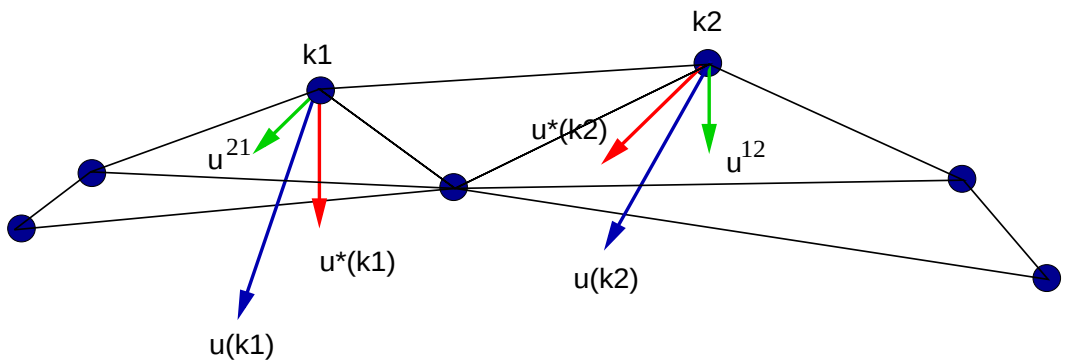


FIG. 3.9 – *$\boldsymbol{u^*_{k1}}$ et $\boldsymbol{u^*_{k2}}$ représentent les déplacement imposés initiaux. $\boldsymbol{u^{12}}$ et $\boldsymbol{u^{21}}$ sont, respectivement, le déplacement induit par $\boldsymbol{u^*_{k1}}$ sur le nœud $k2$ et le déplacement induit par $\boldsymbol{u^*_{k2}}$ sur le nœud $k1$. $\boldsymbol{u_{k1}}$ et $\boldsymbol{u_{k2}}$ sont les déplacements résultants de l'application du principe de superposition.*

Par conséquent, la contrainte $\boldsymbol{\tilde{u}^*_{kl}}, l = 1, .., m$ qui doit être appliquée à la place de $\boldsymbol{u^*_{kl}}, l = 1, .., m$ peut être déterminée par la connaissance des tenseurs de déformation $[\boldsymbol{T^u_{nk}}]$ précédents. La matrice suivante représente l'influence mutuelle des tous les nœuds contraints.

$$[\boldsymbol{M}] = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\delta}] & [\boldsymbol{T^u_{21}}] & [\boldsymbol{T^u_{31}}] & \cdots & [\boldsymbol{T^u_{m1}}] \\ [\boldsymbol{T^u_{12}}] & [\boldsymbol{\delta}] & [\boldsymbol{T^u_{32}}] & \cdots & [\boldsymbol{T^u_{m2}}] \\ \vdots & & & & \vdots \\ [\boldsymbol{T^u_{1m}}] & [\boldsymbol{T^u_{2m}}] & [\boldsymbol{T^u_{3m}}] & \cdots & [\boldsymbol{\delta}] \end{bmatrix}$$

avec

$$[\boldsymbol{\delta}] = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3 \end{bmatrix}$$

Le vecteur des contraintes modifiées $[\boldsymbol{\tilde{u}^*}]$ qui doivent être appliquées sur le maillage est déterminé par :

$$[\boldsymbol{\tilde{u}^*}] = [\boldsymbol{M}]^{-1}[\boldsymbol{u^*}] \tag{3.12}$$

Le principe de superposition peut alors être appliqué afin de calculer le déplacement total de chaque nœud n (champ de déplacements) :

$$\boldsymbol{u} = \sum_{l=1}^{m} [\boldsymbol{T^u_{nk}}] \frac{\boldsymbol{\tilde{u}^*_{kl}}}{\|\boldsymbol{\tilde{u}^*_{kl}}\|} \tag{3.13}$$

Bien entendu, il est nécessaire de calculer l'inverse de $[\boldsymbol{M}]$, qui est une matrice de dimension $3m \times 3m$. Le calcul de $[\boldsymbol{M}]^{-1}$ peut alors s'avérer un point bloquant en terme de temps de calcul, pour des valeurs élevées de m. En pratique nous verrons (chapitre 8) que seuls quelques nœuds ($m = 3$ ou $m = 6$) ont leur déplacement imposé lors du contact instrument/organe.

Remarque : on peut se demander quelles sont les conditions de définition de l'inverse de $[\boldsymbol{M}]$. Il existe plusieurs cas où le déterminant de $[\boldsymbol{M}]$ est nul. Le problème est de déterminer, parmi ceux-ci, lesquels sont physiquement possibles. En effet, lorsque l'on impose un déplacement en plusieurs nœuds, ceux-ci sont en général connexes, puisqu'ils correspondent au contact avec un objet de faibles dimensions. Les influences mutuelles des différents nœuds contraints seront, par conséquent, très similaires. Dans ce cas, une des conditions à laquelle la matrice $[\boldsymbol{M}]^{-1}$ n'est pas définie est :

$$[\boldsymbol{M}] = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\delta}] & [\boldsymbol{\delta}] & \cdots & [\boldsymbol{\delta}] \\ [\boldsymbol{\delta}] & [\boldsymbol{\delta}] & \cdots & [\boldsymbol{\delta}] \\ \vdots & & & \vdots \\ [\boldsymbol{\delta}] & [\boldsymbol{\delta}] & \cdots & [\boldsymbol{\delta}] \end{bmatrix}$$

Calcul des forces externes

La force associée au déplacement du nœud k est déterminée par l'équation (3.14). Cette force est celle qu'il aurait fallu appliquer au nœud k pour obtenir le déplacement imposé $\tilde{\boldsymbol{u}}^*$.

$$\boldsymbol{f} = [\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{nk}}][\boldsymbol{u}^*] \tag{3.14}$$

3.3.4 Résultats

Nous présentons ici un ensemble de résultats destinés à valider notre modèle par rapport aux méthodes que nous avons présentées auparavant. Nous insisterons en particulier sur les gains de temps très importants, la précision par rapport à une *MEF* classique, ainsi que l'équivalence entre la déformation obtenue sous l'effet d'un champ de forces externes et la déformation obtenue par application de conditions aux limites spécifiques.

Amélioration des temps de calculs

Nous avons appliqué notre algorithme à un ensemble de maillages de taille croissante. Ce sont les mêmes modèles que ceux utilisés à la section (3.2.1). Nous avons reporté les différents temps de calculs dans le tableau (3.4). Le graphique (3.10) permet de se rendre compte du gain de temps apporté par notre méthode. On voit en particulier que plus la taille du maillage devient importante (nombre de nœuds et/ou de tétraèdres), plus le gain de temps est considérable. Cela signifie que, contrairement aux méthodes présentées jusqu'ici, notre algorithme est plus rapide **et** beaucoup moins sensible au nombre d'éléments du maillage. La figure (3.11) permet de

mieux se représenter quels types d'objets peuvent être modélisés avec des maillages possédant les différents nombres de sommets donnés dans le tableau (3.4).

Nous ne présentons pas de résultats relatifs aux temps de calculs en fonction des paramètres d'élasticité (coefficients de Lamé). Ces paramètres, nous l'avons vu au début de ce chapitre, influent sur le conditionnement de la matrice et donc sur les temps de calculs de la méthode du gradient conjugué. La durée de l'étape de pré-calculs va dont être sensible à ce paramètre mais pas les déformations en temps-réel utilisant ces pré-calculs. C'est un autre avantage de notre méthode.

maillage	*nombre de tétraèdres*	*nombre de nœuds*	*temps de calculs*	
			méthode classique	*méthode accélérée*
dodécaèdre	71	33	500 ms	1 ms
cube	956	265	2000 ms	2 ms
foie (simplifié)	3902	939	7000 ms	7 ms
foie	9517	1969	20000 ms	10 ms
visage	24664	4817	60000 ms	14 ms

TAB. 3.4 – *Temps* CPU *nécessaire au calcul d'une déformation, pour différentes tailles de maillages, avec et sans utilisation de pré-calculs. Les résultats ont été obtenus sur une station de travail Dec Alpha 500/400 MHz.*

Équivalence force/déformation

Nous avons beaucoup insisté, jusqu'à présent, sur la nécessité de pouvoir calculer la déformation à partir du déplacement de nœuds de la surface plutôt qu'en appliquant un champ de forces externes. Nous avons montré au chapitre (2) qu'il y a équivalence entre la force associée au déplacement d'un nœud et la force à appliquer pour produire la même déformation.

L'exemple suivant illustre cette relation. Dans la figure (3.12), la déformation du cube est induite par application d'un champ de forces sur la surface. Soit $\boldsymbol{u_i}$, $1 \leq i \leq N_s$ le déplacement d'un nœud soumis à une force externe $\boldsymbol{f_i}$. La figure (3.13) représente alors la déformation du même cube, obtenue cette fois-ci en imposant aux nœuds $\boldsymbol{i}$ le déplacement $\boldsymbol{u_i}$. Soit $\boldsymbol{f'_i}$ la force associée au déplacement imposé $\boldsymbol{u_i}$.

La comparaison des champs de déplacements issus des deux exemples précédents montre une différence très faible, probablement due à des problèmes de précision numérique. De plus, la force $\boldsymbol{f'_i}$ est identique à la force initiale $\boldsymbol{f_i}$. Il est donc possible de contrôler la déformation seulement par des conditions aux limites et d'en déduire le champ de forces permettant de produire cette même déformation. Cela sera utile pour les manipulations à l'aide d'un système à retour d'efforts.

Précision des déformations calculées en temps-réel

Nous avons effectué une série de tests permettant de vérifier que la déformation, calculée en temps-réel, par notre algorithme, est identique à la déformation calculée par une méthode

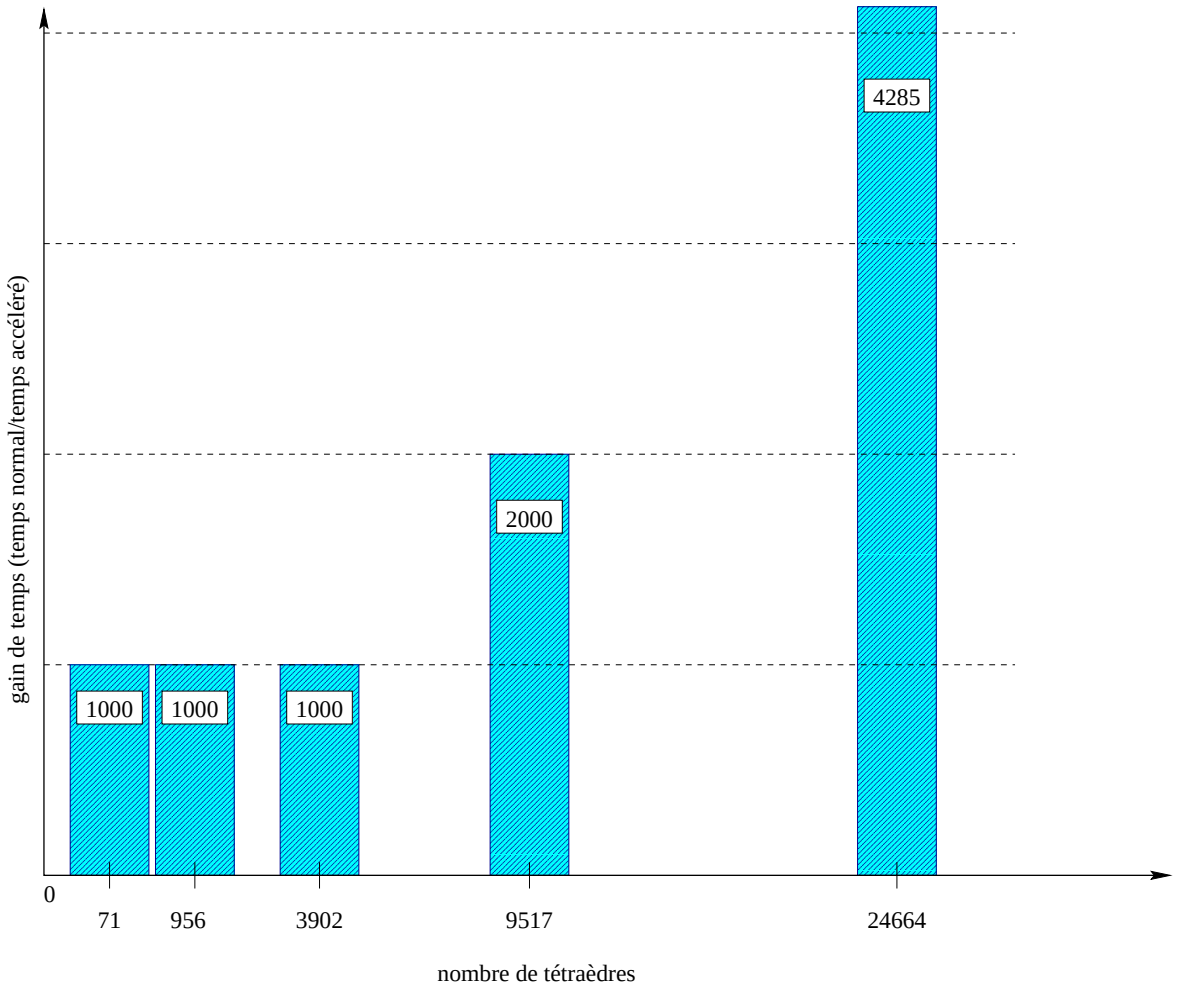


FIG. 3.10 – *Évolution du rapport* $\frac{\textit{temps de calcul "normal"}}{\textit{temps de calcul accéléré}}$. *On voit clairement que plus le nombre d'éléments dans le maillage est important, plus notre méthode apporte un gain de temps élevé.*

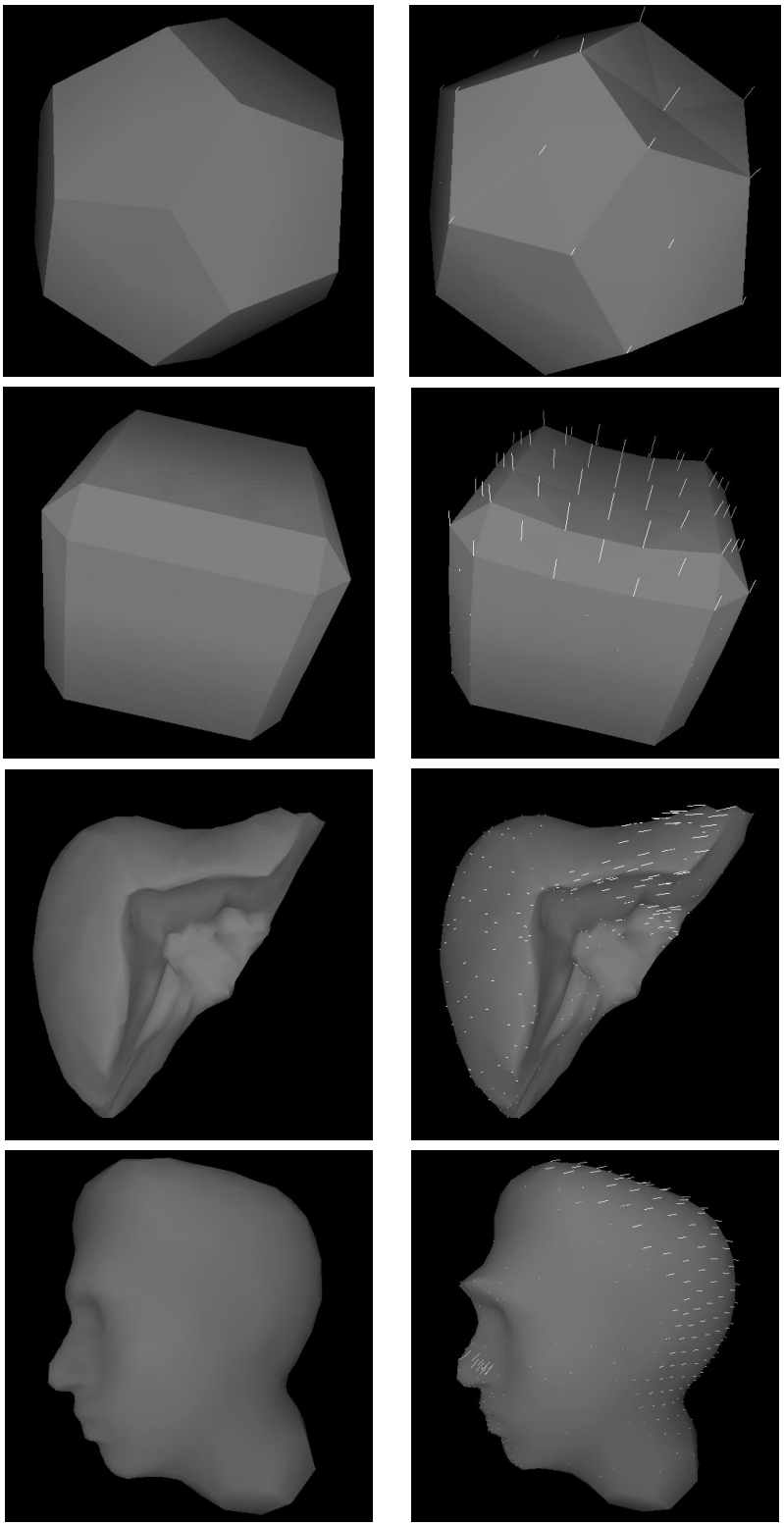


FIG. 3.11 – *Quelques exemples de déformations obtenues par notre algorithme. Les fréquences de calcul élevées permettent un affichage et des interactions fluides.*

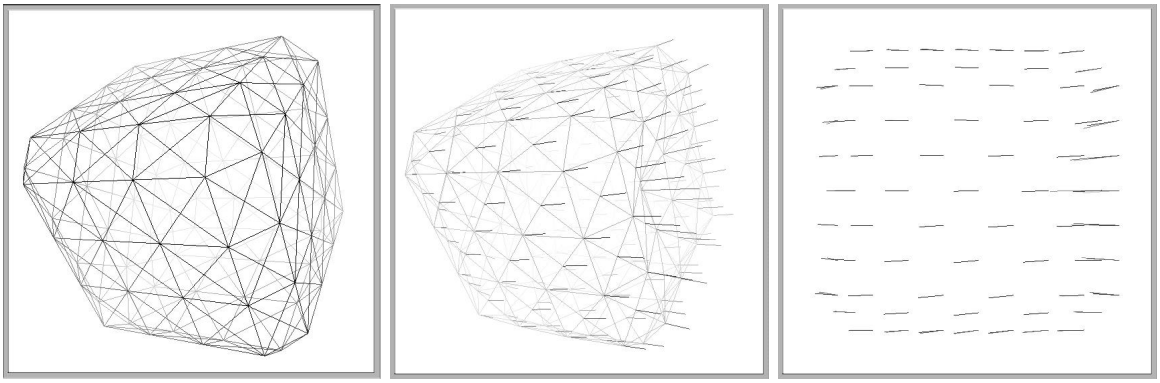


FIG. 3.12 – *Le maillage du cube à l'équilibre (***à gauche***) est déformé (***au centre***) par application d'un champ de forces sur la face droite du cube.* **À droite** *: le champ de déplacements obtenu.*

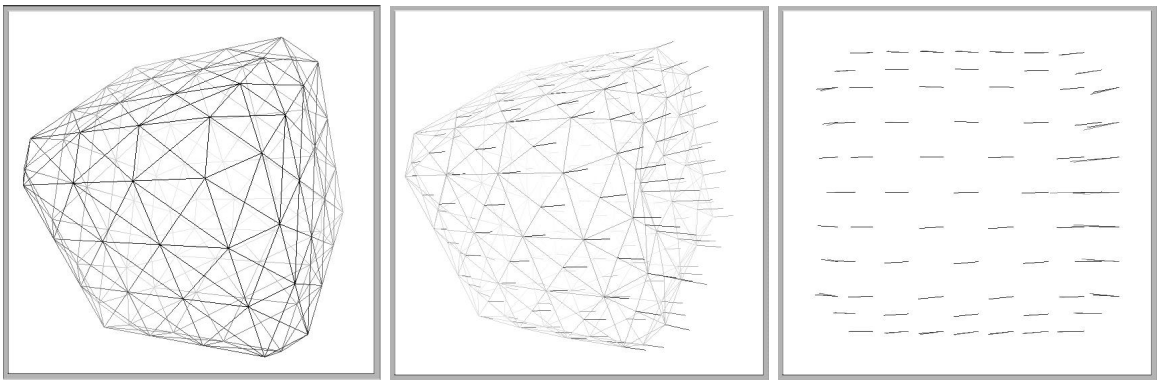


FIG. 3.13 – *Le maillage du cube à l'équilibre (***à gauche***) est déformé (***au centre***) par un ensemble de conditions aux limites déterminées à partir du champ de déplacements de l'exemple précédent.* **À droite** *: le champ de déplacements obtenu.*

classique d'éléments finis. Ces tests consistent simplement à faire la différence, en chaque nœud, entre le déplacement obtenu par un *MEF* classique et le déplacement obtenu par notre algorithme. Aucune différence significative n'a été observée. Seuls des écarts, de l'ordre de 0,1%, ont été mesurés pour des déformations dépassant le cadre des "petits déplacements". Dans ce cas, les différences s'expliquent probablement par des problèmes de précision numérique.

Nœuds contraints par une force de rappel

La figure (3.14) illustre l'effet des conditions aux limites que nous avons introduites pour modéliser l'effet des ligaments que l'on trouve souvent attachés aux organes. Rappelons que nous les avons représentés par une force de ressort linéarisée. Pour des valeurs élevées de la raideur du ressort, la déformation obtenue est similaire à des conditions de Dirichlet mais avec une formulation plus faible ne garantissant pas que les déplacements imposés aux nœuds seront respectés. Pour des valeurs faibles de la raideur, la déformation obtenue est intermédiaire entre une translation et une déformation.

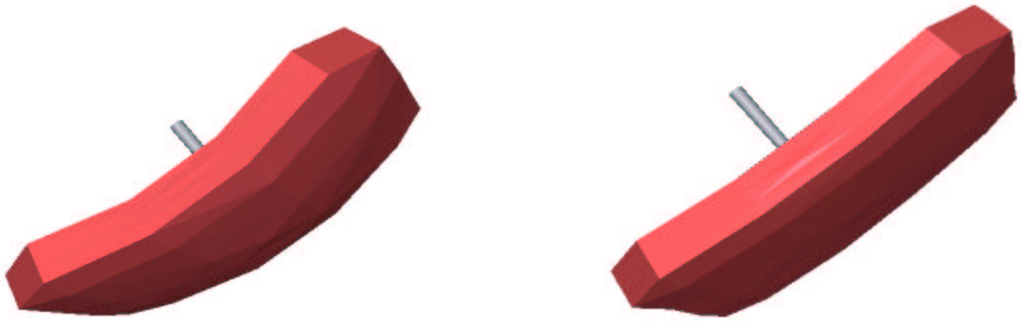


FIG. 3.14 – **À gauche** *: conditions aux limites équivalentes à un ressort de raideur élevée.* **À droite** *: la raideur est plus faible, par conséquent la déformation est moins importante et s'accompagne d'une translation.*

En fait, ces conditions aux limites sont, d'une certaine façon, équivalentes à des conditions de Dirichlet résolues par une méthode de pénalités (cf. chapitre 2).

3.3.5 Optimisation

Réduction de la quantité d'informations

Un aspect intéressant de la méthode que nous venons de présenter réside dans la possibilité de réduire de manière conséquente la quantité d'information nécessaire au calcul d'une déformation. Nous verrons, à la section (3.3.6), que l'utilisation de pré-calculs permet déjà un gain important en ce qui concerne la taille mémoire. Il est encore possible d'optimiser ce gain de mémoire et également de réduire les temps de calculs en ne gardant que les informations significatives pour le calcul d'une déformation donnée.

Lorsque les interactions avec le modèle consistent en des déformations sans découpes, on a seulement besoin de représenter la surface du modèle. Par conséquent, il n'est pas nécessaire

de connaître le déplacement des nœuds situés dans le volume, mais seulement à la frontière du domaine. C'est la même idée que celle utilisée pour la méthode de condensation de matrice. Le point important est que l'étape de pré-calculs continue à prendre en compte la nature volumique du solide. Par contre, les matrices 3x3 calculées et stockées lors des pré-calculs ne décrivent que l'influence du déplacement de nœuds de la surface sur d'autres nœuds de la surface.

L'introduction de cette condition dans l'algorithme de pré-calculs ne pose pas de difficulté particulière.

Le second point permettant de réduire la quantité d'information nécessaire au calcul d'une déformation est lié à la topologie du maillage et aux conditions aux limites. Considérons le maillage présenté dans la figure (3.15). Les nœuds situés à la base du modèle sont fixés. Si on applique un déplacement élémentaire sur le nœud représenté par un •, on peut facilement imaginer que le déplacement induit au nœud représenté par un ⋄ est différent selon la position de ce nœud par rapport au nœud •. Ainsi, le déplacement d'un nœud proche de la base est plus faible que celui d'un nœud situé au sommet de la pièce, en raison des conditions aux limites.

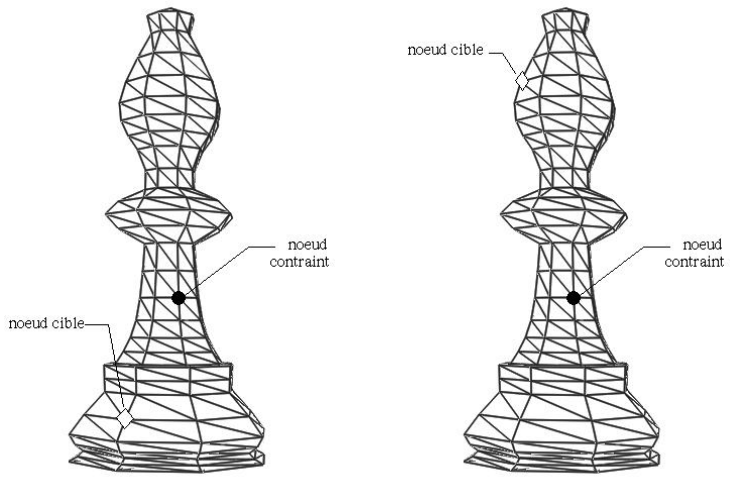


FIG. 3.15 – *L'influence du déplacement d'un nœud sur les autres nœuds du maillage de cette pièce d'échec est liée à sa géométrie et aux conditions aux limites. Supposons que l'on applique un déplacement élémentaire au nœud •. On va alors comparer le déplacement induit au nœud ⋄ selon qu'il se trouve près de la base (***à gauche***) ou au sommet (***à droite***). Les nœuds de la base sont fixés.*

En restant dans le cadre de l'élasticité linéaire, c'est-à-dire pour de petites déformations, le déplacement d'un nœud va entraîner un déplacement très faible, voire nul, de certains nœuds du maillage. Il est donc possible de fixer un seuil en dessous duquel on considérera le déplacement comme non significatif. Ce seuil peut être calculé de différentes façons. Voici celle que nous avons utilisée :

- *si* $\frac{\|\boldsymbol{u_n}\|}{\|\boldsymbol{u_k^*}\|} < \varepsilon$ *alors le déplacement du nœud* n *est non significatif.*

La valeur du seuil de précision ε est choisie de façon à avoir le meilleur compromis entre précision des déformations, espace mémoire nécessaire au stockage des pré-calculs et temps de calculs lors de déformations interactives.

Le déplacement $\boldsymbol{u_n}$ du nœud n étant relié à $\boldsymbol{u_k^*}$ par $[\boldsymbol{T_{nk}^u}]$, il serait également possible de

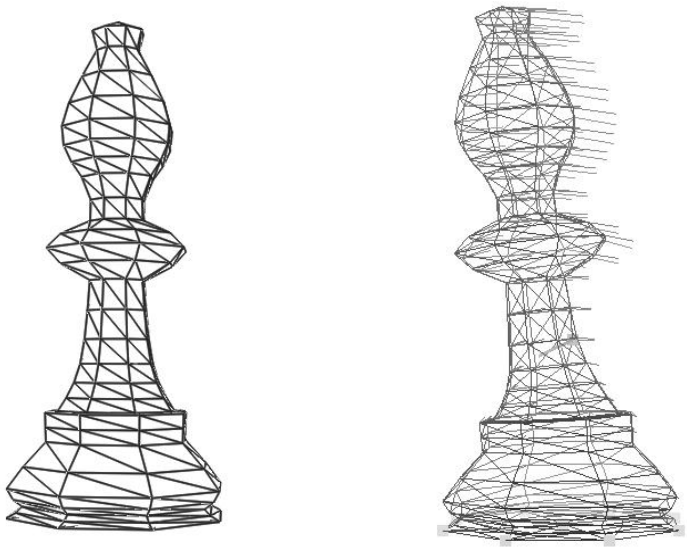


FIG. 3.16 – *D'après le champ de déplacement obtenu, il apparaît clairement que le déplacement du nœud ◇ de l'exemple (3.15 à gauche) est moins significatif que le déplacement du nœud ◇ de l'exemple (3.15 à droite).*

définir un critère basé sur les valeurs propres de la matrice $[\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{nk}}]$.

La figure (3.17), montre la différence entre le champ de déplacement calculé par une méthode classique et le champ de déplacement obtenu par la méthode accélérée. Les différences dues aux erreurs d'arrondi lors des combinaisons linéaires entre les différents tenseurs de déformation sont négligeables. Les différences visibles sont donc celles issues de la suppression de certains tenseurs lors des pré-calculs. Dans ce dernier cas, plus la déformation augmente, plus on a tendance à s'écarter de la valeur réelle du déplacement.

Dans l'exemple suivant (3.18), la taille du maillage est telle qu'il n'était pas envisageable de stocker tous les déplacements. De plus, il est évident que pour de petites déformations, de nombreux noeuds de la surface ou du volume vont avoir un déplacement très faible. Nous avons donc combiné, dans ce cas, les deux possibilités énoncé précédemment : calcul des tenseurs associés uniquement aux nœuds de la surface et seuil d'importance ε fixé à 10% du déplacement élémentaire.

La quantité d'information nécessaire au calcul de la déformation a ainsi été réduite de 80%. Une grande partie de cette simplification est due à la suppression des tenseurs associés aux nœuds du volume. Pour le reste, il est clair que le champ de déformation calculé dans ces conditions sera différent du champ de déformation réel. Malgré tout, les erreurs restent très faibles. Ainsi, nous avons volontairement exagéré les déplacements imposés sur la partie du maillage correspondant au nez - de l'ordre de deux fois la valeur du déplacement élémentaire. La différence maximale calculée entre deux déplacements est de l'ordre de 10% (cela correspond à la valeur de ε). Comme ces nœuds représentent seulement 10% de la totalité des nœuds - surfaciques et internes - du maillage, cela signifie que l'erreur moyenne sur le champ de déplacement est de 1%, ce qui est très acceptable en regard du gain d'espace mémoire et de temps de calcul.

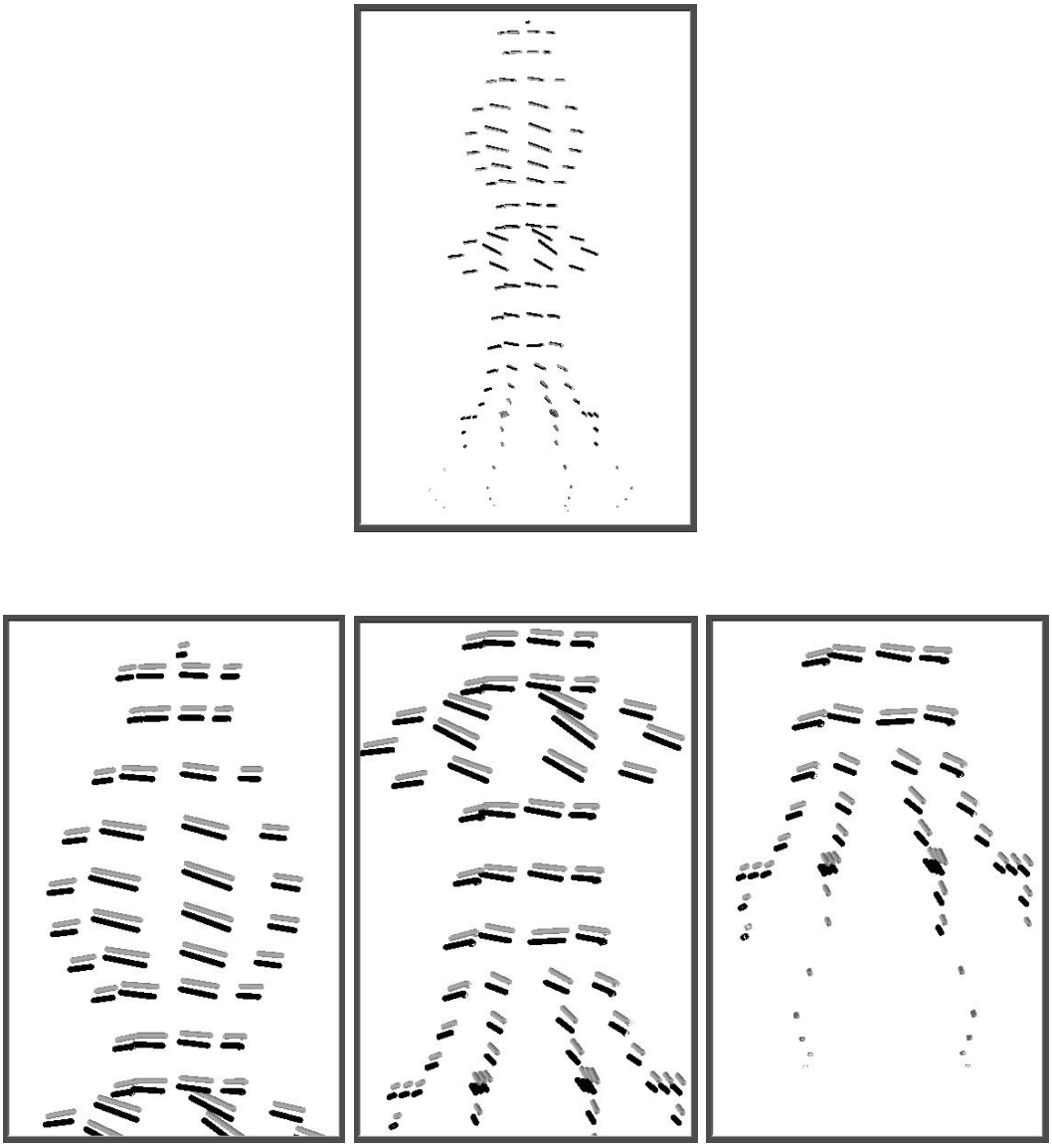


FIG. 3.17 – *Comparaison des champs de déplacement obtenus par une MEF classique et par notre algorithme de calcul en temps-réel. Les trois figures du bas représentent un zoom du champ de déformation total, pris en haut, au milieu et en bas de l'objet. Les vecteurs représentés en gris clair correspondent à la méthode classique, les vecteurs en gris foncé à notre méthode. Le décalage vertical entre les deux a été fait volontairement afin de mieux les comparer. On voit que sur les figures de gauche et du centre que la différence est infime. Par contre, sur la figure de droite, on voit que certains vecteurs n'ont pas de correspondant, les tenseurs associés ayant été supprimés lors des pré-calculs. Comme on peut s'en rendre compte, leur influence sur la déformation totale est cependant négligeable.*

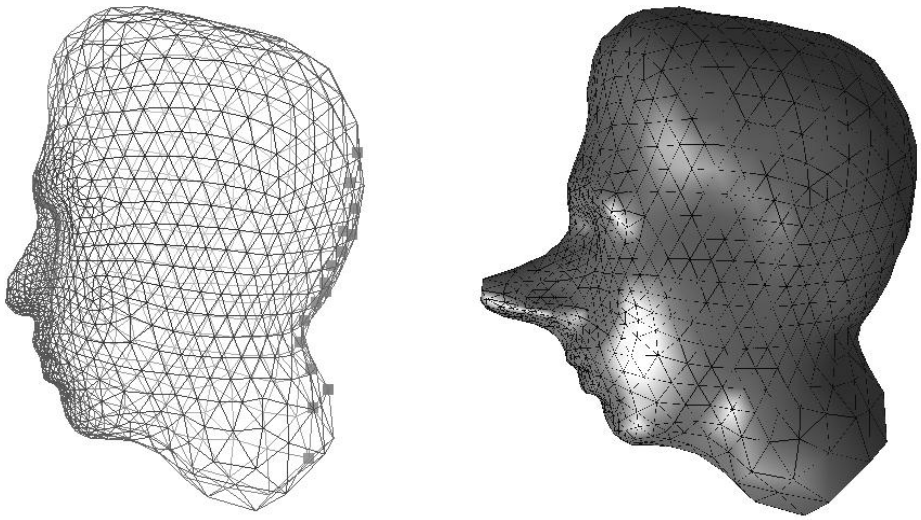


FIG. 3.18 – **À gauche** *: le maillage d'un visage avec un ensemble de nœuds fixés sur la partie arrière de la tête. Certains nœuds du nez sont ensuite déplacés.* **À droite** *: résultat de la déformation ne prenant en compte que les déplacement jugés significatifs. L'erreur par rapport à une déformation "exacte" reste très faible pour un gain de temps de calcul non négligeable.*

Pré-conditionnement

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, le pré-conditionnement vise à réduire le conditionnement de la matrice de rigidité et par conséquent à diminuer le nombre d'itérations nécessaires pour aboutir à la résolution du système linéaire associé, lorsque l'on utilise un solveur itératif tel que le gradient conjugué.

Les contraintes de temps réel à respecter sont telles que le seul pré-conditionnement ne peut suffire à accélérer les calculs en proportion suffisante. Par contre, les temps CPU pour le pré-calcul des déformations élémentaires deviennent rapidement prohibitifs pour des maillages comprenant un grand nombre d'éléments, comme le montre le tableau (3.5). Comme cette étape est indépendante de la simulation elle-même, il est toujours possible de négliger ce problème.

maillage	*nombre de nœuds*	*durée des pré-calculs*
dodécaèdre	33	10 s
cube	265	8 min
foie	1969	9 h
visage	4817	36 h

TAB. 3.5 – *La durée des pré-calculs varie non-linéairement en fonction du nombre de nœuds.*

Il peut cependant être utile de réduire les temps de pré-calcul lors de l'étape de validation du modèle. Lors de cette étape on va devoir modifier certains paramètres de la déformation, en particulier les conditions aux limites et les coefficients d'élasticité. À chaque modification de l'un de ces paramètres, il faut recourir à une nouvelle étape de pré-calculs pour valider le modèle lors d'interactions en temps réel. Cela peut devenir très gênant lorsque les pré-calculs nécessitent plusieurs heures.

Nous avons alors pensé utiliser, lors des pré-calculs, l'algorithme de gradient conjugué préconditionné, décrit au début de ce chapitre. Bien entendu, nous n'oublions pas que les tests que nous avons réalisé n'ont pas donné d'avantage particulier - en terme de temps de calculs - à la méthode du gradient conjugué préconditionné par rapport au gradient conjugué. Ceci est dû, rappelons-le, au temps nécessaire à la décomposition ILU de la matrice de rigidité. Par contre, on peut remarque que les matrices intervenant lors des pré-calculs sont toutes "presque identiques".

$$\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{K} & \overline{\boldsymbol{K}} \\ \hline \overline{\boldsymbol{K}}^{\boldsymbol{T}} & \boldsymbol{0} \end{array}\right]$$

La seule différence est introduite par le changement de conditions aux limites dans $\overline{\boldsymbol{K}}$. Si on calcule alors un préconditionneur $[\boldsymbol{P}]$ de $[\boldsymbol{K}]$, il est clair que $[\boldsymbol{P}]$ sera aussi un très bon préconditionneur de

$$\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{K} & \overline{\boldsymbol{K}} \\ \hline \overline{\boldsymbol{K}}^{\boldsymbol{T}} & \boldsymbol{0} \end{array}\right]$$

Par conséquent, la décomposition ILU ne doit être réalisée qu'une seule fois pour l'ensemble des systèmes à résoudre lors des pré-calculs.

Nous avons réalisé une première mise en œuvre de cette idée mais sans succès. Des problèmes d'instabilité numérique sont apparus lors de la résolution des systèmes linéaires par l'algorithme du gradient conjugué préconditionné. Les erreurs peuvent provenir de la décomposition ILU ou d'une particularité de la matrice

$$\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{K} & \overline{\boldsymbol{K}} \\ \hline \overline{\boldsymbol{K}}^{\boldsymbol{T}} & \boldsymbol{0} \end{array}\right]$$

Par manque de temps, nous n'avons pu poursuivre dans cette direction qui semblait pourtant prometteuse.

3.3.6 Comparaison avec une inversion de matrice

Nous allons simplement comparer, dans cette section, les différences entre notre méthode, basée sur des pré-calculs, et une méthode classique ou optimisée par une technique de condensation. On comparera l'espace mémoire nécessaire au stockage des pré-calculs ou de l'inverse de la matrice de rigidité ainsi que les temps de calculs basés sur ces résultats.

Espace mémoire

L'étape de pré-calculs de déformations élémentaires est, d'une certaine façon, équivalente à l'inversion de la matrice de rigidité, solution qui a d'ailleurs été utilisée dans (Bro-Nielsen et Cotin, 1996) pour un calcul accéléré de la déformation d'un solide volumique.

Supposons que l'on veuille inverser une matrice carrée $[\boldsymbol{A}]$ de dimensions NxN. Cette tâche est équivalente à la résolution de N systèmes linéaires $[\boldsymbol{A}]\boldsymbol{x_i} = \boldsymbol{b_i}$ avec N seconds membres $\boldsymbol{b_i}$ différents (i=1,2,..,N). En prenant comme vecteurs $\boldsymbol{b_i}$ les vecteurs unité composés uniquement

de zéro sauf un 1 à la $i^{ème}$ composante, alors les vecteurs solutions $\boldsymbol{x_i}$ correspondants sont les colonnes de la matrice $[\boldsymbol{A}]^{-1}$.

Dans notre cas, si n_{nc} est le nombre de nœuds non-contraints sur la surface du maillage, on doit seulement résoudre, lors des pré-calculs, $3n_{nc}$ systèmes linéaires du type $[\boldsymbol{K}]\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$. En ne conservant que les tenseurs associés aux nœuds de la surface, on obtient, à chaque résolution, $(n_{nc} - 1)$ matrices 3x3 pour le calcul de la déformation plus une matrice 3x3 pour le calcul de la force associée. Soit en tout $(n_{nc})(n_{nc})$ matrices 3x3, équivalentes à une matrice de taille $(3n_{nc})(3n_{nc})$, avec ($nc \ll$ N et $nc \approx N_s$).

On a donc un gain important en ce qui concerne l'espace mémoire nécessaire au stockage des tenseurs par rapport à celui nécessaire pour $[\boldsymbol{K}]^{-1}$. Si on suppose de plus que la matrice est creuse, son inverse par contre, n'est en général pas creuse. Pour des matrices de grande taille, comme nous en rencontrons dans notre cas, le stockage de $[\boldsymbol{K}]^{-1}$ peut poser des problèmes. Il y a, par contre, peu de différence, au niveau de l'espace mémoire, entre la méthode de condensation et les pré-calculs. Cette différence devient beaucoup plus importante dès que l'on a recours à une réduction de la quantité d'information en supprimant les tenseurs non-signficatifs.

Temps de calculs

Le calcul de l'inverse, de même que l'étape de pré-calculs est réalisé en dehors de la boucle de simulation. La comparaison de ces temps de calcul n'est donc pas très importante. Afin de donner simplement un ordre d'idée, on considère toujours que l'inversion d'une matrice est équivalente à la résolution d'un ensemble de systèmes linéaires. Les temps CPU sont ainsi encore proportionnels au nombre d'éléments de la matrice. Une inversion de la matrice de rigidité globale sera donc beaucoup plus longue qu'une inversion de la matrice condensée elle-même équivalente à une étape de pré-calculs dans laquelle on ne considère que les nœuds de la surface. En pratique, il existe des algorithmes très performants pour calculer l'inverse d'une matrice. Il doit par conséquent être possible d'obtenir des temps de calcul très similaires entre les trois méthodes.

Un élément beaucoup plus important concerne les temps de calculs obtenus durant la simulation elle-même. Pour cela, on considérera, soit le temps nécessaire à l'évaluation du produit $[\boldsymbol{K}]^{-1}\boldsymbol{f}$ - où $[\boldsymbol{K}]$ est une matrice creuse ou une matrice condensée -, soit le temps nécessaire à l'évaluation de la relation (3.13). La table (3.6) résume ces différences.

Calcul du produit $[\boldsymbol{K}]^{-1}\boldsymbol{f}$					
méthode normale		condensation		utilisation des pré-calculs	
multiplications	*additions*	*multiplications*	*additions*	*multiplications*	*additions*
N_K^2	$N_K(N_K - 1)$	$(3n_s)^2$	$9N_s(N_s - 1)$	$9n_{nc}$	$9n_{nc}$

TAB. 3.6 – *Comparaison du nombre d'opération élémentaires pour le calcul d'une déformation. On a $N_K > N_s > n_{nc}$. Notre algorithme nécessite donc moins d'opérations que les méthodes ayant recours à l'inverse de la matrice de rigidité.*

3.4 Modification de la loi de comportement linéaire

3.4.1 Comportement élastique non-homogène

Imagerie médicale et biomécanique

La plupart des modalités d'imagerie médicale, telles que l'IRM ou les scannographies à rayons X, peuvent donner des informations liées aux propriétés mécaniques des tissus. L'Imagerie par Résonnance Magnétique permet de connaître la proportion d'eau contenue dans les tissus. La scannographie par rayons X est plus intéressante car elle produit des images dans lesquelles l'intensité d'un voxel est physiquement reliée à la densité de matière en ce point. Ainsi, dans une application de simulation de chirurgie cranio-faciale, Koch *et al.* (Koch et al., 1996) dérivent les valeurs de la rigidité des ressorts d'un modèle masses/ressorts à partir d'images scannographiques. Un raisonnement similaire a été utilisé par Hodgskinson *et al.* dans (Hodgskinson et Currey, 1992) pour la détermination de paramètres élastiques - module d'Young - dans des tissus osseux à partir d'images scannographiques. Les images issues d'IRM pourraient également être utilisées pour évaluer l'élasticité des tissus du cerveau, les travaux de Masauzawa ayant montré la relation entre la compliance et la quantité d'eau présente dans les tissus *in vivo* du cerveau (Masauzawa, 1980).

Dans notre cas, nous souhaitons établir un lien entre une image médicale volumique scannographique et un maillage volumique extrait à partir de cette image. Cette relation doit être à la fois géométrique et physique afin de pouvoir assigner des coefficients d'élasticité différents dans le maillage. Bien entendu, le lien entre les unités Hounsfield mesurées lors d'une scannographie X et les paramètres d'élasticité n'est pas direct même si certains travaux () semblent prouver l'existence d'une relation déterministe entre ces paramètres.

Détermination de coefficients d'élasticité

Par soucis de généralité, et également par manque de références sur ce sujet, nous considérerons qu'il n'y pas de relation physique entre unités Hounsfield et paramètres d'élasticité. Il devient alors nécessaire d'avoir une connaissance *a priori* sur la loi de distribution des principaux types de tissus dans une image scannographique.

L'exemple présenté à la figure (3.19) illustre l'idée de notre méthode. Considérons une image volumique obtenue par scannographie à rayons X. Les techniques de traitement d'images médicales (Ayache et al., 1996; Kapur et al., 1996; McInerney et Terzopoulos, 1996; Schiemann et al., 1996; Boes et al., 1995; Cohen, 1992) permettent de réaliser une segmentation par régions de cette image (Soler et al., 1997). Chaque région correspond alors à une zone homogène en intensité. Cela signifie également que chaque région correspond à un type de tissu particulier. Selon les paramètres du scanner et l'utilisation éventuelle de produits de contraste, il est possible de mettre en évidence un certain nombre de tissus caractéristiques de l'organe étudié. Dans la figure (3.19), il est possible de distinguer au moins trois régions d'intensité homogène. La connaissance *a priori* de l'organe étudié permet alors d'identifier les types de matériaux

associés à ces régions. Dans le cas de la figure (3.19), il s'agit de l'air, l'os et un ensemble regroupant différents tissus mous - muscles, matière grise, peau, tissus adipeux. Avec une bonne qualité d'image et l'utilisation éventuelle de produits de contrastes, il est possible d'obtenir une segmentation plus précise, permettant de distinguer un plus grand nombre de tissus. La dernière étape de la méthode, concernant plus précisément notre contribution, permet d'assigner, à chaque élément fini d'un maillage volumique, une matrice de rigidité élémentaire déterminée à partir du couple (intensité dans l'image scannographique; caractéristique des tissus mous correspondants à cette intensité).

En pratique les régions ne sont pas uniformes et on considère que la distribution de l'intensité des différents tissus mous suit une loi gaussienne (Soler et al., 1997).

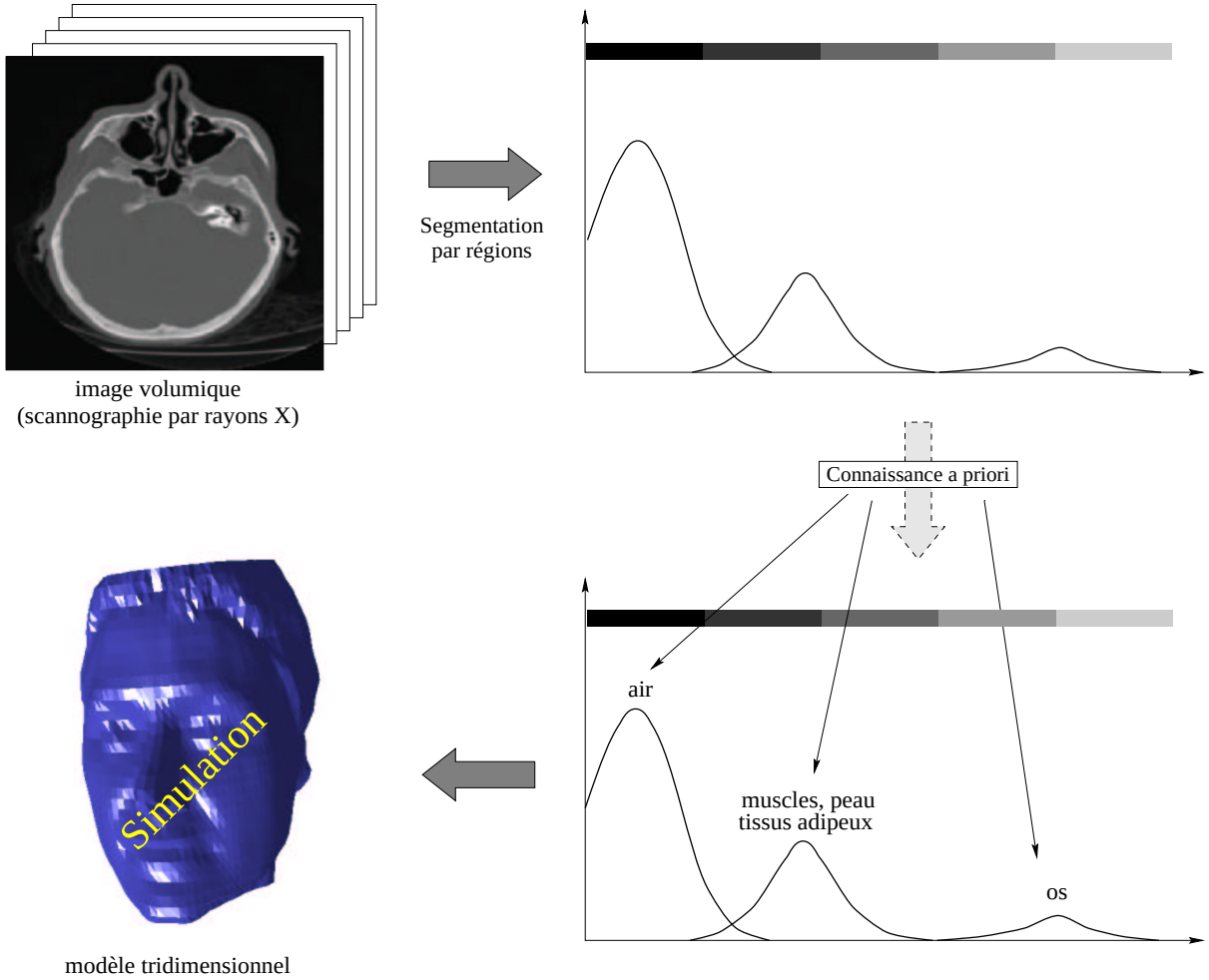


FIG. 3.19 – *Distribution de l'intensité de différents tissus dans une image scannographique. La loi de distribution est supposée gaussienne.*

Identification des paramètres

Nous commençons par extraire une iso-surface dans l'image volumique. Cette iso-surface correspond à la frontière de l'organe que l'on souhaite modéliser et peut être obtenue soit par un algorithme de *Marching Cubes* (Lorensen et Cline, 1987) soit par un modèle déformable

(maillage simplexe) (Delingette, 1994b). La triangulation de la surface permet finalement de réaliser une décomposition du volume du solide en un ensemble de tétraèdres (pour plus de détails voir la section (3.2.3).

Quelles que soient les méthodes retenues pour la création de la triangulation et de la tétraédrisation, les nœuds du maillage final seront bien moins nombreux que le nombre de voxels dans l'image initiale. De plus, les coordonnées des sommets ne correspondent pas exactement aux coordonnées des voxels dans l'image volumique. Il nous faut cependant établir une relation géométrique entre le maillage volumique et l'image tridimensionnelle de façon à déterminer dans quel type de tissus se trouve un nœud donné. La méthode retenue, qui est très simple, est illustrée par la figure (3.20) :

- *pour chaque nœud n du maillage - nœud interne ou de la surface - on détermine le voxel correspondant (i, j, k) dans l'image volumique en prenant la partie entière de ses coordonnées.*

$$i = int(n_1 + 0,5) \tag{3.15}$$

$$j = int(n_2 + 0,5) \tag{3.16}$$

$$k = int(n_3 + 0,5) \tag{3.17}$$

$$\tag{3.18}$$

- *soit I l'intensité du voxel (i, j, k), on détermine le type de tissu mous correspondant à I à partir de la loi de distribution d'intensités établie pour cet organe.*
- *lorsque l'on connaît le type de tissu associé au nœud n, on peut alors en déduire les coefficients d'élasticité λ et μ associés.*

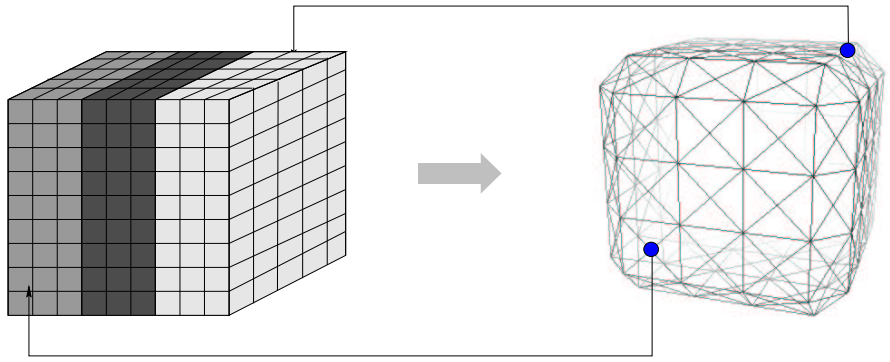


FIG. 3.20 – *La surface du maillage de droite correspond à l'iso-surface d'un cube extraite à partir de l'image volumique de gauche. On peut ainsi établir une relation géométrique entre la position d'un nœud du maillage et un voxel de l'image.*

Calcul de la matrice de rigidité élémentaire

Afin d'introduire une loi de comportement non-homogène dans notre modèle, il nous faut prendre en compte la variation des paramètres d'élasticité λ et μ que nous venons d'affecter

à chaque nœud du maillage. Ces paramètres interviennent dans le calcul de la matrice de rigidité élémentaire $[\boldsymbol{E_T}]$ associée à chaque tétraèdre (cf. chapitre 2). Cela nécessite donc de déterminer un coefficient d'élasticité pour chaque tétraèdre en fonction des paramètres associés aux sommets de ces tétraèdres.

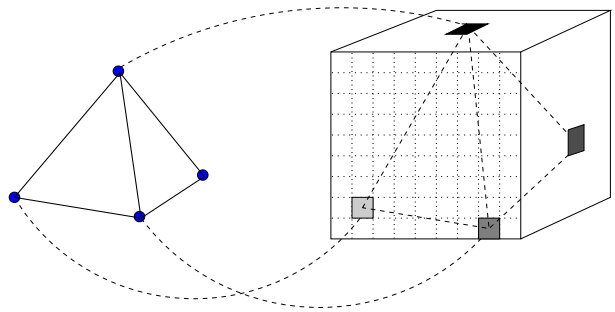


FIG. 3.21 – *La matrice de rigidité élémentaire associée à un tétraèdre dépend de l'intensité des voxels correspondant aux sommets de ce tétraèdre.*

La solution que nous avons retenue est également très simple. Soient n_1,n_2, n_3 et n_4 les sommets du tétraèdre T. Soient I_1, I_2, I_3, I_4 les intensités correspondantes dans l'image volumique et $(\lambda_1,\ \mu_1)$, $(\lambda_2,\ \mu_2)$, $(\lambda_3,\ \mu_3)$ et $(\lambda_4,\ \mu_4)$ les coefficients de Lamé associés. Alors on pose :

$$I_{moy} = \frac{I_1 + I_2 + I_3 + I_4}{4} \tag{3.19}$$

d'où

$$(\lambda_{moy}, \mu_{moy}) = distrib(I_{moy}) \tag{3.20}$$

$$\tag{3.21}$$

avec *distrib* une fonction définie d'après la loi de distribution de l'intensité des différents tissus composant l'organe segmenté.

Remarque : le conditionnement de la matrice va être affecté par l'introduction de ces paramètres variables d'élasticité (cf section 3.2). Les temps de pré-calculs risquent d'être plus longs que pour un modèle de matériau homogène.

Résultats

Afin de valider la méthode, nous avons réalisé un test sur une image synthétique de cube ne comportant que trois niveaux de gris : le fond, en blanc, et le cube, représenté par des intensités très différentes. Quelques nœuds de la face supérieure du cube sont fixés, puis une force - verticale, dirigée vers le bas - est appliquée sur la face inférieure (cf. figure 3.22). Les paramètres élastiques λ et μ sont associés de manière empirique à chaque niveau de gris :

- *gris clair* : rigidité élevée

- *gris foncé* : rigidité faible

Ces deux niveaux d'intensité définissent deux "demi-cubes". Si on se place dans le demi-cube d'intensité élevée, on s'aperçoit que la déformation est assez faible et que le champ de déformation est régulier et symétrique par rapport à la coupe verticale. Dans le demi-cube de faible intensité, la déformation est plus importante - ce qui est normal puisque la rigidité est plus faible - et le champ de déformation est toujours régulier et symétrique (cf. figure 3.22, en haut et au milieu). Par contre, la déformation étant relativement différente dans chaque demi-cube, si on se place dans le cas de la figure (3.22, ligne du bas), on se rend bien compte de l'effet produit sur la déformation par l'introduction de cette condition de non-homogénéité. Le champ de déformation n'est plus régulier, et prend en compte, de façon précise, les propriétés élastiques du matériau.

En appliquant la même idée au modèle d'un organe comportant plusieurs type de tissus, il nous sera possible d'obtenir des déformations beaucoup plus réalistes (voir chapitre 8).

Enfin, notons que cette condition de non-homogénéité est indépendante de la loi de comportement appliquée. Elle vient même en complément des protocoles expérimentaux utilisés en biomécanique (cf. chapitre 1) qui ne prennent en compte que des échantillons de tissus homogènes.

3.4.2 Approximation d'un comportement non-linéaire

Plusieurs publications dans le domaine de la biomécanique semblent montrer qu'une loi de comportement assez générale pour la représentation de tissus mous serait un modèle viscoélastique non-linéaire (Fung, 1993). De récentes expériences réalisées par Chinsei (Chinsei et Miller, 1997) sur des échantillons cylindriques de tissus cérébraux - tissus mous très déformables - ont permis d'établir les propriétés suivantes :

- la réponse de l'échantillon de tissus à la compression dépend de la vitesse à laquelle est appliquée la force.
- la déformation dépend non-linéairement de la contrainte de déplacement appliquée (cf. figure 3.23).
- la force mesurée durant la compression est également non-linéaire et présente de plus un phénomène de relaxation, c'est-à-dire que la force décroît lorsque la compression se stabilise.

Les tests de répétabilité ont montré que la réponse de ce type de tissu reste très similaire sous les mêmes conditions expérimentales.

De ces résultats expérimentaux, il est possible de tracer les courbes $f(x)$ et $d_r(x)$, c'est-à-dire la *force de charge* et le *déplacement radial* en fonction du *déplacement axial* (cf. figures 3.24 et 3.25). Ces diagrammes sont uniquement reliés à la phase de compression et non à la phase de relaxation.

Par la suite, nous continuerons à faire l'hypothèse d'une loi d'évolution quasi-statique, et par conséquent nous ne nous intéresserons pas à la variation de la réponse en fonction de la vitesse de déformation. Nous nous baserons ainsi sur les résultats obtenus pour une vitesse de

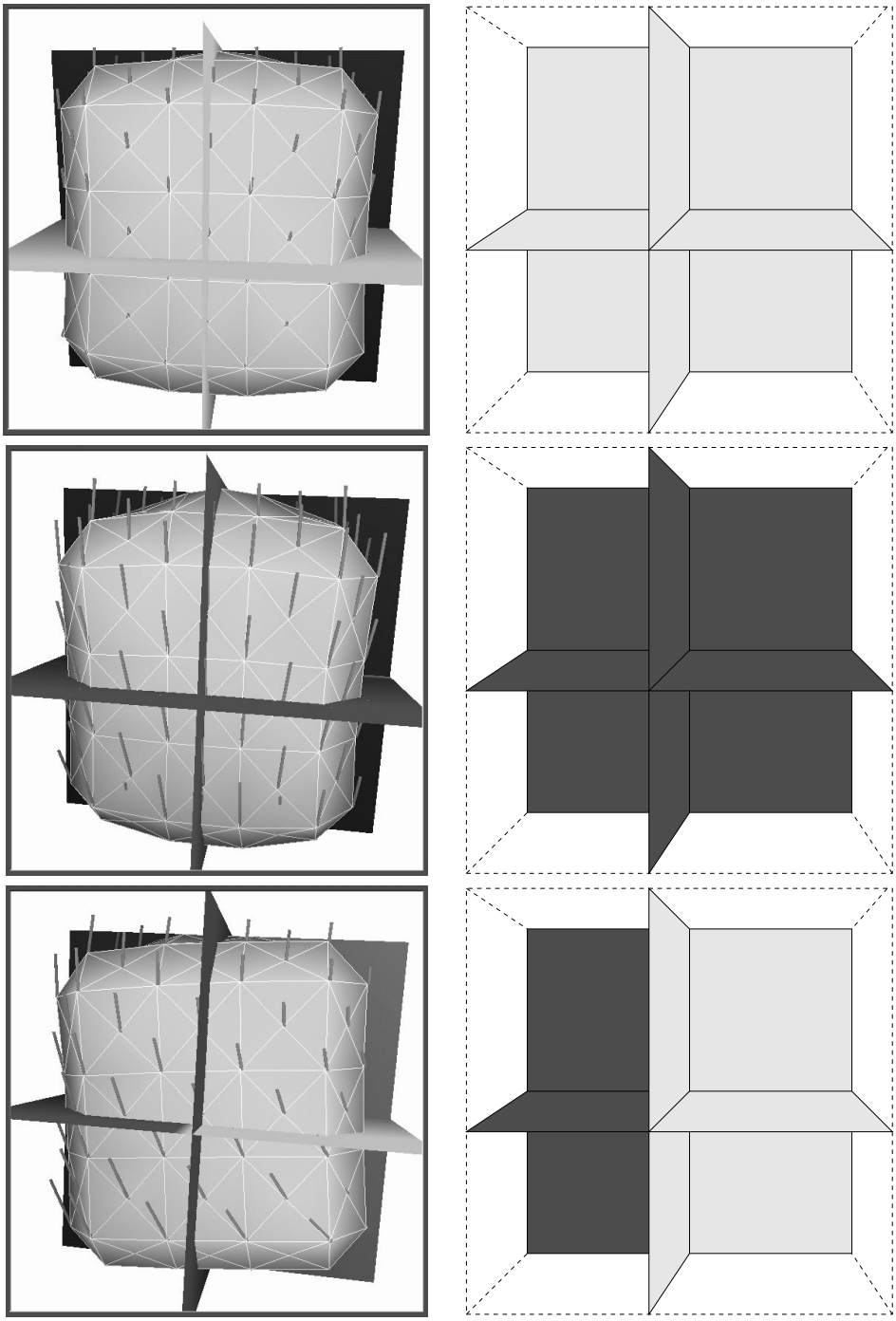


FIG. 3.22 – *Déformations d'un solide élastique linéaire non-homogène. La colonne de gauche représente le maillage d'un cube déformé "plongé" dans une image volumique. L'image volumique associée au cube ne comporte que trois niveaux d'intensité. La colonne de droite permet de voir la répartition des niveaux de gris dans l'image selon le même point de vue que celui utilisé dans la figure correspondante dans la colonne de gauche.*

charge de 500mm/min - moins de 1 cm/s - puisque cela correspond à peu près à la vitesse à laquelle un chirurgien manipule un instrument chirurgical. Les exemples des figures (3.23) et (3.24) illustrent le principe expérimental et le type de réponse obtenue. On peut remarquer que le protocole expérimental est légèrement différent de celui introduit au chapitre (1) puisque dans ce cas une déformation radiale de l'échantillon est possible.

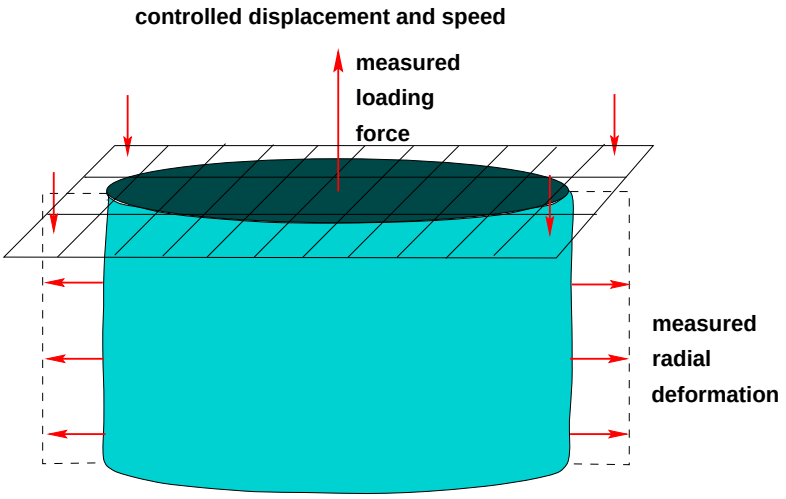


FIG. 3.23 – *Un échantillon cylindrique de tissus mous est compressé à vitesse constante. La force de réaction axiale ainsi que le déplacement axial et la déformation radiale sont mesurés.*

Méthode

Supposons que de telles courbes expérimentales sont disponibles pour l'organe que l'on souhaite utiliser dans la simulation. Une méthode de minimisation aux moindres carrés permet de déterminer une fonction polynômiale $P(x)$ approchant la courbe $f(x)$ et une autre fonction polynômiale $Q(x)$ approchant $d_r(x)$. Dans les expériences que nous avons menées, des fonctions polynômiale de degré variant entre 4 et 10 ont été utilisées, selon le degré de précision souhaité et la forme de la courbe.

Afin de développer les résultats expérimentaux en 3D et conserver une loi de déformation basée sur l'élasticité linéaire - pour continuer à utiliser la méthode de déformations en temps réel - nous faisons les hypothèses suivantes. Premièrement, le calcul d'une déformation "quasi non-linéaire[6]" (resp. une force quasi non-linéaire) doit pouvoir être obtenu à partir de la déformation linéaire (resp. force linéaire) obtenue sur le même maillage, avec les mêmes conditions aux limites. Deuxièmement, la variation en *amplitude* du déplacement radial, ou des forces axiales, doit être similaire à celle des courbes expérimentales. Pour cela, le vecteur déplacement $\boldsymbol{u_n}$ associé au nœud n est décomposé en deux vecteurs $\boldsymbol{u_n^t}$ et $\boldsymbol{u_n^r}$, l'un collinéaire et l'autre orthogonal à la direction de la contrainte. Étant donné que les résultats expérimentaux ne donnent que la variation d'amplitude de la composante orthogonale, l'amplitude de $\boldsymbol{u_n^r}$ est

6. Afin de faire la distinction entre une déformation réellement non-linéaire et notre modèle approché, nous utiliserons par la suite le terme quasi non-linéaire.

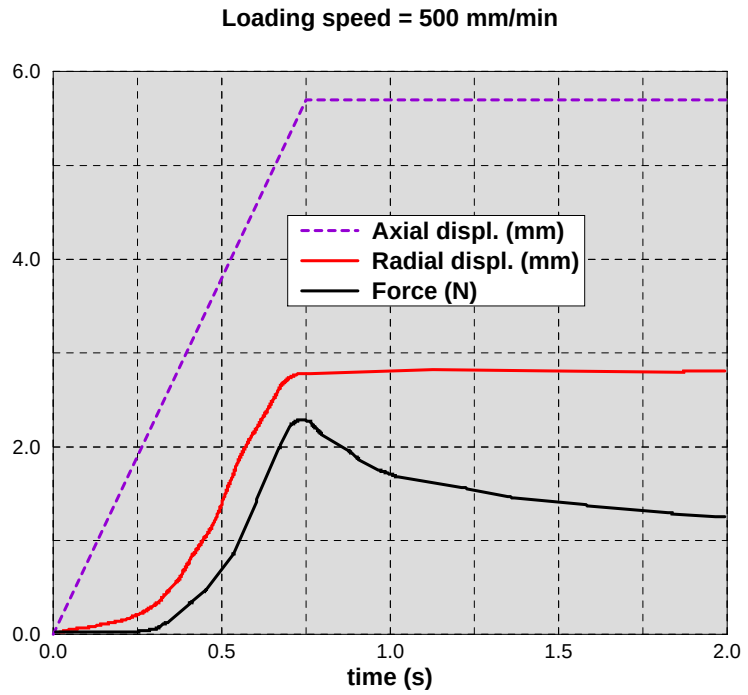


FIG. 3.24 – *Les trois courbes obtenues à la fin de l'expérience, pour une vitesse de compression de 500mm/min.*

modifiée de façon à suivre la courbe $P(x)$, tandis que $\boldsymbol{u_n^t}$ continue à varier linéairement.

Afin d'exprimer la courbe $d_r(x)$ (resp. $f(x)$) comme une fonction de la déformation linéaire associée $d_r^L(x)$ (resp. $f^L(x)$), une valeur empirique des paramètres d'élasticité (E, ν) est fixée pour l'échantillon de tissu (cf. figure 3.25). Pour un échantillon cylindrique de hauteur h et de rayon r, la déformation radiale théorique est $d_r^L(x) = \nu\dfrac{rx}{h}$ et la force de réaction axiale s'exprime : $f(x) = \dfrac{sEx}{h}$ où s est l'aire de la section supérieure du cylindre. Alors, on peut en déduire les fonctions $P(d_r^L(x))$ (resp. $Q(f^L(x))$) pour des propriétés élastiques données (cf. figure 3.26).

Maintenant, si l'on considère un nœud particulier du maillage, n, dont le déplacement linéaire s'exprime $\boldsymbol{u_n} = \boldsymbol{u_n^t} + \boldsymbol{u_n^r}$, alors le déplacement quasi non-linéaire correspondant $\underline{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{n}}$ s'exprime :

$$\underline{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{u_n^t} + \underline{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{r}} \tag{3.22}$$

avec :

$$\underline{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{r}} = P(\|\boldsymbol{u_n^r}\|)\frac{\boldsymbol{u_n^r}}{\|\boldsymbol{u_n^r}\|} \tag{3.23}$$

L'amplitude des forces est modifiée selon un principe similaire. Dans ce cas, c'est la composante $\boldsymbol{f_t}$, collinéaire à la contrainte imposée, qui doit être modifiée d'après $Q(x)$. Ainsi, la force quasi non-linéaire $\boldsymbol{f^{NL}}$ appliquée au nœud n s'exprime :

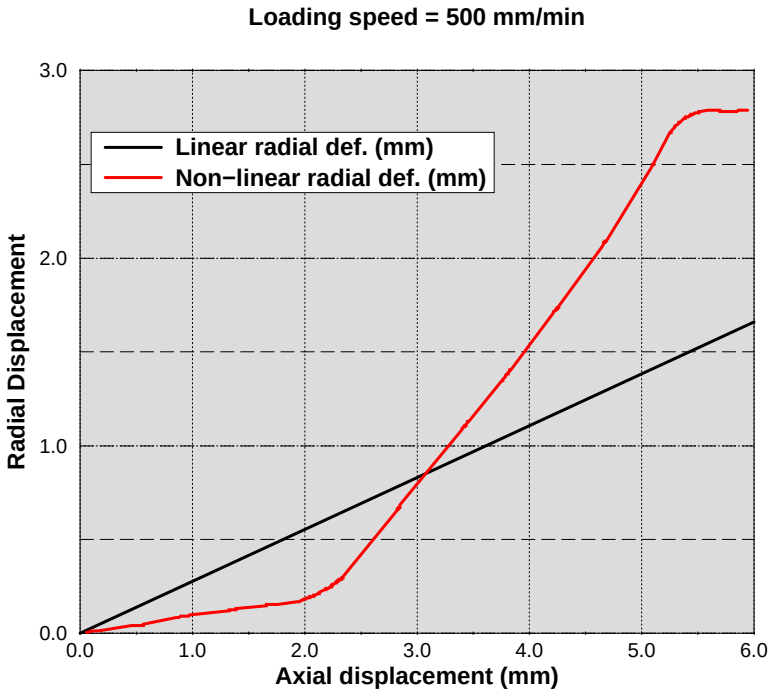


FIG. 3.25 – *Les déplacements radiaux linéaire et non-linéaire sont exprimés en fonction de la déformation axiale.*

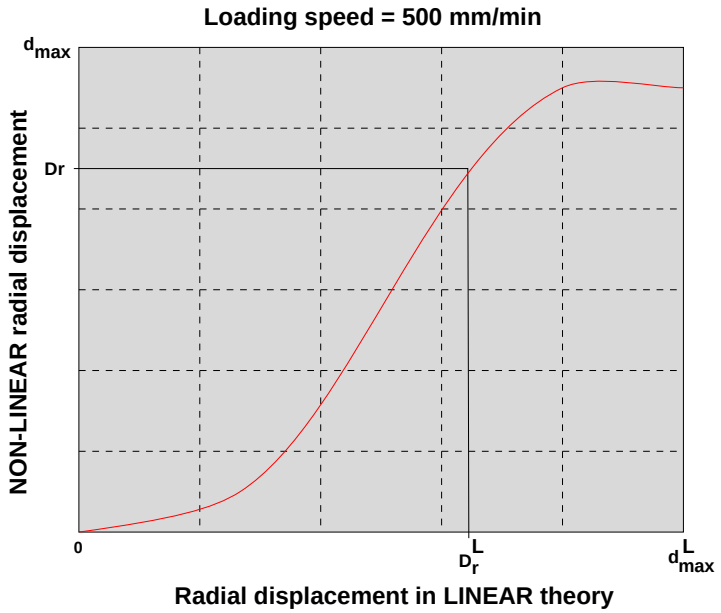


FIG. 3.26 – *Le déplacement radial non-linéaire est maintenant exprimé en fonction d'un déplacement radial linéaire théorique.*

$$\underline{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{n}} = \underline{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{t}} + \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{r}} \tag{3.24}$$

avec :

$$\underline{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{t}} = Q(\|\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{t}}\|)\frac{\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{t}}}{\|\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{t}}\|} \tag{3.25}$$

Les tenseurs de déformation $[\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{nk}}^{\boldsymbol{u}}]$ et de force $[\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{nk}}^{\boldsymbol{f}}]$, pré-calculés dans le domaine linéaire, permettent le calcul en temps-réel du déplacement $\boldsymbol{u}$ d'un nœud ou de la force de réaction $\boldsymbol{f}$ en ce nœud. Par conséquent, nous pouvons en déduire les composantes orthogonales et collinéaires $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{r}}$, $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{r}}$ et $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{t}}$, $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{t}}$. Les équations (3.23) et (3.25) peuvent ainsi être appliquées pour un coût supplémentaire en temps de calculs très faible.

Validation du modèle quasi non-linéaire

Afin de valider la méthode que nous avons proposée, nous avons utilisé un principe similaire à celui appliqué en biomécanique pour la validation d'un modèle comportemental. Nous avons créé un maillage d'un objet volumique cylindrique, de dimensions identiques à celui utilisé dans les expériences de Chinsei (Chinsei et Miller, 1997). Les paramètres d'élasticité linéaire ont été choisis pour correspondre à un matériau relativement déformable (du caoutchouc, $\lambda = 0.40$, $\mu = 0.012$). Les tenseurs de déformation et de force élémentaires sont alors calculés, en appliquant des conditions aux limites les plus proches de celles décrites dans la méthode expérimentale. Ainsi, nous n'avons contraint qu'une des trois composantes du déplacement des nœuds de la base du cylindre (cf. figure 3.27). De cette façon, les nœuds peuvent se déplacer librement dans le plan du support sur lequel repose le maillage cylindrique. On simule ainsi le glissement réel qui s'opère lors des expériences de compression.

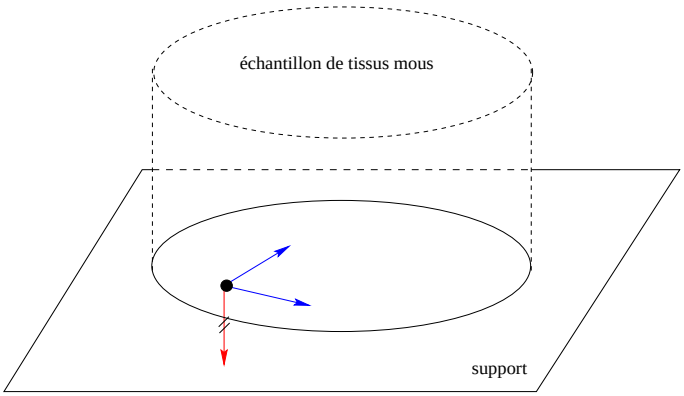
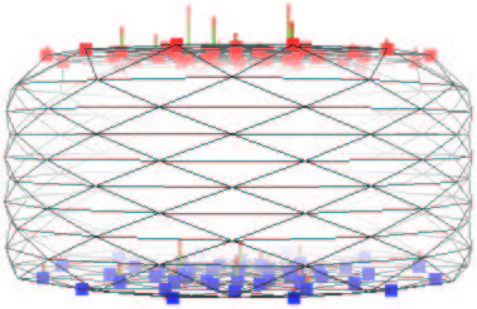


FIG. 3.27 – *Pour respecter le fait que la base de l'échantillon de tissus mous peut glisser sur son support, seul un degré de liberté des nœuds de la base est fixé.*

Ces résultats montrent qu'il est possible de simuler, pour un maillage de symétrie cylindrique, le même comportement que pour un échantillon de tissus mous de même géométrie. Néanmoins, les courbes dont nous avons disposé sont issues d'expériences ne permettant de déduire une relation contrainte/déformation qu'en deux dimensions, ce qui n'est pas suffisant pour généraliser le comportement en trois dimensions. La méthode que nous utilisons pour y



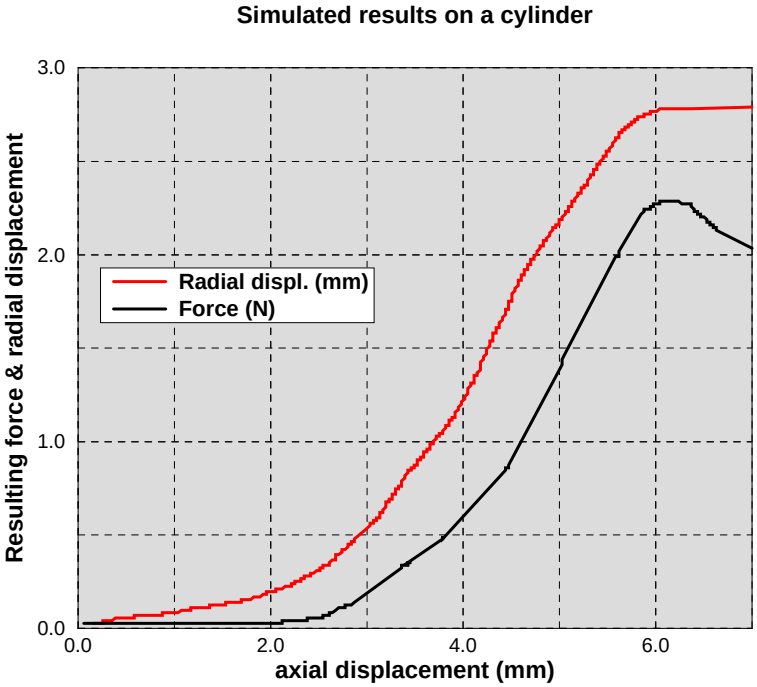


FIG. 3.28 – *Les courbes représentatives de la variation non-linéaire de la force et du déplacement radial sont mesurées, respectivement sur la section supérieure du cylindre et sur les nœuds situés sur le cercle à mi-hauteur du cylindre. Les courbes expérimentales et celles issues de la simulation sont parfaitement superposées.*

parvenir ne donne qu'une approximation du comportement réel. Il nous est seulement possible de comparer nos résultats avec les résultats expérimentaux. Puisqu'ils sont identiques, on peut simplement en conclure que notre méthode permet de prendre en compte une variation non linéaire de certains paramètres de la déformation et, dans le cas où la géométrie est cylindrique, donne des résultats corrects. En généralisant ces résultats à une géométrie quelconque, on peut simplement supposer que la déformation obtenue est réaliste. Nous n'avons, de toutes façons, pas de moyen de vérifier ces résultats car nous sommes confronté aux mêmes problèmes qu'en biomécanique : comment garantir qu'une méthode, vérifiée expérimentalement sur un échantillon *in vitro*, donne des résultats précis lorsque l'on considère un organe entier, *in vivo*? En rajoutant la contrainte de temps-réel inhérente à la simulation, il apparaît clairement qu'un compromis est nécessaire entre réalisme et performances de calcul. Les résultats que nous avons obtenus avec cette méthode sont intéressants en ce sens, comme le montre le tableau (3.7). Le modèle utilisé pour ce test comporte environ 1400 nœuds et 6500 tétraèdres. Les résultats ont été obtenus sur une station de travail *Dec Alpha Station 233 Mhz.*

	méthode éléments finis "classique"	*méthode SDeLL*
élasticité linéaire	15000 ms	7 ms
élasticité quasi non-linéaire	$>$ 50000 ms	8 ms

TAB. 3.7 – *Comparaison des temps de calculs entre notre méthode approchée de déformations élastiques non-linéaires et une méthode classique.*

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons tout d'abord présenté un ensemble de méthodes d'optimisation pour la résolution d'un problème d'élasticité linéaire. Nous avons ainsi étudié, puis mis en œuvre, certaines méthodes nous semblant intéressantes pour le calcul de déformations en temps réel. Les résultats obtenus ont montré que les algorithmes utilisés en calcul numérique, sont dépendants de nombreux paramètres : conditionnement de la matrice de rigidité, dimension de cette matrice, etc. De plus, la notion de temps-réel, dans une simulation intégrant un système à retour d'effort, implique des fréquences de calcul de l'ordre de 500 Hz. Les méthodes classiques, sur une architecture mono-processeur, ne permettent pas d'obtenir de telles fréquences, surtout pour des maillages assez complexes, nécessaires pour représenter la forme des structures anatomiques.

Nous avons alors proposé une méthode (SDeLL) basée sur le pré-calculs de déformations élémentaires. L'algorithme que nous avons développé permet le calcul de la déformation - et des forces associées - d'un modèle volumique complexe en temps-réel. La déformation est induite par un ensemble de conditions aux limites et non de forces externes, afin de prendre en compte des interactions à l'aide d'un système à retour d'effort. Notons enfin que les calculs des forces et du champ de déformation peuvent être découplés, c'est-à-dire qu'à partir d'un ensemble de conditions aux limites donné, on peut calculer seulement les forces de réaction ou seulement la déformation induite. Ceci sera très utile pour la réalisation du prototype de simulateur décrit au chapitre (8). Nous avons ensuite amélioré cette méthode de façon à réduire la quantité de

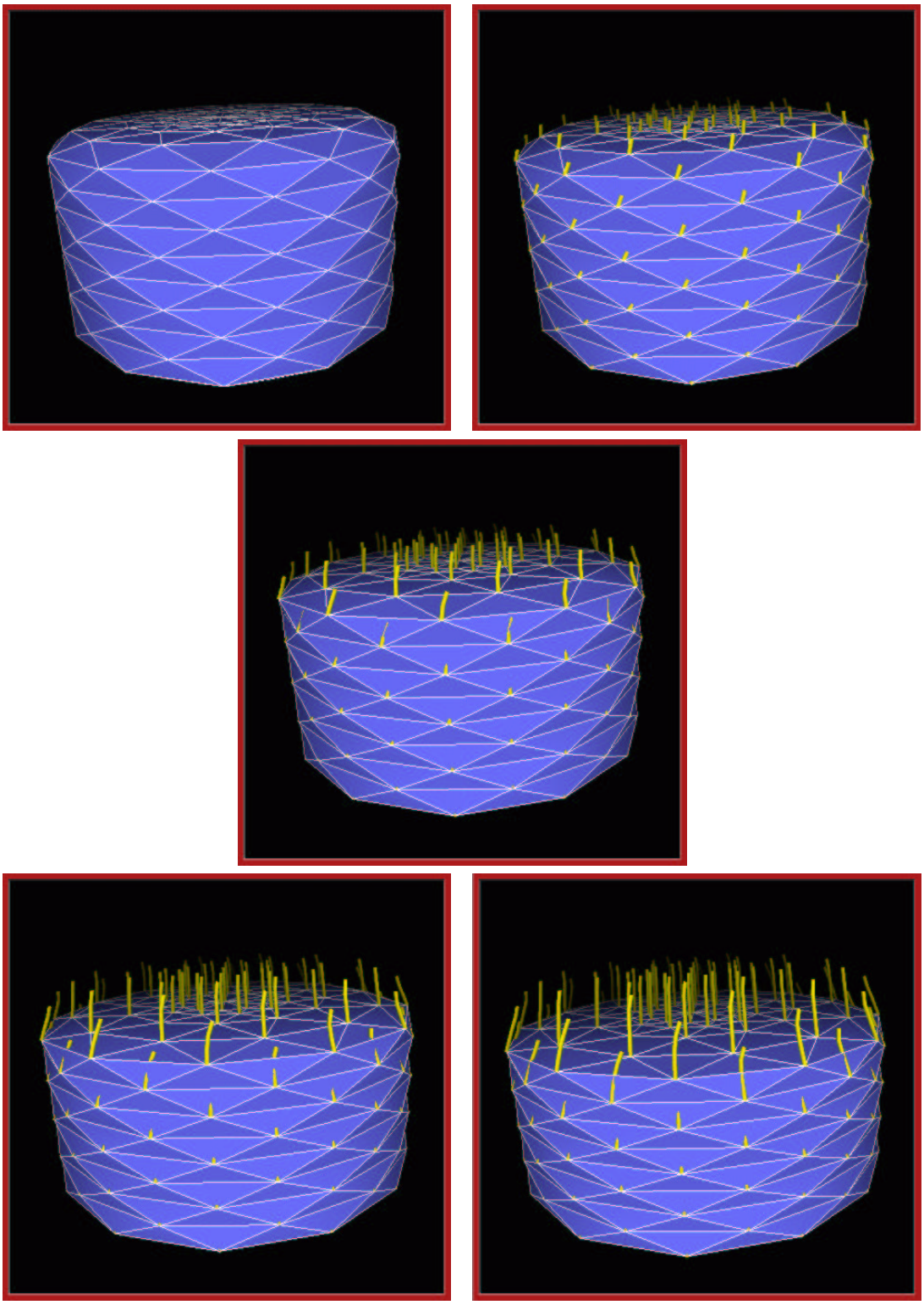


FIG. 3.29 – *Dans cette séquence d'images décrivant la déformation en temps-réel d'un échantillon de tissu, on peut voir que la trajectoire des nœuds n'est plus linéaire.*

données issues des pré-calculs, en ne conservant que les déplacements de nœuds de la surface et/ou les déplacements les plus représentatifs d'une déformation élémentaire donnée. Les temps de calculs obtenus présentent l'avantage d'être très faibles et de varier sous-linéairement en fonction du nombre de nœuds du maillage.

La méthode présente cependant quelques points faibles. Tout d'abord, nous sommes contraints d'avoir recours à la théorie de l'élasticité linéaire pour utiliser les pré-calculs. Afin de prendre en compte des lois de comportement plus complexes, nous avons introduit deux améliorations à la loi de déformation initiale, élastique linéaire homogène. En prenant ainsi en compte des propriétés biomécaniques dans le processus de déformation, nous pensons qu'il est possible d'améliorer à la fois le comportement déformable et la pertinence du modèle. Un autre point faible, déjà remarqué dans (Bro-Nielsen, 1997), est lié à l'impossibilité de modifier la topologie du maillage sans avoir recours à de nouveaux pré-calculs - ou à une nouvelle inversion de la matrice de rigidité dans (Bro-Nielsen, 1997)). Or la possibilité de réaliser un ensemble d'opérations élémentaires, telles que des incisions ou des sutures, est d'une importance primordiale dans un système d'entraînement au geste opératoire. L'impact, au niveau de la modélisation, est alors considérable puisqu'il devient nécessaire de modifier la topologie du maillage - pour représenter physiquement et graphiquement une incision, par exemple - et de calculer les déformations prenant en compte ces modifications.

Enfin, nous avons formulé l'hypothèse d'une loi d'évolution quasi-statique. Cette condition n'est pas trop restrictive si l'on se contente de simuler le contact entre un instrument chirurgical et un organe, comme c'est le cas lorsque la simulation vise uniquement la coordination œil-main.

4.

Propriétés des modèles dynamiques

Le but de ce chapitre est de présenter une technique largement utilisée dans le cadre de la simulation "dynamique" : les modèles de type masses/ressorts associés à une loi d'évolution newtonienne. Nous montrerons les avantages de cette modélisation mais également ses limitations dans le cas de modèles complexes, volumiques où des fréquences de calcul très élevées sont requises.

4.1 Introduction

Les modèles déformables, de type systèmes de particules ou modèles masse/ressort se sont beaucoup développés depuis les années 80. Introduits au départ dans le domaine des images de synthèse et de l'animation par ordinateur, ils sont depuis peu utilisés dans le domaine de la simulation chirurgicale. Ces modèles représentent en effet un moyen relativement simple et intuitif de définir des objets non rigides dont le comportement dynamique est assez réaliste. Les systèmes de particules décrits dans (Reeves, 1983; Reeves, 1985) ont été rapidement reconnus comme un moyen très efficace de représenter des phénomènes dynamiques tels que le feu[1], l'eau, les explosions, etc. (ou des structures complexes telles que l'herbe, les arbres, les nuages). Chaque particule, dans le modèle de Reeves, possède les attributs suivants : position, vitesse, couleur, durée de vie, âge, forme, taille, transparence. Certaines de ces propritétés sont utiles pour le rendu graphique; il est ainsi possible d'identifier une particule à un pixel de l'image finale. Chaque particule possède des propriétés de transparence de telle sorte que la couleur d'un pixel est modifiée en fonction du nombre de particules qui se projettent au même endroit de l'écran (cf. figure 4.1).

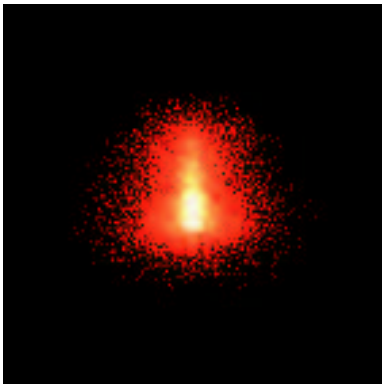


FIG. 4.1 – *Utilisation d'un système de particules pour simuler une explosion.*

Dans ce modèle, chaque particule évolue de façon relativement indépendante des autres. Ce manque de cohésion ne permet pas de simuler des solides déformables. Une première extension de la définition a donc été proposée par Szeliski dans (Szeliski et Tonnesen, 1991), en ajoutant aux paramètres initiaux un vecteur unitaire définissant une orientation extérieur/intérieur pour chaque particule. En reliant entre elles chaque particule et en leur donnant une orientation, des surfaces peuvent être créées et déformées ou encore étirées par l'ajout de particules. Lorsque la répartition des masses ponctuelles dans l'espace est assez régulière, il est possible de définir une sphère autour de chaque particule. La surface de l'objet est alors représentée par la réunion de ces sphères. Il est également possible de définir un champ de déplacement à partir de la position des sphères puis de l'appliquer à une surface polygonale définissant la frontière de l'objet. Lombardo (Lombardo, 1996) a également travaillé sur des modèles déformables modélisés par un ensemble de particules orientées. Une autre approche intéressante est celle proposée par M. Desbrun (Desbrun et Gascuel, 1995) et M.-P. Gascuel (Desbrun et Gascuel,

1. Un système de particules est utilisé pour simuler la propagation d'un mur de feu dans le film Star Trek II.

1996). Le formalisme, utilisé pour le calcul des forces, est basé sur celui des *Smoothed Particle Hydrodynamics*. À chaque particule est associé, en particulier, un champ de potentiel. La valeur et la dérivée du champ de potentiel en tout point de l'espace sont alors définies par un produit de convolution avec une fonction définissant un *smoothing kernel*. On a donc une expression continue du champ physique - et par conséquent des forces d'interaction calculées à partir du gradient de ce champ. L'autre aspect de l'approche de Gascuel et Desbrun concerne le calcul de déformations à volume constant et la représentation de la surface du système particulaire. Celle-ci est modélisée par une surface implicite, c'est-à-dire dans ce cas, une surface d'iso-potentiel. Malgré tout, un inconvénient des systèmes de particules, pour une application en simulation, reste des temps de calculs souvent importants.

C'est pourquoi la solution la plus utilisée est celle qui consiste à relier les particules par des interactions de type ressorts/amortisseurs afin de créer des "solides particulaires". Cette solution à l'avantage de réduire de façon explicite le nombre de particules pouvant être influencées par une particule donnée. De plus, à condition de considèrer une modélisation proche du niveau microscopique, on se rapproche de la réalité physique (Feynman, 1988). Miller (Miller, 1988) anime ainsi de façon très réaliste des serpents décrits par un ensemble de masses ponctuelles reliées entre elles par des ressorts. Chaque segment du "serpent" est modélisé par un cube dont les sommets sont des masses et les arêtes des ressorts. Des ressorts supplémentaires sont placés le long des diagonales de chaque face du cube. L'ensemble de ces ressorts contrôle la réaction à l'étirement ainsi que le module de cisaillement. L'intégration est réalisée par la méthode d'Euler. La dynamique du mouvement du "serpent" est réaliste car elle tient compte de contraintes réelles telles que le déphasage dans le mouvement ondulatoire du "serpent". La peau des serpents ainsi modélisés est composée de morceaux ("patches") de surfaces splines dont les points de contrôle sont des masses.

Depuis ces premiers travaux, les modèles masses/ressorts ont été très souvent utilisés en animation par ordinateur mais également pour la simulation.

Arnaldi *et al.* (Arnaldi et Dumont, 1992) modélisent des solides déformables par des masses reliées par un réseau cubique tridimensionnel de ressorts. Dans les travaux de Terzopoulos sur la simulation de matériaux visco-élastiques (Terzopoulos et al., 1987; Terzopoulos et Fleisher, 1988), un objet est représenté comme un réseau régulier de masses et de liaisons. Ces travaux se limitent cependant à des objets bidimensionnel (vêtements, feuilles de papier, etc.). De nombreux autres travaux (Provot, 1995; Baraff et Witkin, 1992; Baraff et al., 1995; Joukhadar, 1995) ont utilisé une modélisation similaire, avec en général, l'utilisation d'une méthode explicite pour la résolution du système d'équations différentielles du second ordre associé à ces modèles. Récemment, Breen *et al.* ont proposé l'utilisation de systèmes de particules pour représenter le drapé de tissus textiles (Breen et al., 1994). Dans ce cas, seul le comportement statique est étudié. Dans (Norton et al., 1991), les auteurs proposent d'utiliser un modèle de masses et de ressorts pour simuler le comportement limite que représente la fracture d'un objet.

En ce qui concerne la modélisation de tissus organiques, les modèles masses/ressorts ont également été utilisés. Waters, dans (Waters, 1992), a défini un réseau de ressorts sur des grilles régulières afin de modéliser les tissus faciaux. Les caractéristiques élastiques des ressorts biphasiques utilisés dans ce cas sont dérivées de courbes issues d'études biomécaniques (Kenedi et al.,

1975). De façon similaire, nous avions utilisé un 3-maillage simplexe (Delingette, 1994b) pour représenter le comportement élastique de muscles faciaux dans le cadre d'une simulation de chirurgie cranio-faciale (Delingette et al., 1994). Keeve *et al.* (Keeve E., 1996) ont proposé une approche similaire pour caractériser les tissus mous dans une simulation plus récente de chirurgie cranio-faciale. De plus les auteurs ajoutent une contrainte supplémentaire de conservation de volume afin de représenter l'incompressibilité des tissus organiques [2].

Une des premières applications des modèles masses/ressorts à la simulation chirurgicale est due à Cover *et al.* dans (Cover et al., 1993). Leurs travaux concernent la modélisation des déformations de la vésicule biliaire dans le cadre d'une opération endoscopique. On peut aussi citer les travaux de Satava (Satava, 1992; Satava, 1993) pour simuler des opérations chirurgicales conventionnelles. Ces travaux présentent l'intérêt d'être sans doute les premiers à avoir intégré des périphériques de réalité virtuelle dans un simulateur chirurgical. Cependant, le faible réalisme de la simulation par rapport aux moyens utilisés a rapidement mis un terme à cette approche. Les travaux de (Meseure et Chaillou, 1997) reposent sur une modélisation similaire mais prenant en compte un comportement volumique du modèle. Kuhn *et al.* (Ch. Kuhn, 1996) ont développé un modèle surfacique de la vésicule biliaire basé également sur des liaisons de type ressorts.

Le principal avantage des modèles masses/ressorts réside dans leur facilité de mise en oeuvre puisqu'ils ne requièrent pas de paramétrisation continue. Ils ont été utilisé pour des simulations statiques ou dynamiques. Un autre avantage réside dans la flexibilité de leur représentation permettant en particulier de modéliser des fractures (ou découpes) et d'autres modifications topologiques simplement en ajoutant ou supprimant des connexions entre les masses. Cette dernière particularité a motivé notre intérêt pour les modèles masses/ressorts. Cependant, certains problèmes subsistent, aussi bien en ce qui concerne le réalisme des déformations que les problèmes de modélisation géométrique et de temps de calculs.

Dans les paragraphes suivants, nous présenterons tout d'abord la méthode générale puis les problèmes qui restent à résoudre. Enfin, nous présenterons notre solution et montrerons en quoi elle est avantageuse.

4.2 Principe général

Le principe de l'animation d'un objet déformable de type masses/ressorts repose sur l'équation fondamentale de la dynamique (4.1) liant la somme des forces appliquées sur une masse ponctuelle à son accélération.

$$\sum F = \mu \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \tag{4.1}$$

En généralisant ce concept à un solide défini comme un ensemble de masses ponctuelles reliées entre elles par des forces de liaison, il est possible de simuler le comportement de ce

2. Il faut cependant noter que le caractère incompressible des tissus organiques n'est pas toujours vérifié dans la réalité.

solide, en particulier ses déformations sous l'action de forces extérieures. Dans cette formulation, une masse n'agit donc que sur une masse qui lui est directement reliée. C'est en particulier ce qui différencie ce modèle des systèmes de particules dans lesquels une particule agit sur les particules se trouvant dans son rayon d'action. La définition du voisinage est donc constante au cours du temps en l'absence de modification topologique du maillage.

Remarque : le nom de "modèle masses/ressorts" ou encore "réseau masses/ressorts" est en général abusivement employé pour désigner des modèles de type "masses/liaisons" où les liaisons entre masses ne sont pas nécessairement des forces de rappel de ressort mais peuvent avoir des lois de comportement plus complexes.

Soit $\boldsymbol{P_i(t)}$ la position du nœud i à l'instant t et μ sa masse (on supposera une masse identique pour tous les nœuds). La somme des forces $\boldsymbol{F_i(t)}$ appliquées en i est reliée à l'accélération $\boldsymbol{a_i(t)}$ de la masse i par :

$$\boldsymbol{F_i(t)} = \mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{P_i(t)}}{\partial t^2} = \mu\, \boldsymbol{a_i(t)} \tag{4.2}$$

La force $\boldsymbol{F_i(t)}$ peut se diviser en forces externes et forces internes. Les forces internes sont le résultat des tensions des ressorts liant le nœud $\boldsymbol{P_i(t)}$ à ses nœuds voisins. Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des couples (i, j) tels que le nœud j soit relié directement à $\boldsymbol{P_i(t)}$ par un ressort.

La force de rappel du ressort est :

$$\boldsymbol{F_i^s(t)} = -\sum_{(i,j)\in\mathcal{V}} \{k^s_{(i,j)}(l(t) - l_0)\frac{\boldsymbol{l_{ij}}}{l(t)}\} \tag{4.3}$$

où $l(t)$ est la longueur du ressort à l'instant t et l_0 sa longueur au repos; $k^s_{(i,j)}$ est la constante de raideur du ressort défini entre $\boldsymbol{P_i(t)}$ et $\boldsymbol{P_j(t)}$; $\boldsymbol{l_{ij}} = \boldsymbol{P_i(t)P_j(t)}$.

Il est également possible de considérer que le ressort est amorti, c'est-à-dire que l'on a une force interne supplémentaire $\boldsymbol{F_i^d(t)}$ égale à :

$$\boldsymbol{F_i^d(t)} = \sum_{(i,j)\in\mathcal{V}} \{k^d_{(j)}(\frac{\partial l(t)}{\partial t})\frac{\boldsymbol{l_{ij}}}{l(t)}\} \tag{4.4}$$

où $k^d_{(i,j)}$ est la constante d'amortissement. Cette force a pour effet de simuler un comportement visco-élastique et est reliée à des modèles utilisés en particulier en biomécanique. La relation (4.5) correspond à un modèle de Kelvin-Voigt décrit en figure (4.2). Il existe des modèles plus complexes, en particulier les modèles de Maxwell Kelvin Voigt et de Boltzmann (ou Maxwell à 3 éléments). Pour des détails sur ces modèles, voir l'annexe C.

La force interne totale appliquée à la masse i est donc :

$$\boldsymbol{F_i^{int}(t)} = \boldsymbol{F_i^s(t)} + \boldsymbol{F_i^d(t)} = \sum_{(i,j)\in\mathcal{V}} \{-k^s_{(i,j)}(l(t) - l_0)\frac{\boldsymbol{l_{ij}}}{l(t)} + k^d_{(i,j)}(\frac{\partial l}{\partial t})\frac{\boldsymbol{l_{ij}}}{l(t)}\} \tag{4.5}$$

Parmi les forces externes les plus souvent utilisées, on peut noter la gravité et des forces de frottement.

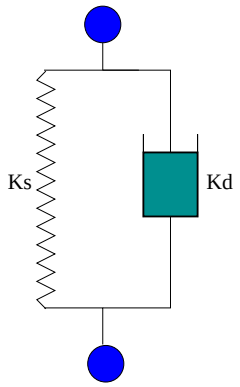


FIG. 4.2 – *Solide de Kelvin Voigt constitué d'un ressort et d'un amortisseur en parallèle. On peut ainsi modéliser un comportement viscoélastique dans un modèle de type masses/ressorts.*

La force de gravité est :

$$\boldsymbol{F_i^g(t)} = \mu \boldsymbol{g} \tag{4.6}$$

La force correspondant à un frottement visqueux est :

$$\boldsymbol{F_i^v(t)} = -C^v \boldsymbol{v_i(t)} \tag{4.7}$$

où $\boldsymbol{v_i(t)}$ est la vitesse de la masse i.

La force externe totale s'exerçant sur la masse i est alors :

$$\boldsymbol{F_i^{ext}(t)} = \boldsymbol{F_i^g(t)} + \boldsymbol{F_i^v(t)} \tag{4.8}$$

Et la force totale $\boldsymbol{F_i(t)}$ s'exprime :

$$\boldsymbol{F_i(t)} = \boldsymbol{F_i^{ext}(t)} + \boldsymbol{F_i^{int}(t)} \tag{4.9}$$

Bien entendu, d'autres types de forces externes sont envisageables, selon les contraintes que l'on impose au modèle. Les équations précédentes ont simplement pour but de décrire le principe général de calcul des forces d'interaction.

Maintenant que les forces appliquées sur chaque masse peuvent être évaluées, il est possible de calculer l'accélération de chaque masse et donc sa position à l'instant $t + \Delta t$. L'équation du mouvement peut ainsi être intégrée explicitement sur le temps. L'utilisation de la méthode d'Euler donne ainsi le schéma suivant :

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_i(t)} = \frac{1}{\mu}\, \boldsymbol{F_i(t)} \\ \boldsymbol{v_i(t+\Delta t)} = \boldsymbol{v_i(t)} + \Delta t\, \boldsymbol{a_i(t)} \\ \boldsymbol{P_i(t+\Delta t)} = \boldsymbol{P_i(t)} + \Delta t\, \boldsymbol{v_i(t)} \end{cases} \tag{4.10}$$

où Δt représente un certain pas de temps. Nous verrons plus loin quelles sont les contraintes sur Δt ainsi que les différentes méthodes d'intégration.

La boucle de calcul décrivant l'animation est alors similaire à celle décrite dans la figure 4.3.

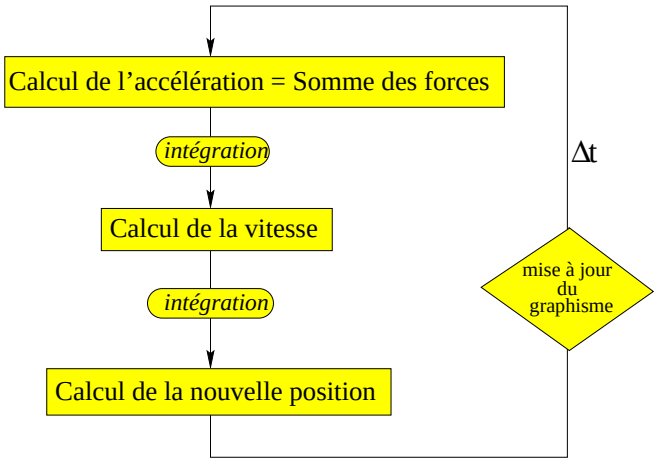


FIG. 4.3 – *Boucle d'animation d'un modèle dynamique. À l'instant t, on évalue les forces appliquées en chaque masse. On en déduit alors, par intégration numérique, la vitesse et la position de chaque masse à $t + \Delta t$. La boucle continue alors après une éventuelle mise à jour de l'affichage graphique.*

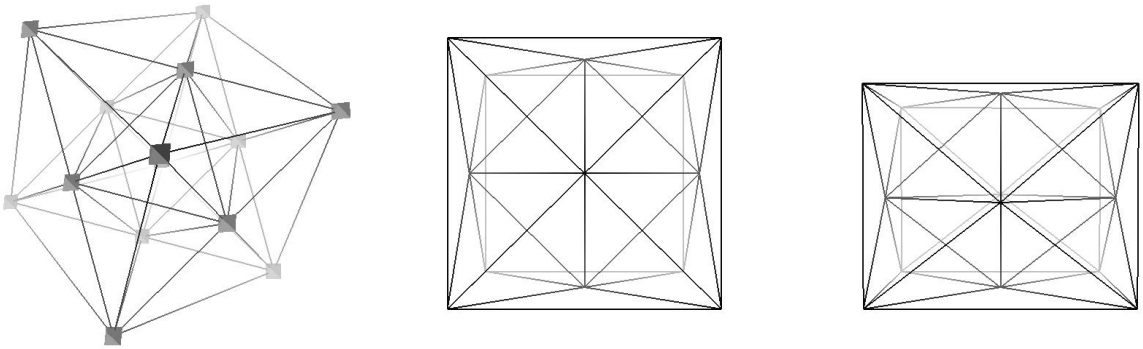


FIG. 4.4 – *Exemple de modélisation d'un solide cubique par des masses et des ressorts. À gauche, le cube est modélisé par 15 masses et 59 liaisons. Au milieu et à droite, le modèle est soumis à une force de gravité dirigée de haut en bas et la partie inférieure du cube repose sur un plan (c'est-à-dire que les nœuds correspondant à cette face ont un déplacement nul au cours du temps). On voit que le cube à alors tendance à s'écraser sous l'effet de la gravité.*

A partir de ce principe relativement simple, de nombreux autres travaux ont été réalisés, en apportant diverses modifications, soit dans le type de forces de liaison, soit dans l'optimisation du pas de temps utilisé pour l'intégration numérique, soit encore dans la modélisation géométrique sous-jacente définissant les liaisons entre les nœuds.

4.3 Modélisation de tissus mous

Les modèles masses/ressorts, tels que nous venons de les décrire, posent de nombreux problèmes pour la modélisation des tissus mous. Ces problèmes sont reliés à trois caractéristiques principales des modèles masses/ressorts : la topologie du maillage, l'intégration numérique et le choix des forces. L'analyse de ces paramètres ainsi que la modification de la formulation initiale

ont été abordées par de nombreux auteurs afin de résoudre un problème précis.

- **Géométrie - topologie** : la topologie d'un modèle masses/ressorts est un problème peu étudié et cependant de grande importance. La première contrainte justifiant le choix d'une topologie correcte est liée à la modélisation discrète du solide. De ce fait, quelque soit la force associée, l'existence d'une liaison entre deux masses ne définit qu'une relation *directionnelle*. La figure 4.5 illustre ce problème. L'absence de paramétrisation continue nécessite la définition d'un graphe des liaisons permettant de modéliser au mieux la plupart des déformations. Cette représentation reste cependant différente, dans tous les cas, d'une modélisation continue du milieu. Ainsi, par rapport à une modélisation par éléments finis, le comportement de deux modèles masses/ressorts décrivant le même objet, mais modélisés par un ensemble différent de masses et de ressorts, ne sera pas identique.

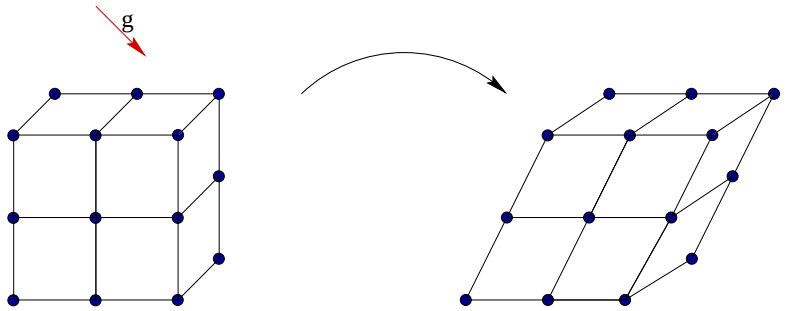


FIG. 4.5 – *Les liaisons définies entre les masses du modèle ne permettent pas de décrire des déformations volumiques "complètes". En effet, l'absence de liaison diagonale est équivalente à avoir un module de cisaillement nul. Selon la force extérieure appliquée sur le modèle, celui-ci peut se déformer comme on le voit à droite et finir par s'applatir complètement.*

L'autre point découle du fait qu'un ressort contraint la distance entre deux masses. Par conséquent, le nombre de ressorts par sommet du maillage conditionne fortement le comportement global du sytème. Si le système est sous-sontraint, plusieurs positions d'équilibre pour les masses seront possibles et la déformation ne sera donc pas réaliste. Cela correspond à tomber dans un minimum local lors de la résolution de l'équation du mouvement. À l'opposé, si le système est sur-contraint, les déformations vont avoir tendance à être plus globales, réduisant ainsi le champ de déformations possibles. Ensuite, pour les maillages qui ne sont pas basés sur des grilles régulières, il n'est pas possible d'avoir un nombre constant de liaisons par sommet. Cela aura donc une influence sur l'homogénéité du système. Pour les maillages irréguliers se pose aussi le problème de la répartition des nœuds c'est-à-dire des masses dans le maillage. En théorie il est nécessaire que la répartition des sommets du maillage et les masses associées ne modifient pas le centre de masse ni la matrice d'inertie du solide que l'on cherche à simuler.

En raison de cette difficulté à définir la topologie des réseaux masses/ressorts pour n'importe qu'elle géométrie, la plupart des auteurs ont modélisé des objets simples autour de grilles régulières comme dans (Waters, 1992) ou de prismes à base triangulaire (Koch et al., 1996; Keeve E., 1996). Ce dernier choix impose malgré tout une restriction quant à la représentation géométrique qui doit être organisée en couches parallèles.

- **Validité des déformations** : le premier point à noter est que les déformations induites par les modèles masses/ressorts ne peuvent pas être facilement comparées avec celles rapportées par des études biomécaniques. Cependant, pour de petites déformations, un modèle masses/ressorts semble se comporter comme un modèle linéaire élastique d'éléments finis, comme l'ont montré Keeve *et al.* dans (Keeve E., 1996). En linéarisant l'équation 4.3, la raideur du ressort peut être identifiée à la matrice de rigidité d'un matériau élastique linéaire. Cependant, pour de grandes déformations, la déformation d'un ressort ne correspond plus à un matériau élastique linéaire et la comparaison avec un modèle élastique non-linéaire devient très difficile. Afin d'identifier la valeur des paramètres intervenant dans un modèle masses/ressorts (raideur des ressorts, amortissement, etc.) plusieurs algorithmes ont été proposés. Dans (Jean Louchet, 1995), Louchet a recours à un algorithme génétique pour identifier ces paramètres dans le cadre de l'animation de modèles de tissus textiles. Deussen *et al.* (Deussen et al., 1995) basent la recherche de paramètres optimaux sur une méthode de "recuit simulé".

  Finalement, en raison du caractère directionnel des forces de ressort, il n'est pas possible de modéliser correctement un modèle volumique. La validité des déformations est donc très dépendante de ce point.
- **Comportement dynamique** : le comportement dynamique des modèles masses/ressorts est ce qui leur a valu tant d'intérêt. Paradoxalement c'est sans doute leur point le plus faible. En effet, la résolution par une méthode explicite de l'équation du mouvement ainsi que l'absence de paramétrisation continue de l'objet déformable engendrent des comportement parfois incorrects. Dans le cadre de la simulation temps-réel, on cherche à minimiser le temps de calcul associé à la boucle d'animation. Lorsqu'il y a des interactions "humaines " avec le modèle, le temps de calcul "réel" n'est plus indépendant du pas de temps Δt utilisé pour l'intégration numérique. C'est le principe de *synchronicité* (Luciani, 1985). De plus, pour un modèle constitué de liaisons de type ressort ou ressort amorti, il existe une valeur limite Δt_c en dessous de laquelle doit se situer le pas de temps Δt. La valeur de Δt_c dépend de la masse, de la raideur et du coefficient d'amortissement associés aux liaisons. L'existence de cette valeur critique conditionne en particulier la rigidité maximale possible du système. Enfin, comme on n'inverse pas de matrice de rigidité (à la différence de ce qui se passe avec la résolution semi-implicite décrite au chapitre 2) il va falloir un certain temps pour que la réponse à une contrainte soit transmise dans tout le modèle. On a donc une réponse globale seulement après plusieurs itérations, le nombre d'itérations étant proportionnel à la taille du maillage.

4.4 Forces internes

Diverses améliorations ont été proposées afin d'adapter le comportement des modèles masses/ressorts à un problème donné ou afin de résoudre certains des problèmes énoncés ci-dessus. La plupart des modifications portent sur le comportement dynamique. Luciani a développé un système d'animation (CORDIS/ANIMA) basé sur des systèmes de particules pour

modéliser des phénomènes physiques complexes (Luciani et al., 1991). De nouveaux types d'interactions ont ainsi été définis, en utilisant un formalisme intéressant où un même modèle physique peut servir à la fois pour la représentation des déformation, le calcul des forces et même la génération de sons. Ce formalisme a été appliqué à de nombreux problèmes, en faisant varier en particulier le type de liaisons impliquées (liaisons conditionnelles, non-continues, etc.). De plus, le système est couplé avec un périphérique à retour d'efforts permettant des interactions en temps réel avec des modèles simples. Le champ d'applications assez spécifique ainsi que les contraintes que s'imposent l'auteur, ne permettent cependant pas d'envisager des applications dans le domaine médical.

Gibson *et al.*, dans (Gibson et al., 1997) ont proposé un modèle appelé "ChainMail" qui permet de manipuler et de déformer des volumes de voxels interactivement. Le système présenté a pour but la simulation de chirurgie orthopédique. La taille des images médicales 3D étant très importante, il est difficile de respecter les contraintes de temps-réel. Afin d'y parvenir, le modèle ne suit pas une équation de mouvement dynamique lors des manipulations. Au contraire, le déplacement des nœuds (c'est-à-dire un voxel) est contrôlé par l'algorithme suivant :

- on définit autour de chaque voxel la liste de ses 6 voisins directs (4 voisins en 2D).
- deux seuils de distance sont définis pour la liaison : une distance minimale d_{min} et une distance maximale d_{max}.
- si, au cours du mouvement, la distance entre le voxel manipulé et un voxel voisin devient inférieure à d_{min} ou supérieure à d_{max}, alors le second voxel est déplacé dans le même sens et la même direction que le premier. Le déplacement est alors rigide et non pas élastique. La liaison entre un voxel donné et ses voisins peut ainsi être vue comme une force dont le profil est une fonction en "créneau" (cf. figure 4.6).
- le déplacement est ensuite transmis aux autres voxels en employant un processus récursif d'où l'analogie avec la manipulation des maillons d'une chaîne. Un exemple de déformation en 2D est présenté à la figure 4.6.

Bien que la déformation du modèle, lors des interactions, ne découle pas d'une équation du mouvement dynamique, l'ensemble de voxels est soumis à un processus de "relaxation" lorsque les interactions cessent. Cela permet aux voxels de trouver une position d'équilibre minimisant une énergie potentielle élastique. Le compromis obtenu entre réalisme des déformations et contraintes de temps-réel est très intéressant, d'autant plus qu'il est possible de simuler des découpes. Le point faible réside dans la difficulté d'obtenir un rendu graphique en temps-réel, de même que l'intégration d'un système de retour de forces. C'est pour ces raisons que la version actuelle du *simulateur* développé par MERL[3] ne considère qu'un modèle 2D sans retour d'efforts.

Afin de limiter les déformations dans leur modèle de tissu textile, Provot *et al.* (Provot, 1995) ont contraint la longueur des ressorts à ne pas dépasser un certain seuil d'élongation. Ceci permet d'éviter le phénomène de ressorts hyper-alongés ("super-elongated springs") donnant des déformations trop locales aux nœuds où sont appliquées les contraintes (cf. figure 4.8). Malheureusement, il n'y a de garantie de convergence pour la méthode proposée. Cette méthode

3. Mitsubishi Electric Research Laboratory.

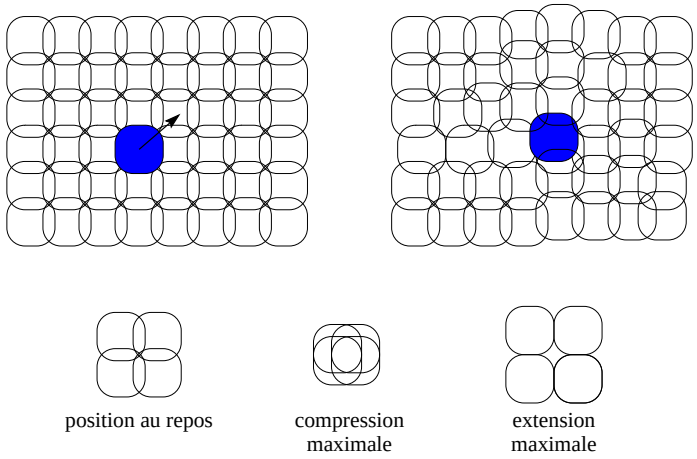


FIG. 4.6 – *Exemple de déformation 2D obtenue par le système ChainMail. Lorsqu'un voxel est déplacé, les voxels voisins sont soumis à un déplacement rigide donnant la configuration de droite.*

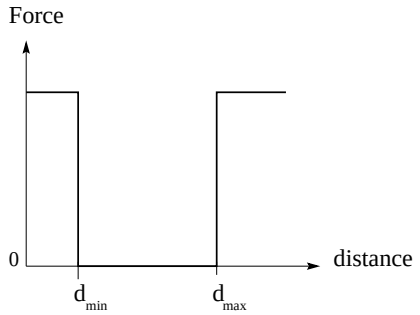


FIG. 4.7 – *Loi de comportement associée au modèle de déformation "ChainMail". Il s'agit d'une fonction "en créneau".*

présente des points communs avec le système « ChainMail » puisqu'il y a une "propagation" forcée de la déformation à travers le modèle. De plus il y a une rupture dans la boucle d'animation puisqu'à un instant donné (lorsque l'on contraint la longueur du ressort) la position n'a plus de lien physique avec l'accélération à l'instant précédent. La méthode proposée revient donc à considérer que le modèle n'est pas purement élastique mais rigide/élastique.

Une approche similaire a d'ailleurs été proposée par Miyazaki *et al.* (Miyazaki et al., 1995) afin de permettre la manipulation interactive d'objets élastiques à l'aide d'un *bâton*. En raison de la force importante exercée sur l'objet élastique lors d'une collision, les auteurs ont introduit un composante rigide dans leur modèle. Le comportement rigide permet d'absorber une partie de l'énergie dûe à la collison. En effet, lors d'un contact rigide, la force de réaction est distribuée en chaque nœud du maillage. Si le modèle est purement élastique, la force est appliquée localement à la masse ou aux quelques masses situées au point de contact. Si cette force est importante, une grande déformation va se produire, risquant de modifier la topologie du maillage (on passe d'une position d'équilibre à une autre). En utilisant une force rigide/élastique, il est alors possible de remédier à ces problèmes. Cependant, des contraintes existent en ce qui concerne le rapport entre la réponse élastique et la réponse rigide du modèle. Une condition est que :

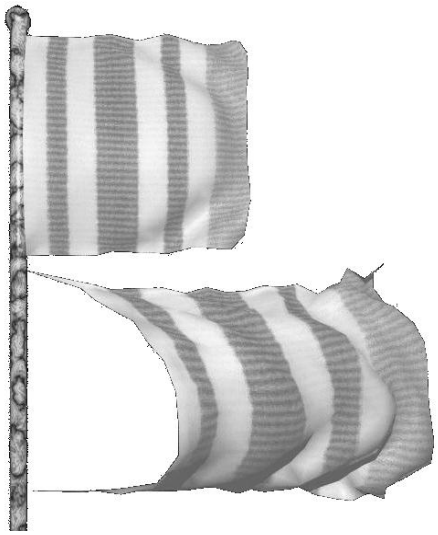


FIG. 4.8 – *Variation du comportement déformable d'un modèle 2D selon le type de forces internes. En bas, le drapeau correspond à un modèle classique masses/ressorts et présente des déformations irréalistes lorsqu'il est soumis à des contraintes importantes. En haut, en contraignant l'élongation maximale des ressorts, la déformation est plus réaliste. On peut noter que, sous cette condition, on considère que les ressorts sont presque linéaires.*

$$\frac{1}{2}m|v_2 - v_1|^2 + \frac{1}{2}k|l - l_0|^2 < \frac{1}{2}kl_0^2 \Rightarrow |v_2 - v_1| < \frac{k}{m}\sqrt{l(2l_0 - 1)} \tag{4.11}$$

Bien entendu, ce problème peut être modulé par l'utilisation d'un pas de temps d'intégration très faible. Mais alors, en raison des interactions avec le modèle, se pose le problème de la synchronicité (cf. paragraphe 4.8.3).

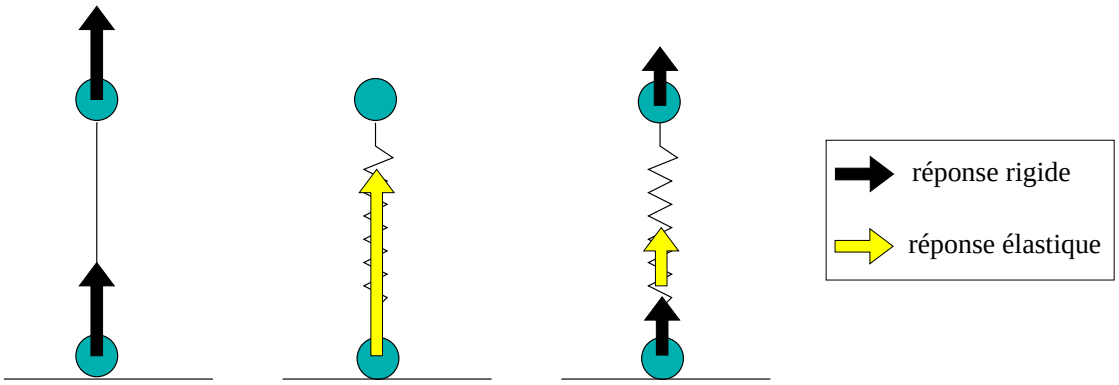


FIG. 4.9 – *À gauche, la liaison entre les deux masses est rigide. Dans ce cas, lors d'un contact avec une surface rigide, l'énergie est entièrement transmise par la liaison. Si on place un ressort entre les deux masses, ce ressort va absorber l'énergie. Si le contact se produit à vitesse élevée, la déformation du ressort sera très importante et peut conduire à des instabilités. En introduisant une liaison rigide/élastique, seule une partie de l'énergie est absorbée par le ressort, évitant ainsi les instabilités.*

4.5 Choix de la géométrie

Comme nous l'avons vu dans les exemples précédents, la représentation géométrique d'un solide peut être réalisée soit à partir de surfaces, soit à partir de volumes. Le choix entre modèles surfaciques et modèles volumiques est guidé par les deux paramètres suivants : rapidité des calculs et réalisme physique. En terme de temps de calculs, les modèles de surface sont très avantageux car ils nécessitent beaucoup moins de sommets que les modèles volumiques pour représenter la même forme. En ce qui concerne le réalisme physique, les modèles surfaciques peuvent être pertinents pour modéliser des éléments anatomiques ayant des propriétés similaires tels que les vaisseaux sanguins, la vésicule biliaire, etc. Dans ce cas, la forme de l'objet peut être maintenue en considérant une pression interne (force externe) et une tension de surface (force interne de ressort).

Malgré tout, la plupart des modèles biomécaniques reposent sur une modélisation volumique sous-jacente plutôt que sur une représentation surfacique. Il paraît en effet naturel de tenir compte de la nature biologique des tissus pour les modéliser. Bien entendu, il est possible de simuler un comportement volumique à l'aide d'un modèle qui ne soit pas réellement volumique (cf. paragraphe 4.5.2). Dans ce cas, on doit se restreindre à des organes supposés homogènes car seul un modèle volumique peut restituer des déformations de solides non-homogènes. De plus, dans le cadre de la simulation chirurgicale, il est nécessaire de pouvoir *découper* les tissus. Pour cette situation, un modèle volumique s'impose également.

Pour chaque type de maillage se pose ensuite le problème du nombre de liaisons entre les masses, qui va déterminer la réaction du modèle à certains types d'interactions. Se pose également le problème du maillage optimal pour un comportement donné, c'est-à-dire le nombre minimal de connexions autour d'un nœud préservant ce comportement, afin de minimiser le temps de calcul des forces appliquées à un nœud.

4.5.1 Modèles surfaciques

Comme nous l'avons vu précédemment, les modèles masses/ressorts sont souvent décrits à partir de grilles régulières. Pour obtenir des résultats précis, une première solution consiste à augmenter la densité de nœuds dans tout le maillage, augmentant ainsi de façon considérable les temps de calculs. Une solution intermédiaire consiste à augmenter localement la densité de nœuds. Hutchinson *et al.* ont développé un algorithme (Hutchinson et al., 1996) pour la création de maillages adaptatifs. Les exemples décrits concernent l'ajout de nœuds dans les zones de contact avec un objet rigide (cf. figure 4.10).

Gascuel a proposé, dans (Gascuel, 1989), un modèle surfacique de corps déformable composé d'une composante rigide entourée d'une enveloppe de type surface B-Spline. Le mouvement du noyau rigide (rotations et translations) suit les équations de la mécanique des solides. L'enveloppe est rattachée au noyau à l'aide de ressorts d'axe fixe. L'hypothèse de conservation de l'axe du ressort au cours du temps permet d'exprimer la force de rappel du ressort de façon analytique sans avoir recours à une méthode d'intégration numérique. Par contre, une méthode d'Euler est utilisée pour animer la composante rigide. Comme la surface de l'objet n'est pas

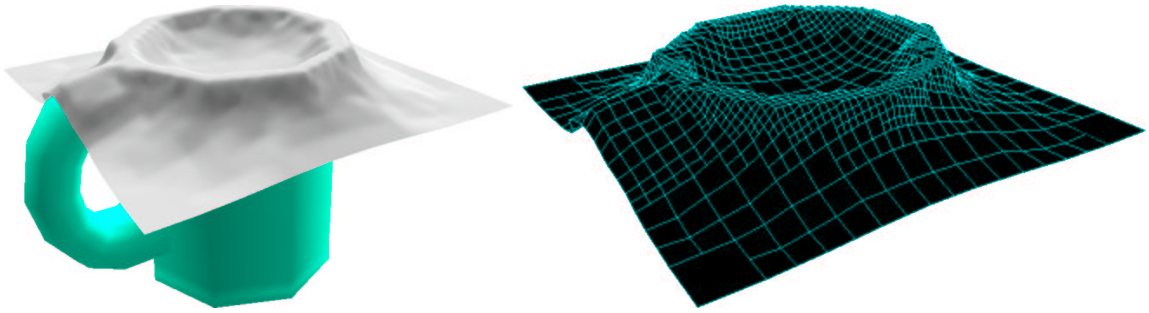


FIG. 4.10 – *Exemple de maillage adaptatif 2D. Afin de simuler au mieux la déformation d'un mouchoir tombant sur un modèle polygonal d'une tasse de café, le maillage de départ correspond à une grille régulière de 10×10 éléments. Le maillage est ensuite raffiné dans les zones de contact. L'utilisation de cette méthode par rapport à une grille régulière de 73×73 éléments permet de réduire les temps de calcul d'un facteur 20 environ.*

composée de masses et de ressorts mais sert simplement à la représentation graphique, le mouvement de chaque masse est indépendant. Afin d'obtenir une déformation globale, différentes contraintes et combinaisons entre les masses sont définies.

L'approche de Meseure (Meseure et Chaillou, 1997) est assez similaire à celle de Gascuel (Gascuel, 1990) et surtout de (Terzopoulos et Fleisher, 1988). Une composante rigide *virtuelle* est définie de manière à représenter les translations et rotations du centre de masse de l'objet (cf. figure 4.11).

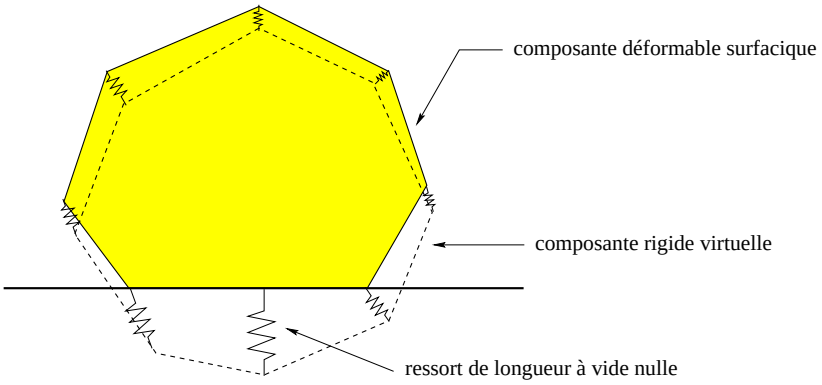


FIG. 4.11 – *La composante rigide du modèle développé par Meseure est dite "virtuelle" car elle n'intervient pas dans les interactions avec d'autres objets mais seulement dans le calcul de l'équation du mouvement.*

Cover *et al.* (Cover et al., 1993) ont recours à des modèles masses/ressorts pour représenter la surface de la vésicule biliaire dans une simulation de chirurgie endoscopique. Ils combinent, dans leur représentation physique, des *home* forces avec des forces internes afin de renforcer les contraintes de forme de la vésicule. Les forces internes sont associées aux liaisons entre les masses, alors que les *home* forces sont associées à la variation de position d'une masse par rapport à sa position de référence. Dans ce système, la représentation physique est différente de la représentation géométrique puisqu'un modèle NURBS définit la surface du modèle. Les points de contrôle des NURBS sont reliés aux masses. Il est ainsi possible d'avoir une bonne représentation graphique avec un faible nombre de masses dans le modèle masses/ressorts. Cela

permet des interactions temps-réel mais ne permet pas d'avoir une modélisation correcte des déformations. De façon similaire, Kuhn (Ch. Kuhn, 1996), dans le cadre du projet KISMET, a développé un modèle surfacique de la vésicule biliaire basé également sur des liaisons de type ressorts amortis avec seuil de plasticité. Les masses sont connectées à des nœuds fixes distribués à l'intérieur du volume de façon à donner un comportement plus volumique aux déformations tout en minimisant le nombre de connexions, donc de forces à calculer.

4.5.2 Modèles volumiques

Les représentations les plus "classiques" de modèles volumiques de type masses/ressorts consistent en un assemblage de structures élémentaires (cellules) pour lesquelles on a défini un ensemble de liaisons garantissant un comportement correct (cf. figure 4.12).

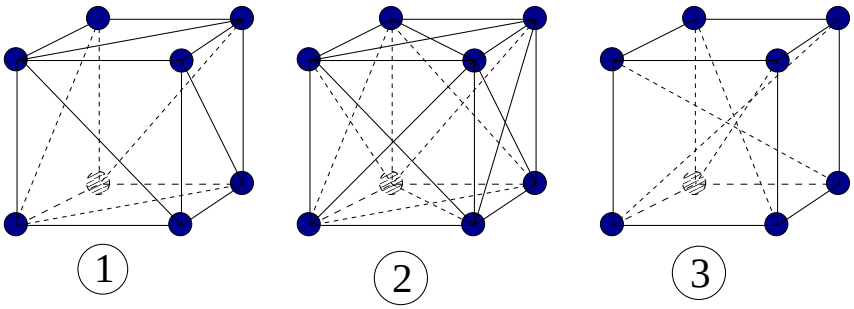


FIG. 4.12 – *Les modèles (1), (2) et (3) permettent de représenter une grande partie des déformations d'un élément cubique. Le modèle (2) présente de meilleures propriétés de symétrie que (1). Le modèle (3) est une alternative intéressante et on peut remarquer qu'il correspond à une décompostition en tétraèdres si on rajoute une liaison diagonale dans chaque face.*

Cet assemblage de structures élémentaires est semblable à celui utilisé pour les méthodes d'éléments finis. Malheureusement, les auteurs ayant recours à ces modèles volumiques n'utilisent que des éléments cubiques, ce qui limite fortement la géométrie de l'objet. Une application médicale requiert l'utilisation d'autres éléments de base.

Le comportement du modèle est fortement lié au nombre de liaisons définies autour d'une masse. Cependant, peu d'études ont abordé la détermination du nombre optimal de ces connexions. Un nombre trop faible implique qu'en cas de contact brusque avec un objet rigide, il est possible que des masses passent d'une position d'équilibre à une autre, modifiant ainsi la géométrie de l'objet (cf. figure 4.13). Ceci s'explique par le fait que la position d'équlibre d'une masse est définie par la longueur à vide de l'ensemble des liaisons entre cette masse et ses voisins. Dans l'exemple de la figure (4.13), il existe deux positions d'équilibre pour la masse A, car il existe deux configurations dans lesquelles les distances AB et AC correspondent aux longueurs à vide des ressorts. En augmentant le nombre de liaisons autour d'une masse, on limite la possibilité de telles configurations. Dans ce cas, un nombre trop important se traduit par une complexité calculatoire inutile et donc décroit les possibilités de temps réel.

Joukhadar a proposé, dans (Joukhadar, 1995), une approche intéressante pour les modèles masses/ressorts volumiques. Sa modélisation repose sur l'assemblage d'un certain nombre de

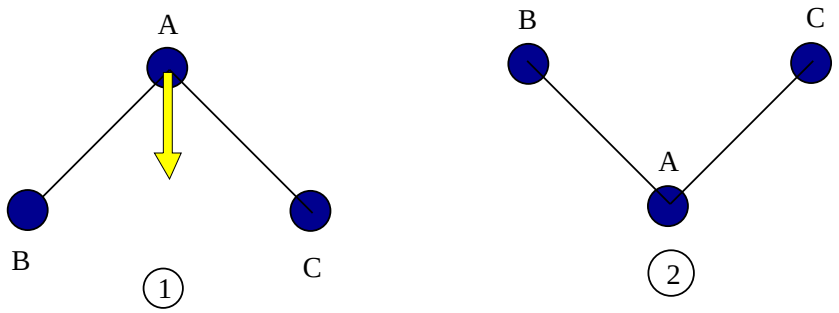


FIG. 4.13 – *Considérons la configuration (1) comme une configuration d'équilibre des 3 masses A, B et C. Si, lors d'une interaction, la masse A est soumise à une force externe importante, on peut obtenir la configuration d'équilibre (2). Ce problème peut être évité en créant d'autres liaisons ou en diminuant le pas de temps.*

configurations élémentaires de ressorts conduisant à des propriétés de stabilité permettant d'éviter les problèmes décrits figure 4.13. On trouve tout d'abord des liaisons de type ressort simple entre deux masses, des liaisons angulaires de torsion impliquant trois particules et des liaisons impliquant quatre masses (cf. figure 4.14). Cette dernière catégorie de ressorts sert à éviter la symétrie des liaisons de torsion.

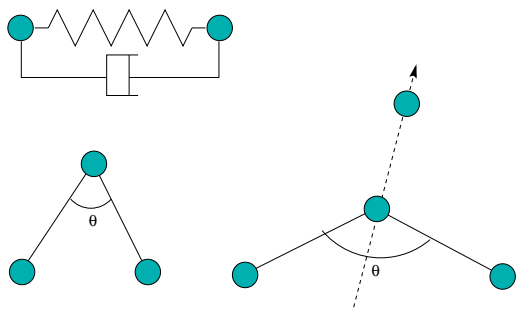


FIG. 4.14 – *L'assemblage de ces trois types de liaisons pour décrire un modèle déformable permet d'obtenir des configurations plus stables qu'en utilisant seulement des ressorts linéaires.*

En se basant alors sur la géométrie de l'objet réel à modéliser, Joukhadar propose une méthode de construction permettant une décomposition de la structure respectant au maximum la symétrie de l'objet. Cela permet de positionner les nœuds de façon à ne pas modifier les axes principaux du solide initial. Cette condition permet d'obtenir un comportement plus réaliste lors de la simulation. Le nombre et la taille des éléments dépend également des propritétés élastiques de l'objet modélisé : les parties déformables seront plus finement subdivisées que les parties rigides.

De notre côté, nous avons étudié la possibilité d'utiliser une représentation géométrique basée sur les maillages simplexes volumiques (ou 3-maillages simplexes) décrits dans (Delingette, 1994b) et (Delingette et al., 1994). L'intérêt de ces maillages réside dans la constante connexité autour d'un nœud. En effet, dans un 3-maillage simplexe, un nœud a toujours 4 voisins. La notion de cellule existe également dans les 3-maillages simplexes, permettant ainsi d'avoir un formalisme similaire à l'utilisation de cellules cubiques mais avec un avantage considérable : il est possible de représenter des objets complexes et de topologie variée à l'aide de ces maillages.

De plus, le faible nombre de liaisons en chaque nœud nous a semblé un point intéressant pour l'aspect temps réel (le calcul des forces appliquées en chaque masse est en général la partie la plus coûteuse de la boucle d'animation). Enfin, la surface d'un 3-maillage simplexe est un 2-maillage simplexe, lequel est le dual d'une triangulation (Delingette, 1994b) et permet donc de résoudre le problème de la visualisation. Enfin, des opérations topologiques sur les faces et cellules de maillages simplexes ont été définies, permettant ainsi de traiter aisément le problème de la simulation de découpes.

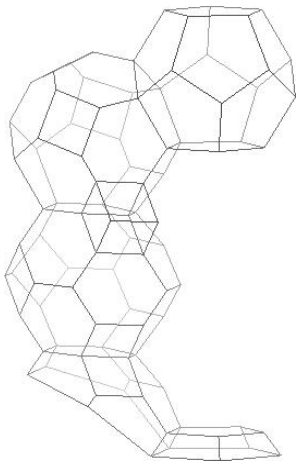


FIG. 4.15 – *Un exemple de 3-maillage simplexe. Le maillage est composé d'un ensemble de cellules. La connexité d'un tel maillage est toujours égale à quatre.*

Malheureusement, l'utilisation de cette représentation, dans la pratique, a révélé des instabilités importantes lors de contacts avec d'autres objets. Ceci semble dû, en grande partie, à la trop faible connexité définie autour de chaque masse – limitée à quatre dans notre cas alors qu'elle varie en général autour de huit dans la plupart des modèles masses/ressorts.

4.6 Visualisation

Les modèles masses/ressorts ne permettent qu'une représentation naturelle simple où les nœuds du maillage correspondent aux masses et les arêtes aux ressorts. Pour représenter la surface du maillage, une première solution consiste à définir des polygones à partir de l'ensemble de sommets et d'arêtes. Une autre solution, employée par Miller (Miller, 1988), Cover (Cover et al., 1993) ou Gascuel (Gascuel et al., 1991), consiste à définir une surface Spline dont les points de contrôle correspondent aux masses.

Cependant, pour une application en simulation chirurgicale, il est nécessaire de représenter les effets de l'incision des tissus mous. Pour cette raison, la solution la plus adaptée semble être la définition d'une triangulation de la variété (surface ou volume) associée à une structure de données complète similaire à celles utilisées dans les méthodes d'éléments finis.

4.7 Fracture, déchirements, découpes

Peu de solutions ont été proposées actuellement pour modéliser les phénomènes de fractures ou déchirements de tissus à partir de modèles masses/ressorts. Or, pour la simulation de chirurgie, la possibilité de découper un maillage, c'est-à-dire de modifier sa topologie, nous intéresse tout particulièrement. Le déformation résultant de cette « découpe » est assez proche des études de fractures faites dans (Norton et al., 1991). Cependant, Norton *et al.* n'ont pas étudié la validité du résultat en le comparant, par exemple, avec des études réalisées en structure des matériaux avec des méthodes d'éléments finis.

Stone *et al.* (Stone et McCloy, 1996), similairement à Terzopoulos et Fleisher (Terzopoulos et Fleisher, 1988), ont également proposé un algorithme pour modéliser la plasticité et des phénomènes de fracture comme il en existe en structure des matériaux en ajoutant un seuil de glissement et un seuil de division à un réseau de type masses/ressorts.

L'idée de base pour simuler de tels comportments limites est de supprimer les interactions (liaisons) existant entre certaines masses. On peut alors imaginer deux moyens d'y parvenir. Soit la liaison est supprimée explicitement (c'est ce qui se passe lorsque l'on incise un organe à l'aide d'un scalpel) soit la liaison est supprimée lorsque l'allongement du ressort dépasse un certain seuil. C'est ce dernier cas, correspondant au phénomène de fracture, qui a été étudié par Norton *et al.*. Dans ce modèle, chaque liaison est composée d'un ressort et d'un amortisseur en parallèle (modèle de Kelvin Voigt). Le ressort est caractérisé par sa longueur au repos, son coefficient d'élasticité et un seuil d'élongation maximale. Lorsque la longueur du ressort dépasse ce seuil, la liaison cède. Cette condition ne suffit cependant pas à provoquer une fracture en raison de l'absence de notion de volume. Pour cela, les auteurs ont recours à un modèle constitué d'un assemblage de cellules cubiques représentant la structure du matériau à un niveau macroscopique. Chaque élément de base est semblable à celui décrit en figure (4.12), à droite. Si la longueur d'une liaison vient alors à dépasser le seuil fixé, c'est la cellule entière qui est détruite. En effet, si une seule liaison était supprimée, l'effet obtenu serait plutôt une déformation incorrecte de la cellule pouvant se répercuter sur le maillage tout entier.

D'autres problèmes viennent ensuite de la gestion de ces fractures. En effet, lorsque l'objet commence à se diviser en plusieurs parties, il devient nécessaire de détecter les éventuelles collisions entre celles-ci. Ce traitement est relativement coûteux en temps de calcul car il faut gérer des collisions entre plusieurs modèles déformables.

4.8 Intégration numérique

L'intégration numérique est l'un des problèmes majeurs des modèles dynamiques lorsque l'on a recours à une méthode de résolution explicite. Le choix du pas de temps et de la méthode d'intégration revêt donc une grande importance dans le comportement des modèles de type masses/ressorts. Il y a deux problèmes liés à l'intégration numérique. Le premier concerne le choix du pas de temps Δt. Le second problème est lié aux erreurs de calcul en fonction de la méthode d'intégration.

Parmi les travaux les plus intéressants, nous pouvons citer ceux de Joukhadar dans (Jou-

khadar, 1995; Joukhadar et Laugier, 1996). Leurs travaux portent sur l'utilisation d'un pas de temps adaptatif, permettant par exemple de mieux traiter les déformations lors de contacts.

4.8.1 Choix du pas de temps

Afin de déterminer la vitesse puis la position d'une particule à partir de son accélération, il est nécessaire de procéder à une intégration. L'utilisation de méthodes explicites pour y parvenir est la solution la plus simple et la plus rapide. Cependant ces méthodes sont *conditionnellement* stables. Cela implique l'existence d'un pas de temps critique Δt_c représentant la valeur maximale du pas de temps Δt utilisable pour l'intégration numérique. L'existence de Δt_c est liée au théorème de Shannon. Ce théorème stipule que pour restituer correctement un signal dont la plus haute fréquence est f, il est nécessaire de l'échantillonner à une fréquence f_e supérieure ou égale à $2f$. Considérons ainsi une masse ponctuelle, attachée à l'extrémité d'un ressort simple, et dont l'autre extrémité est fixe. Si le ressort n'est pas amorti, la période du système est ω_0 :

$$\omega_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{k^s}} \tag{4.12}$$

et sa fréquence propre f_0 :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k^s}{\mu}} \tag{4.13}$$

où μ est la masse attachée au ressort et k^s la raideur du ressort.

Cela signifie que le système est d'autant plus mal conditionné que l'on augmente la raideur du ressort ou que l'on diminue la masse. Pour un modèle masses/ressorts comportant plusieurs masses et ressorts de raideur différente, c'est la plus petite fréquence naturelle qui conditionne le système entier.

Comme la plupart des systèmes masses/ressorts font intervenir des ressorts amortis, on considère dans ce cas la fréquence f_0' associée à la pseudo-période ω_0' du ressort :

$$f_0' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k^s}{\mu} - \frac{k^{d^2}}{4\mu^2}} \tag{4.14}$$

où μ est la masse attachée au ressort, $k^q s$ la raideur du ressort et k^d la constante d'amortissement.

Le pas de temps critique pour un modèle composé de ressorts non amortis est par conséquent :

$$\Delta t_c = \pi\sqrt{\frac{\mu}{k^s}} \tag{4.15}$$

Les relations (4.12), (4.14) et (4.15) impliquent, entre autres, que pour augmenter la rigidité limite k_c^s du modèle, il est nécessaire de diminuer le pas de temps.

$$k_c^s = \frac{\mu\omega_0^2}{\pi^2} \tag{4.16}$$

Pour maintenir la fréquence de l'affichage graphique à une valeur élevée (au moins 24 Hz)

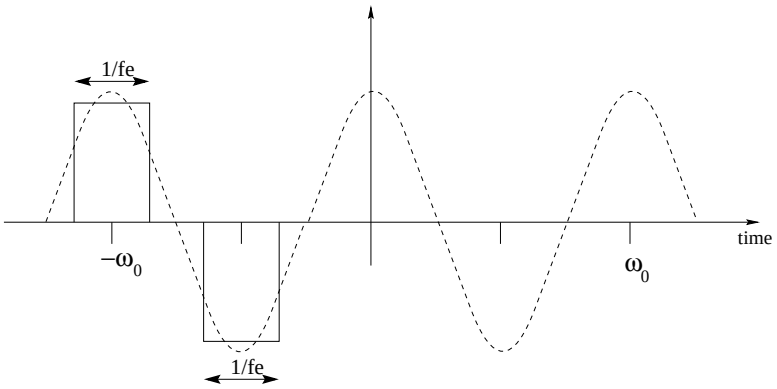


FIG. 4.16 – *Illustration du théorème de Shannon pour un ressort non amorti. La fréquence d'échantillonage du signal f_e doit être $\geq 2f_0$, avec f_0 la fréquence propre du ressort. Le pas de temps Δt_c est donc égal à $\frac{\omega_0}{2}$.*

sans augmenter le pas de temps, il est nécessaire soit de diminuer la rigidité du modèle, soit de diminuer le nombre de nœuds du modèle. Plus on diminue le nombre de nœuds, plus on s'écarte du comportement physique réel. D'un autre côté, la diminution de la rigidité du modèle va entraîner des déformations plus locales lors de contacts ponctuels.

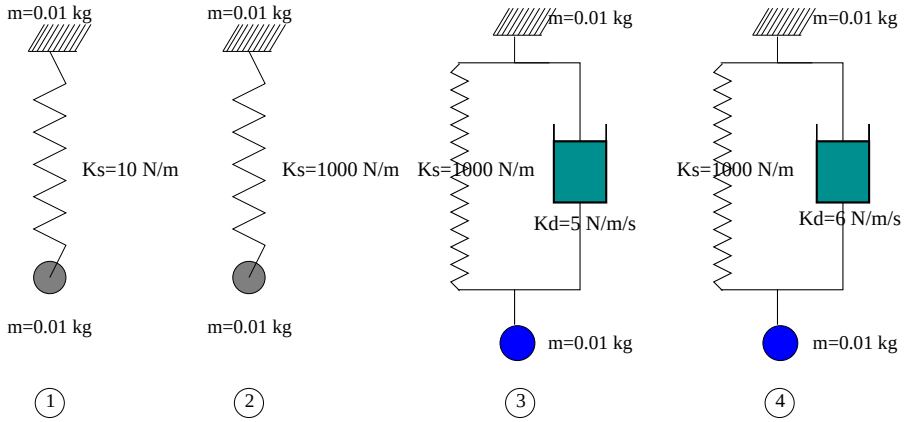


FIG. 4.17 – *Les quatre exemples ci-dessus montrent la variation du pas de temps en fonction des caractéristiques (visco)élastiques du ressort. (1) $\Delta t = 0,1$, (2) $\Delta t = 0,01$, (3) $\Delta t = 0,016$, (4) $\Delta t = 0,032$.*

4.8.2 Choix de la méthode d'intégration

Quelque soit la stratégie employée pour garantir la convergence (faible pas de temps, faible rigidité, etc.) les relations précédentes ne sont valables qu'en théorie, c'est-à-dire en supposant que la méthode d'intégration n'entraîne pas d'erreurs de calcul. Or les erreurs numériques sont loin d'être négligeables, surtout pour certaines méthodes pourtant couramment employées, telles que le méthode d'Euler utilisée dans la relation (4.10). La stabilité est une notion très importante liée à la fois à la méthode et à l'équation différentielle. Considérons une équation différentielle telle que $y(t)$ représente un régime transitoire qui, au bout d'un certain temps,

devient un regime stationnaire. C'est le cas par exemple d'un système composé d'une masse et d'un ressort amorti. On a donc $y = y_s = constant$ pour $t > t_s$. Si les erreurs numériques entraînent que pour $t > t_0$, y_t s'écarte de plus en plus de la valeur théorique y_s alors que $t_0 < t_s$, on obtient un comportement erroné. Le problème, bien qu'existant toujours, devient bien moins grave si $t_0 >> t_s$. On voit donc que, même si les erreurs numériques ne peuvent pas être complètement supprimées, il est très important d'avoir recours à une méthode précise (d'ordre élevé).

L'instabilité se manifeste par une amplification des erreurs de troncature et d'arrondi, dûe au fait que l'on remplace l'équation différentielle par une équation aux différences où la solution y_t à l'instant t dépend de plusieurs $y_{t-\Delta t}$ en général. Cette équation aux différences a, en effet, plusieurs solutions : la solution fondamentale qui est, lorsque $\Delta t \to 0$, celle de l'équation différentielle, et des solutions parasites qui viennent masquer la solution fondamentale (Henrici, 1962).

En pratique il est difficile de prévoir, surtout dans le cadre de la simulation, le pas de temps optimal. Ce dernier correspond à la valeur maximale de Δt rendant possible la convergence de la méthode. Le tableau (4.1) donne quelques résultats pour trois méthodes d'intégration. Ces méthodes seront détaillées au chapitre suivant mais on peut déjà constater que, selon le choix de la technique d'intégration, il est possible de dépasser le pas de temps Δt_c sans rencontrer d'instabilités.

	Ordre de grandeur de l'erreur	Δt maxi (s)	Δt_c (s)
Méthode d'Euler	1	0.01	0,013
Méthode de Runge-Kutta d'ordre 2	2	0.05	0,013
Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4	4	0.25	0,013

TAB. 4.1 – *Influence de la méthode d'intégration numérique sur la convergence et le pas de temps optimal. Ce pas de temps est calculé pour $K^s = 200$, $K^d = 5$ et $\mu = 5$. Le pas de temps critique est $\Delta t_c = 0,013 sec$.*

4.8.3 Synchronicité

L'hypothèse de synchronicité a été introduite par Luciani dans (Luciani, 1985) comme une contrainte nécessaire à la manipulation interactive en temps réel d'objets dynamiques. Cette hypothèse est plus restrictive que la contrainte de temps réel. Elle est liée à la désynchronisation entre le temps réellement mis pour calculer une itération de la boucle d'animation (4.3) et le temps Δt utilisé pour l'intégration numérique. Supposons que le pas de temps Δt soit égal à 0.01 s. Supposons que le temps nécessaire au calcul des forces et à l'intégration numérique pour une itération soit de 0.1 s. Supposons l'objet animé d'une vitesse de 1 m/s. En 0.01 s il parcourt, en théorie, 1 cm. Comme le temps de calcul est 10 fois plus long, il est perçu par l'utilisateur comme ayant une vitesse 10 fois plus lente, soit 0.1 cm/s, et parcourt donc seulement 0.1 cm pour l'opérateur. Réciproquement, tout mouvement de l'utilisateur sera décuplé dans le repère temporel de la machine. Cela signifie que dans le mêmes conditions, un geste normal

de l'utilisateur sera interprété comme un geste très rapide, entraînant des vitesses de collision élevées, avec les conséquences que nous avons mentionnées précédemment (modification de la géométrie du maillage, instabilités numériques dûes à l'augmentation rapide d'énergie cinétique, etc.). La difficulté réside alors dans le choix d'un pas de temps compatible à la fois avec le temps de calcul de la machine et les contraintes fréquentielles du système simulé.

4.9 En conclusion

À travers les exemples précédents, nous avons voulu mettre en évidence les problèmes fondamentaux liés à l'utilisation de modèles masses/ressorts. Le premier problème est l'absence de paramétrisation et le caractère directionnel des forces de liaison qui rendent approximative toute tentative de modélisation d'un solide par cette approche. Pour tenter de pallier ce problème, l'approche la plus correcte nous a semblée être celle qui consiste à diviser le solide en un ensemble de cellules. À condition de supposer les cellules très petites par rapport à la taille de l'objet, il est possible d'obtenir une approximation correcte du comportement déformable.

Le second problème réside dans l'existence d'un pas de temps critique pour l'intégration numérique. La valeur de ce pas de temps est liée à la nature des forces de liaison. Les notions de synchronicité et de précision numérique sont liées à ce problème et limitent fortement, pour des applications en temps-réel, le nombre d'éléments du maillage (nœuds, liaisons, etc.).

Enfin, l'identification de la raideur des ressorts en vue de restituer un comportement donné reste un problème important pour la simulation chirurgicale.

Notons enfin que l'approche par manipulation directe de données voxels est peut être une solution future intéressante pour la simulation de chirurgie. Cependant, les problèmes de visualisation et d'interaction en temps réel de telles données restent à résoudre.

5.

Modèle « masses/tenseurs »

Dans ce chapitre nous présentons une formulation originale d'un modèle dynamique et nous discutons de ses avantages par rapport aux modèles masses/ressorts ainsi que par rapport aux méthodes de type éléments finis. Nous présentons ensuite quelques applications dans le domaine de la simulation chirurgicale, concernant en particulier la représentation des découpes et déchirements.

5.1 Introduction

Nous avons présenté, au chapitre précédent, un ensemble de solutions utilisées pour la modélisation de corps déformables. Les méthodes proposées reposent sur le concept de modèle masses/ressorts, dont un des inconvénients majeurs est la dépendance entre le comportement déformable et le graphe des liaisons définies entre les masses. Une méthode de résolution par éléments finis, par exemple, ne présente pas cet inconvénient. Associée à une loi de comportement telle que la théorie de l'élasticité, ou plus généralement issue de la mécanique des milieux continus, elle permet de prendre en compte la nature continue des solides déformables que sont la plupart des organes. Malheureusement, la méthode des éléments finis ne permet pas de considérer des contraintes de calcul en temps réel, sauf dans le cas de la méthode que nous avons développée au chapitre (3). Cependant, bien qu'elle permette d'atteindre des fréquences de calcul très élevées, notre méthode ne permet pas de modifier la topologie du maillage initial sans avoir recours à une nouvelle étape de pré-calculs, incompatible avec la contrainte de temps réel.

Or la possibilité de modifier le maillage est une caractéristique indispensable en simulation de chirurgie afin de représenter le résultat d'incisions ou de déchirements de tissus mous. Song (Song et Reddy, 1995) a décrit une technique pour découper des objets simples, représentés par des maillages réguliers d'éléments finis et suivant une loi élastique linéaire. Cette approche n'a été mise en œuvre que dans le cas d'objets bidimensionnels. Nous pouvons également citer une méthode appliquée à la découpe et la visualisation de volumes de voxels provenant d'images tomographiques (Pflesser et al., 1995).

Nous avons ainsi naturellement porté notre attention vers les modèles masses/ressorts en raison de leur représentation *géométrique* sous forme de graphe, rendant plus facile un changement de topologie. De plus, leur comportement dynamique est intéressant pour représenter les phénomènes *physiques* intervenant lors de la découpe. Dans ce chapitre, nous proposons une nouvelle approche permettant de contourner un des principaux inconvénients des modèles masses/ressorts : la modélisation des forces internes est indépendante de la direction des liaisons, de façon à permettre le calcul d'une déformation "indépendante" du maillage. Ce modèle, que nous avons appelé « masses/tenseurs » est, d'une certaine façon, équivalent à une formulation explicite de la méthode des éléments finis. Bro-Nielsen l'a d'ailleurs remarqué dans (Bro-Nielsen, 1997), mais, n'ayant poursuivi ni son analyse ni la mise en œuvre de la méthode, il avait conclu que le résultat devait être semblable à celui d'une méthode de type masses/ressorts. Dans le même temps, l'approche que nous développions nous conduisait à des conclusions plus optimistes. Nous verrons ainsi, au travers de différents résultats, que cette approche présente certains avantages par rapport aux modèles masses/ressorts, en particulier dans le calcul des déformations, mais également au niveau des fréquences d'interaction possibles. Malgré tout, le problème du calcul de déformations en temps-réel n'est pas directement résolu par notre méthode et nous verrons au chapitre (6), comment y remédier.

5.2 Principe général

Bien que notre modèle découle d'une méthode d'éléments finis, notre approche a été essentiellement guidée par l'étude que nous avons menée sur les modèles masses/ressorts. Il est clair que ces derniers semblent idéalement adaptés à la modélisation des découpes et plus généralement à toute modification de topologie[1].

Un des inconvénients des modèles masses/ressorts repose sur la définition des forces internes s'exerçant entre les masses. Quelle que soit la fonction utilisée pour calculer la force associée au déplacement d'une masse, il n'en reste pas moins que cette force est toujours liée à la topologie du maillage. Pour un nombre de masses donné, le graphe des connexions entre les masses définit implicitement le comportement du modèle, ce qui n'est pas sans poser de problèmes. Ainsi, les solutions proposées jusqu'à présent ont consisté soit à modéliser un objet volumique par un assemblage de cellules, soit à définir des types de liaisons plus complexes - par exemple des liaisons angulaires - afin d'obtenir un meilleur compromis entre nombre de liaisons et réalisme du comportement. Dans le premier cas, le grand nombre de cellules nécessaires pour modéliser un objet de géométrie complexe est une contrainte pour l'animation en temps-réel. Dans le second cas, les forces de liaison sont plus complexes à calculer et entraînent des temps de calcul supplémentaires. Enfin, dans tous les cas on reste loin du comportement physique réel d'un solide déformable.

Dans notre approche, nous avons repris les concepts fondamentaux des modèles masses/ressorts, en introduisant une nouvelle formulation des forces internes. Rappelons que la force de rappel d'un ressort est :

$$\boldsymbol{F_i^s} = -k^s_{(i,j)}(l(t) - l_0)\frac{\boldsymbol{l_{ij}}}{l(t)} \tag{5.1}$$

Cette force s'exerce donc dans la direction $\boldsymbol{l_{ij}}$ de la liaison définie entre les masses i et j.

Dans le modèle masses/tenseurs, la force totale, $\boldsymbol{F_i(t)}$, exercée sur chaque masse i, s'exprime toujours :

$$\boldsymbol{F_i(t)} = \boldsymbol{F_i^{ext}(t)} + \boldsymbol{F_i^{int}(t)} \tag{5.2}$$

mais avec :

$$\boldsymbol{F_i^{int}(t)} = [\boldsymbol{M}]\,\boldsymbol{u} \tag{5.3}$$

où $\boldsymbol{u}$ est un vecteur de dimension $3(n_v + 1)$ et représente le déplacement du nœud i et de ses voisins, et $[\boldsymbol{M}]$ est une matrice de dimensions 3 x $3(n_v + 1)$; n_v étant le nombre de voisins de i.

La justification de cette formulation de la force interne s'explique plus aisément en décomposant l'expression précédente en deux forces, l'une associée au déplacement propre de la masse i par rapport à sa position d'équilibre, l'autre associée au déplacement d'une des masses voisines. Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des nœuds j du voisinage de i, alors :

1. Par la suite, le terme de topologie sera utilisé pour décrire les liaisons entre nœuds du maillage.

$$\boldsymbol{F^{int}} = [\boldsymbol{T_{ii}}]\,\Delta x_i + \sum_{j\in\mathcal{V}} [\boldsymbol{T_{ij}}]\,\Delta x_j \tag{5.4}$$

Les matrices $[\boldsymbol{T_{ii}}]$ et $[\boldsymbol{T_{ij}}]$ sont de dimensions 3x3 et nous leur donnerons également le nom de tenseurs puisque, comme nous allons le voir par la suite, leur définition est similaire aux tenseurs de force introduits au chapitre (3). Le calcul de ces tenseurs nécessite en particulier l'évaluation de la matrice de rigidité élémentaire associée à chaque tétraèdre adjacent à une des liaisons issues de la masse i. Le vecteur Δx_i (resp. Δx_j) contient les trois composantes du déplacement de la masse i (resp. de la masse j) par rapport à sa position d'équilibre.

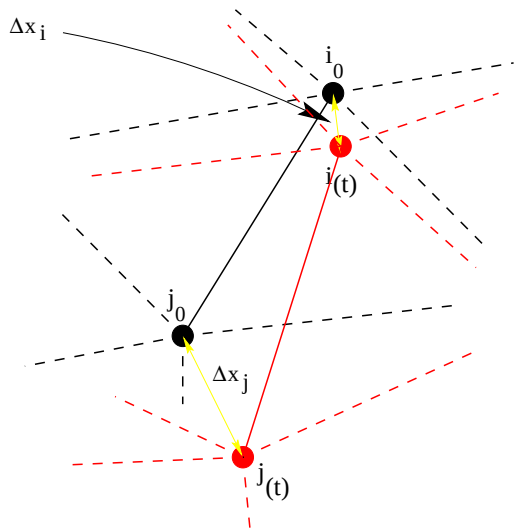


FIG. 5.1 – *Le calcul des forces internes ne dépend plus de la variation de longueur du ressort défini entre les masses i et j. Dans notre modèle, la force interne appliquée en un nœud dépend du déplacement de ce nœud par rapport à sa position d'équilibre et du déplacement des nœuds voisins, également par rapport à leur position d'équilibre.*

La description du solide est basée sur une décomposition en éléments tétraédriques permettant de modéliser précisément des objets complexes, comme c'est généralement le cas des structures anatomiques. La création du maillage, l'évaluation des paramètres d'élasticité de chaque élément ainsi que le calcul des forces sont basés sur une analyse par éléments finis de l'objet à modéliser (cf. chapitre 2). La boucle d'animation, par contre, reprend le même schéma que dans les méthodes classiques utilisées pour les modèles dynamiques. On retrouve donc un schéma itératif, où sont évaluées les forces appliquées sur le modèle. En fonction de ces forces et de certaines conditions aux limites, on en déduit l'accélération, la vitesse et la nouvelle position des masses.

On est bien entendu très proche de la résolution du problème de l'élasticité linéaire par une méthode explicite. La différence réside dans les points suivants :

- en dehors de l'expression des forces de liaison, l'ensemble de l'algorithme reste le même que celui que nous avons développé lors de la mise en œuvre d'une approche préliminaire de type masses/ressorts. Ceci explique le nom de “masses/tenseurs”.
- il est possible de faire intervenir d'autres forces (cf. paragraphe 5.4.4) internes pour

le calcul de l'accélération. Par conséquent, on s'éloigne d'une méthode d'éléments finis classique ainsi que d'un modèle élastique linéaire stationnaire. Bien sûr, en modifiant ainsi le comportement du modèle, on s'éloigne sans doute d'une réalité biomécanique. Il s'agit alors de définir le bon compromis dans la définition des paramètres de la déformation.

5.3 Géométrie

La description de la géométrie d'un modèle de type masses/ressorts n'est pas un problème simple à aborder puisque la géométrie a également une influence sur le comportement physique, en raison de la *dualité* entre la liaison et la direction de la force associée à cette liaison. Dans notre cas, le problème est différent puisque la direction de la force ne dépend plus de la direction de la liaison. Nous avons cependant besoin de définir ces liaisons inter-masses puisque c'est en les modifiant que l'on va simuler le résultat de la découpe du maillage.

La construction du modèle géométrique consiste à définir la position des masses, le graphe des liaisons et l'ensemble des tétraèdres composant le volume du solide ainsi que la triangulation de la surface qui sera utilisée pour la visualisation.

5.3.1 Triangulation du domaine

Nous avons eu recours à un schéma similaire à celui décrit aux chapitres (2) et (3) pour la génération du maillage volumique et de la structure de données associée. Nous rappellerons ici seulement les étapes importantes :

- *triangulation* : une triangulation de la surface du solide est obtenue soit par extraction d'iso-surface, soit avec un modèle déformable de type snake 3D (maillage simplexe). Cette triangulation peut ensuite être "améliorée" de façon à respecter un certain critère de qualité (Duval, 1996).
- *tétraédrisation* : le volume du solide est décomposé en un ensemble de tétraèdres par une méthode de type Delaunay-Voronoi (logiciel Simail).
- *structure de données* : une structure de données est associée au maillage (coordonnées des nœuds, description des faces et des tétraèdres).

5.3.2 Topologie - graphe des liaisons

Afin de déterminer le graphe des liaisons de notre modèle masses/tenseurs, deux solutions sont envisageables. La première est une méthode purement géométrique. Elle consiste à définir les liaisons à partir des arêtes des tétraèdres obtenus après *triangulation*. La seconde méthode est plus originale et repose sur l'analyse de la matrice de rigidité $[\boldsymbol{K}]$ du solide.

Le calcul de la matrice de rigidité, nous l'avons vu, nécessite de nombreuses opérations et une mise en œuvre complexe. Cependant, nous verrons par la suite qu'il est nécessaire, pour définir les tenseurs de la relation (5.4), de calculer l'ensemble des matrices de rigidité élémentaires associées aux tétraèdres du maillage volumique. Le calcul de la matrice de rigidité

n'est qu'un assemblage de matrices de rigidité élémentaires. Une grande partie des routines de calcul nécessaires à l'évaluation des tenseurs va donc permettre de déterminer également $[\boldsymbol{K}]$, comme dans la méthode d'éléments finis du chapitre (2). Le schéma (5.2) résume la méthode.

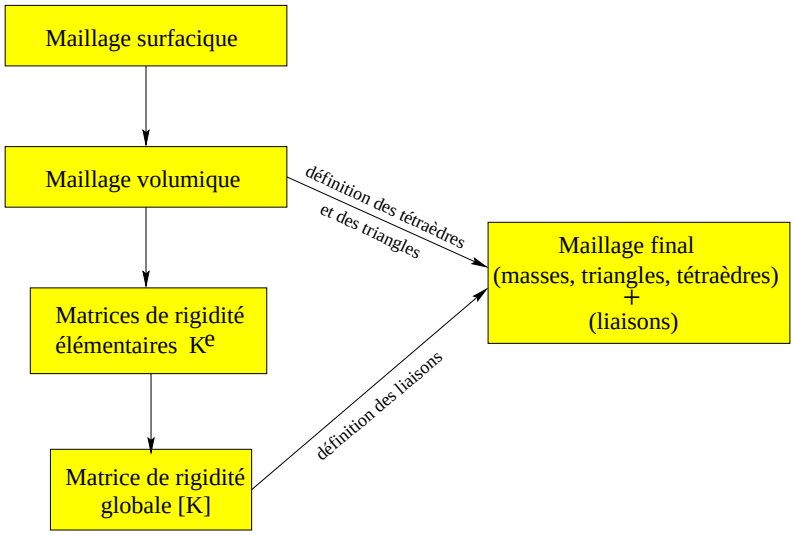


FIG. 5.2 – *Les différentes étapes de la construction du maillage volumique permettant d'obtenir le modèle géométrique et le graphe des liaisons. Le maillage volumique peut être construit, soit à partir de la triangulation de la surface, soit à partir de la matrice de rigidité du solide.*

La matrice de rigidité issue de l'analyse par éléments finis d'un solide déformable représente les différentes relations entre les éléments. Elle traduit l'influence d'un nœud sur un autre. En faisant alors abstraction des valeurs numériques qui dépendent des paramètres d'élasticité, et en ne considérant que les valeurs non-nulles de $[\boldsymbol{K}]$, on peut en déduire les relations entre masses.

À partir de la *triangulation* du volume en tétraèdres, on effectue les opérations suivantes :

- *calcul de la matrice de rigidité élémentaire* : pour chaque élément on calcule sa matrice de rigidité élémentaire comme décrit dans (2).
- *assemblage de la matrice de rigidité globale* : la matrice de rigidité globale est obtenue par assemblage des matrices de rigidité élémentaires.

Pour l'exemple décrit ci-dessous, nous sommes partis de la triangulation d'un cube. Au terme des différentes étapes décrites dans le schéma (5.2), nous avons obtenu la matrice de rigidité $[\boldsymbol{K}]$ dans laquelle les `X` représentent une valeur non-nulle et les `.` une valeur nulle (cf. figure 5.3).

La matrice $[\boldsymbol{K}]$, nous l'avons déjà mentionné, est symétrique. Comme il y a 3 degrés de liberté par nœud (les composantes x, y, z), il y a 3 lignes ou 3 colonnes par numéro de nœud.

Considérons, par exemple, les nœuds 3 et 5. On peut voir dans la matrice de rigidité que les valeurs de $[\boldsymbol{K}]$ à l'intersection des 3 lignes correspondant au nœud 3 et des 3 colonnes correspondant au nœud 5 contiennent des valeurs non-nulles. Il s'en suit qu'une liaison doit être créée entre les nœuds 3 et 5.

```
  1 1 1 2 2 2 3 3 3 4 4 4 5 5 5 6 6 6 7 7 7 8 8 8 9 9 9 A A A B B B C C C D D D E E E F F F
1 X X X X . . X . X . . . X X X X X . . . . . . . . . . . . . . . X X X X X X . . . . . .
1 X X X . X X . X . . . . X X X X X . . . . . . . . . . . . . . . X X X X X X . . . . . .
1 X X X . X X X . X . . . X X X . . X . . . . . . . . . . . . . . X X X X X X . . . . . .
2 X . . X X X . . . X . X X X X . . . X X . . . . . . . . . . X X X . . . X X X . . . . . .
2 . X X X X X . . . . X . X X X . . . X X . . . . . . . . . . X X X . . . X X X . . . . . .
2 . X X X X X . . . X . X X X X . . . . . X . . . . . . . . . X X X . . . X X X . . . . . .
3 X . X . . . X X X X . . X X X . . . . . . X X . . . . . . . . . . . X X X . . . X X X X X X
3 . X . . . . X X X . X X X X X . . . . . . X X . . . . . . . . . . . X X X . . . X X X X X X
3 X . X . . . X X X . X X X X X . . . . . . . . . . . . . . . . . . . X X X . . . X X X X X X
4 . . . X . X X . . X X X X X X . . . . . . . . . X X . . . . X X X . . . . . . X X X . . .
4 . . . . X . . X X X X X X X . . . . . . . . . . X X . . . . X X X . . . . . . X X X . . .
4 . . . X . X . X X X X X X X . . . . . . . . . . . . X . . . X X X . . . . . . X X X . . .
5 X X X X X X X X X X X X X . . . . . . . . . . . . . . . . . X X X X X X X X X X X X X X X
5 X X X X X X X X X X X X X . . . . . . . . . . . . . . . . . X X X X X X X X X X X X X X X
5 X X X X X X X X X X X X X . . . . . . . . . . . . . . . . . X X X X X X X X X X X X X X X
6 X X . . . . . . . . . . . . . X X X . . X . X . . . X X X . . . X X X X X . . . X X X
6 X X . . . . . . . . . . . . . X X X . X X . X . . . . X X X . . . X X X X X . . . X X X
6 . . X . . . . . . . . . . . . X X X . X X X . X . . . X X X . . . X X X X X . . . X X X
7 . . . X X . . . . . . . . . . X . . X X X . . . X . X X X X X X . . . X X X . . . . . .
7 . . . X X . . . . . . . . . . X X X X X . . . . X . X X X X X X . . . X X X . . . . . .
7 . . . . . X . . . . . . . . . X X X X X . . . X . X X X X X X X . . . X X X . . . . . .
8 . . . . . X X . . . . . . . . X . X . . . X X X X . . X X X . . . X X X . . . X X X X X X
8 . . . . . X X . . . . . . . . X . . . . X X X . X X X X X . . . X X X . . . X X X X X X
8 . . . . . . . X . . . . . . . X . X . . . X X X . X X X X X . . . X X X . . . X X X X X X
9 . . . . . X X . . . . . . . . X . X X . . X X X X X X X X X . . . . . . X X X X X X
9 . . . . . X X . . . . . . . . X . . X X X X X X X X X X X X . . . . . . X X X X X X
9 . . . . . X . . . . . . . . X . X . X X X X X X X X X X X X . . . . . . X X X X X X
A . . . . . X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X
A . . . . . X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X
A . . . . . X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X
B . . . X X X . . . X X X X X X . . . X X X . . . X X X X X X X X X . . . X X X X X X X X
B . . . X X X . . . X X X X X X . . . X X X . . . X X X X X X X X X . . . X X X X X X X X
B . . . X X X . . . X X X X X X . . . X X X . . . X X X X X X X X X . . . X X X X X X X X
C X X X . . . X X X . . . X X X X X X . . . X X X . . . X X X . . . X X X X X X X X X X X
C X X X . . . X X X . . . X X X X X X . . . X X X . . . X X X . . . X X X X X X X X X X X
C X X X . . . X X X . . . X X X X X X . . . X X X . . . X X X . . . X X X X X X X X X X X
D X X X X X X . . . . . . X X X X X X X X X . . . . . . X X X X X X X X X X X . . . X X X
D X X X X X X . . . . . . X X X X X X X X X . . . . . . X X X X X X X X X X X . . . X X X
D X X X X X X . . . . . . X X X X X X X X X . . . . . . X X X X X X X X X X X . . . X X X
E . . . . . X X X X X X X X X . . . . . . X X X X X X X X X X X X X X X X X . . . X X X X X
E . . . . . X X X X X X X X X . . . . . . X X X X X X X X X X X X X X X X X . . . X X X X X
E . . . . . X X X X X X X X X . . . . . . X X X X X X X X X X X X X X X X X . . . X X X X X
F . . . . . X X X . . . X X X X X X . . . X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X
F . . . . . X X X . . . X X X X X X . . . X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X
F . . . . . X X X . . . X X X X X X . . . X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X
```

FIG. 5.3 – *Matrice de rigidité d'un solide représenté par 15 nœuds. Les 'X' correspondent aux éléments non-nuls, les '.' aux éléments nuls.*

Si l'on considère maintenant les nœuds 7 et 5, on voit que les éléments correspondant dans $[\boldsymbol{K}]$ sont nuls, donc on ne créera pas de liaison entre les nœuds 7 et 5.

Maintenant, dans le cas où la matrice de rigidité élémentaire contient des valeurs nulles et non-nulles, on crée malgré tout une liaison. C'est alors la valeur des éléments du tenseur associé à cette liaison qui décrira l'influence réelle entre les deux masses.

On voit déjà ici un premier avantage par rapport aux modèles masses/ressorts décrits au chapitre (4). La construction du graphe des liaisons tient compte des propriétés mécaniques du solide. Seul Joukhadar dans (Joukhadar, 1995) a construit un modèle prenant en compte de tels paramètres. Avec cette approche, on obtient uniquement le nombre de liaisons nécessaires à la "transmission" des contraintes dans le volume. Il est d'ailleurs envisageable de ne créer des liaisons que pour des valeurs de 'X' supérieures à un certain seuil. Nous n'avons pas mis en œuvre cette méthode mais elle est similaire, dans le principe, à celle décrite au paragraphe (3.3.5) du chapitre (3).

Au terme de cette étape, nous avons donc déterminé : les coordonnées des masses, les liaisons entre ces masses, l'ensemble des tétraèdres composant le solide et la triangulation de sa frontière. Nous définissons, de plus, une structure de donnée complémentaire permettant de connaître :

- l'indice des deux masses situées aux extrémités de chaque liaison,
- la référence du tétraèdre adjacent à un triangle,

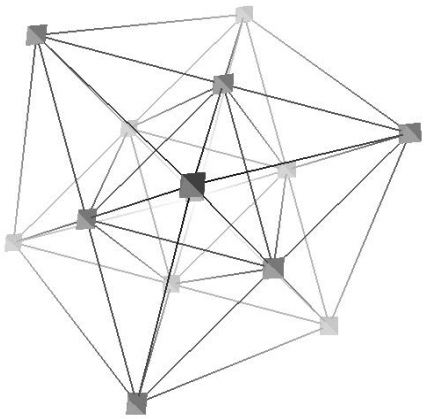


FIG. 5.4 – *Le cube généré à partir de la matrice de rigidité précédente comporte 59 liaisons, 15 masses, 24 triangles et 32 tétraèdres.*

- l'état d'un tétraèdre (actif ou inactif),
- l'état d'une liaison (active ou inactive).

Ces informations seront utiles pour la prise en compte des découpes aussi bien au niveau graphique que physique.

5.3.3 Topologie d'un maillage non-structuré

Si on considère les relations entre les divers éléments d'un maillage non-structuré composé de tétraèdres, alors la relation d'Euler-Poincaré s'écrit :

$$T + N - (A + \mathcal{T} + C) = 1 \tag{5.5}$$

où $\mathcal{T}$ est le nombre de tétraèdres, T le nombre de triangles, N le nombre de nœuds, A le nombre d'arêtes et C le nombre de trous (Duval, 1996).

- un triangle interne possède 2 tétraèdres adjacents
- un tétraèdre interne a 4 tétraèdres adjacents par ses 4 faces
- une face frontière possède un tétraèdre adjacent
- une arête frontière possède 2 faces frontières adjacentes (si la surface est fermée)
- une arête interne et un point ont des voisinages variables.

On peut déduire de ces relations la connexité minimale autour d'un nœud d'un maillage tétraédrique. C'est un point important pour garantir que, lors d'une déformation, il n'y ait pas plusieurs positions d'équilibre possibles pour certaines masses. Ce phénomène, qui n'apparaît pas avec une formulation implicite - telle que celle décrite dans le chapitre (2) - peut se produire avec une méthode itérative (méthode explicite).

Pour contraindre la position d'une masse en 3D, il faut au moins quatre liaisons, non parallèles deux à deux. C'est une condition minimale à respecter pour éviter plusieurs positions

d'équilibre pour les masses du système. Supposons que trois masses du maillage soient fixées pour éviter un mouvement rigide du solide, alors il est nécessaire d'avoir $A \geq 4(N-3)$. Si l'on considère alors simplement la relation entre le nombre d'arêtes A et de sommets N d'une triangulation, on a la relation suivante (Delingette, 1994a) :

$$N(1 - \frac{\hat{T}}{6}) = 2(1-g)$$

où $\hat{T}$ est le nombre moyen de triangles (de la frontière) adjacents à un sommet de la frontière. Ce nombre est très proche de 6; il est inférieur, égal ou supérieur à 6 selon le genre g du maillage. On en déduit que le nombre moyen de sommets adjacents à un nœud, sur la surface, est de 6. Pour les nœuds internes, nous savons qu'un tétraèdre interne a 4 tétraèdres adjacents par ses 4 faces. Ceci implique également un nombre moyen de 6 sommets adjacents à un nœud. Comme les nœuds sont reliés entre eux par une arête, on vérifie bien que $A \geq 4(N-3)$. En fait on a même, $A \simeq 6N$.

On peut donc considérer qu'une décomposition du volume en tétraèdres garantit, en général, que les masses ne peuvent pas adopter plusieurs positions d'équilibre.

5.4 Calcul des tenseurs de forces

L'expression de la force interne (équation 5.4) remplaçant la force de rappel du ressort nécessite le calcul des matrices $[\boldsymbol{T}]_{3\times3}$. Ce calcul reprend des éléments et procédures de calcul présentés au chapitre (2), en particulier le calcul de la matrice de rigidité élémentaire associée à un élément.

5.4.1 Calcul de la matrice de rigidité élémentaire

Le calcul de la matrice de rigidité élémentaire est le même que celui décrit dans la méthode d'éléments finis du chapitre (2). Rappelons simplement qu'une matrice de rigidité élémentaire $[\boldsymbol{K^e}]$ est associée à chaque élément fini T et que la matrice de rigidité globale étant obtenue en sommant la contribution de chaque tétraèdre décrivant le solide.

L'expression de la matrice de rigidité élémentaire, pour un tétraèdre, s'écrit comme suit :

$$[\boldsymbol{K^e}] = Volume(T)[\boldsymbol{\Gamma_T}]^t[\boldsymbol{E_T}][\boldsymbol{\Gamma_T}] \tag{5.6}$$

avec :

$$[\boldsymbol{E_T}] = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & \mu & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & \mu & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & \lambda+2\mu \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé.
et :

$$[\boldsymbol{\Gamma_T}]^t = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} \end{array}\right] \tag{5.8}$$

où les α_{ji} sont les premières dérivées partielles des coordonnées barycentriques $\lambda_j(x)$ d'un point x situé dans le tétraèdre T :

$$\frac{\partial \lambda_j(x)}{\partial x_i} = \alpha_{ji}\ ,\ i = 1,2,3\ ;\ j = 1,2,3,4 \tag{5.9}$$

Après avoir déterminé la matrice de rigidité associée à chaque tétraèdre, on va associer à un sommet du maillage - ou à une liaison -, un *tenseur de forces* permettant de calculer la force exercée en un nœud en fonction du déplacement de ce nœud ou de ceux qui lui sont connectés.

5.4.2 Calcul du tenseur associé à une liaison ou à un nœud

D'après l'expression (5.4) des forces internes, il est nécessaire d'évaluer deux types de tenseurs. Le premier est associé à une masse et le second à une liaison. Le tenseur de déformation associé à un nœud (resp. une liaison) est alors défini comme la somme des contributions de chaque tétraèdre ayant en commun ce nœud (resp. cette liaison).

Le calcul du tenseur $[\boldsymbol{T_{ii}}]$ associé à une masse m_i est donné par l'équation (5.10) :

$$\begin{cases} T_{k,l} \Leftarrow T_{k,l} + \sum_{i=1}^{4} K^e_{s_i+4k,s_i+4l} \ ; \ k = 1,2,3 \ ; \ l = 1,2,3 \\ s_i = local(m_i) \end{cases} \tag{5.10}$$

où $[\boldsymbol{K^e}]$ est la matrice de rigidité élémentaire associée au tétraèdre T et s_i est l'indice local du nœud. *local* est une fonction de transfert affectant un indice "local" - c'est-à-dire une valeur entre 1 et 4 correspondant à l'un des sommets de T - à la masse m_i.

Pour le calcul du tenseur $[\boldsymbol{T_{ij}}]$ associé à une liaison, il faut d'abord déterminer l'ensemble des tétraèdres ayant cette liaison en commun (cf. l'algorithme A.1, annexe A). Soient m_i et m_j les masses situées à chaque extrémité de la liaison.

$$\begin{cases} T_{k,l} \Leftarrow T_{k,l} + \sum_{i,j=1}^{4} K^e_{s_i+4k,s_j+4l} \ ; \ k = 1,2,3 \ ; \ l = 1,2,3 \\ s_i = local(m_i) \\ s_j = local(m_j) \end{cases} \tag{5.11}$$

En raison de la symétrie de la matrice de rigidité globale, il est possible de n'associer qu'un seul tenseur de force par liaison, le second étant le transposé du premier. Ainsi, si l_{ij} est la liaison définie entre les masses i et j, le tenseur associé à cette liaison sera $[\boldsymbol{T_{ij}}]$ si $i > j$ et $[\boldsymbol{T_{ij}}]^T$ si $i < j$.

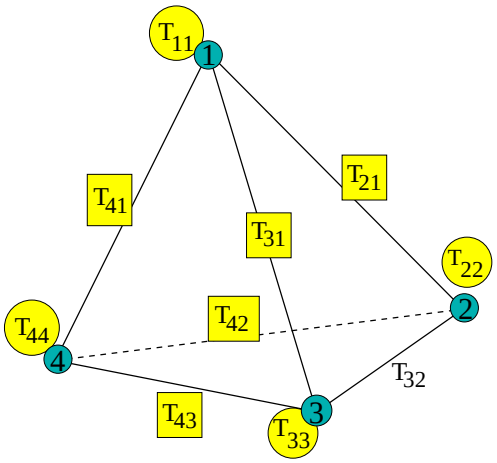


FIG. 5.5 – *La structure de données, associée à chaque nœud et à chaque liaison, contient en particulier les différents tenseurs permettant le calcul des forces internes. Les propriétés de symétrie permettent de ne stocker qu'une seule matrice par liaison.*

5.4.3 Calcul des forces de liaison

Pour le calcul des forces appliquées en un nœud, on considère le déplacement de ce nœud et des nœuds qui lui sont connectés par rapport à leur position initiale (que l'on suppose être la position à l'équilibre). Ce principe est conforme à la relation $[\boldsymbol{K}]\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ de l'élasticité linéaire,

où $\boldsymbol{u}$ représente un champ de déplacement. La force appliquée au nœud i est donc :

$$\begin{cases} F_i = F_{ii} + F_{ij} = [\boldsymbol{T_{ii}}]\Delta x_i + \sum_j [\boldsymbol{T'_{ij}}]\Delta x_j \\ \Delta x_i = x_i(t) - x_i(t_0) \\ \Delta x_j = x_j(t) - x_j(t_0) \end{cases} \tag{5.12}$$

avec :

$$\begin{cases} [\boldsymbol{T'_{ij}}] = [\boldsymbol{T_{ij}}] \text{ si } i > j \\ \\ [\boldsymbol{T'_{ij}}] = [\boldsymbol{T^T_{ij}}] \text{ si } i < j \end{cases} \tag{5.13}$$

5.4.4 Force de tension superficielle

Afin de simuler une tension de surface dans le modèle, il est possible, comme nous l'avons suggéré précédemment, de combiner les forces de liaison surfaciques et volumiques avec des forces internes supplémentaires, définies uniquement entre les masses situées sur la surface de l'objet.

De telles forces peuvent être utiles, par exemple, pour amplifier l'effet ressenti lors de la découpe. La relation suivante est simplement donnée à titre d'exemple, afin de montrer que ce modèle reste aussi général qu'une formulation masses/ressorts classique.

La force $\boldsymbol{F_i^{int}}$, appliquée à la masse i, s'écrit :

$$\boldsymbol{F_i^{int}} = [\boldsymbol{T_{ii}}]\,\Delta x_i + \sum_{j\in\mathcal{V}} [\boldsymbol{T_{ij}}]\,\Delta x_j + \boldsymbol{F_i^{tension}}$$

avec :

$$\begin{cases} \boldsymbol{F_i^{tension}} = \sum_{(i,j)\in\mathcal{V}} \{-k^s_{(i,j)}(l(t) - \alpha_0)\frac{\boldsymbol{l_{ij}}}{l(t)} + k^d_{(i,j)}(\frac{\partial l}{\partial t})\frac{\boldsymbol{l_{ij}}}{l(t)}\} \text{ si } i \text{ et } j \text{ sont sur la surface} \\ \boldsymbol{F_i^{tension}} = 0 \text{ sinon} \end{cases} \tag{5.14}$$

où $\alpha_0 < l_0$, et l_0 est la longueur à vide du ressort.

5.4.5 Bilan des forces

Comme dans les modèles masses/ressorts, il est possible de soumettre le modèle à l'action d'un ensemble de forces extérieures, en particulier la gravité et les forces d'interaction. Le calcul de la déformation est alors basé sur le rapport entre l'accélération de chaque masse et le bilan des forces internes et externes qui lui sont appliquées.

5.5 Conditions aux limites

Supposons le maillage composé de n nœuds avec 3 degrés de liberté par nœud. On a donc $3n$ degrés de liberté pour le système. Pour supprimer une transformation rigide lors de la déformation, il suffit donc de fixer 3 nœuds, sans quoi le solide déformable serait animé d'un mouvement de translation ou de rotation lors des interactions.

Il est bien sûr possible de fixer un plus grand nombre de nœuds. Comme nous l'avons mentionné précédemment (chapitre 1), la déformation d'un objet dépend autant des conditions aux limites que de ses paramètres d'élasticité. La prise en compte des conditions aux limites de type "déplacement nul" est beaucoup plus simple que dans une méthode implicite. En pratique, les masses définies comme des conditions aux limites vont rester fixes lors de la déformation en ne les faisant plus intervenir dans le bilan des forces ni le calcul de l'accélération.

Il est également possible de définir des "forces d'attachement" c'est-à-dire des liaisons entre certaines masses et des points fixes définis en dehors de l'objet. Nous définissons ces conditions aux limites comme une force de rappel de ressort amorti avec une extrémité du ressort fixe. Ces conditions s'apparentent aux conditions aux limites introduites au chapitre (3). Comme il n'y a plus de pré-calculs, il n'est pas nécessaire de linéariser la force de rappel.

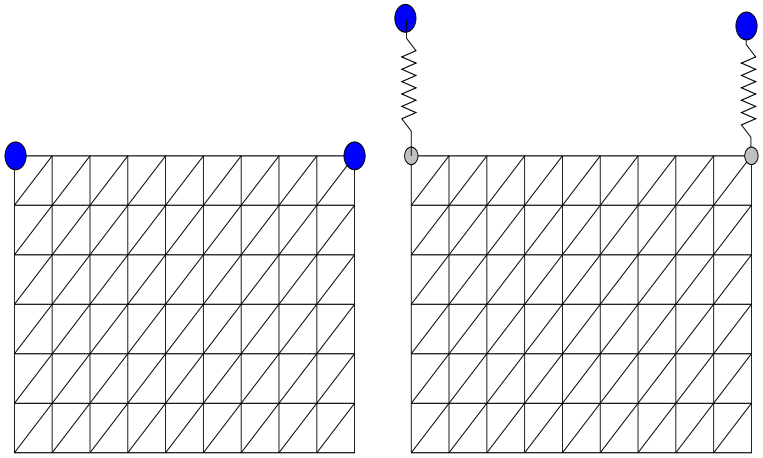


FIG. 5.6 – *Différents types de conditions aux limites peuvent être définis sur les modèles masses/tenseurs. Nous représentons ici deux exemples caractéristiques : à gauche, les masses • sont fixes. À droites, deux masses du maillage sont reliées à un ressort dont l'extrémité • est fixe.*

Cette contrainte est introduite pour les mêmes raisons que dans le chapitre (3), c'est-à-dire pour représenter des contraintes anatomiques telles que les attachements ligamentaires, dont le rôle est important dans le calcul des déformations en simulation de chirurgie.

5.6 Intégration numérique

Après avoir mis en œuvre différents algorithmes d'intégration, il nous est apparu très nettement que la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 offre de meilleurs résultats que la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 ou la méthode d'Euler, pourtant très souvent utilisée (Miller, 1988; Provot, 1995; Meseure et C., 1996). Bien qu'à première vue la méthode de Runge-Kutta d'ordre

4 semble plus coûteuse en temps de calcul, elle s'avère en fait plus performante que les autres méthodes. En effet, comme elle est beaucoup plus stable numériquement que la méthode d'Euler, on peut utiliser des pas de temps plus élevés et ainsi avoir globalement un gain de temps relativement important.

5.6.1 Méthode d'Euler

La méthode d'Euler est la méthode la plus couramment employée dans les modèles masses/ressorts. Étant donnée l'équation différentielle $\frac{dx}{dt} = f(x,t)$ avec, comme condition initiale, $x = x_0$ à l'instant $t = 0$, on choisit un pas de temps Δt tel que $t_i = i\Delta t$, i=0,1,2... Alors, la connaissance de $x_i = x(t_i)$ permet de calculer x_{i+1} par :

$$x_{i+1} = x_i + \Delta_t f(x_i, t_i)$$

Cette méthode est la plus simple à mettre en œuvre et la plus rapide à calculer : 2 additions, 2 multiplications et 1 évaluation des forces sont nécessaires pour obtenir la position d'un nœud et sa vitesse (à l'instant $t + \Delta t$) à partir de son accélération (à l'instant t). C'est, par contre, la méthode la moins précise numériquement. D'après les relations précédentes, on peut déterminer la vitesse et la position d'une masse à l'instant $t_{i+1} = t + \Delta t$ par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} v_{i+1} & = & v_i + \Delta t\, a_i \\ P_{i+1} & = & P_i + \Delta t\, v_i \end{array} \right. \tag{5.15}$$

5.6.2 Formule de Runge-Kutta d'ordre 4

C'est la formulation la plus "classique" des méthodes de Runge-Kutta. La formulation générale est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \delta x_1 & = & \Delta t f(x_i, t_i) \\ \delta x_2 & = & \Delta t f(x_i + \frac{1}{2}\delta x_1, t_i + \frac{1}{2}\Delta t) \\ \delta x_3 & = & \Delta t f(x_i + \frac{1}{2}\delta x_2, t_i + \frac{1}{2}\Delta t) \\ \delta x_4 & = & \Delta t f(x_i + \delta x_3, t_i + \Delta t) \\ x_{i+1} & = & x_i + \frac{1}{6}\delta x_1 + \frac{1}{3}\delta x_2 + \frac{1}{3}\delta x_3 + \frac{1}{6}\delta x_4 \end{array} \right. \tag{5.16}$$

Le calcul de la vitesse $v(t + \Delta t) = v_{i+1}$ et de la position $P(t + \Delta t) = P_{i+1}$ se déduit de l'accélération par les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \delta v_1 & = & \Delta t\, a_i \\ \delta P_1 & = & \Delta t\, v_i \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \delta v_2 & = & \Delta t\, a'_i \\ \delta P_2 & = & \Delta t\, v'_i \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \delta v_3 &= \Delta t\, a_i'' \\ \delta P_3 &= \Delta t\, v_i'' \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta v_4 &= \Delta t\, a_i''' \\ \delta P_4 &= \Delta t\, v_i''' \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{i+1} &= v_i + \frac{1}{6}\delta v_1 + \frac{1}{3}\delta v_2 + \frac{1}{3}\delta v_3 + \frac{1}{6}\delta v_4 \\ P_{i+1} &= P_i + \frac{1}{6}\delta P_1 + \frac{1}{3}\delta P_2 + \frac{1}{3}\delta P_3 + \frac{1}{6}\delta P_4 \end{cases} \tag{5.17}$$

où a_i' est l'accélération calculée à partir de la position "intermédiaire" δP_1, a_i'' est l'accélération calculée à partir de la position δP_2 et a_i''' est l'accélération calculée à partir de la position δP_3. On peut remarquer que la première ligne ($\delta v_1 = \Delta t\, a_i$) correspond à la méthode d'Euler. Dans cette méthode, il est nécessaire d'évaluer *4 fois* les forces externes et internes en chaque nœud. Selon le type de forces, cela peut s'avérer relativement coûteux en temps de calcul. En pratique, comme nous utilisons des forces dont l'évaluation est assez simple, on obtient un gain de temps important dans la boucle d'animation grâce à l'augmentation du pas de temps comme l'illustre le tableau (4.1) du chapitre (4). Le nombre d'opérations est de : 8 additions, 8 multiplications, 8 divisions et 4 évaluations des forces.

5.6.3 Formule de Runge-Kutta d'ordre 2

Cette formule d'intégration est plus simple que la précédente et présente l'avantage de n'être pas trop coûteuse en calculs tout en étant plus précise que la méthode d'Euler. Le nombre d'opérations élémentaires pour déterminer la position et la vitesse (à l'instant $t + \Delta t$) à partir de l'accélération (à l'instant t) est de : 4 additions, 4 multiplications, 4 divisions et 2 évaluations des forces.

$$\begin{cases} \delta x_1 &= \Delta t f(x_i, t_i) \\ \delta x_2 &= \Delta t f(x_i + \frac{1}{2}\delta x_1, t_i + \frac{1}{2}\Delta t) \\ x_{i+1} &= x_i + \frac{1}{6}\delta x_1 + \frac{1}{2}\delta x_2 \end{cases} \tag{5.18}$$

Il est donc nécessaire d'évaluer *2 fois* l'accélération a (c'est-à-dire l'ensemble des forces externes et internes) pour calculer la vitesse v. Idem avec v pour calculer la nouvelle position P.

	Opérations élémentaires	Évaluation des forces
Méthode d'Euler	2 add. + 2 mult./div.	1
Méthode de Runge-Kutta d'ordre 2	4 add. + 8 mult./div.	2
Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4	8 add. + 16 mult./div.	4

TAB. 5.1 – *Nombre d'opérations nécessaires pour calculer la position à partir de l'accélération dans les méthodes d'intégration d'Euler, Runge-Kutta d'ordre 2 et Runge-Kutta d'ordre 4.*

5.7 Découpes, déchirements, fractures

Si nous avons développé les modèles masses/tenseurs, c'est avant tout dans le but de simuler le comportement de tissus mous lors d'incisions ou de déchirements pouvant intervenir au cours d'une opération chirurgicale. Il existe deux principaux moyens de simuler l'action d'un instrument chirurgical sur les tissus mous. Afin de simuler une incision réalisée à l'aide d'un scalpel, comme c'est le cas en chirurgie ouverte, il est nécessaire de supprimer chaque liaison située sur le trajet de l'instrument (cf. figure 5.7). Dans le cas de la chirurgie laparoscopique, on utilise plutôt un bistouri électrique dont l'action peut être simulée par la suppression d'un élément de volume situé dans la zone d'action de l'instrument.

5.7.1 Découpe par subdivision de liaisons

La représentation d'une incision par modification des liaisons définies entre les masses du modèle peut être assez réaliste si l'on s'intéresse à l'action d'un scalpel sur un organe. La mise en œuvre est, par contre, assez complexe, surtout lorsque l'on considère un maillage volumique. Comme l'illustre la figure (5.7), il est nécessaire de réaliser de nombreuses modifications pour prendre en compte les changements de topologie :

- subdivision de la liaison intersectée par la ligne de coupe. La liaison est divisée en deux.
- ajout de nœuds aux nouvelles extrémités des liaisons ainsi créées. Ces nœuds possédant en théorie une masse non-nulle, la masse totale de l'objet va donc tendre à augmenter, entraînant éventuellement un changement du comportement du modèle déformable. Il est donc nécessaire de modifier la masse des autres nœuds afin de ne pas augmenter la masse totale de l'objet.
- de nouvelles liaisons doivent être créées afin de relier les nouveaux nœuds à d'autres masses. Ces liaisons supplémentaires sont nécessaires pour éviter que les masses puissent adopter plusieurs positions d'équilibre.
- ces modifications doivent être réalisées aussi au niveau des nœuds et liaisons internes, puisque l'on considère un maillage volumique.

5.7.2 Découpe par suppression d'éléments

Dans (Norton et al., 1991), les auteurs décrivent un solide déformable comme un assemblage de cellules. Une fracture est alors représentée par la suppression d'un ensemble de cellules dont les liaisons vérifient certaines propriétés. Cette solution peut être également retenue pour la simulation de découpe, pour les raisons suivantes.

La découpe par suppression d'éléments est plus réaliste vis à vis du type d'opération que nous voulons simuler. En chirurgie laparoscopique, les instruments permettant de réaliser des incisions sont de deux types : bistouri électrique et pinces coupantes. Les pinces coupantes sont d'une utilisation moins locale que le bistouri électrique. Elles peuvent être utilisées, par

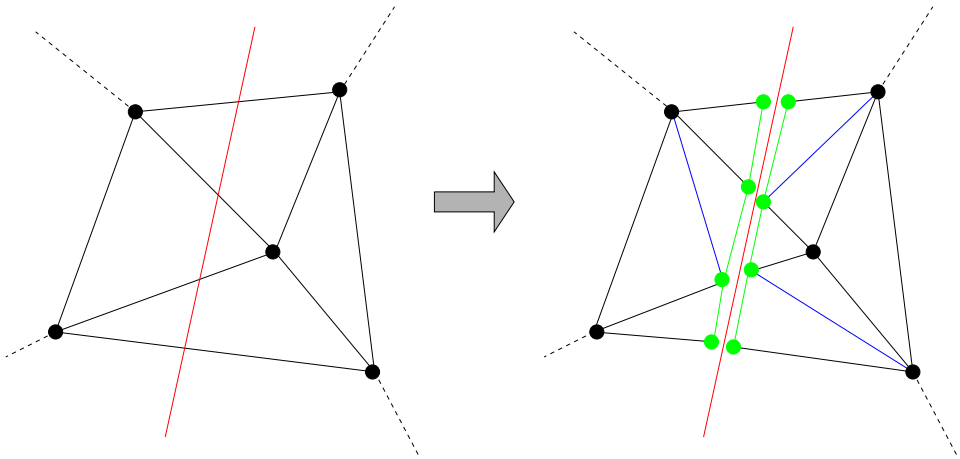


FIG. 5.7 – *Modification de la topologie du maillage pour la représentation de découpes précises. Le long de la ligne de coupe, il est nécessaire de subdiviser les liaisons, d'ajouter de nouvelles masses, puis de modifier la triangulation/tétraédrisation afin de conserver des éléments triangulaires/tétraédriques.*

exemple, pour sectionner une petite partie d'un lobe hépatique ou, lors d'une cholécystectomie[2], pour couper le canal biliaire. De son côté, le bistouri électrique a une action beaucoup plus locale, variant selon la pression exercée sur les tissus mous. Ainsi, une faible pression rend possible la cautérisation d'une plaie, alors qu'en exerçant une pression plus importante, les cellules hépatiques situées dans la périphérie de l'instrument vont être détruites. Il est donc plus intéressant, pour l'entraînement au geste opératoire, de simuler l'action du bistouri électrique, dont la manipulation nécessite une plus grande maîtrise. On peut également supposer, en se plaçant à une échelle assez grande, que la suppression d'éléments tétraédriques dans le maillage donne un effet similaire à la destruction de cellules hépatiques. De plus, en ce qui concerne la mise en œuvre, il est plus facile de représenter des découpes par suppression d'éléments tétraédriques que par modification de liaisons, puisqu'on évite ainsi une subdivision locale du maillage.

En dehors de la représentation des découpes, il est important de garantir un comportement déformable correct, même après suppression d'un nombre élevé d'éléments de volume dans le maillage. Ainsi, Norton *et al.* (Norton et al., 1991) suppriment simplement les ressorts et les masses appartenant à une cellule, sans modifier la raideur des ressorts voisins. Ceci peut entraîner un manque de réalisme dans le comportement. Comme nous l'avons mentionné précédemment, le comportement déformable d'un modèle masses/ressorts est fortement lié à la topologie du maillage, contrairement à une méthode par éléments finis. Une modification du maillage, à la suite d'une incision ou d'une fracture, entraîne alors également un changement de comportement. Considérons, par exemple, les ressorts définis entre les masses d'une face commune à deux cellules (cf. figure 5.8). Si l'on supprime une de ces deux cellules, les raideurs de ces ressorts devraient, intuitivement, être modifiées afin de prendre en compte la suppression de cette cellule.

Le comportement d'un modèle continu volumique tel que notre modèle masses/tenseurs

2. Ablation de la vésicule biliaire.

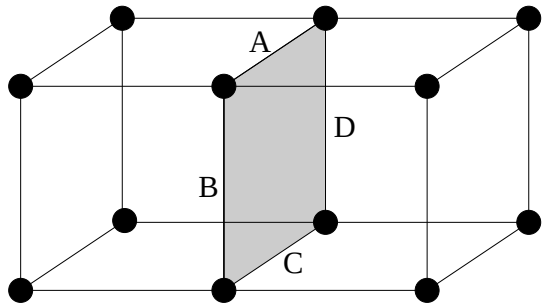


FIG. 5.8 – *La suppression d'une des deux cellules de ce modèle masses/ressorts devrait entraîner une modification de la raideur des ressorts A, B, C et D afin de prendre en compte, dans la déformation, ce changement de topologie du maillage.*

permet de mieux prendre en compte la suppression d'un élément au niveau du calcul de la déformation. Ainsi, lorsqu'un tétraèdre est supprimé, sa contribution dans la matrice de rigidité globale peut être supprimée, afin d'avoir une déformation cohérente avec le nouveau maillage obtenu. Cette contribution est représentée par la matrice de rigidité élémentaire $[\boldsymbol{K^e}]$ associée au tétraèdre T. Ceci implique que les tenseurs de force, utilisés dans le modèle masses/tenseurs, doivent être mis à jour. La figure (5.9) illustre le lien entrer la suppression d'un tétraèdre et la modification de la valeur des tenseurs dépendant de cet élément. On retrouve donc le même raisonnement que précédemment - pour la suppression d'une cellule dans un modèle masses/ressorts - mais dans ce cas on garantit que la déformation, après découpe, reste physiquement réaliste, au sens de la mécanique des milieux continus. Les déformations calculées restent ainsi cohérentes avec la structure du maillage. Si l'on suppose qu'à l'instant t_0 un maillage $\mathcal{M}_0$ est soumis à un champ de forces, avec un ensemble de conditions aux limites et qu'à l'instant t, on supprime un ensemble de tétraèdres, alors la nouvelle configuration déformée $\mathcal{M}_t$ va prendre en compte cette suppression. La déformation obtenue est alors identique à celle que l'on aurait obtenue en considérant comme solide de référence le maillage $\mathcal{M}_t$, en le soumettant aux mêmes forces et conditions aux limites.

Le tenseur de force associé à la masse m_i, lorsqu'un tétraèdre adjacent à m_i est supprimé, s'écrit :

$$\begin{cases} T_{k,l} \Leftarrow T_{k,l} - \sum_{i,j=1}^{4} K^e_{s_i+4k,s_i+4l} \\ s_i = local(m_i) \end{cases} \tag{5.19}$$

où $[\boldsymbol{K^e}]$ est la matrice de rigidité élémentaire associée au tétraèdre T et s_i est l'indice "local" du nœud dans T.

De même que pour le calcul du tenseur associé à une liaison entre les masses m_i et m_j, il faut d'abord déterminer quelles sont les liaisons adjacentes à un tétraèdre (cf. l'algorithme A.4, annexe A) avant de la soustraire au tenseur associé.

$$\begin{cases} T_{k,l} \Leftarrow T_{k,l} - \sum_{i,j=1}^{4} K^e_{s_i+4k,s_j+4l} \;\; k=1,2,3 \; l=1,2,3 \\ s_i = local(m_i) \\ s_j = local(m_j) \end{cases} \tag{5.20}$$

Il est possible, lors de la découpe, que tous les tétraèdres adjacents à une masse soient supprimés. Dans ce cas, cette masse ne va plus avoir d'influence sur la déformation et est, par conséquent, supprimée (cf. figure 5.9). Cela peut avoir un impact non négligeable sur les temps de calcul lorsque de découpes faisant intervenir un nombre important d'éléments.

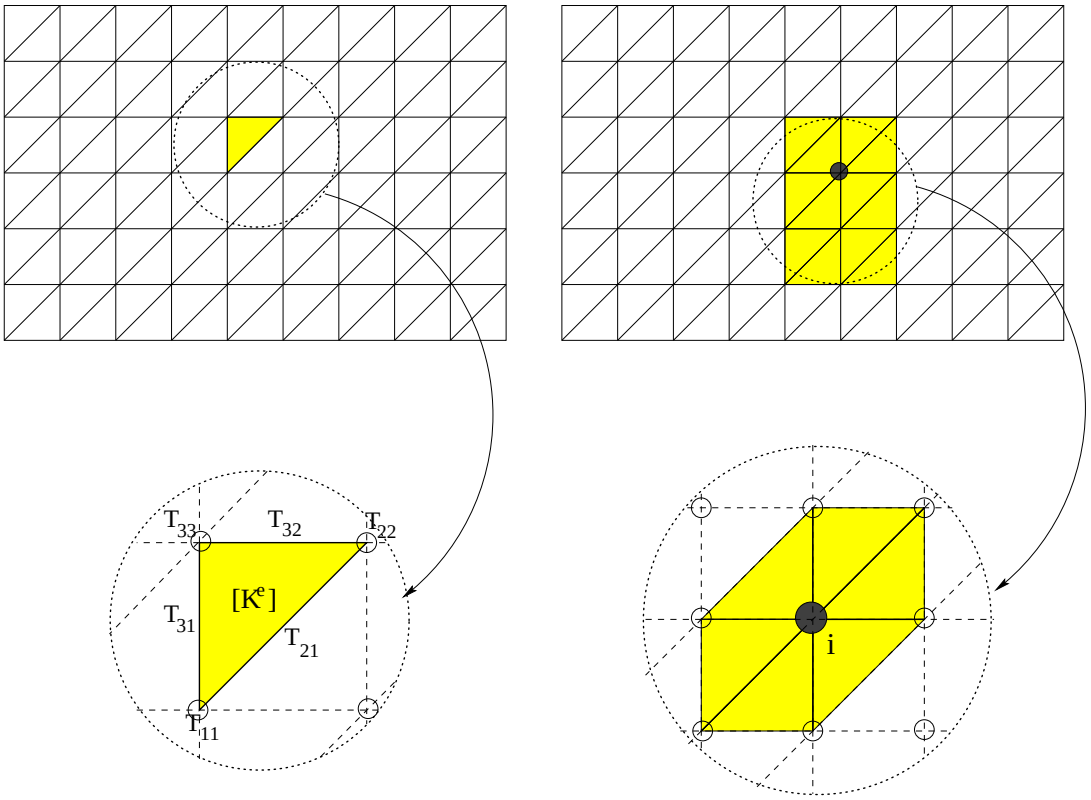


FIG. 5.9 – *Dans ce schéma, nous représentons uniquement la triangulation de la surface du maillage volumique. Il faut cependant considérer que les éléments sont des tétraèdres.* **À gauche**, *on a sélectionné puis supprimé un tétraèdre. En dehors des aspects graphiques, la suppression de cet élément entraîne une modification de la valeur des tenseurs* $T_{11}, T_{22}, T_{33}, T_{44}, T_{21}, T_{31}, T_{32}, T_{41}, T_{42}, T_{43}$ *définis sur cet élément.* **À droite**, *on a continué à supprimer d'autres éléments et en particulier tous les éléments adjacents au nœud* i*. La suppression de ces tétraèdres induit l'annulation des tenseurs associés au nœud* i *et aux liaisons partant de ce nœud. À partir de cet instant, la masse* i *n'interagit plus avec les autres masses et est donc supprimée.*

5.7.3 Fracture, déchirement de tissus mous

La fracture est un phénomène physique étudié en mécanique de structures, pour déterminer la résistance de divers matériaux sous certaines contraintes. Nous avons assimilé le déchirement de tissus mous à ce phénomène tout en simplifiant sensiblement le problème. Nous considérons

que le déchirement de tissus mous n'est qu'un cas particulier de la simulation de découpes, dans lequel la suppression d'un ensemble de tétraèdres est le résultat de contraintes internes au solide déformable plutôt que de l'action d'un instrument sur la surface.

Nous avons utilisé différents critères pour déterminer quels éléments du maillage doivent être supprimés au cours de la déformation. Ces critères peuvent s'appliquer sur la totalité du maillage, ou sur une partie seulement, et peuvent être une fonction des caractéristiques élastiques du matériau. En effet, les modèles masses/tenseurs étant basés sur la théorie de l'élasticité linéaire, il est possible, comme nous l'avons fait au chapitre (3), d'introduire une loi de comportement non-homogène. La résistance au déchirement des différents tissus peut alors être définie comme une fonction des coefficients élastiques. Les différents critères c_1, c_2, c_3introduits ci-dessous permettent de déterminer des variations caractéristiques de la forme d'un tétraèdre, pouvant induire une fracture. Ce critère est dépendant intrinsèquement des caractéristiques élastiques du tétraèdre considéré. La déformation de cet élément sera plus faible pour une valeur élevée de la rigidité, et par conséquent le critère ne sera vérifié que pour des contraintes très élevées. À l'opposé, un tétraèdre moins rigide a une probabilité plus élevée d'être le lieu d'une fracture.

1. variation de volume des tétraèdres : $c_1 = \dfrac{V - V_0}{V_0}$. Dans certaines conditions, le tétraèdre peut se déformer de façon importante sans entraîner une variation suffisante du volume pour que le volume dépasse le seuil critique.
2. variation de longueur des 6 liaisons d'un tétraèdre : $c_2 = \dfrac{l^k - l_0^k}{l_0^k}$ pour $k = 1, .., 6$. On décide de supprimer un tétraèdre si au moins 3 des 6 arêtes du tétraèdre dépassent leur seuil de rupture. Cette solution est coûteuse en temps de calcul mais est plus discriminante que le premier critère.
3. variation de longueur d'une liaison quelconque : $c_3 = \dfrac{l - l_0}{l_0}$. Dans ce cas on supprime tous les tétraèdres adjacents à cette liaison. Cette solution est moins coûteuse en temps de calcul que la précédente mais entraîne la suppression des tétraèdres par groupes.

5.8 Résultats

Nous présentons, dans cette section, quelques résultats obtenus avec des modèles masses/tenseurs. Ces résultats permettent, d'une part, de comparer le réalisme des déformations de ce modèle avec un modèle éléments finis, et d'autre part, d'étudier les fréquences de calcul afin de déterminer la taille des maillages permettant des interactions en temps-réel, avec ou sans retour d'efforts. Enfin, nous présentons des simulations de découpes et déchirements de tissus mous.

5.8.1 Déformations

L'exemple (5.10) permet d'illustrer le comportement global d'un modèle masses/tenseurs, aussi bien au niveau des déformations interactives que lors d'une découpe. Le maillage de cet

objet comporte 3689 liaisons, 760 masses, 2212 tétraèdres et 1436 triangles. Malgré le nombre élevé de masses et de liaisons, nous avons obtenu des temps de calcul de l'ordre de 15 ms pour une itération de la boucle d'animation[3]. Le temps nécessaire à l'affichage graphique n'est pas pris en compte.

Les résultats exposés dans les figures (5.11) et (5.12) permettent de comparer la déformation obtenue avec le modèle masses/tenseurs avec celle obtenue avec le même maillage, mais en utilisant une résolution implicite comme décrit dans le chapitre (2). Les deux déformations suivent donc les équations de l'élasticité linéaire. Dans le premier cas, la déformation est dynamique, la méthode de résolution explicite. Dans le second cas, on considère une loi d'évolution quasi statique. Cependant, la déformation finale, sous les mêmes conditions aux limites et de forces, doit être la même dans les deux cas.

L'exemple (5.11) permet également de se rendre compte du faible nombre d'itérations nécessaire à l'obtention d'une position d'équilibre. En effet, la méthode de résolution explicite entraîne toujours un phénomène de "propagation" de la déformation dans le modèle. Dans les modèles masses/ressorts, le nombre de liaisons étant souvent sur-dimensionné afin d'éviter des problèmes d'instabilité numérique, cet effet est en général amplifié. Dans le modèle masses/tenseurs, la définition du graphe des liaisons à partir de la matrice de rigidité permet de réduire le nombre de liaisons et, par conséquent, de limiter, sans toutefois le supprimer, ce phénomène.

5.8.2 Découpe par suppression d'éléments

Nous avons insisté, dans la section (5.7), sur l'importance d'un calcul correct de la déformation lors de la simulation d'incisions ou de fractures. L'exemple de la figure (5.13) permet de comparer la déformation d'un maillage masses/tenseurs, après découpe, avec la déformée d'un modèle élastique linéaire calculée par une méthode d'éléments finis pour lequel le maillage initial est identique à celui issu de la découpe. Les résultats montrent que les déformations sont tout à fait similaires.

Les figures (5.14), (5.15) et (5.16) permettent d'illustrer la variation d'intensité de la force en un nœud de la surface du modèle au fur et à mesure de la suppression des éléments. Ce point est important en simulation car, en dehors de l'aspect visuel, les forces ressenties lors des découpes peuvent être une information importante pour guider le chirurgien.

5.8.3 Fracture / déchirement

Les exemples (5.17) et (5.18) illustrent quelques étapes d'une simulation de fracture, induite par une déformation du solide. Lorsque le seuil de fracture est dépassé, les tétraèdres les plus déformés - au sens de l'un des critères proposés à la section (5.7) - sont supprimés. Si la déformation se poursuit, d'autres tétraèdres sont supprimés, jusqu'à obtention d'une position

3. Sur une station de travail *Dec Alpha Station 233 Mhz.*

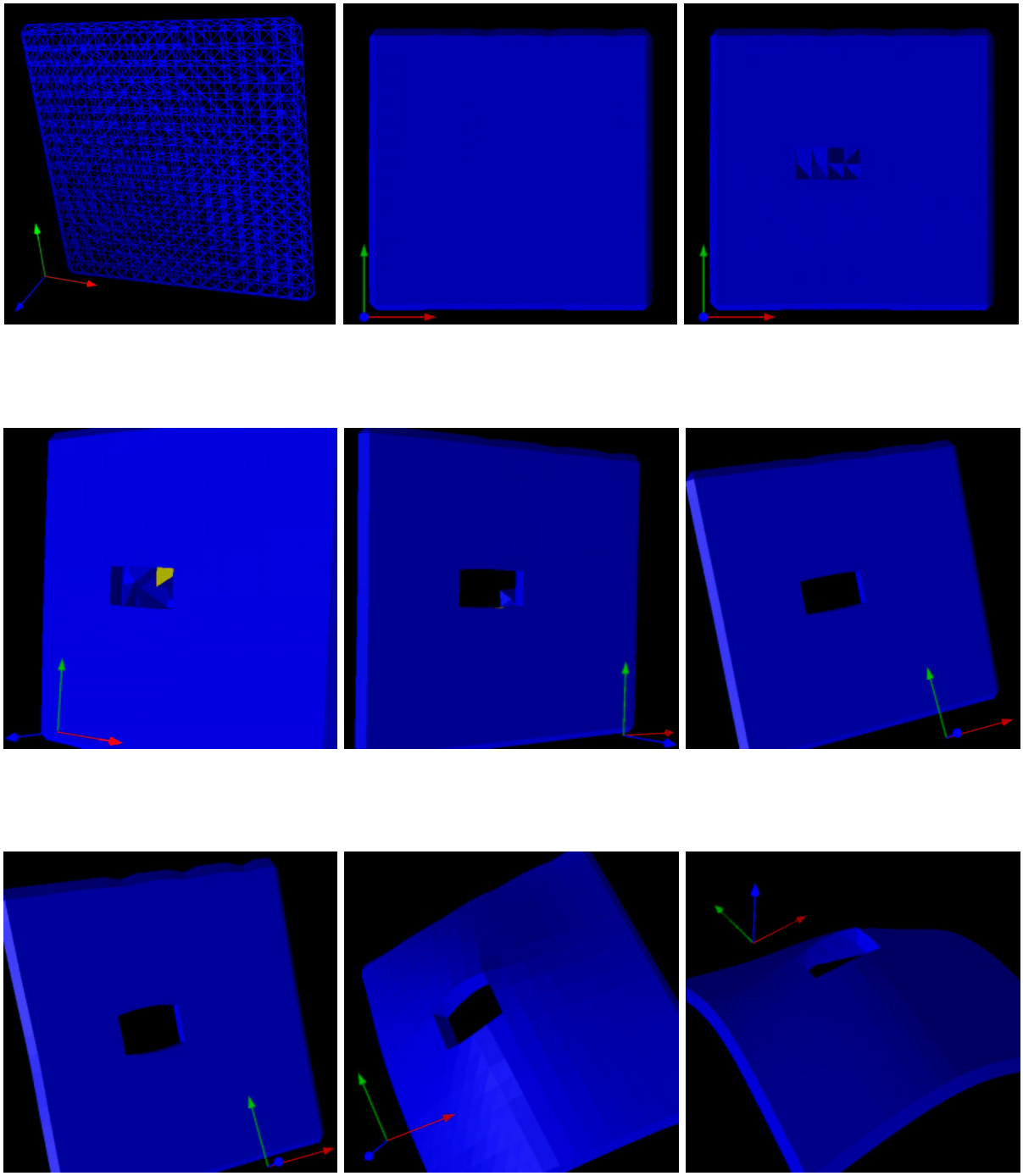


FIG. 5.10 – **En haut, à gauche** *: le modèle représenté en fil de fer permet de se rendre compte de la complexité du graphe des liaisons.* **En haut, au milieu** *: le modèle est soumis à une force de gravité et une partie des nœuds de l'arête supérieure du maillage sont fixés. On crée ainsi une tension entre les masses.* **En haut, à droite** *: on commence à supprimer certains tétraèdres. Les images suivantes représentent l'évolution du maillage au fur et à mesure de la découpe puis lors d'interactions. La fréquence d'interaction, incluant l'affichage graphique, est de 40 Hz.*

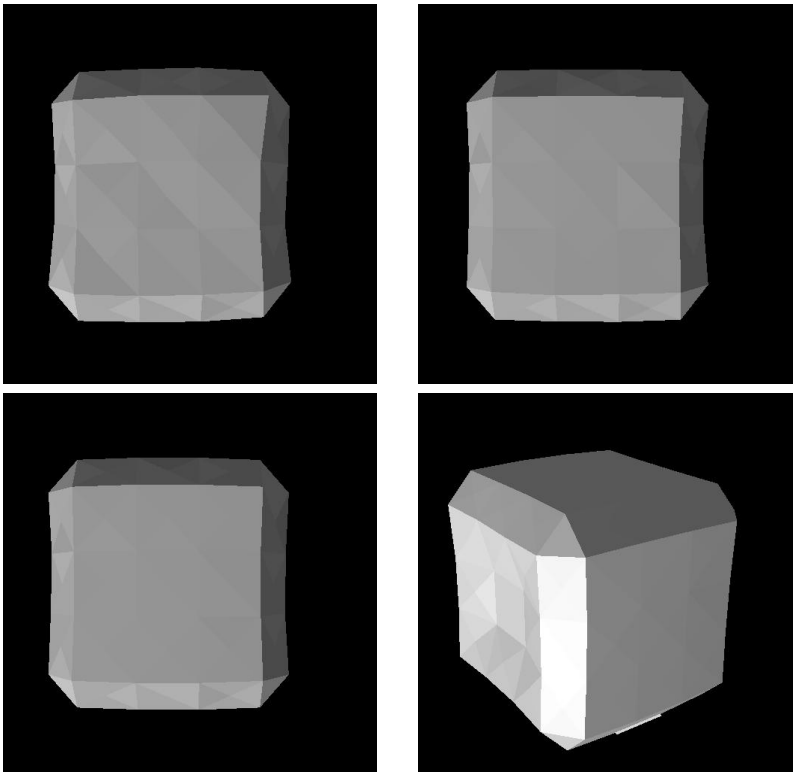


FIG. 5.11 – *Quelques étapes de la déformation d'un modèle masses/tenseurs. Un ensemble de conditions aux limites a été imposé : certains nœuds de la face gauche du cube sont fixés alors que des nœuds de la face de droite sont déplacés vers la gauche. L'équilibre est obtenu après une trentaine d'itérations.*

d'équilibre, sauf si le maillage vient à se séparer en deux comme c'est le cas dans la figure (5.17).

5.8.4 Visualisation et animation

La visualisation est un aspect primordial en simulation. En l'absence de retour d'effort, c'est le seul moyen d'immerger l'utilisateur dans le monde virtuel. Plusieurs aspects interviennent dans le réalisme visuel : la qualité du rendu, le niveau de détails et la fréquence d'affichage. Nous ne nous sommes pas attardés sur le premier point qui dépend essentiellement des capacités graphiques des stations de travail. Ces performances graphiques affectent également la fréquence de rafraichissement de la scène, mais seulement dans le cas de modèles non déformables, où peu de calculs interviennent durant la simulation. C'est la cas par exemple des simulateurs de navigation, (Geiger et Kikinis, 1995), où il faut gérer le changement de position de la caméra ainsi que les collisions.

Lorsque la simulation intègre des modèles déformables, le problème devient plus complexe. Le calcul de la déformation est alors le premier facteur bloquant lors d'une animation en temps-réel. Afin de conserver des fréquences d'affichage correctes ($\sim$20Hz), nous avons mis en oeuvre la boucle d'animation suivante :

- le calcul de la déformation est réalisé avec un pas de temps d'intégration Δt relativement

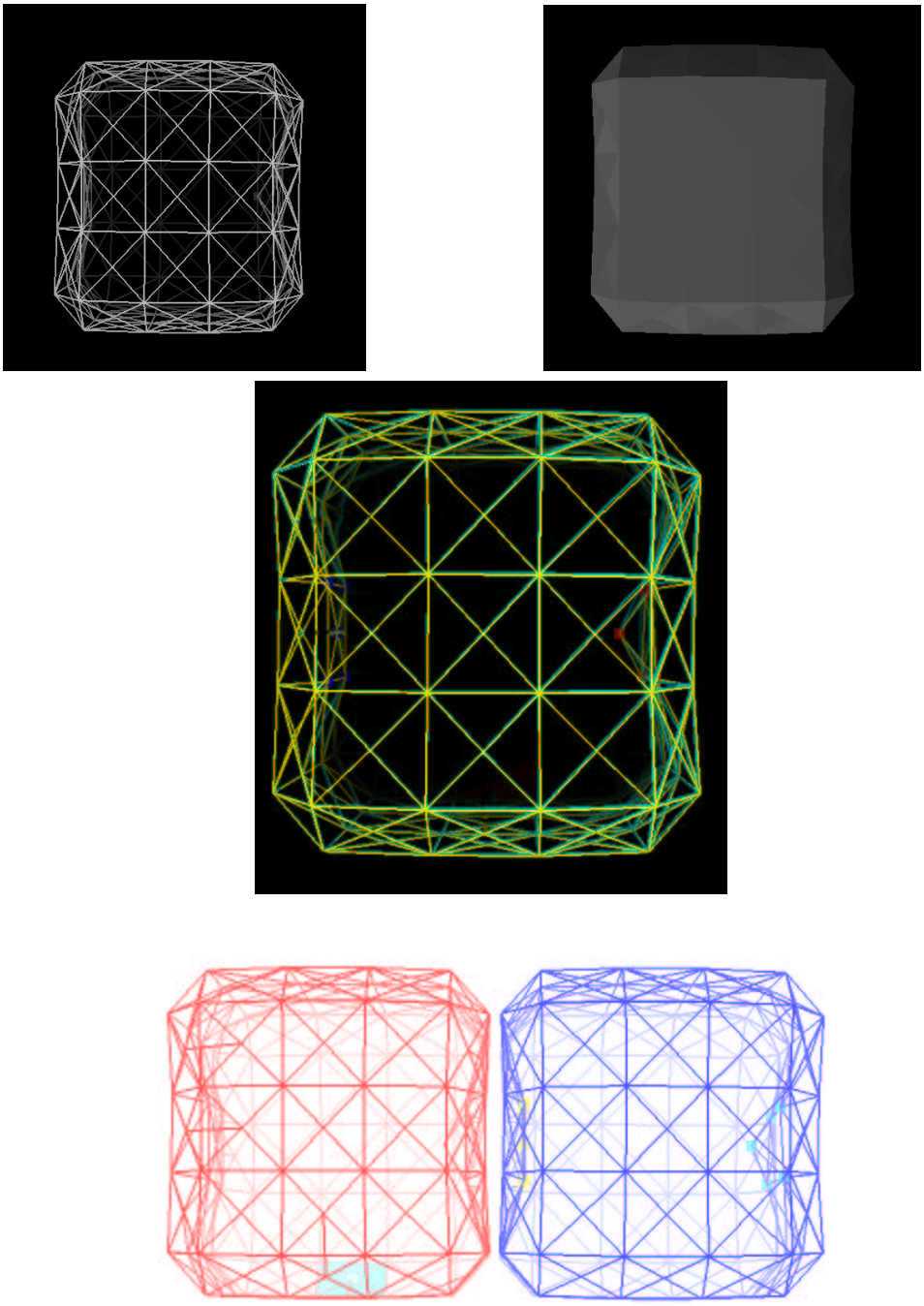


FIG. 5.12 – *Comparaison de deux déformations d'un même objet.* **En haut** *est représentée la déformation d'un modèle éléments finis sous les même conditions aux limites que dans l'exemple précédent (figure 5.11).* **Au milieu**, *on a superposé les maillages déformés d'un modèle masses/tenseurs et d'un modèle élastique linéaire calculé par une MEF.* **En bas à gauche** *se trouve le modèle masses/tenseurs et* **en bas à droite** *se trouve le modèle éléments finis. Les deux déformations sont tout à fait similaires.*

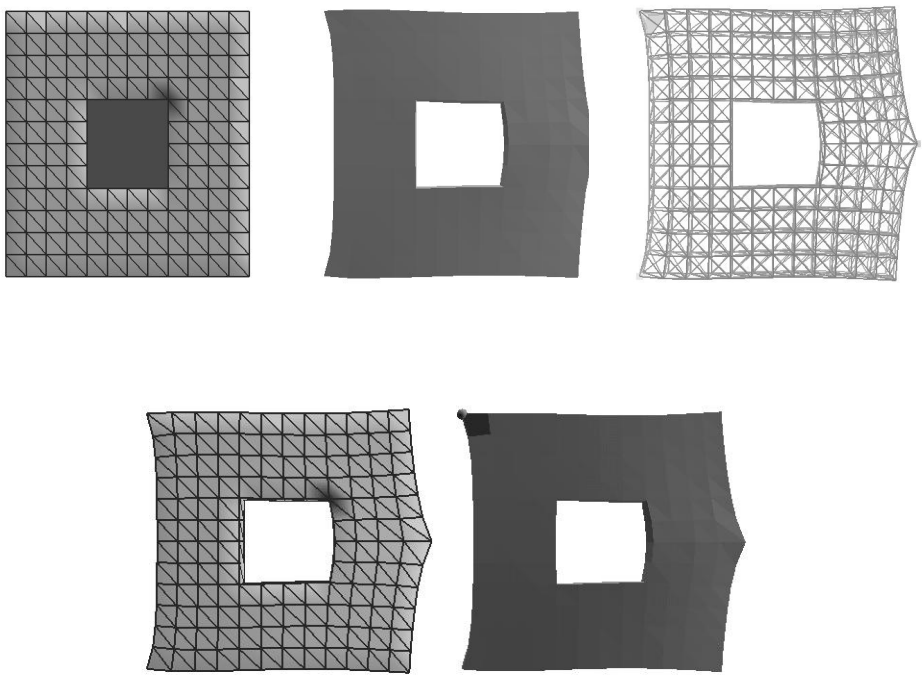


FIG. 5.13 – **En haut à gauche** *: le maillage initial et la zone qui va être découpée.* **En haut au centre** *: le modèle masses/tenseurs déformé et découpé.* **En haut à droite** *: le modèle masses/tenseurs déformé et le maillage éléments finis identique avec les mêmes conditions aux limites. Les deux maillages se superposent exactement.* **En bas** *: comparaison des déformations obtenues par les deux méthodes : à gauche, modèle éléments finis et, à droite, modèle masses/tenseurs.*

élevé. Ceci est possible en utilisant une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. Malgré tout, nous avons remarqué une meilleure stabilité du modèle masses/tenseurs par rapport à un modèle masses/ressorts lorsque l'on utilise des pas de temps d'intégration "élevés". Ce point reste à vérifier dans l'absolu car il est difficile de générer un maillage de type masses/ressorts de rigidité équivalente à un modèle masses/tenseurs donné.

- chaque itération (Δt) nécessite un temps de calcul t_{CPU} différent de Δt. Selon la taille du maillage, ce temps t_{CPU} sera supérieur ou inférieur à Δt. Si $t_{\mathrm{CPU}} > \Delta t$ le principe de synchronicité n'est plus respecté. Ce facteur n'est pas pris en compte pour l'instant.
- l'affichage de la scène est également coûteux en temps de calcul lorsque l'on considère des modèles déformables. Il nécessite par exemple, pour le rendu de Gouraud, le calcul des normales en chaque nœud de la surface du maillage, et ceci à chaque itération. Dans la boucle d'animation (5.19), nous évitons de réafficher la scène à une fréquence supérieure à la fréquence minimale nécessaire ($\sim$20Hz).

Il est également nécessaire de prendre en compte les changements de topologie intervenant lors de la suppression d'une liaison, d'une masse ou d'un tétraèdre. Dans ce cas, une mise à jour systématique de la scène, ainsi que la structure de données dynamique associée au modèle, est effectuée. Par exemple, la suppression d'un tétraèdre nécessite de déterminer la triangulation de la nouvelle frontière du domaine, le calcul des normales, etc. La figure (5.19)

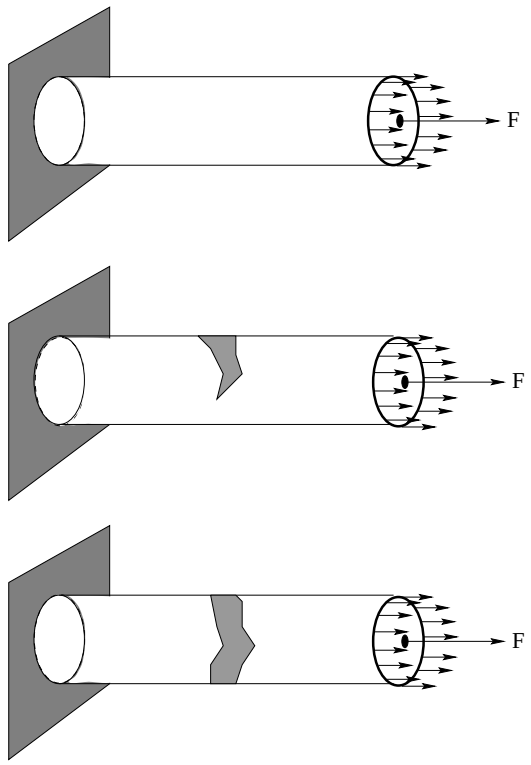


FIG. 5.14 – *Un champ de forces est appliqué sur l'ensemble des nœuds d'une des extrémités du cylindre. L'autre extrémité est fixée. On mesure alors la variation de la force en une masse lors de la déformation de l'objet. La partie grisée du cylindre correspond à la zone de fracture.*

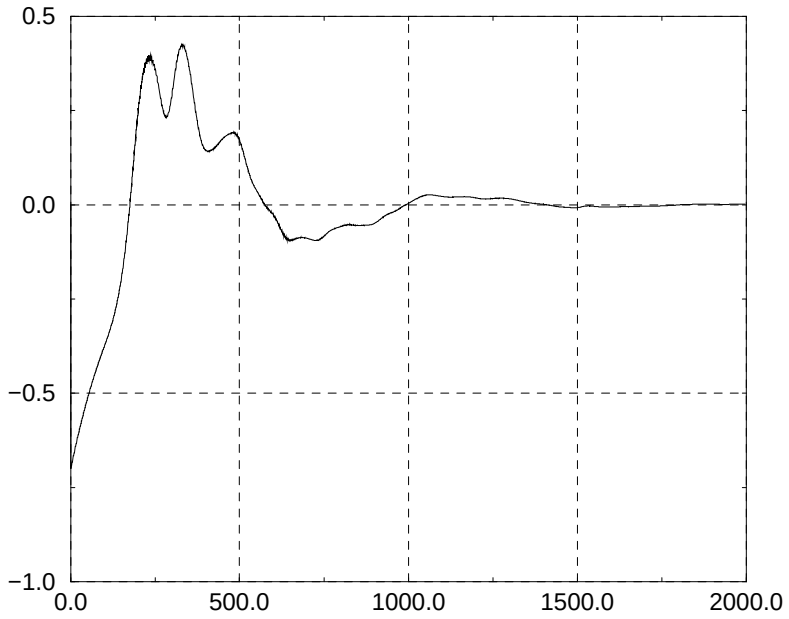


FIG. 5.15 – *Variation de la force lors de la* déformation *de l'objet cylindrique de la figure 5.14. La force est représentée en ordonnée et le temps, en abscisse.*

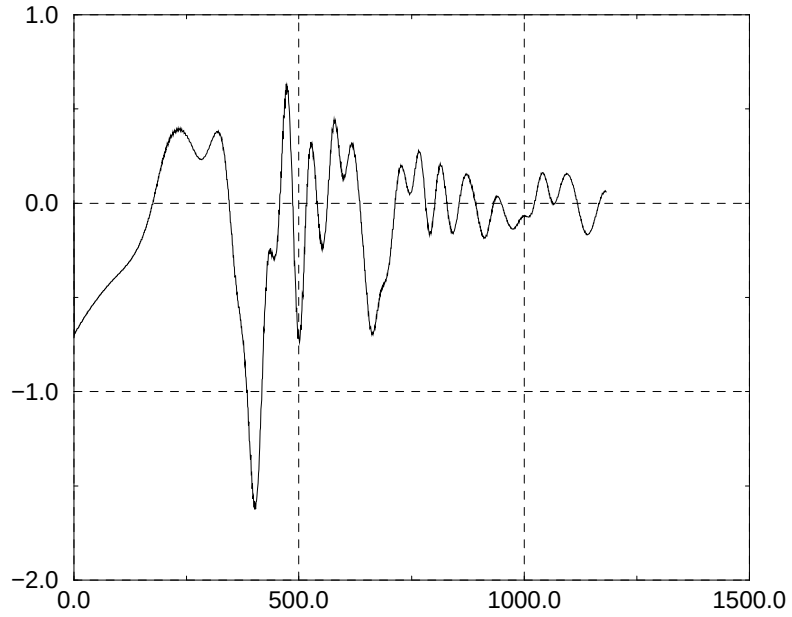


FIG. 5.16 – *Variation de la force mesurée au même nœud que dans la figure précédente mais, dans ce cas, des* découpes *sont réalisées sur le maillage au cours de la déformation. On voit alors clairement la variation de la force au moment de la suppression des éléments - en particulier à* $t = 400$.

illustre l'interconnexion de ces différents éléments.

5.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit un modèle déformable permettant de représenter le comportement de tissus mous lors d'incisions. La méthode utilisée est très proche de celle employée dans les modèles masses/ressorts mais le calcul des forces internes est basé sur une loi de comportement élastique linéaire volumique. La prise en compte de modifications topologiques par la suppression de tétraèdres permet d'obtenir des déformations en accord avec la nouvelle topologie du maillage. Ceci est possible par la mise à jour des tenseurs de force à chaque suppression d'un élément. Nous pensons qu'il est également possible de simuler des comportements non-linéaires en recalculant la matrice de rigidité élémentaire associée à un tétraèdre en fonction de la variation de volume de cet élément. Les comportements seraient plus réalistes mais les temps de calculs risquent de devenir trop importants pour respecter les contraintes de temps-réel.

Les déformations peuvent être induites soit par un champ de forces externes, soit en imposant le déplacement de masses situées sur la surface du maillage. Cette dernière possibilité permet des interactions avec un système à retour d'effort.

Cette méthode présente cependant un inconvénient majeur : malgré le choix d'une méthode d'intégration efficace et un calcul des forces internes assez simple, les contraintes de temps-réel

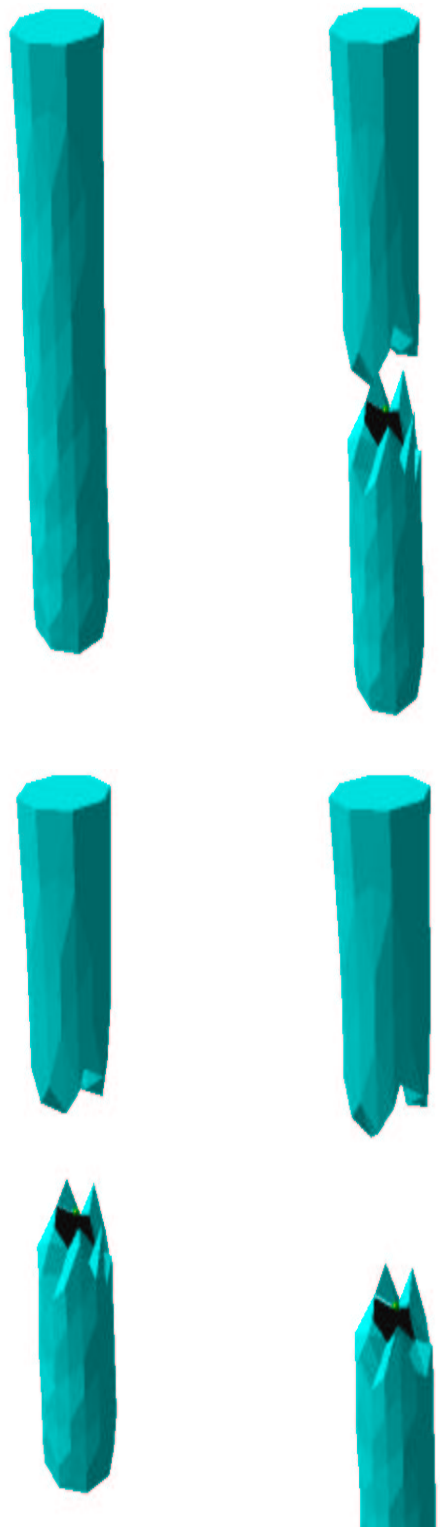


FIG. 5.17 – *Simulation de fracture sur un objet cylindrique. Une des extrémités du cylindre est fixe et l'autre subit une traction. Le cylindre commence alors par se déformer puis, lorsque le seuil de fracture est atteint, les tétraèdres impliqués sont détruits et l'on obtient deux maillages indépendants.*

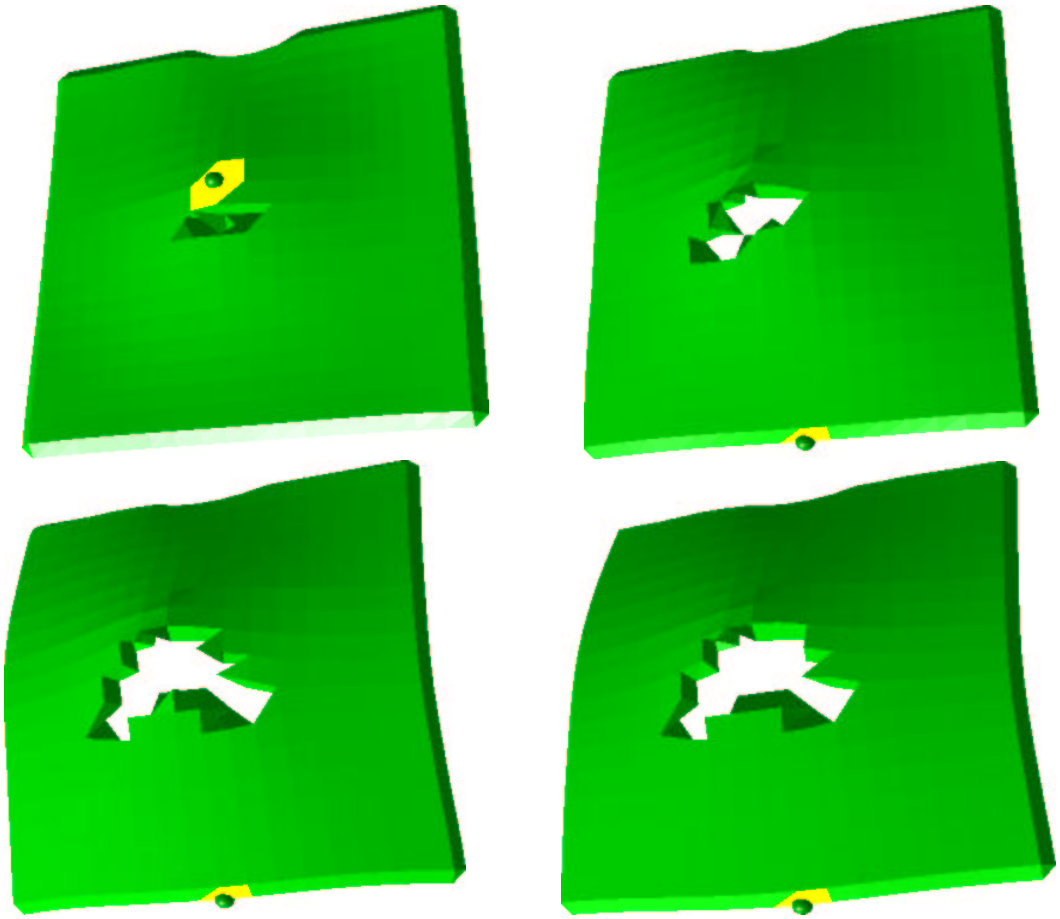


FIG. 5.18 – *Dans cet exemple, une zone de fracture c'est-à-dire une zone où le seuil de fracture est plus faible que dans le reste du modèle, a été définie. On peut simuler de cette façon des matériaux non homogènes dont la sensibilité au déchirement est variable.*

(>300 Hz) ne peuvent être respectées que pour des maillages comportant un faible nombre de nœuds). Nous avons ainsi présenté un maillage composé de 760 masses et près de 4000 liaisons avec lequel il est possible d'interagir à une fréquence de l'ordre de 40 Hz. Cette fréquence, si elle est suffisante pour le retour visuel, reste beaucoup trop faible pour l'utilisation d'un système à retour d'effort. Comme on ne peut plus séparer le calcul des forces de celui des déformations, comme dans la méthode que nous avons introduite au chapitre (3), la fréquence de calcul des forces est alors conditionnée par celle de la déformation. Pour parvenir à une fréquence de 300 Hz, une réduction du nombre de nœuds et de liaisons du maillage est indispensable. Avec un maillage comportant 200 masses et 1800 liaisons, il est possible d'atteindre une fréquence d'environ 300 Hz. Cependant, la précision géométrique d'un tel maillage est incompatible avec une application chirurgicale.

Afin de pouvoir déformer *et* découper un modèle relativement complexe à des fréquences compatibles avec l'utilisation d'un système à retour de force, nous avons développé un modèle "hybride" permettant de garder les principaux avantages des modèles masses/tenseurs et de la méthode basée sur des pré-calculs. Ce modèle est présenté au chapitre suivant.

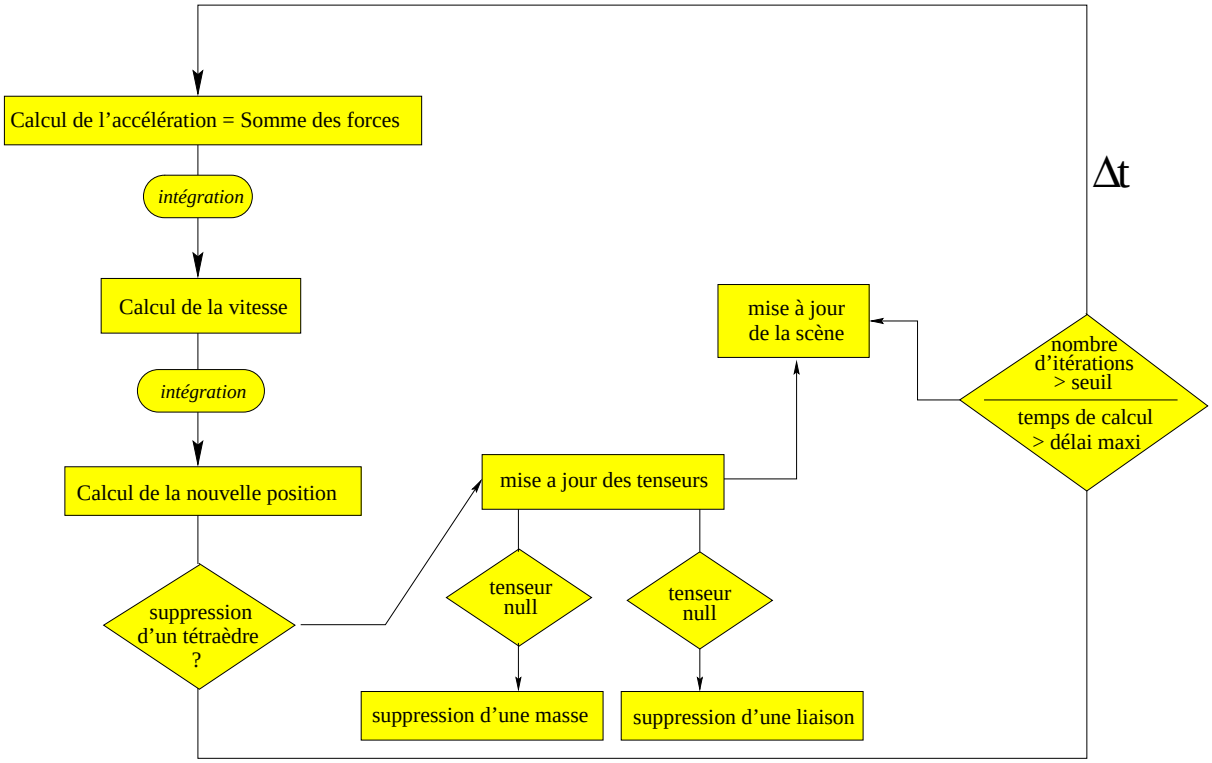
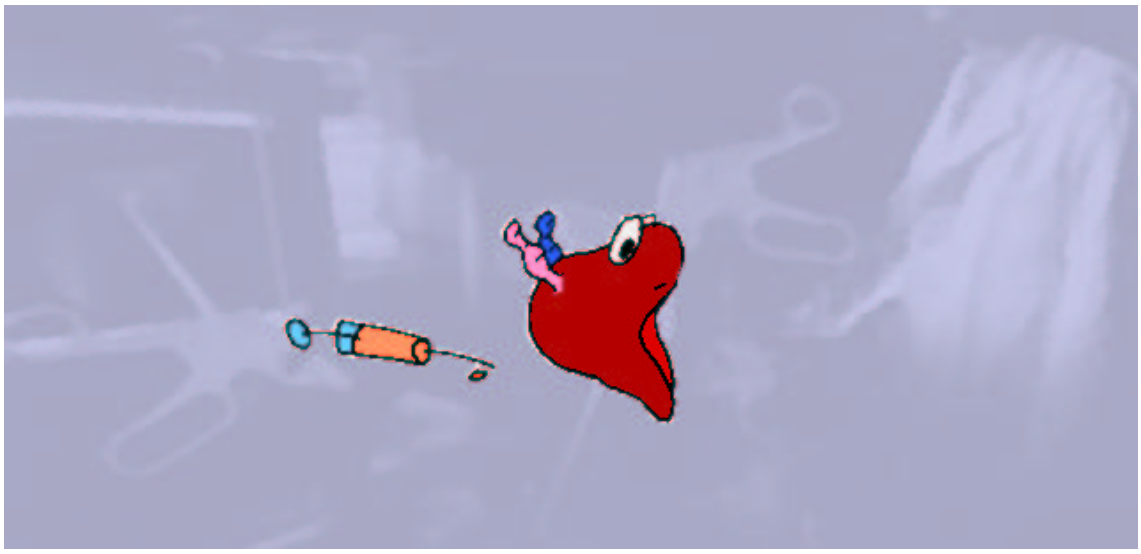


FIG. 5.19 – *Boucle d'animation d'un modèle masses/tenseurs.*

6.

Modèles hybrides déformables

Le but de ce chapitre est de présenter une méthode assez générale permettant d'intégrer, dans un même environnement de simulation, des modèles dynamiques déformables et des objets ayant un comportement élastique linéaire statique. Le modèle hybride ainsi défini peut avoir des applications intéressantes dans le domaine de la simulation : apporter un comportement dynamique à un modèle statique élastique linéaire ou bien permettre de prendre en compte différents types d'interactions sur des sous-domaines du modèle initial. Dans le cadre de la simulation de chirurgie, cette technique va permettre de représenter des comportements de type découpe/fracture sur une partie du domaine tout en conservant un modèle pré-calculé pour le reste du maillage. Les temps de calculs sont ainsi fortement accélérés.



6.1 Introduction

Nous avons présenté, dans les chapitres (3) et (5) deux méthodes possédant des propriétés intéressantes pour la simulation chirurgicale. La première méthode, que nous avons appelée *SDeLL* permet des fréquences de calcul très élevées, rendant possible l'utilisation d'un système à retour d'effort. La seconde, appelée masses/tenseurs, permet la représentation de découpes et autres modifications topologiques du maillage, mais seulement sur des domaines discrétisés par un faible nombre d'éléments. Il nous a donc semblé indispensable de trouver un moyen de combiner ces résultats dans un même formalisme. Ce lien entre les deux méthodes présente des similarités avec une technique utilisée en mécanique des structures - et dans d'autres domaines faisant intervenir la résolution numérique d'équations aux dérivées partielles posées sur des domaines de géométrie complexe - et appelée *décomposition de domaine*. Bien que l'analogie avec notre méthode concerne principalement l'aspect géométrique, nous présenterons brièvement le principe de la décomposition de domaine car nous pensons que c'est une direction de recherche intéressante pour aborder des problèmes nécessitant des calculs en temps-réel. Nous aborderons ensuite la mise en œuvre du modèle hybride et en particulier les problèmes de couplage entre les deux modèles, exprimés sous forme de conditions aux limites sur des frontières artificielles. Nous verrons également comment créer automatiquement les différents sous-domaines à partir d'informations issues d'images volumiques. Nous présenterons enfin quelques résultats illustrant les avantages de cette approche.

6.2 Décomposition de domaine

Nous présentons, dans cette section, quelques éléments sur la décomposition de domaine (pour plus de détails, consulter (Farhat et Roux, 1994) par exemple). Cette technique, introduite pour la résolution de problèmes complexes sur des domaines comportant un très grand nombre de nœuds, repose sur une résolution numérique parallélisée. La décomposition de domaine est en effet idéalement adaptée au calcul parallèle; l'existence ou la création de différents sous-domaines représente une façon naturelle de répartir le problème sur des architectures multi-processeurs. Cependant, le terme de décomposition de domaine a des significations légèrement différentes selon le problème précis auquel on s'intéresse :

- En calcul parallèle, cela correspond souvent au moyen de distribuer un ensemble de données issues d'un modèle numérique sur les différents processeurs d'une machine à mémoire partagée. Dans ce contexte, la décomposition de domaine fait uniquement référence à des techniques de "décomposition de structures de données" et peut être indépendante de la méthode de résolution numérique. Une telle technique pourrait ainsi être utilisée pour accélérer l'étape de pré-calculs du modèle *SDeLL*. En affectant à chaque processeur un ensemble de nœuds de la surface du maillage, il serait possible de diviser les temps de pré-calcul par le nombre de processeurs impliqués.
- En analyse asymptotique, la notion de décomposition de domaine correspond à la séparation physique du domaine en régions qui peuvent être modélisées par différentes équations

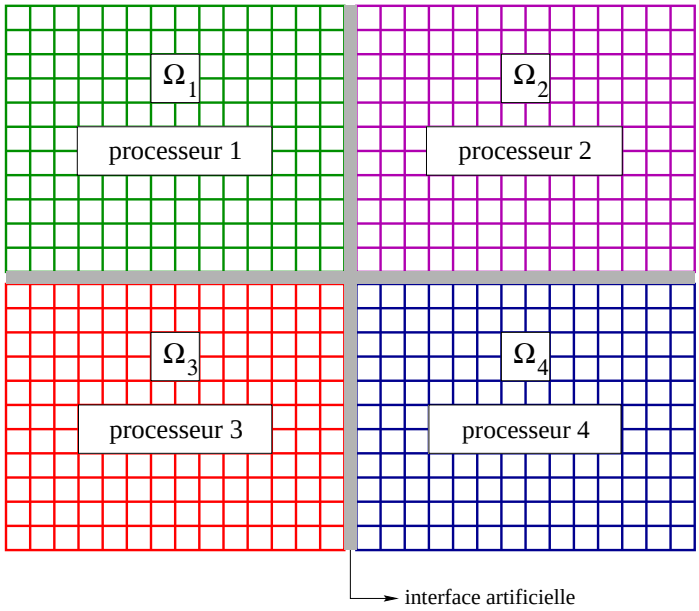


FIG. 6.1 – *Principe de la décomposition de domaine. Le domaine entier, est représenté par l'union de plusieurs maillages. Ici, le domaine Ω est l'union des 4 sous-domaines Ω_1, Ω_2, Ω_3 et Ω_4. La résolution d'un problème donné sur Ω est alors obtenue par une résolution partielle sur chaque sous-domaine, simultanément sur 4 processeurs d'une machine parallèle.*

- couplage fluide/structure par exemple. Dans ce contexte, la décomposition de domaine fait plutôt référence au choix des équations aux dérivées partielles à résoudre sur chaque sous-domaine.

- Pour les méthodes de pré-conditionnement, la décomposition de domaine implique la subdivision du processus de résolution d'un système linéaire faisant intervenir un très grand nombre d'équations en un ensemble de problèmes plus petits dont les solutions peuvent être utilisées pour produire un pré-conditionneur pour le système d'équations résultant de la discrétisation des équations aux dérivées partielles sur le domaine entier. Dans ce contexte, la décomposition de domaine porte essentiellement sur la méthode de résolution du système algébrique issu de la discrétisation.

  Dans ce cas, les méthodes de décomposition de domaine sont des techniques générales de résolution d'équations aux dérivées partielles qui utilisent certaines propriétés inhérentes aux E.D.P. pour obtenir des résolutions rapides. Pour des problèmes linéaires, ces méthodes peuvent être vues comme des pré-conditionneurs pour des techniques de résolution itératives telles que le gradient conjugué. Parmi les nombreuses méthodes de décomposition de domaine, deux exemples "classiques" sont la méthode de Schwarz, faisant appel à des recouvrements de sous-domaines, ou la méthode du complément de Schur, où les différents sous-domaines ne se recouvrent pas.

En pratique, la décomposition de domaine est difficile à mettre en œuvre, en particulier lorsque le domaine initial est un maillage non-structuré. Ceci s'explique par le fait que, pour être efficaces, les méthodes de décomposition de domaine sont dépendantes du couplage entre les différents sous-domaines. Un autre point à noter est que, dans toute méthode de décomposition

de domaine, les deux étapes importantes à résoudre sont : la détermination des sous-domaines et la communication entre ces sous-domaines, via des conditions aux frontières artificielles. Nous allons retrouver des problèmes similaires dans la mise en œuvre de notre modèle hybride.

Le partitionnement de maillage est la forme la plus simple de la décomposition de domaine. À titre d'exemple, considèrons la résolution d'un problème linéaire par une méthode de gradient conjugué (cf. chapitre 3), alors le produit matrice-vecteur Kp^k est le point le plus coûteux de la méthode. Ce produit matrice-vecteur peut s'écrire :

$$Kp^k = \sum_{e=1}^{e=Ne} [\boldsymbol{K^e}] L^e p^k$$

où N_e représente le nombre total d'éléments dans le maillage, $[\boldsymbol{K^e}]$ est la matrice de rigidité élémentaire associée à un élément et L^e est un opérateur de "localisation" de l'élément e, c'est-à-dire un opérateur qui extrait, d'un vecteur donné, les degrés de liberté correspondant aux sommets de e.

Maintenant, si on partitionne un maillage d'éléments finis en N_s sous-maillages (cf. figure 6.1), alors le produit matrice-vecteur précédent peut se réécrire sous la forme :

$$Kp^k = \sum_{s=1}^{s=Ns} [\boldsymbol{K^s}] L^s p^k$$

où $[\boldsymbol{K^s}]$ est la matrice de rigidité du sous-domaine associé à la sous-structure s. L^s est un opérateur similaire à L^e mais qui extrait tous les degrés de liberté associés aux nœuds présents dans le maillage s.

Bien entendu, les besoins en communication de l'algorithme parallèle permettant le calcul de Kp^k sont dépendants du nombre de nœuds partagés par les différentes sous-structures. La détermination automatique d'un partitionnement permettant de minimiser les coûts de communication inter-processeurs est un point important de ce type de méthode.

Notre algorithme n'étant pas actuellement parallélisable nous n'allons aborder, par la suite, que l'aspect *géométrique* de la décomposition de domaine. Nous retrouverons cependant certains problèmes similaires à ceux que nous venons d'aborder.

6.3 Définition d'un modèle hybride

Nous allons considérer, pour la suite de ce chapitre, que l'on veut intégrer, dans un même modèle, seulement *deux* sous-domaines suivant une loi d'évolution différente (statique/newtonienne) et dont les techniques de résolution des équations sont également différentes. La généralisation de la méthode à un nombre plus important de sous-domaines, ayant un de ces deux comportements, n'est pas difficile, mais il nous sera plus simple de l'expliquer avec deux maillages.

L'équivalence, du point de vue géométrique, entre la décomposition de domaine et un modèle hybride est illustrée par la figure (6.2).

En ce qui concerne la résolution des équations, l'approche que nous utilisons est plutôt

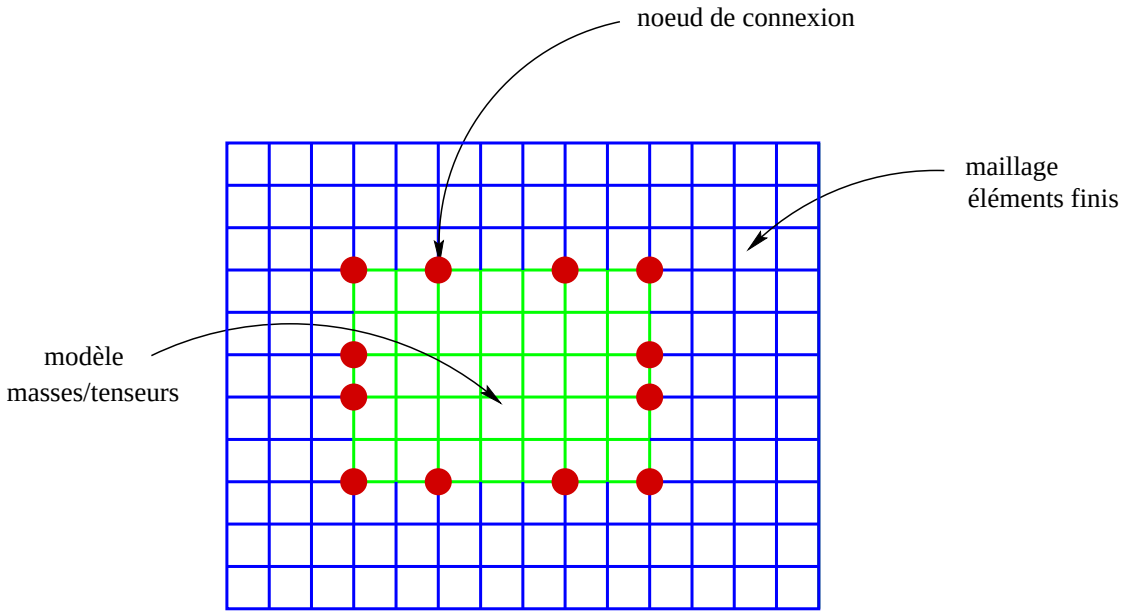


FIG. 6.2 – *L'analogie entre notre méthode et une méthode de décomposition de domaine est essentiellement géométrique. Le domaine correspondant au solide déformable est décomposé en deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2. La résolution sur chaque sous-domaine est réalisée séquentiellement et non pas en parallèle.*

un traitement séquentiel : on commence par déformer le modèle éléments finis pré-calculé, ce qui donne une certaine configuration à l'interface - la frontière artificielle - entre les deux modèles. Cette nouvelle configuration constitue alors une condition aux limites pour le modèle masses/tenseurs, utilisé dans l'étape suivante. Ce dernier va entraîner, à son tour, une nouvelle configuration de l'interface pour le modèle éléments finis. Le problème est alors de stopper ce processus itératif. En effet, pour que cet assemblage de maillages se comporte comme un des modèles que nous avons présentés jusqu'à présent, il est indispensable d'arriver à un état d'équilibre, sans stopper volontairement le processus itératif.

Notre approche présente des points communs avec celle utilisée en simulation numérique du couplage fluide/structure. Dans ce cas, au lieu d'être un problème de couplage de modèles/méthodes numériques - les modèles *SDeLL* et masses/tenseurs -, il s'agit plutôt d'un couplage de modèles physiques - un écoulement de fluide et une déformation d'une structure. Dans ce cas, les conditions aux frontières à appliquer aux deux modèles sont plus complexes car des problèmes de conservation d'énergie interviennent dans le transfert de l'information entre les deux modèles - en l'occurence transfert d'efforts aérodynamiques du fluide vers la structure et transfert de déplacements de la structure vers le fluide et son maillage du domaine de calcul.

Dans notre cas, le problème des conditions aux limites est plus simple, en particulier en raison de la dualité des "entités physiques" à transmettre à l'interface. D'un côté, nous avons le modèle utilisant les pré-calculs. Nous avons mis en œuvre ce modèle de façon à pouvoir contrôler la déformation uniquement sous des contraintes de déplacement de certains nœuds de la surface. La force associée au déplacement d'un nœud est également calculée. Enfin, le dernier point très important concerne la vitesse de calcul de la déformation et des forces. Nous avons

montré, au chapitre (3), qu'il est possible d'atteindre des fréquences supérieures à 300 Hz. C'est ce point qui va permettre de réduire les temps de calcul du modèle hybride. De l'autre côté, le modèle masses/tenseurs peut se déformer sous l'action d'un champ de forces externes, mais présente l'inconvénient de n'autoriser des fréquences de calcul élevées que pour des maillages ayant un faible nombre de nœuds.

Si on partitionne le domaine total en deux sous-domaines (cf. figure 6.2), dont l'un comporte un nombre réduit d'éléments, alors, en affectant la méthode numérique masses/tenseurs sur ce sous-domaine, et la méthode *SDeLL* sur l'autre sous-domaine, il va être possible de contrôler la fréquence de calcul. En effet, le temps de calcul nécessaire à la déformation du maillage total est essentiellement déterminé par le temps de calcul du modèle masses/tenseurs, soit :

$$t_{total} = t_{mmt} + t_{\varepsilon}$$

où t_{mmt} est le temps de calcul d'une itération du modèle masses/tenseurs et t_{ε} est le temps de calcul d'une déformation à l'aide du modèle pré-calculé. Nous l'avons noté t_{ε} car $t_{\varepsilon} << t_{mmt}$.

Afin de réduire t_{total}, il est donc nécessaire de réduire t_{mmt}. Pour cela, la solution que nous avons choisi d'adopter consiste à réduire la taille du sous-domaine associé au modèle masses/tenseurs. La définition semi-automatique des deux sous-domaines, ainsi que l'algorithme principal faisant intervenir les conditions aux limites artificielles, sont exposés dans les deux sections suivantes.

6.4 Création des sous-domaines

Un partitionneur automatique est un outil indispensable pour pouvoir utiliser les méthodes de décomposition de domaines. Différents algorithmes de découpage existent, ainsi que des logiciels commerciaux (logiciel TOP/DOMDEC, Université de Boulder). Comme nous sommes malgré tout très loin des problèmes rencontrés en simulation numérique, notre approche est beaucoup plus simple.

L'idée générale est que le maillage à partitionner est, dans notre cas, issu de la segmentation d'une image volumique. Deux solutions sont alors possibles : (a) les deux sous-structures se distinguent également dans l'image volumique[1] par des niveaux d'intensité différents, (b) il est possible de créer une image volumique "artificielle" décrivant les différentes sous-structures fonctionnelles ou anatomiques de l'organe (cf. figure 6.3).

Le premier point peut correspondre, par exemple, à la présence d'une tumeur. Si cette tumeur est proche de la surface de l'organe, l'opération chirurgicale va consister à enlever les tissus cancéreux. Il parait alors naturel de définir les deux sous domaines comme étant :

- les tissus cancéreux = modèle masses/tenseurs
- les tissus sains = modèle éléments finis pré-calculé

La seconde possibilité sera détaillée au chapitre (8).

1. Nous supposons que la modalité d'acquisition est une scannographie à rayons X.

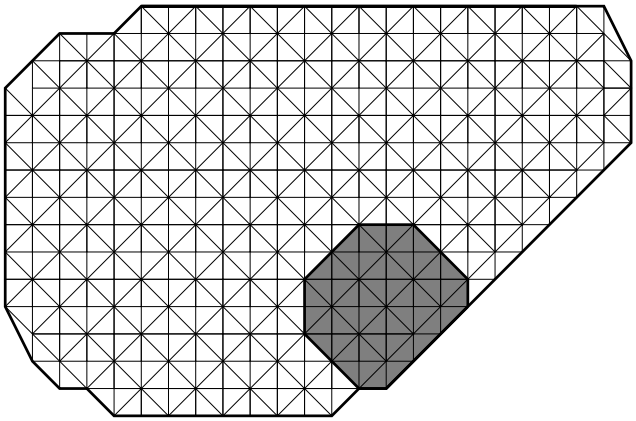


FIG. 6.3 – *Triangulation d'une coupe de l'image binaire représentant deux différents sous-ensembles.*

Dans chaque cas, le principe reste cependant le même. La première étape consiste à créer un maillage du domaine entier $\mathcal{M}$. Ensuite, de façon similaire à ce qui a été fait pour introduire des paramètres élastiques non-homogènes au chapitre (3), l'algorithme consiste à identifier quels tétraèdres vont être associés au sous-domaine $\mathcal{M}_1$ ou au sous-domaine $\mathcal{M}_2$.

Un tétraèdre est associé au sous-domaine $\mathcal{M}_1$ si les 4 sommets de ce tétraèdre correspondent à des voxels de même d'intensité $I_{\mathcal{M}_1}$, où $I_{\mathcal{M}_1}$ est l'intensité de la région que l'on veut affecter à $\mathcal{M}_1$ (cf. figure 6.4).

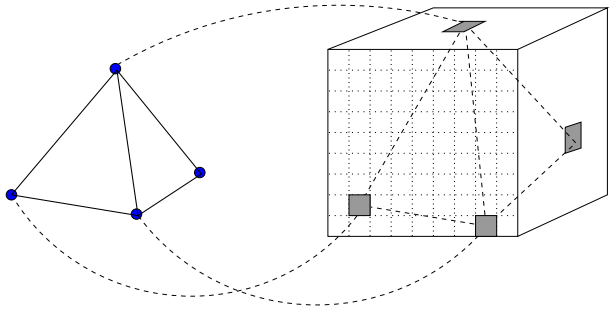


FIG. 6.4 – *Tétraèdre plongé dans une image volumique.*

Le maillage $\mathcal{M}_2$ du second sous-domaine est alors défini comme le complémentaire de $\mathcal{M}_1$ dans $\mathcal{M}$. Dans des cas plus complexes, engendrant un plus grand nombre de sous-domaines, un algorithme de partitionnement mieux adapté est alors nécessaire.

6.5 Mise en œuvre

Lorsque les sous-maillages $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ ont été créés, et qu'une méthode de résolution numérique leur a été associée, il reste à définir les différentes conditions aux limites artificielles entre $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ ainsi que la boucle d'animation qui va prendre en compte les deux modèles.

Nous supposerons par la suite que $\mathcal{M}_1$ est associé au modèle éléments finis pré-calculé et $\mathcal{M}_2$ est associé au modèle masses/tenseurs.

6.5.1 Conditions aux limites

Déplacements

Nous avons vu précédemment que les déformations du modèle *SDeLL* sont, en général, induites par un ensemble de conditions de Dirichlet. Il parait donc naturel d'utiliser ces mêmes conditions aux limites sur l'interface définie entre $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$.

Par contre, afin de pouvoir continuer à appliquer le principe de superposition, nous avons vu au chapitre (3) qu'il est nécessaire d'inverser une matrice de dimensions $3m \times 3m$, où m est le nombre de nœuds de déplacement imposé non-nul.

Le vecteur des contraintes modifiées $[\tilde{\boldsymbol{u}}^*]$ qui doivent être appliquées à la place de $\boldsymbol{u}^*_{\boldsymbol{kl}}, l = 1, .., m$ est déterminé par :

$$[\tilde{\boldsymbol{u}}^*] = [\boldsymbol{M}]^{-1}[\boldsymbol{u}^*] \tag{6.1}$$

Dans ce cas, bien qu'une de nos hypothèses de travail soit une taille réduite du sous-domaine $\mathcal{M}_2$, on peut arriver, sur des maillages volumiques, à des dimensions assez élevées de la matrice $[\boldsymbol{M}]$. Or il est nécessaire que le temps de calcul de la déformation de $\mathcal{M}_2$ reste très faible. Ceci implique donc la définition de conditions aux limites "partielles" le long de la frontière artificielle entre $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$. On définit ainsi un ensemble de *nœuds de connexion* (cf. figure 6.2). En pratique, un nœud de connexion contient les deux informations suivantes :

- référence du nœud du maillage $\mathcal{M}_1$
- référence de la masse du maillage $\mathcal{M}_2$

Ces nœuds correspondent par conséquent à un *sous-ensemble* des nœuds situés sur l'interface. Cette solution représente bien entendu un compromis entre la précision de la déformation du modèle hybride et la vitesse de calcul de cette déformation.

Forces

Le déplacement des nœuds de $\mathcal{M}_1$ permet de calculer la déformation mais également la force qu'il faudrait appliquer en ces nœuds pour produire une déformation identique. C'est cette force que l'on va appliquer sur l'ensemble des masses de $\mathcal{M}_2$ définies dans l'ensemble des nœuds de connexion. Sous l'action de ces forces, le maillage $\mathcal{M}_2$ va se déformer. On va ainsi en déduire la nouvelle position des masses situées à l'interface et, par conséquent, celle des nœuds de $\mathcal{M}_1$ définies dans l'ensemble des nœuds de connexion.

6.5.2 Obtention d'une position d'équilibre

Les maillages $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ étant associés à des modèles numériques suivant la même loi de comportement, il va être très simple d'obtenir une configuration d'équilibre. C'est un point intéressant de cette méthode. Nous verrons cependant que si les modèles suivent des équations différentes, l'obtention d'une position d'équilibre reste possible.

Il y a équivalence - les ordres de grandeur sont identiques - entre les forces issues de la déformation d'un modèle *SDeLL* et les forces internes du modèle masses/tenseurs (cf. figure 6.6) puisque les deux suivent une loi élastique linéaire.

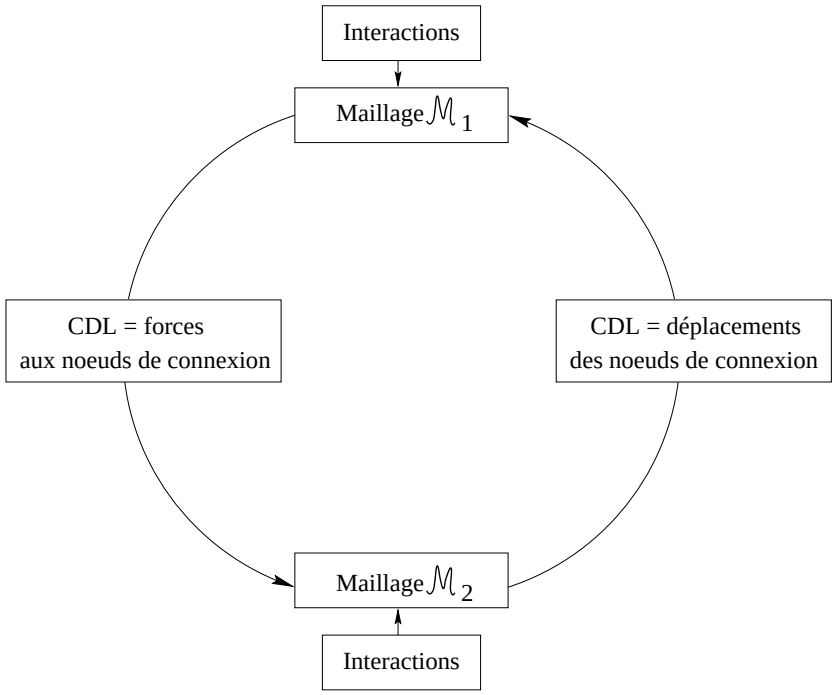


FIG. 6.5 – *La boucle d'animation principale du modèle hybride .*

6.6 Résultats

Nous allons présenter ici quelques résultats afin de voir ce qu'apporte, concrètement, un modèle hybride par rapport à un modèle masses/tenseurs ; le but initial étant de réduire les temps de calcul.

6.6.1 Déformation "hybride"

La figure (6.7) illustre un processus de déformation dans lequel les interactions sont localisées, tour à tour, sur chacun des deux sous-maillages. On peut voir que la déformation est correctement transmise d'un modèle à l'autre et qu'une position d'équilibre est atteinte. La fréquence d'interaction moyenne est de 160 Hz (en comptant le temps nécessaire à l'affichage). Le maillage global est composé de (1035 tétraèdres, 736 triangles et 396 nœuds) se décomposant en (917 tétraèdres, 640 triangles et 342 nœuds) sur $\mathcal{M}_1$ et (118 tétraèdres, 96 triangles et 54 masses) sur $\mathcal{M}_2$.

Un modèle masses/tenseurs équivalent au modèle hybride ne permet qu'une fréquence d'interaction de 60 Hz.

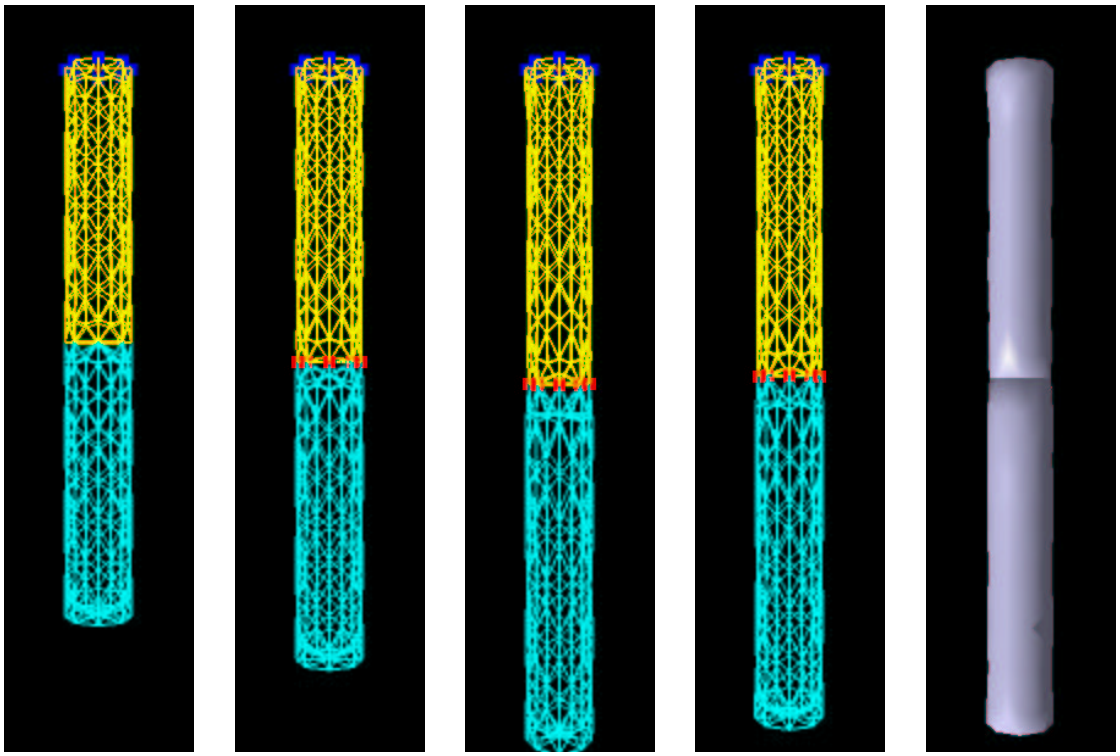


FIG. 6.6 – *Le cylindre supérieur correspond au sous-maillage $\mathcal{M}_1$ et le cylindre inférieur à $\mathcal{M}_2$. La partie supérieure de $\mathcal{M}_1$ est fixée. Une force de gravité est appliquée sur $\mathcal{M}_2$. Sous l'action de ce champ de forces extérieures, le maillage se déforme. Le mouvement des masses situées à l'interface entre les deux cylindres est traduit en un ensemble de conditions aux limites de Dirichlet. Ces contraintes induisent une déformation dans le maillage $\mathcal{M}_1$. Après quelques itération, on aboutit à une solution d'équilibre entre les deux maillages.*

6.6.2 Déformation et découpes

Un exemple de découpe a été réalisé sur un modèle du rein gauche d'un patient. Le maillage initial comporte 1024 nœuds, 4690 tétraèdres et 890 faces. Les deux-sous maillages comportent, respectivement, 2030 et 2660 tétraèdres. La figure (6.9) illustre une découpe, suivie d'une déformation, du modèle hybride.

6.6.3 Autre application

D'autres applications des modèles hybrides sont possibles en dehors de la simulation de découpes. Par exemple, si l'on associe seulement un ensemble de masses - sans liaisons entre elles - aux nœuds de connexion, alors il devient possible d'obtenir un comportement dynamique pour le modèle élastique linéaire initialement statique. Le modèle va ainsi osciller avant d'atteindre une position d'équilibre. Comme le calcul de l'accélération de quelques masses est très rapide, il est toujours possible d'interagir en temps-réel avec ce type de modèle.

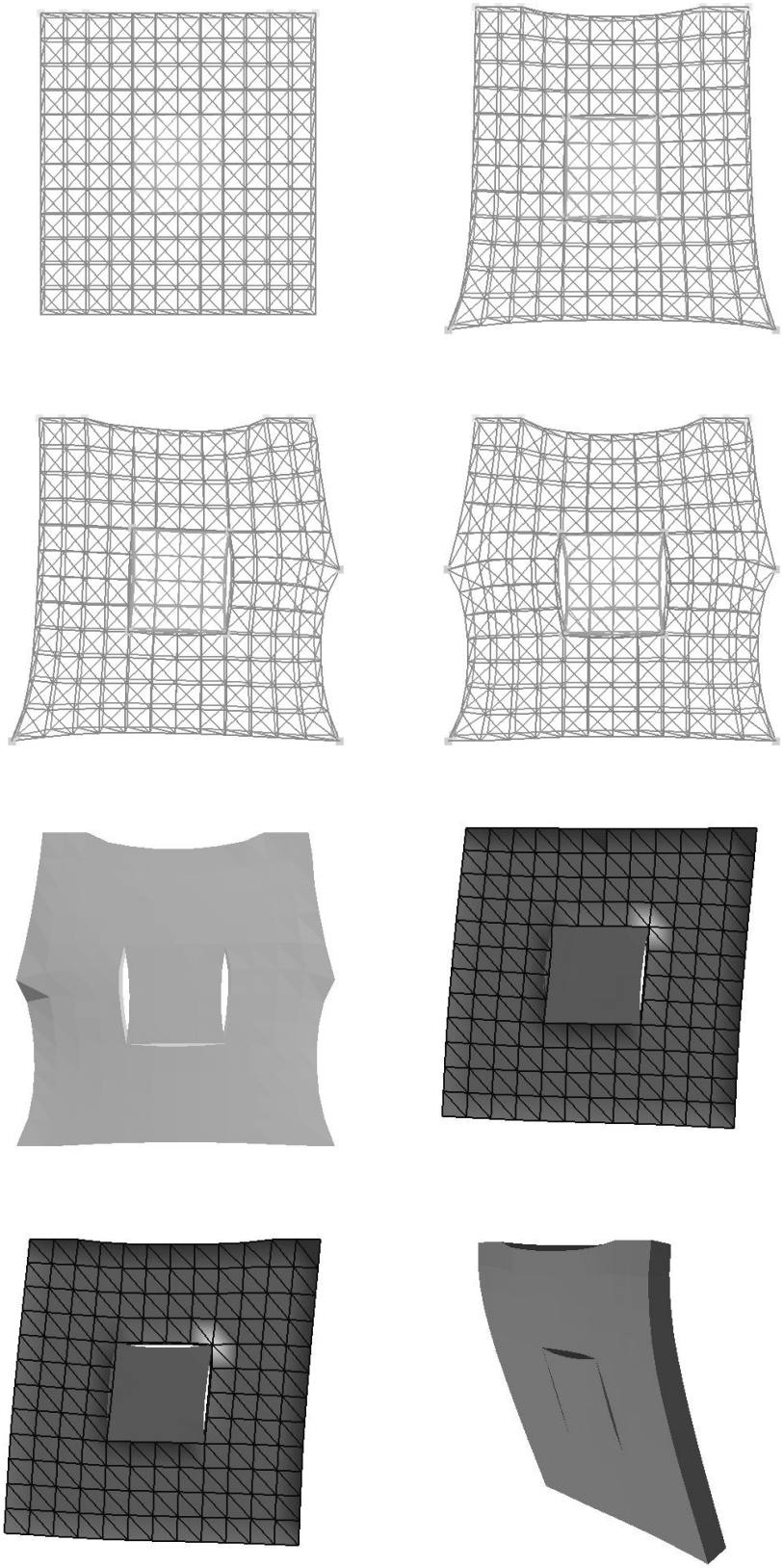


FIG. 6.7 – *Déformation d'un modèle hybride. Ici les sous-maillages $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ ont été définis à partir de l'image volumique présentée à la figure (6.8). Bien que la déformation soit correctement "propagée" d'un modèle à l'autre, on peut voir des problèmes de continuité à l'interface, dûs au faible nombre de nœuds de connexion utilisés.*

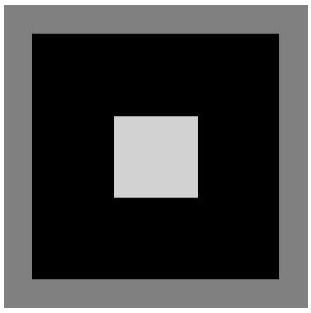


FIG. 6.8 – *Un coupe de l'image volumique ayant servi à la création des maillages $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ présentés à la figure (6.7).*

6.7 Conclusion

La solution que nous avons proposée pour lier entres elles les deux méthodes de déformation que nous avons introduites aux chapitres précédents, a permis un gain de temps intéressant pour la déformation/découpe de maillages. Le gain de temps est d'autant plus important que la proportion du maillage associé au modèle masses/tenseurs est faible. En contrepartie, la zone dans laquelle il est possible de réaliser des modifications de topologie est limitée.

Si l'on reste dans le cadre de l'entraînement au geste opératoire ou encore de la simulation d'opérations élémentaires, ce point n'est pas trop pénalisant. Nous verrons également, au chapitre (8) que, pour certaines applications, il est possible de contourner ce problème.

Notons enfin que la définition des modèles hybrides est généralisable à d'autres modèles. Dans la première mise en œuvre de cet algorithme, nous avions utilisé un modèle masses/ressorts à la place du modèle masses/tenseurs. Les lois de comportement des modèles étant alors différentes, les forces issues de la déformation du modèle utilisant les pré-calculs ont un "ordre de grandeur" différent de celles intervenant dans le modèle masses/ressorts. Une "normalisation" des forces est alors nécessaire. Cependant, le principe du modèle hybride reste valable.

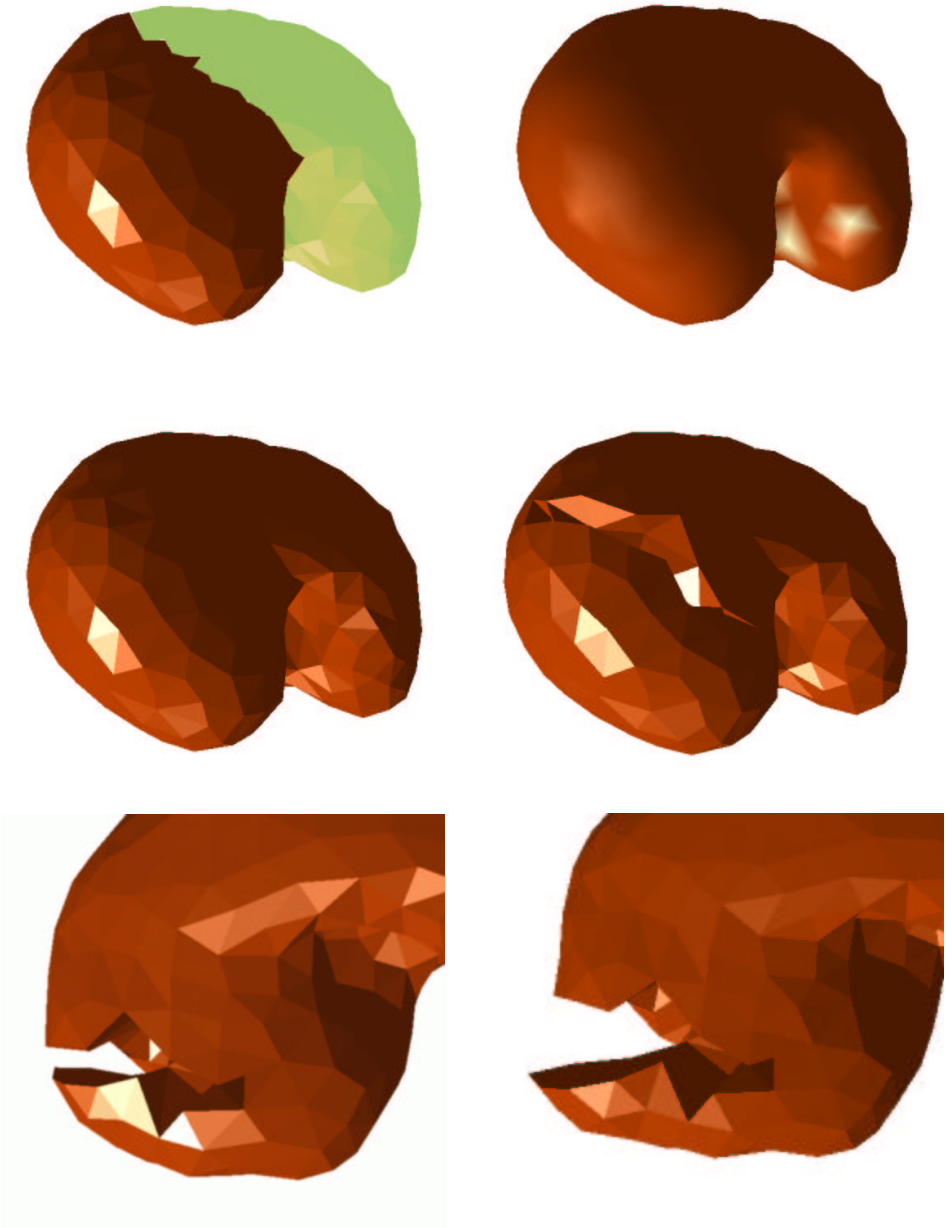


FIG. 6.9 – *Déformation et découpe d'un modèle hybride. Ici les deux sous-maillages ont été réalisés sans se baser sur les informations d'une image volumique. Le maillage initial a simplement été découpé en deux parties de taille à peu près identique.*

7.

Intégration d'un système à retour d'effort

L'intégration de systèmes de retour tactile ou d'effort en simulation, que ce soit en chirurgie ou dans d'autres situations où le sens de la vision est réduit, est un phénomène récent. Dans chacun de ces cas, nous avons besoin de notre sens du toucher pour pallier les insuffisances de notre sens visuel. Afin de reproduire des forces telles que nous les ressentons dans la réalité, il est alors nécessaire de définir, d'une part, une architecture intégrant un système de retour de force et d'autre part, un calcul en temps réel des forces mises en œuvre, sans oublier la détection de collision.

7.1 Introduction

Ce n'est que récemment que les différents aspects du retour tactile et du retour de force ont pu être intégré en simulation, essentiellement en raison des problèmes technologiques qu'ils soulèvent. À l'origine, on peut noter les développements réalisés dans le domaine des systèmes maître/esclave utilisés pour le contrôle de bras robotiques ou encore en avionique. Dans le premier cas, on cherche à compenser le manque d'information dont dispose l'opérateur pour déplacer un robot dans un monde réel. Dans le second cas on cherche à donner au pilote d'avion, lors d'une simulation, les mêmes sensations que celles ressenties dans la réalité. Il en va de même pour l'entraînement des chirurgiens dans le cadre de la simulation de chirurgie laparoscopique où le sens de la vision est réduit. Dans chacune de ces situations, nous avons besoin de notre sens du toucher pour pallier les insuffisances du sens visuel (Burdea, 1996).

Les récentes recherches sur les retours tactiles et d'effort, ainsi que les importants développements faits dans le domaine de la micro-robotique ont permis de résoudre quelques problèmes techniques et de construire plusieurs prototypes intéressants.

La plupart des systèmes présentés par la suite sont aujourd'hui des produits commerciaux, issus de la recherche en robotique et en réalité virtuelle. Le périphérique utilisé dans notre simulateur est également un produit commercial mais il reste possible, pour des équipes de recherche spécialisées en robotique, de développer leur propre système afin de répondre à des contraintes particulières. Nous nous contenterons d'exposer ici un ensemble de solutions techniques pour le retour tactile et le retour d'effort. Des compléments pourront être trouvés à l'annexe (D). Nous justifierons ensuite le choix de notre système puis présenterons les solutions logicielles et matérielles que nous avons retenues pour son intégration dans le simulateur.

7.2 Retour tactile et retour d'effort

Comme il n'est pas rare que retour tactile et retour d'effort soient confondus, précisons brièvement les choses. Considérons d'abord une main appuyant très légèrement sur un bureau. Les premiers capteurs à répondre sont ceux situés sur l'extrémité des doigts. Si la main appuie plus fort, les muscles de la main et de l'avant-bras commencent à se mobiliser. Les forces sont maintenant ressenties par les capteurs situés sur les tendons des muscles et les os et non plus simplement à l'extrémité des doigts. Cet exemple montre que les capteurs tactiles fournissent une information sur la géométrie de la surface en contact et peuvent aussi renseigner sur la rugosité de la surface de contact, sa température, etc. De manière complémentaire, le retour d'effort donne une information sur la force totale de contact. Les capteurs impliqués peuvent ainsi donner une information sur la compliance de la surface de contact (flexible ou rigide), ou le poids de l'objet saisi.

En chirurgie laparoscopique, l'utilisation des instruments actuels limite très fortement les sensations tactiles du chirurgien (Sukthankar et Reddy, 1995). Bien que des recherches dans ce domaine tentent de pallier cet inconvénient, il n'y a actuellement aucun moyen pour le chirurgien de percevoir des stimuli aussi faibles qu'en chirurgie ouverte. C'est pourquoi, dans la simulation, on se limitera à l'intégration d'un système à retour de force.

Afin d'intégrer un retour virtuel tactile ou d'effort dans une simulation, il est nécessaire de reproduire les forces de contact, la géométrie des surfaces, leur rugosité, le glissement, etc. Comme tous les canaux sensoriels, les retours tactiles et d'effort exigent la transmission d'informations à des fréquences élevées. Cette dernière contrainte est la plus importante car elle conditionne totalement la simulation : selon que l'on veut disposer d'un retour tactile ou d'effort, que l'on a des forces de contact avec des objets rigides ou déformables, les fréquences requises pour la boucle d'interaction s'échelonnent de 300 Hz à 2000 Hz (cf. figure 7.1).

Il est également nécessaire d'intégrer la notion de sécurité dès lors que des forces bien réelles vont être appliquées à la main de l'opérateur. Selon le type de contact (élastique ou rigide), les forces mises en œuvre seront plus ou moins importantes. Il est alors nécessaire de bien les contrôler afin de ne pas risquer de blesser l'utilisateur en cas de mauvaise manipulation. Il est nécessaire également de faire en sorte que l'opérateur n'ai pas conscience du dispositif qu'il manipule. Les notions de portabilité et de confort de l'utilisateur sont donc à prendre en compte, alors qu'une difficulté des actionneurs de retour d'effort concerne justement l'obtention de forces suffisamment élevées avec un matériel léger. Si le dispositif à retour d'effort est trop difficile à manipuler, l'utilisateur se fatiguera rapidement et préférera finalement un contrôle sans retour d'effort. Enfin, l'ergonomie du système doit être adaptée à la tâche à accomplir. Nous verrons ainsi qu'il existe des systèmes spécifiques à chaque type d'application et d'autres plus génériques demandant un contrôle plus complexe des différents degrés de liberté possibles.

7.3 Retour tactile

Shimoga (Shimoga, 1993; Shimoga et al., 1995) a identifié cinq approches principales pour résoudre le problème du retour tactile d'un doigt : les solutions visuelles, pneumatiques, vibro-tactiles, électro-tactiles et les stimulations neuromusculaires. La figure (7.2) illustre un système basé sur un principe pneumatique, approche retenue pour la conception du gant *Teletact* développé par ARRL [1].

Ce système se compose de deux gants en Lycra, l'un doté de 30 résistances sensibles aux forces et l'autre possédant 30 ballons à air. Ces poches d'air sont situées sur la paume et les doigts du premier gant. Le second gant, équipé de résistances placées aux mêmes endroits que les ballonnets d'air, est utilisé pour générer des "traces" tactiles quand les utilisateurs saisissent des objets réels. Ces "traces" sont alors transmises et ressenties par la personne portant le gant à ballonnets d'air.

La dernière version de ces gants enferme des tubes capillaires et des poches d'air entre deux couches de Lycra, et peut être utilisée avec la plupart des gants disponibles sur le marché, comme le *Dexterous Hand Master* présenté à la figure (7.3). On peut synthétiser et mémoriser ainsi des "formes tactiles" qui peuvent être générées en temps réel lors de la "saisie" d'objets virtuels.

Dans une version plus récente, l'index a désormais une matrice de quatre ballonnets qui peuvent être activés en séquence afin de simuler le glissement d'un objet virtuel. De plus, une

1. Advanced Robotics Research Ltd. & Airmuscle Ltd.

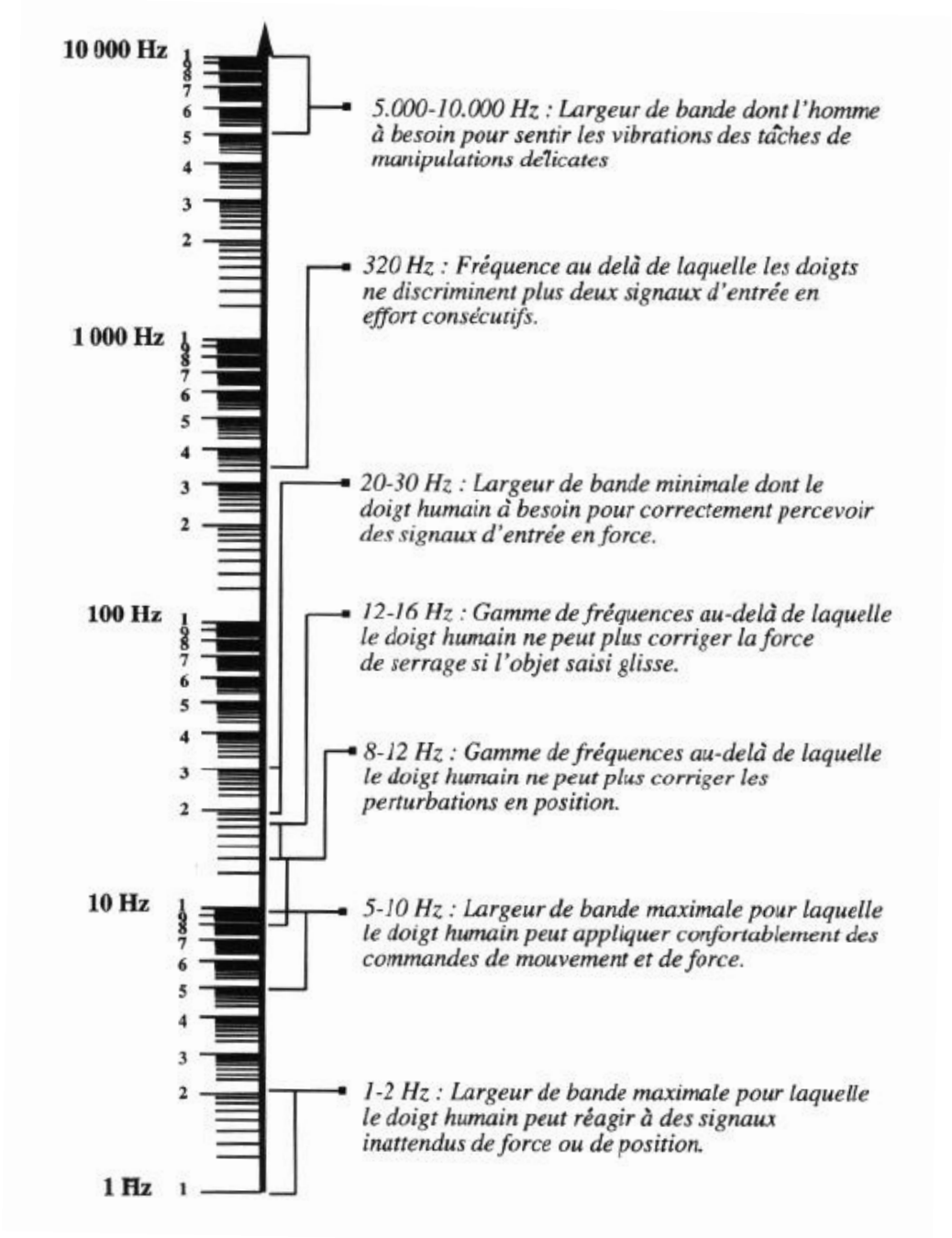


FIG. 7.1 – *Largeur de bande pour la sensibilité de la main humaine (d'après (Shimoga, 1993)).*

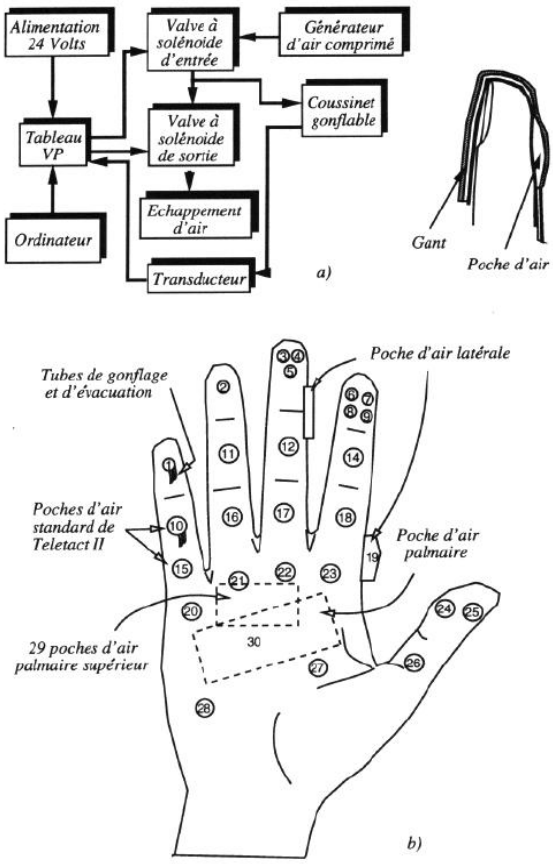


FIG. 7.2 – *Retour tactile pneumatique. Le retour tactile est obtenu en contrôlant le gonflement de poches d'air palmaires et digitales (d'après (Burdea et Coiffet, 1994)).*

poche d'air plus importante est placée dans la paume. Si on la gonfle à sa pression maximale, elle empêche tout mouvement de saisie de l'utilisateur et fournit par conséquent un retour d'effort dans la paume.

Un tel système pourrait être utilisé pour une simulation de chirurgie ouverte où le retour tactile garde toute son importance. Dans ce cas, le système doit être utilisé en complément d'un "gant de donnée" (cf. figure 7.3) permettant de suivre le mouvement de la main dans l'espace. Mais les systèmes actuels sont, soit trop imprécis en localisation spatiale, soit trop peu ergonomiques pour une application chirurgicale.

Il faut également noter que le retour tactile n'a pour but que de fournir des informations du type "contact/non contact" et ne peut en aucun cas empêcher le mouvement de la main. Un système tel que le *LRP Portable Master*, développé au Laboratoire de Robotique de Paris, permet par contre un retour d'effort sur 14 sites de la main (cf. figure 7.3). Il permet ainsi de contrôler le mouvement de la main lors de gestes de saisie d'objets. Ce n'est cependant pas encore suffisant pour une application chirurgicale où il est nécessaire d'empêcher également les mouvements du bras.

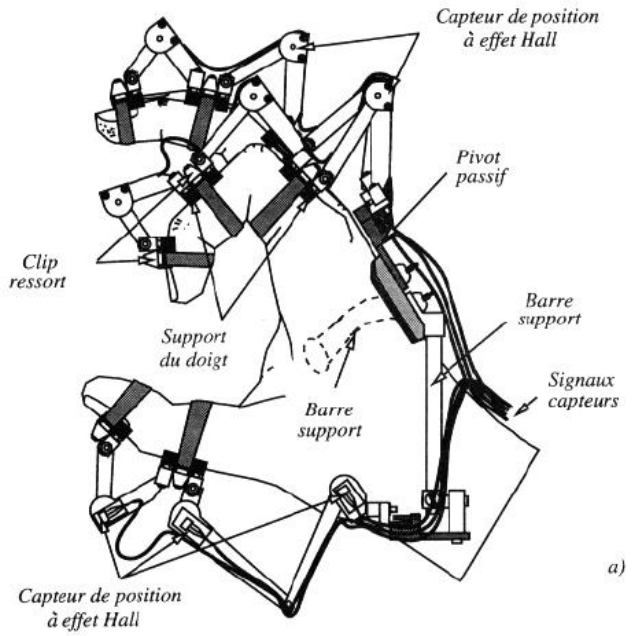


FIG. 7.3 – *Cet exemple est à mettre en parallèle avec la figure précédente. Le système présenté est le* Dextrous Hand Master. *Il décrit un "gant de données" permettant l'acquisition d'un ensemble de degrés de liberté relatifs à la position, l'orientation de la main dans l'espace ou encore la position angulaire des phalanges (d'après (Burdea et Coiffet, 1994)).*

7.4 Retour d'effort

Les systèmes actuels de retour tactile ou de force étant encore trop peu développés pour permettre leur utilisation dans le cadre d'une simulation de chirurgie ouverte, nous ne nous intéresserons, à partir d'ici, qu'au retour d'effort pour des simulations de chirurgie minimalement invasive (laparoscopie, cœlioscopie, etc.). De ce fait, les sensations tactiles sont presque inexistantes. La figure (7.4) illustre ce point en présentant la variation de la largeur de bande sensorielle de la main pour différents types de manipulations d'objets. On voit ainsi qu'un geste caractéristique en chirurgie ouverte est à classer dans la catégorie "saisie en précision" alors que pour la chirurgie laparoscopique il serait plutôt dans la catégorie "saisie en puissance - préhension".

Le but du retour d'effort en réalité virtuelle est de simuler le poids d'un objet, son inertie ou son contact avec des surfaces rigides ou déformables. Il est donc nécessaire de concentrer principalement le retour d'effort au niveau du poignet ou de l'avant bras de l'opérateur. Les premiers travaux sur le retour d'effort sont issus des développements en robotique sur la téléopération. Dans ce cas, deux bras articulés dotés de capteurs de position et d'actionneurs électriques sont utilisés. Le bras "esclave" reproduit alors les mouvements du bras "maître", manipulé par l'opérateur. Afin que ce dernier ressente les contacts et effort ressentis au niveau du bras "esclave", un retour d'effort est délivré.

Ce type de bras manipulateur n'a cependant pas donné lieu à des développements à plus grande échelle, ni à des produits commerciaux, du fait de sa relative complexité. Par ailleurs,

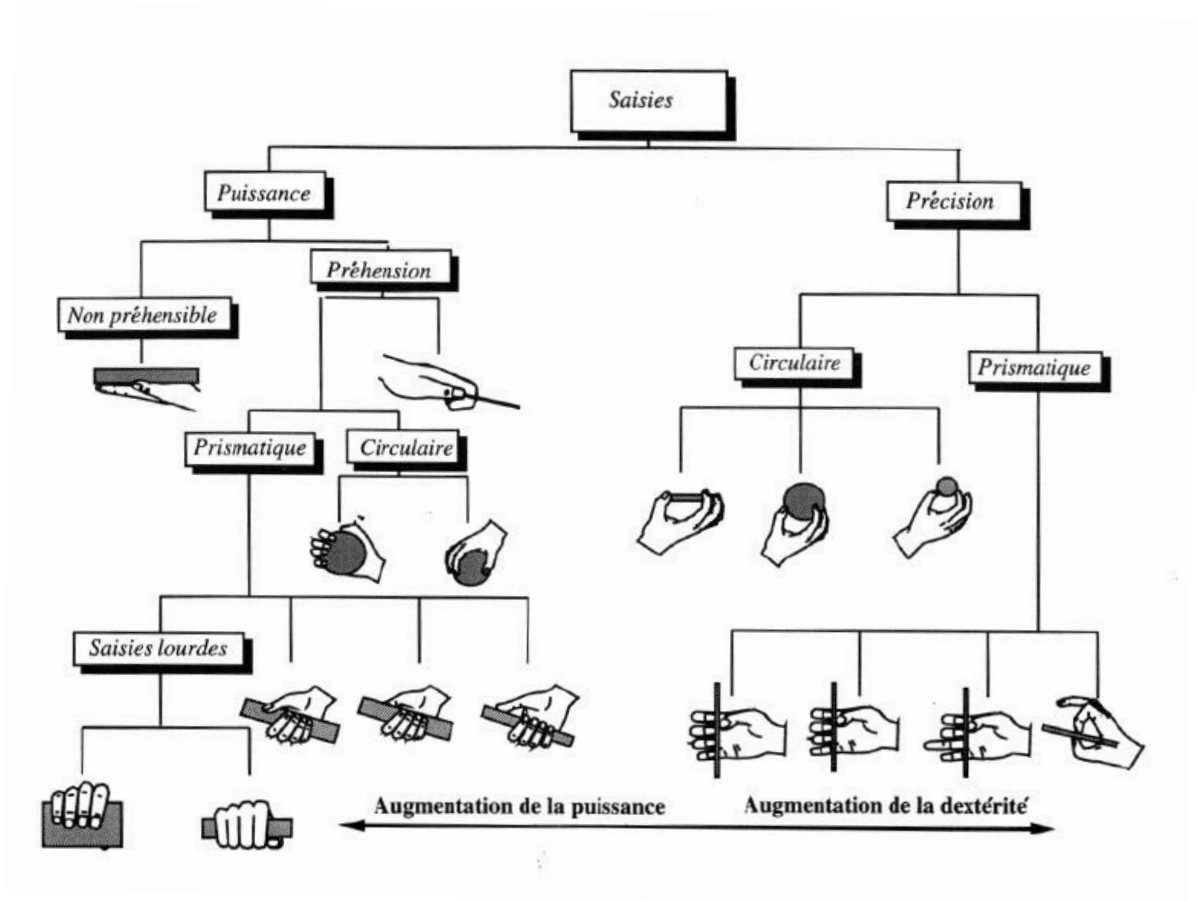


FIG. 7.4 – *Quelques exemples de géométries caractéristiques de la main lors de différents gestes de saisie (d'après (Cutkosky et Howe, 1990)).*

le manque de portabilité et la manipulation difficile de ce type de système restent un problème important pour l'opérateur.

Dans ce qui suit, nous allons présenter deux types de systèmes pour le retour d'effort pouvant être utilisés en simulation de chirurgie laparoscopique. Le premier type repose sur une architecture similaire aux joysticks utilisés en avionique. Le second modèle utilise un ensemble de poulies et de bras articulés, sur un principe similaire à un pantographe.

Il existe encore d'autres systèmes, basés sur diverses architectures. Ils sont en général technologiquement plus développés que les dispositifs de retour tactile. Une description de certains de ces systèmes figure à l'annexe (D).

Une des caractéristiques de la chirurgie endoscopique est que chaque instrument passe par un point fixe, le trocart (cf. introduction-figure 1). Cette configuration particulière explique que les systèmes de type "joystick" soient relativement bien adaptés pour la restitution des forces. Les deux dispositifs suivants reposent sur une technologie très proche, le second étant conçu spécialement pour des applications de chirurgie laparoscopique.

- **Impulse Engine**[2]

2. IMMERSION Corporation - http://www.immerse.com

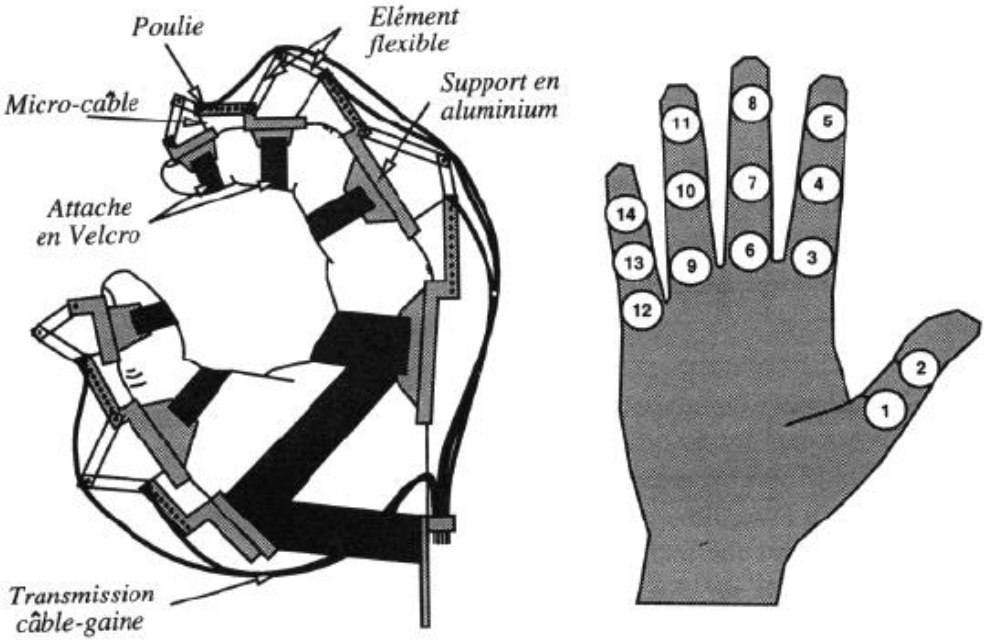


FIG. 7.5 – *Système "LRP Portable Master", d'après (Bouzit et al., 1993).*

Le système *Impulse Engine 2000* est un joystick à retour d'effort permettant un suivi de mouvement précis selon deux degrés de liberté. Les forces sont également restituées selon ces deux degrés de liberté. L'inertie du système et les forces de frictions sont relativement faibles. La largeur de bande pour le retour de force est assez élevée mais cependant pas assez pour restituer tout type de sensation. L'ensemble des caractéristiques techniques est résumé dans le tableau 7.1.

L'*Impulse Engine* est prévu pour être interfacé avec un PC, via une carte au format ISA dont le bus d'entrées/sorties autorise des fréquences de transfert de l'ordre de 10 kHz. La transmission des forces est effectuée par un système de câbles délivrant ainsi un couple de transmission régulier, avec une compliance réduite et de faibles forces de friction.

Il est possible de connecter deux dispositifs *Impulse Engine* à la même station de travail.

Degrés de liberté	2 (suivi du mouvement) - 2 (retour d'effort)
Espace de travail	6" x 6" - 15.2 x 15.2 cm
Forces de friction	<0.5 oz (0.14 N)
Force maximale restituée	2lbs. - 8.9N
Résolution des encodeurs optiques	0.0008" - 1100 dpi
Largeur de bande	120 Hz

TAB. 7.1 – *Caractéristiques techniques du système* Impulse Engine 2000.

- **Laparoscopic Impulse Engine**

Ce système à retour d'effort reprend de nombreuses solutions techniques utilisées sur le *Impulse Engine 2000*. Il possède cinq degrés de liberté, trois pour représenter les dépla-

FIG. 7.6 – *Le joystick* Impulse Engine 2000.

cements dans l'espace, un quatrième pour la rotation autour de l'axe du trocart et un cinquième associé à l'ouverture de la pince. Trois de ces degrés de liberté sont instrumentés en retour d'effort. Deux *Laparoscopic Impulse Engine* peuvent être combinés pour permettre l'usage simultané de deux outils.

L'unité de contrôle recommandée est un PC, en raison de la connectique utilisée (carte de conversion numérique/analogique au format ISA).

La précision des encodeurs utilisés pour le suivi des positions (selon trois degrés de liberté) est relativement élevée. Cela s'explique par l'architecture particulière du *Laparoscopic Impulse Engine* qui en fait un robot hybride : à la fois robot parallèle (Merlet, 1995; Merlet, 1997) et robot série classique. La plage de forces que le système est capable de restituer, ainsi que la largeur de bande, sont suffisantes pour une application en simulation de chirurgie.

La transmission des forces est également réalisée via un système de câbles et de "cabestans" délivrant ainsi un couple assez élevé et progressif. Les tests que nous avons menés (tests qualitatifs) ont montré une faible compliance mais des forces de friction non négligeables.

Remarque : les chiffres présentés dans les tableaux (7.1 et 7.2) sont des données constructeur. Nous n'avons pas pu les vérifier par manque d'instruments de mesures adaptés.

- **Le système PHANToM**[3]

  Le *PHANToM* a été développé au Massachussets Institute of Technology. Il s'agit d'un système à retour d'effort de conception évolutive, sur lequel peuvent être adaptés plusieurs instruments. Le principe mécanique est différent de celui du système précédent et fait appel à un système de bras articulés et de poulies. Cette conception rend le dispositif

3. Sensable Devices Incorporation - Boston - MA

Degrés de liberté	5 (suivi de mouvement) 3 (retour d'effort)
Espace de travail	4" x 9" x 9" (10 x 23 x 23 cm)
Résolution des encodeurs optiques	0.0009" (1100 dpi)
Force maximale restituée	2 lbs. (8.9 N)
Forces de friction	<0.5 oz (0.14 N)
Largeur de bande - axe linéaire	650 Hz
Largeur de bande - axes de rotation	120 Hz

TAB. 7.2 – *Spécifications techniques du système* Laparoscopic Impulse Engine.

FIG. 7.7 – *Laparoscopic Impulse Engine.*

plus modulable que le *Laparoscopic Impulse Engine*. Certaines caractéristiques techniques sont détaillées dans le tableau 7.3. Dans sa version la plus simple, l'utilisateur place son doigt dans une sorte d'étrier, permettant de ressentir des forces relativement faibles (cf. figure 7.8). Pour des applications plus complexes, plusieurs étriers ou plusieurs systèmes à retour de force peuvent être couplés. Il est également possible de connecter d'autres périphériques tels qu'un pointeur ou des supports pour différents outils.

La position de l'étrier est suivie grâce à des encodeurs optiques alors que les moteurs contrôlent les forces exercées selon trois degrés de liberté. De ce point de vue, il n'y a aucune différence avec le système précédent. Les couples moteurs sont transmis par l'intermédiaire de câbles prétendus et de démultiplicateurs. À l'extrémité de la liaison se trouve un cardan, possédant trois degrés de liberté, fixé à une sorte de dé à coudre - ou d'étrier. Les trois axes de rotation du cardan s'intersectant au niveau de l'étrier, il ne peut y avoir de couple autour de ce point, mais seulement une force "pure". Ceci permet à l'utilisateur de pouvoir se placer selon n'importe quelle orientation et de représenter

l'étrier comme un simple point dans la scène virtuelle. Cela peut permettre de simplifier la gestion des collisions et le calcul des forces d'interaction.
Le *PHANToM* a été conçu de telle manière que la matrice de transformation entre l'angle de rotation d'un moteur et la translation de l'étrier soit presque diagonale (Massie et Salisbury, 1994). Le découplage des trois moteurs permet de réduire les frottements et l'inertie. Le modèle de ce système est donc un robot série, avec une plus faible précision théorique, dans la mesure de déplacement et le contrôle en force, que le *Laparoscopic Impulse Engine*.
Une caractéristique intéressante dans la conception du *PHANToM* est que deux des trois moteurs se déplacent de façon à contrebalancer le poids des liaisons mécaniques aboutissant à l'étrier. Le système étant statiquement équibibré, il n'est pas nécessaire, pour avoir un retour précis des forces, de compenser le poids des mécanismes en appliquant des couples moteurs supplémentaires. Nous verrons que c'est un avantage par rapport au *Laparoscopic Impulse Engine*.

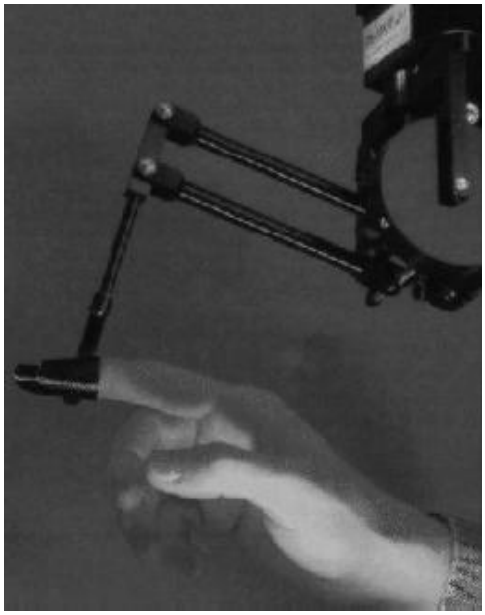


FIG. 7.8 – *Système à retour d'effort PHANToM.*

La carte d'interface est compatible avec la norme de bus ISA, ce qui implique également l'utilisation d'un PC pour le contrôle du système à retour d'effort. Chacun des six degrés de liberté est codé sur 12 bits ce qui permet une bonne résolution dans la mesure des déplacements. La précision est cependant inférieure à celle du *Laparoscopic Impulse Engine*, en raison de l'architecture série et non parallèle du robot. L'espace de travail est par contre plus important sur le *PHANToM*.

7.5 Architecture du simulateur

Très peu d'équipes ont recours, à l'heure actuelle, à un périphérique spécialement conçu pour la simulation de chirurgie. Parmi celles-ci, seules deux équipes ont, à notre connaissance,

Résolution spatiale nominale	400 dpi - 0.07 mm
Espace de travail	5x7x10 in - 8x17x25 cm
Force de friction	0.1 à 0.3 oz - 0.03 à 0.08 N
Force maximale restituée	1.9 lbf - 8.5 N
Force maximale en boucle fermée	20 lbs/in - 3.5 N/mm
Inertie (masse apparente au niveau de l'étrier)	<0.22 lbm - <100g

TAB. 7.3 – *Caractéristiques techniques du système PHANToM.*

utilisé un système à retour d'effort.

- KISMET [4] : l'environnement de simulation KISMET intègre une instrumentation complexe introduite dans un mannequin, représentant fidèlement la configuration d'une opération laparoscopique. La position des instruments est donnée par des capteurs de position. Par contre, les instruments actuels ne disposent pas, à notre connaissance, de retour d'effort (Kuehnapfel et Neisius, 1993).
- LIFL [5] : l'équipe de LIFL a mis au point récemment un système pour l'entraînement dans lequel deux instruments - des pinces - peuvent être manipulés avec le même nombre de degrés de liberté que dans la réalité. Le mannequin utilisé dans KISMET est remplacé par une simple grille métallique, afin de simplifier la mise en place des éléments. Le suivi de la position des pinces est possible mais le retour d'effort n'est pas encore possible (Jambon et al., 1997).
- EPFL [6] : le prototype de système à retour d'effort conçu à l'Institut de micro-technique de l'EPFL (Baumann et Glauser, 1996) est également destiné à la simulation de chirurgie laparoscopique. Leur système, baptisé *PantoScope* permet de disposer de retour d'effort selon quatre degrés de liberté. Le principe général est celui d'un robot parallèle à géométrie sphérique, basé également sur une architecture proche de celle d'un pantographe.
- MERL [7] : les recherches menées au MERL sont essentiellement centrées autour de la modélisation des déformations. Ils ont donc eu recours à un système commercial, le *PHANToM*, présenté précédemment. Ce système n'est utilisé, à l'heure actuelle, que pour simuler des contacts avec des objets rigides.

Certaines de ces équipes ont développé leur propre dispositif à retour d'effort. C'est une solution qui demande des compétences très pointues en robotique. Cependant, cela reste la solution idéale pour disposer de toutes les fonctionnalités voulues.

Ne disposant pas de telles compétences, nous avons retenu le *Laparoscopic Impulse Engine* pour le développement du prototype de simulateur (cf. chapitre 8). Ce choix tient autant à ses caractéristiques techniques intéressantes qu'à sa conception spécialement adapté à la simulation de chirurgie laparoscopique.

Comme nous l'avons brièvement mentionné auparavant, le *Laparoscopic Impulse Engine* est considéré comme un robot hybride, c'est-à-dire en partie un robot parallèle et en partie

4. KISMET: bla bla bla
5. LIFL: bla bla bla
6. EPFL: Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne.
7. MERL: Mitsubishi Electric Research Lab, Cambridge, Massachusetts.

un robot série. Un robot parallèle est une structure comportant plusieurs chaînes cinématiques connectées entre elles. Les principaux avantages d'une telle structure sont :

- une valeur de la rigidité maximale plus élevée,
- les actionneurs restent sur le châssis et ne se déplacent pas avec la structure mobile,
- il en résulte un poids plus faible, de meilleures accélérations et une vitesse de déplacement plus élevée.

Les principaux inconvénients sont :

- un espace de travail limité,
- l'existence de positions singulières, c'est-à-dire ne pouvant pas être déterminées de façon unique à partir des positions articulaires.

Un robot série, par contre, est moins précis en ce qui concerne la mesure des positions d'un élément mobile - puisqu'il n'y a plus qu'une seule articulation pour contrôler la position d'un élément mobile. Par contre, son avantage tient en un plus grand espace de travail.

Le *Laparoscopic Impulse Engine*, de part sa conception hybride, permet de combiner certains des avantages des deux solutions précédentes. Ainsi, bien que l'espace de travail soit assez réduit, le déplacement de l'axe principal est assez important car son mode de déplacement est associé à la partie "série" de l'architecture du robot. Par contre, la plage de déplacements contrôlée par les deux autres moteurs (cf. figures 7.9 et 7.15) est plus réduite mais la mesure de la position est plus précise. Le calcul de la position exacte de l'extrémité de l'instrument s'avère d'ailleurs non triviale en raison de cette architecture parallèle. Nous y reviendrons plus loin.

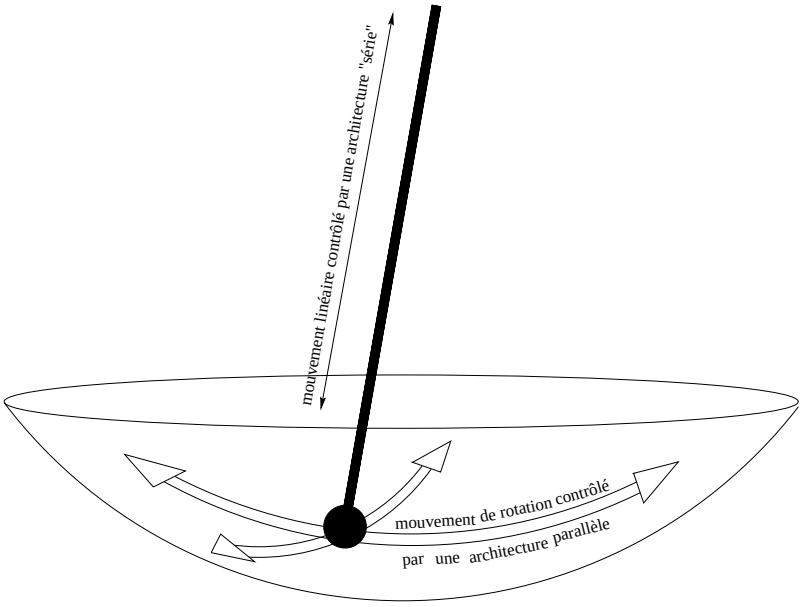


FIG. 7.9 – *Ce schéma illustre les deux types de mouvements caractéristiques du système à retour d'effort. Le déplacement le long de l'axe est associé à un seul moteur et correspond à un robot série. Le déplacement selon les deux autres degrés de liberté est contrôlé par un système mécanique plus complexe relié à deux moteurs. La conception est, dans ce cas, plutôt celle d'un robot parallèle.*

Le *Laparoscopic Impulse Engine* reste également perfectible sur d'autres points. Le degré de liberté associé à l'ouverture de la pince n'est pas instrumenté en retour d'effort. C'est un problème lors de la saisie d'un organe ou d'une partie d'un organe : on n'a pas la sensation de préhension. Il y a également un déséquilibre de l'instrument dû à la présence du moteur le long de l'axe principal. On peut noter également l'existence de frottements le long de cet axe. L'existence de ces frottements n'est pas un problème dans le cadre d'une simulation de chirurgie endoscopique. En effet, dans tels frottements existent également dans la réalité. Ils sont produits par le passage des instruments dans les trocarts, en raison de la présence de joints d'étanchéité destinés à éviter la fuite de CO_2 insufflé dans l'abdomen durant l'opération.

Bien entendu, nous aurions pu également utiliser le système *PHANToM* dans le prototype du simulateur. C'est la solution retenue par Gibson *et al.* dans (Gibson et al., 1997) pour une simulation d'arthroscopie. La différence majeure réside dans la plus grande modularité du *PHANToM* due à sa conception particulière. Cependant, en raison de la spécificité de notre application, qui implique que les instruments chirurgicaux passent par un point fixe, la conception du *Laparoscopic Impulse Engine* - même principe qu'un joystick - s'est avérée mieux adaptée. On évite ainsi de contraindre certains degrés de liberté. Il en résulte une plus grande simplicité algorithmique mais cela évite également des imprécisions dues à la compliance au niveau des degrés de liberté contraints.

7.5.1 Architecture matérielle

Le choix de l'architecture du simulateur dépend de plusieurs critères. Certains sont liés au système *Laparoscopic Impulse Engine*, d'autres sont liés à la méthode de calcul des déformations et aux contraintes de temps-réel. Ce problème reste cependant très ouvert étant donnée la permanente évolution des solutions techniques sur lesquelles nous nous sommes basés.

Les contraintes à respecter sont les suivantes :

- bus de transfert du *Laparoscopic Impulse Engine* au format ISA : cela nécessite l'utilisation d'une machine équipée de ce type de bus. À l'heure actuelle, la solution la plus intéressante consiste à utiliser un PC.
- modularité et performances : la puissance de calcul d'un seul PC n'étant pas suffisante pour assurer l'ensemble des calculs et gérer l'affichage graphique en 3D, une seconde machine est nécessaire pour gérer une partie des calculs. Afin de communiquer entre ces deux machines, deux solutions sont possibles : liaison série ou liaison Ethernet. Pour une plus grande modularité et aussi de meilleurs performances, nous avons choisi la communication par liaison Ethernet.

La solution retenue pour la version *I* de notre simulateur est donc la suivante : système *Laparoscopic Impulse Engine* relié par bus ISA à un un PC Pentium lui-même relié à une station de travail *Dec Alpha Station* 233 MHz équipée d'une carte graphique 3D accélératrice (cf. figure 7.10).

Les avantages de notre solution sont les suivants :

- calcul des forces et des déformations : grâce à notre algorithme, les deux calculs peuvent être faits séparément et à des fréquences différentes (cf chapitre 3). Le calcul des forces est

réalisé sur le PC, alors que le calcul de la déformation et l'affichage du maillage déformé sont faits sur la station Alpha.

- le calcul des forces est effectué sur le PC : ainsi, il n'y a pas de latence entre le moment où elles sont calculées et le moment où elles sont restituées par le système à retour de force. La latence dépend de la vitesse de transfert du bus ISA. Cette vitesse étant d'environ 10 kHz, on dépasse donc largement la gamme de fréquences requises pour le retour d'effort (300 Hz à 500 Hz). Ce point est très important pour le réalisme des sensations.
- la détection de collisions (cf. section 7.5.2) peut être réalisée sur le PC, déchargeant ainsi la seconde machine d'une partie des calculs.

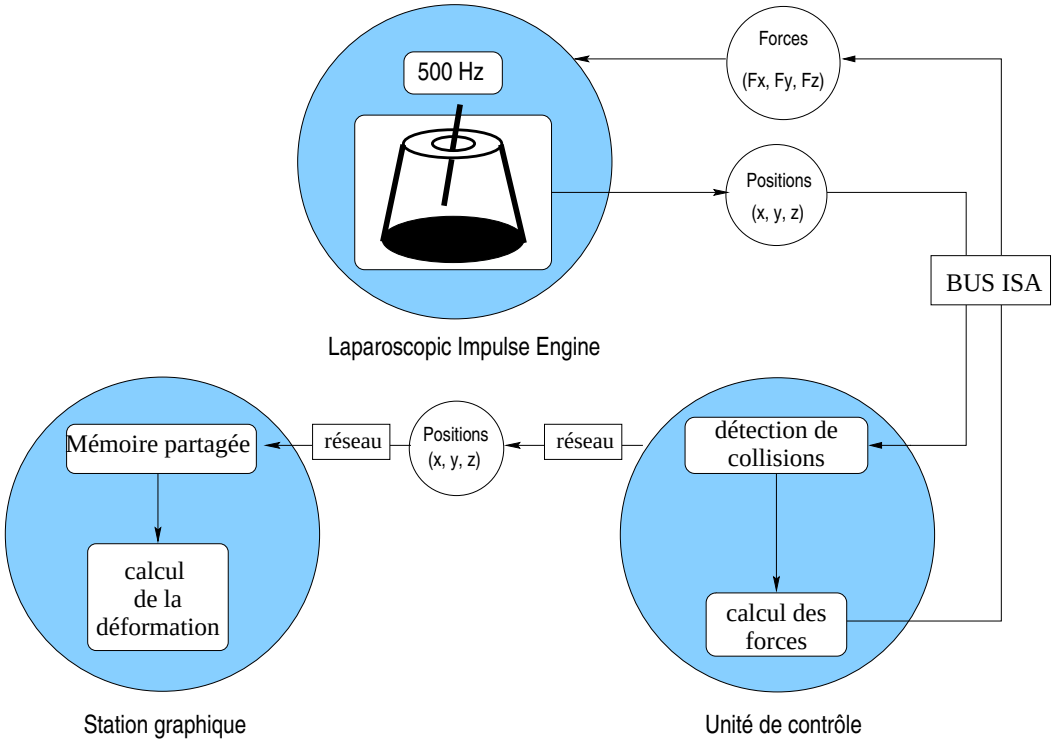


FIG. 7.10 – *Description de l'architecture matérielle du simulateur. Les trois principaux éléments sont le système à retour d'effort, l'unité de contrôle (PC) et la station graphique. Ces trois entités communiquent entre elles par liaison directe (bus ISA) ou via le réseau.*

7.5.2 Détection de collisions

La détection de collisions est un problème bien connu en animation par ordinateur (Boyse, 1979; Moore et Wilhelms, 1988; Foley et al., 1990; Cameron, 1990; Gascuel et al., 1991; Forgue et Shinya, 1991; Von Herzen et al., 1990; Roberts, 1995). Cependant, lorsque s'ajoute la contrainte de temps-réel, la difficulté s'en trouve considérablement accrue. Avec les modèles physiques, la plupart des forces externes sont des forces de contact et en simulation de chirurgie, la déformation est principalement induite par les interactions de l'opérateur. Pour cette raison, un algorithme efficace de détection de collisions est indispensable. Nous n'évoquerons ici que les méthodes pouvant être employées en simulation, c'est-à-dire les méthodes dans lesquelles

la trajectoire suivie par les objets n'est pas définie à l'avance. De nombreux algorithmes ont été proposés pour améliorer les temps de réponse lors du calcul d'intersections entre des objets rigides, le plus souvent polygonaux. Des bibliothèques sont mêmes disponibles - *rapid*, *v-collide*, *i-collide*, etc. - et offrent d'excellentes performances même en présence d'objets complexes. La plupart des algorithmes proposés pour résoudre ce problème nécessitent une structure de donnée bien adaptée ainsi qu'une étape de pré-calculs durant laquelle sont déterminés les éléments nécessaires à la simplification du problème. On trouve généralement une subdivision du volume des objets en un ensemble de boîtes englobantes, avec parfois plusieurs niveaux d'échantillonnage.

La complexité du problème de la détection de collisions dépend également de la modélisation des objets. Ainsi, l'utilisation de surfaces implicites (Gascuel, 1993; Desbrun et Gascuel, 1995) pour décrire la surface d'un solide permet de simplifier les calculs. En effet, une surface implicite se définissant par une équation du type $f(x, y, z) = 0$, il est alors très facile de déterminer si un point se trouve à l'intérieur ou à l'extérieur du volume défini par cette surface. Par contre, ces modèles nécessitent des temps de calcul trop élevés pour des applications en temps-réel. Il est également difficile de gérer les auto-collisions (ou les intersections entre deux surfaces implicites) puisqu'il devient alors nécessaire d'avoir une représentation discrète de la surface (d'une des deux surfaces).

Une méthode a été proposée par Meseure dans (Meseure et Chaillou, 1997) pour le traitement des interactions. Cette méthode est assez générale et reste ainsi applicable à un grand nombre de modèles polyhédriques. Les points abordés concernent l'accélération des calculs de détection de collision entre différentes primitives géométriques ainsi que la déformation du modèle au moment du contact. Une subdivision du maillage est réalisée au niveau des zones de collision, afin d'améliorer le réalisme visuel. Par contre, les fréquences de calcul sont beaucoup trop faibles pour permettre l'utilisation d'un périphérique à retour de force avec des modèles de géométrie complexe. Le problème de l'auto-collision - problème fréquent lorsque le maillage subit des modifications topologiques - n'a pas été résolu.

Les quelques méthodes que nous venons de présenter montrent clairement que la détection de collisions en temps-réel nécessite des compromis, comme c'est souvent le cas lorsque des fréquences de calcul élevées doivent être respectées. Les algorithmes que nous allons présenter par la suite reposent donc sur certaines hypothèses. En particulier, ils sont relativement spécifiques au type de simulation qui nous intéresse et sont, par conséquent, difficilement généralisables.

7.5.2.1 Principe général

L'algorithme que nous allons présenter ici ne traite pas tous les types de collisions possible. Il a été développé de façon à répondre à un ensemble de critères inhérents à la simulation de chirurgie laparoscopique. Ainsi, nous ne considérons que les collisions intervenant entre un ou plusieurs objets rigides simples et un objet complexe *déformable*. L'objet rigide représente un instrument chirurgical. L'objet déformable correspond à l'organe avec lequel auront lieu les interactions.

Afin de pouvoir contrôler le niveau de précision des collisions, l'instrument peut être discrétisé par un nombre variable de points (cf. figure 7.11). Le test de collision est alors évalué

en chacun de ces points. L'algorithme que nous avons développé donne alors des temps de réponse dépendant linéairement du degré de discrétisation de l'outil. En pratique, seuls quelques points situés à l'extrémité de l'instrument sont utiles pour la détection de collisions. Dans le cas où plusieurs outils peuvent interagir avec le modèle, il est nécessaire de traiter également les collisions entre les instruments eux-mêmes. Pour cela, la tige des outils doit comporter des points supplémentaires sur lesquels portera la détection de collisions.

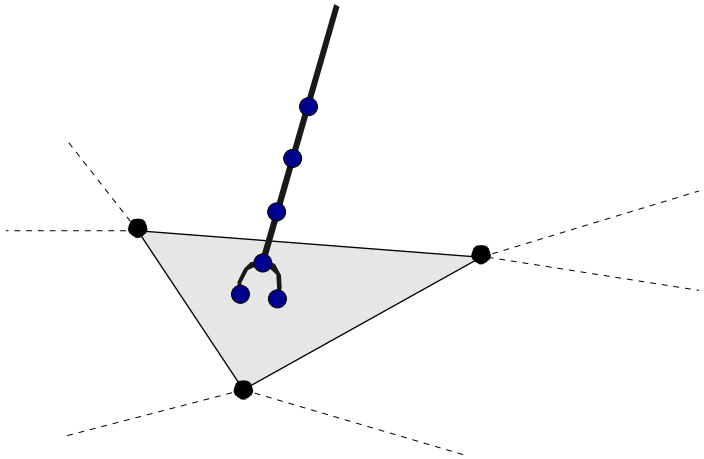


FIG. 7.11 – *L'instrument chirurgical est modélisé par un objet rigide simple puis est discrétisé en un ensemble de points utilisés pour la détection de collisions.*

7.5.2.2 Algorithme 1

L'hypothèse de départ de cet algorithme est que les contacts entre l'instrument et le modèle déformable se produisent alors que ce dernier est dans sa configuration d'équilibre. Ceci s'explique par le fait que la loi de comportement est élastique et donc, en l'absence de forces - ou de contacts - le modèle revient toujours dans sa configuration d'équilibre. Le problème de la détection de collisions est alors "équivalent" à la détermination du contact entre deux objets rigides.

L'idée générale est d'avoir une détection de collisions à plusieurs niveaux. Une sorte de système multi-échelle dans lequel le niveau le plus élevé correspond à la détection la plus précise - et donc plus coûteuse en temps de calcul - mais moins d'éléments doivent être testés. Dans notre cas, le nombre de niveaux est fixé à trois.

Le temps de calcul nécessaire à la détection de collisions se décompose alors comme suit :

$$t_{total} = t_1 + t_2 + t_3$$

où t_i représente le temps de calcul de l'étape i.

Notre algorithme est basé sur un partitionnement de l'espace en une grille régulière (Moore et Wilhelms, 1988; Roberts, 1995) associée à une structure de données appropriée permettant d'associer très rapidement un élément de la grille à la position courante d'un point de l'objet rigide. La seconde partie de la méthode est une méthode géométrique classique.

Voici, plus en détail, les principales étapes de cet algorithme :

- Soit $\{\boldsymbol{p_k}\}$ l'ensemble des points utilisés pour discrétiser l'instrument chirurgical. Le nombre de points est défini selon le type d'instrument utilisé. Pour une simulation faisant intervenir deux instruments, il est nécessaire de définir des points de contact le long de l'axe principal de ces derniers.
- La boîte englobante du solide déformable, pris dans sa configuration d'équilibre, est déterminée puis subdivisée en un ensemble de parallélépipèdes - également appelés *buckets* par la suite. Le nombre de buckets dans les directions x, y et z est paramétrable et est choisi en fonction de la géométrie de l'objet, le paramétrage idéal consistant à avoir un nombre presque identique de sommets du maillage dans chaque bucket. Le nombre global de buckets a également une influence sur les performances de l'algorithme. Une valeur peu élevée permettra de réduire au maximum les temps de calcul du niveau 1 de l'algorithme mais au détriment du temps passé dans les niveaux 2 et 3. Un nombre élevé de buckets aura l'effet inverse. L'expérience nous a montré que les temps de calcul de cette étape de l'algorithme sont peu sensibles à l'augmentation du nombre de buckets. On préférera donc une décomposition assez fine du volume, permettant ainsi de réduire le temps passé dans les niveaux suivants. Certaines conditions doivent cependant être vérifiées. En particulier, il est nécessaire qu'aucun bucket ne soit vide. Il doit contenir au moins un nœud du maillage déformable. En effet, si l'on regarde la figure (7.12), on peut voir que certains buckets ne contiennent aucun nœud du maillage. Lorsque la structure de données associée à un bucket ne contient aucun élément, nous faisons alors l'hypothèse que ce bucket n'est pas intersecté par une portion de surface. C'est pourquoi il est important que chaque bucket de la surface contienne au moins un nœud du maillage.
- Une table de hachage est ensuite créée et indexée sur les coordonnées de chaque nœud $\boldsymbol{n}$ situé dans un bucket. Ainsi, lorsqu'un point mobile $\boldsymbol{p_k}$ pénètre dans la boîte englobante du solide déformable, on utilise la table de hachage pour déterminer la référence du bucket dans lequel se trouve ce point. Pour cela, il est nécessaire de définir une fonction de code appropriée, permettant de calculer une entrée dans la table et trouver la liste des nœuds correspondant à la même entrée - ce qui signifie que les nœuds sont dans le même bucket que $\boldsymbol{p_k}$).

  La fonction de code utilisée est la suivante :

$$code = x + y \times N_{buckets_x} + z \times N_{buckets_y} \times N_{buckets_x}$$

  avec

$$x = int(\frac{p_x - BBoxMin_x}{bucket_{width_x}})$$

$$y = int(\frac{p_y - BBoxMin_y}{bucket_{width_y}})$$

$$z = int(\frac{p_z - BBoxMin_z}{bucket_{width_z}})$$

  où *int* est une fonction donnant la partie entière de son argument, $bboxmin_x$, $bboxmin_y$

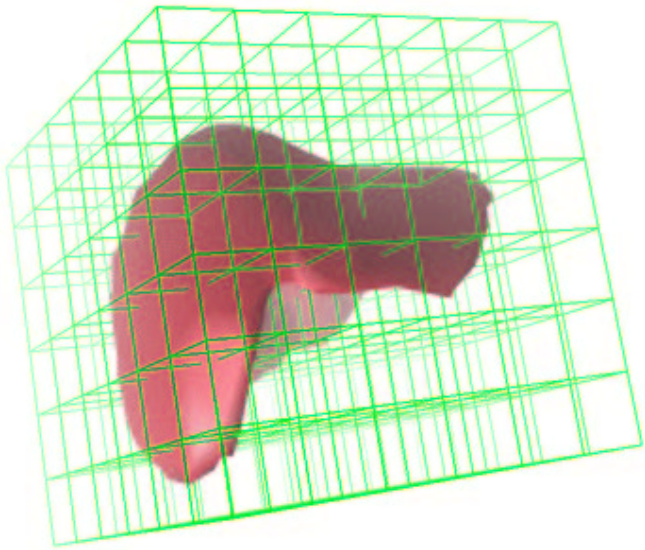


FIG. 7.12 – *La boîte englobante du maillage est subdivisée en un ensemble d'éléments parallélipédiques associés à une table de hachage.*

et $bboxmin_z$ sont les bornes inférieures de la boîte englobante. Les variables $bucket_{width_x}$, $bucket_{width_y}$ et $bucket_{width_z}$ représentent les dimensions d'un bucket et $N_{buckets_x}$ et $N_{buckets_y}$ sont les nombre de buckets dans les directions x et y.

- Les tâches effectuées selon chacun des trois niveaux de l'algorithme sont :
  - **Niveau 1 - temps t_1**
    Pour l'ensemble des nœuds $\{\boldsymbol{n_i}\}$ situés dans le même bucket que $\boldsymbol{p_k}$, la distance euclidienne entre $\boldsymbol{p_k}$ et chaque $\boldsymbol{n_i}$ est calculée. Soit d_{min} la distance minimale. On calcule la distance entre $\boldsymbol{p_k}$ et chaque nœud $\boldsymbol{n_j}$ situé dans un des 26 buckets voisins. Si une distance d inférieure à d_{min} est trouvée alors $d_{min} = d$. Le temps de calcul est fonction du nombre de buckets et du nombre de nœuds par bucket. Il est préférable d'avoir un faible nombre de nœuds, en moyenne, par bucket.
  - **Niveau 2 - temps t_2**
    Soit $\boldsymbol{n}$ le nœud associé à la distance minimale d_{min}. Ce nœud est adjacent à un ensemble de triangles qu'il est facile de déterminer en ayant recours à une structure de données associée à la triangulation.
  - **Niveau 3 - temps t_3**
    Pour chaque triangle adjacent à $\boldsymbol{n}$, on cherche s'il est intersecté par le segment $[P_t, P_{t-1}]$ défini par les positions du nœud $\boldsymbol{p_k}$ aux instants t and $t-1$ (cf. figure 7.13). Ainsi, quelle que soit la vitesse de déplacement de l'instrument chirurgical, on pourra toujours déterminer le point d'intersection, seule la longueur du segment $[P_t, P_{t-1}]$ variant en fonction de la vitesse.

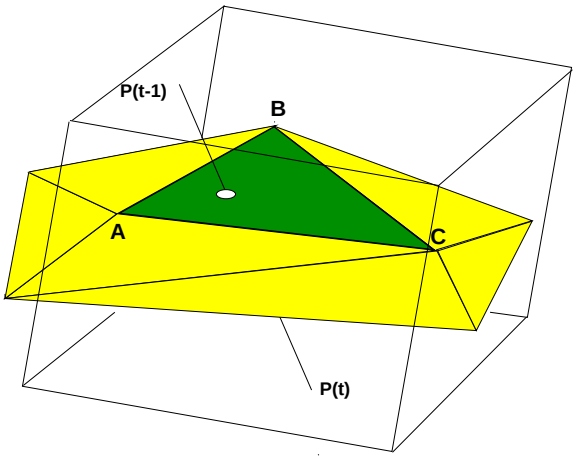


FIG. 7.13 – *Le point de collision exact est déterminé comme étant le point d'intersection du segment* $[P_t, P_{t-1}]$ *avec le triangle (ABC).*

La précision de cet l'algorithme est sub-triangulaire. Les coordonnées barycentriques du point d'intersection dans le triangle sont calculées afin d'être transmises, par la suite, au module réalisant le calcul de la déformation.

7.5.2.3 Algorithme 2

Pour prendre en compte le fait que le maillage ne revient plus nécessairement à sa position d'équilibre en l'absence de contact avec un instrument chirurgical, nous avons mis en œuvre un nouvel algorithme. Il peut être utilisé pour le calcul de collisions avec un modèle masses/tenseurs seul ou avec un modèle hybride.

Nous utilisons toujours la même idée que précédemment, sauf que la structure de donnée associée à la table de hachage doit être remise à jour pour prendre en compte la déformation du maillage. Étant données les fréquences que nous nous sommes imposées, la table de hachage doit pouvoir être mise à jour très rapidement (entre 300 et 500 fois par seconde). La première conséquence de cette contrainte est une limitation du nombre de buckets. En effet, à chaque déformation du modèle, on doit mettre à jour une quantité de données proportionnelle au nombre de buckets.

Par rapport à l'algorithme précédent, le temps de calcul à chaque itération devient :

$$t_{total} = t_1 + t_2 + t_3 + t_{update}$$

avec t_i le temps de calcul correspondant à l'étape i et t_{update} le temps nécessaire à la mise à jour de la table de hachage.

Les calculs réalisés à chaque étape de l'algorithme restent les mêmes que précédemment, on utilise les mêmes fonctions de code, de calcul du nœud le plus proche et de calcul d'intersection. La principale différence, dans le cas d'un modèle hybride, vient du fait qu'il est nécessaire d'avoir une table de hachage pour chacun des deux maillages, en raison de leurs structures de données différentes. On crée par conséquent deux boîtes englobantes, comme le montre la figure (7.14).

- **Niveau 1 - temps** $t_1 + t_{update}$

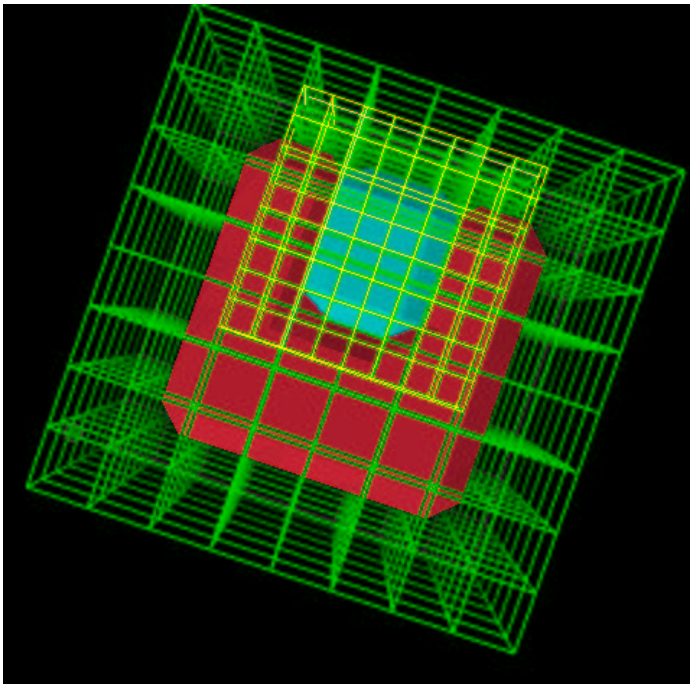


FIG. 7.14 – *Le calcul des collisions avec un modèle hybride nécessite la définition de deux tables de hachage. Chacune d'entre elles est associée à la boite englobante d'un maillage.*

Mise à jour des tables de hachage puis détermination du nœud le plus proche de $\boldsymbol{p_k}$ selon le même principe que dans l'algorithme précédent.

- **Niveau 2 - temps** t_2

  Idem que dans l'algorithme précédent.

- **Niveau 3 - temps** t_3

  Idem que dans l'algorithme précédent.

Ces deux algorithmes ont éte mis en œuvre dans différentes situations : la plus simple considère un seul point mobile entrant en collision avec le solide déformable à l'équilibre, la plus complexe considère plusieurs points mobiles (mais appartenant au même objet rigide) entrant en collision avec le maillage *déformé*. La table (7.4) résume les temps de calcul obtenus dans certaines de ces configurations. Bien que les fréquences d'interaction décroissent avec l'augmentation du nombre de points mobiles, celles-ci restent encore dans le domaine du temps-réel.

	1 point mobile	*5 points mobiles*	*10 points mobiles*
Maillage à l'équilibre	<0.002 ms	<0.002 ms	0.002 ms
Maillage déformé	0.003 ms	0.005 ms	0.010 ms

TAB. 7.4 – *Performances des algorithmes de détection de collision dans différentes situations. Le maillage utilisé est celui présenté en figure (7.14).*

7.5.3 Architecture logicielle

Nous avons travaillé principalement sur les deux points suivants : (a) calcul exact de la position de l'endoscope et contraintes à appliquer aux moteurs en fonction des forces calculées; (b) mise en place d'un protocole de communication rapide entre les deux machines de façon à limiter la latence.

- **amélioration du *driver*** : le *driver* livré avec le système de retour de force permet la gestion des fonctions "bas-niveau" de la carte. Par contre, les fonctions "haut-niveau" ont dues être en grande partie réécrites afin de permettre un suivi précis de la position de l'endoscope. En effet, les robots parallèles, en raison de leur conception particulière, rendent difficile la détermination de la position d'un élément mobile à partir de la seule connaissance des angles de rotation de chacun des moteurs. Le *modèle géométrique direct* des robots parallèles consiste alors à trouver les postures possibles pour un élément de la chaîne cinématique du robot (plate-forme, extrémité d'un segment, etc.) lorsque les valeurs des variables articulaires sont données (Merlet, 1997; Merlet, 1995). Ce problème peut devenir très complexe pour certains robots parallèles, alors qu'il est très simple pour les robots série. Par contre, le problème inverse, appelé *modèle cinématique inverse*, consistant à déterminer les valeurs des variables articulaires permettant de placer à un endroit déterminé un élément du robot, est plus complexe pour un robot série que pour un robot parallèle.
  Dans notre cas, nous souhaitons déterminer la position de l'extrémité de la tige de l'endoscope - ou d'un instrument chirurgical - à partir des angles de rotation des trois moteurs. On doit donc utiliser un modèle géométrique direct. Le problème est simplifié par rapport à un robot entièrement parallèle. De plus, la géométrie particulière des liaisons entre les moteurs/encodeurs et la tige de l'endoscope entraîne les caractéristiques suivantes (cf. figures 7.15 et 7.16) :
  - l'extrémité de l'endoscope se déplace sur une calotte sphérique de rayon variable.
  - l'angle de rotation maximal autour de l'axe de chacun moteurs 1 et 2 est d'environ 60°.

  Les encodeurs optiques situés sur les moteurs mesurant un déplacement relatif, il est nécessaire de définir une position de référence. Cette position est choisie de telle façon que les angles α_0 et β_0 associés aux moteurs 1 et 2 soient de 30° environ (la tige de l'endoscope est à la verticale). Ainsi, le calcul de la position (X_t, Y_t, Z_t), à l'instant t de l'extrémité de l'endoscope à partir des valeurs de α_t, β_t et de L_t est :

$$\begin{cases} X_t = L_t \; sin(\alpha_t - \alpha_0) \\ Y_t = L_t \; sin(\beta_t - \beta_0) \\ Z_t = L_t^2 \; \sqrt{(1 - sin^2(\alpha_t - \alpha_0) - sin^2(\beta_t - \beta_0))} \end{cases} \tag{7.1}$$

  avec L_t la longueur entre l'extrémité de l'endoscope et le point fixe.
  Comme

$$-30^o < \alpha_t - \alpha_0 < 30^o$$

on a

$$-0.5 < sin(\alpha_t - \alpha_0) < 0.5$$

Il en est de même pour β_t. Par conséquent,

$$\sqrt{(1 - sin^2(\alpha_t - \alpha_0)t - sin^2(\beta_t - \beta_0))}$$

est définie pour n'importe quelles valeurs de α_t et β_t comprises dans les limites précédentes.

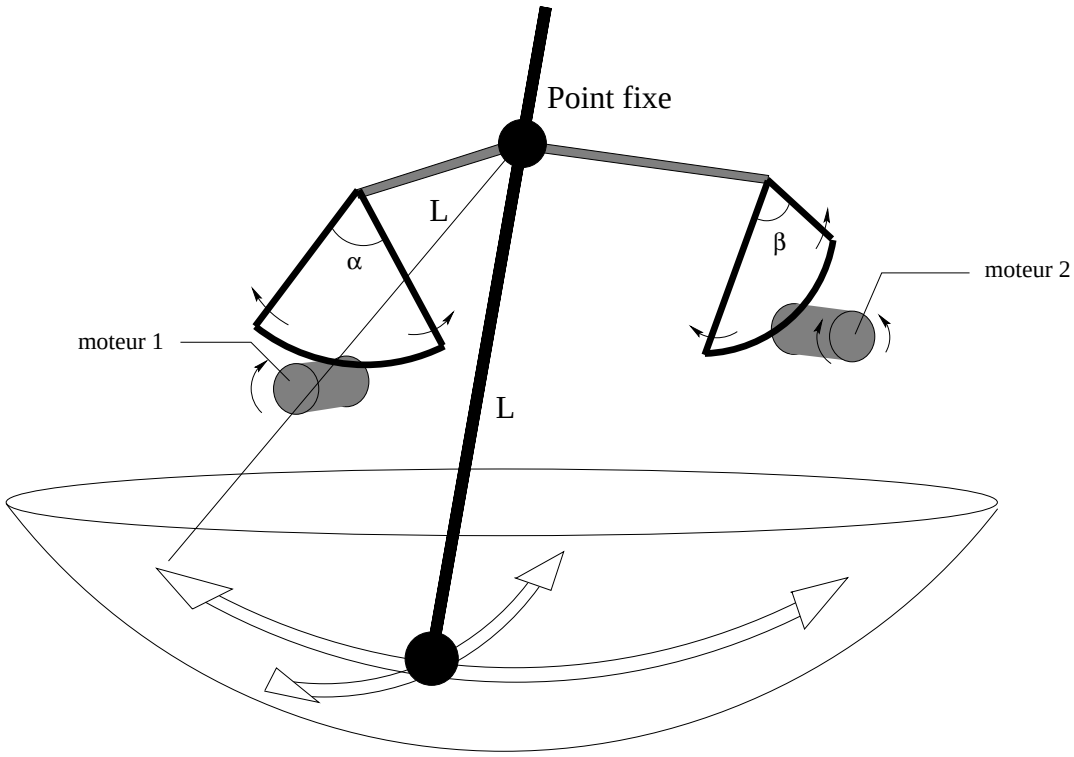


FIG. 7.15 – *Ce schéma illustre le mode de déplacement de l'extrémité de l'endoscope. La géométrie particulière du système et le passage par un point fixe, impliquent que ce déplacement s'effectue sur une calotte sphérique, de rayon variable. Le rayon L de la sphère est défini par la longueur de l'axe de l'endoscope. La position sur la calotte sphérique est ensuite déterminée par les valeurs de α et β.*

En ce qui concerne le calcul des forces, il est nécessaire de prendre en compte le déséquilibre de l'instrument dû à la présence du moteur 3 situé le long de l'axe, nous effectuons un contrôle en force (cf. figure 7.17). La force finale, dans laquelle le poids du moteur est contrebalancé, s'exprime :

$$\boldsymbol{F_c} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F_{m1}} \tag{7.2}$$

où $\boldsymbol{F_{m1}}$ est le couple exercé sur le moteur 1.

- **Protocole de communication numéro 1**

  La répartition des tâches sur plusieurs machines nécessite de pouvoir communiquer entre ces machines. Dans notre cas, les informations doivent être transmises à des fréquences

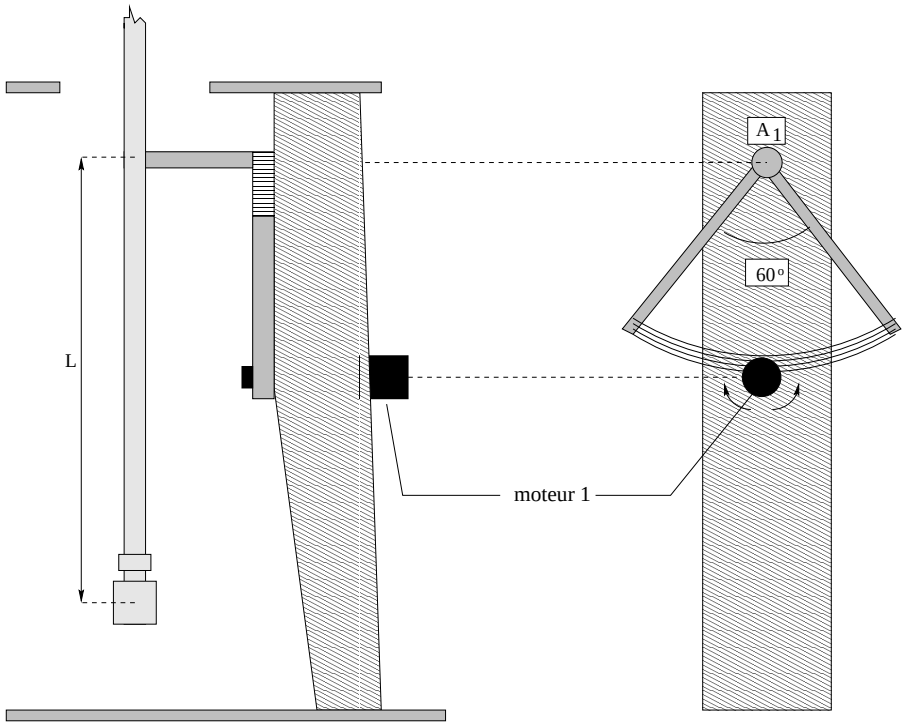


FIG. 7.16 – *Configuration mécanique du* Laproscopic Impulse Engine. *Cette configuration particulière ainsi qu'un angle maximal de rotation de* 60° *autour de l'axe* A_1 *permettent de garantir que le modèle géométrique direct n'a qu'une solution.*

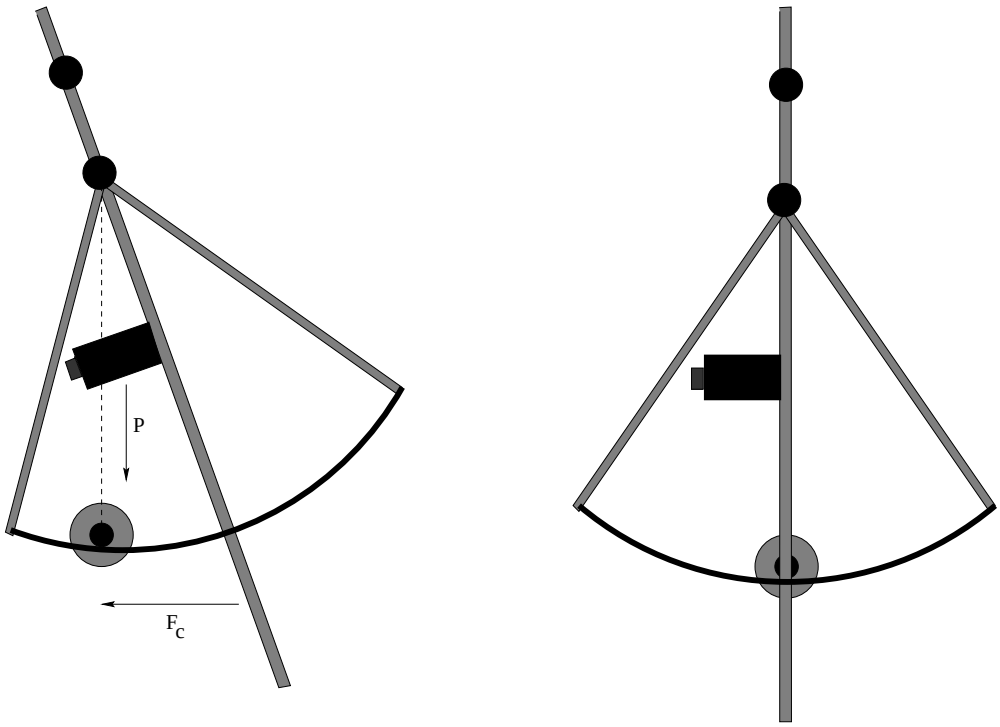


FIG. 7.17 – *Pour contrebalancer l'effet du moteur* 3*, il suffit d'exercer un couple sur le moteur* 1.

élevées, avec un minimum de latence. En effectuant le calcul des forces sur le PC, on évite ainsi la transmission des consignes de forces à travers une liaison, série ou Ethernet. Ensuite, nous distinguons deux cas différents : (a) les interactions se font uniquement avec un modèle éléments finis pré-calculé, les données ne sont transmises que dans un sens; (b) les interactions sont possibles avec un modèle hybride, dans ce cas de nombreuses données doivent être transmises dans les deux sens.

- **communication uni-directionnelle**

  Les cinq degrés de liberté du système à retour d'effort ainsi que les informations fournies par le module de détection de collision sont transmises du PC vers la station graphique. Ces données servent d'une part à l'affichage et d'autre part au calcul de la déformation.

  Dans le cas où l'on ne considère des interactions qu'avec le modèle éléments finis, il suffit de transmettre les données de position (x, y, z), de rotation autour de l'axe (θ), d'ouverture de la pince (ϕ) pour l'affichage de l'instrument sur la station graphique (cf. figure 7.18). Pour le calcul de la déformation et afin de minimiser les données à transmettre, il suffit de transmettre la référence de la face F_i intersectée ainsi que les coordonnées barycentriques (k_1, k_2, k_3) du point de collision dans le triangle et enfin le déplacement du point d'intersection (cf. figure 7.19) par rapport à la position d'équilibre (d_x, d_y, d_z). Le déplacement des trois sommets du triangle est alors calculé à partir des coordonnées barycentriques du point d'intersection dans le triangle et du déplacement de ce point. On a donc seulement sept valeurs au lieu de dix à transmettre. La fréquence nominale de transmission est d'environ 25Hz, de façon à avoir un affichage fluide de la scène.

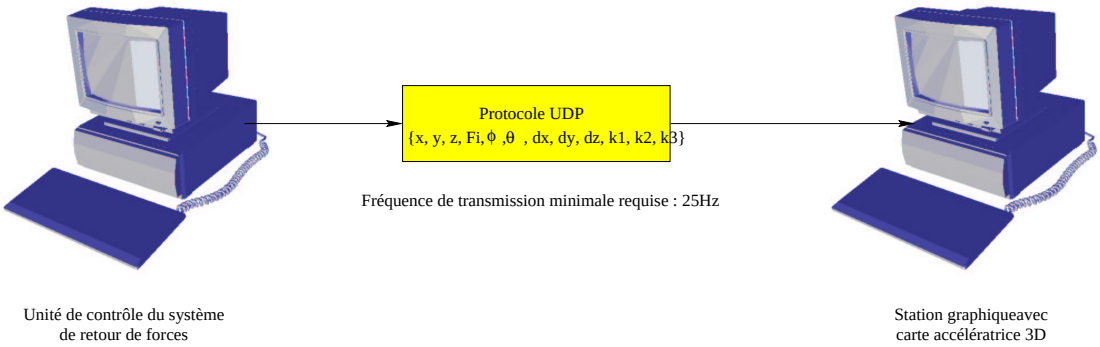


FIG. 7.18 – *Protocole de communication pour les interactions simples avec un modèle déformable élastique linéaire.*

  Le module de détection de collision utilise, dans ce cas, l'algorithme 1 (cf. section 7.5.2).

- **minimisation de la latence**

  En supposant que le seul facteur limitant dans la transmission des données - jusqu'à une fréquence de 500Hz - soit le débit du réseau, nous minimisons la latence en transmettant les données vers la station graphique à une fréquence beaucoup plus

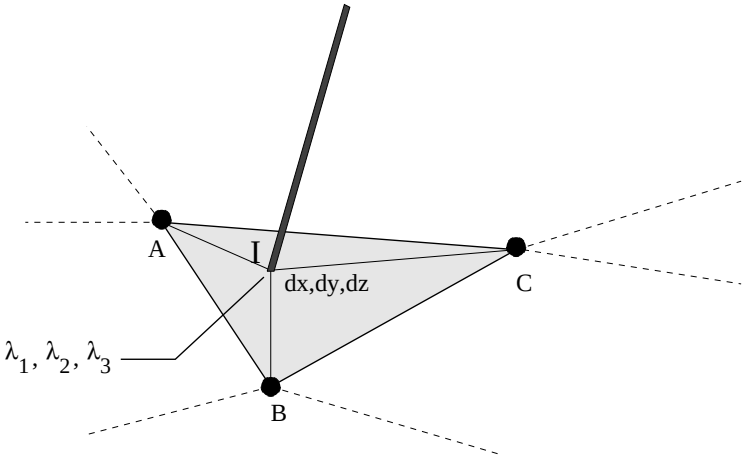


FIG. 7.19 – *Lors du contact avec la surface du maillage en éléments finis, on ne transmet, pour le calcul de la déformation, que l'indice de la face intersectée, le déplacement de l'endoscope* (d_x, d_y, d_z) *et les coordonnées barycentriques* $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ *du point d'intersection dans le triangle.*

élevée que la fréquence minimale de 25Hz. Nous avons ainsi faits des tests montrant qu'il est possible de transmettre 500 messages par seconde sur une liaison Ethernet à 10 Mbits/s. Pour y parvenir, il a été nécessaire d'avoir recours à un protocole de communication particulier, le mode *UDP*. Ce mode dispense la machine qui reçoit les données d'émettre un accusé de réception, ce qui permet un gain de temps important. Par contre l'intégrité des données n'est plus assurée. Cependant, les tests que nous avons effectués montrent qu'à 500Hz, la probabilité de perdre des données est très faible.

La latence théorique étant de $1/Freq$ où $Freq$ est la fréquence de transmission, on voit tout de suite qu'avec une fréquence de transmission de 500 Hz, on diminue - en théorie toujours - la latence d'un facteur 20 par rapport à une transmission à 25Hz.

– **mémoire partagée**

La station graphique ne peut pas effectuer les calculs nécessaires à l'affichage et à la déformation à 500Hz - cela n'aurait de toute façon pas de sens. Il est donc nécessaire de stocker les données reçues par la machine, sans ralentir la transmission ni l'affichage graphique. Pour cela, nous utilisons une zone de mémoire partagée sur la station graphique. Cette zone mémoire est accessible à la fois par le programme chargé de lire les messages et par le programme principal gérant les déformations (cf. figure 7.10). Le dernier message transmis remplace le précédent. Ainsi, chaque fois qu'il est nécessaire de réafficher la scène, on utilise les données de la mémoire partagée pour déterminer la valeur actuelle de la position de l'endoscope et, éventuellement, les données relatives à la détection de collision; en fonction de quoi la scène est réaffichée et le maillage est déformé.

- **Protocole de communication numéro 2**

  – **communication bi-directionnelle**

Afin d'interagir avec un modèle hybride (cf. chapitre 6) et pouvoir envisager la simulation d'opérations simples, il devient nécessaire de reconsidérer le protocole de transfert précédent. Jusqu'à présent, nous avons considéré qu'en l'absence de contact entre un instrument et la surface du maillage, celui-ci se trouvait dans sa configuration d'équilibre. Ce n'est plus vrai avec un modèle hybride et cela pose de nombreux problèmes pour garantir des interactions en temps-réel.

Dans le cas précédent, le transfert des données était uni-directionnel, et se limitait à une faible quantité de données. De plus, la fréquence, même si elle était fixée de préférence à une valeur élevée pour limiter la latence, pouvait décroître jusqu'à environ 25 Hz sans trop de conséquences.

Dans le cas présent, deux solutions sont envisageables. Premièrement, les données nécessaires au calcul des déformations - conditions aux limites, forces externes, etc. - sont transmises de la station graphique au PC. Ce dernier doit alors calculer la déformation du modèle hybride ainsi que les forces associées. La détection de collision se base alors sur la nouvelle configuration du maillage calculée à partir de ces paramètres. La seconde solution consiste à transmettre le déplacement des nœuds situés à la surface du modèle hybride lorsque celui-ci est déformé ainsi que les conditions aux limites.

Il est donc nécessaire de disposer d'une transmission bidirectionnelle. La mise à jour de la scène utilise les mêmes données que précédemment, aux mêmes fréquences. Par contre, le calcul des collisions nécessite beaucoup plus de données. Celles-ci sont transmises via le réseau sous forme de messages contenant les informations nécessaires au calcul de la déformation (cf. figure 7.20).

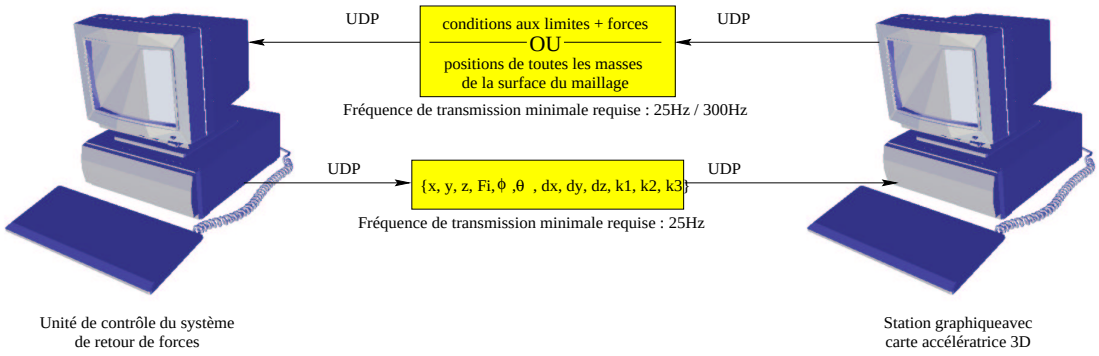


FIG. 7.20 – *Le second protocole de communication permet de prendre en compte la déformation et les modifications topologiques de modèles hybrides. Il nécessite une transmission bi-directionnelle ainsi que le transfert d'un nombre très important de données.*

– **minimisation de la latence**

Nous avons recours au même mode de transfert (UDP) que précédemment afin de réduire la latence au maximum. Il devient par contre nécessaire de disposer d'un réseau spécialisé - 100 Mbits/s et réservé à la seule utilisation du simulateur - entre les deux machines. Sans ce type de connexion, il est impossible de manipuler des maillages complexes aux fréquences requises.

– **mémoire partagée**
  Nous continuons à utiliser une zone de mémoire partagée pour stocker les données transmises par le système à retour d'effort.

7.6 Conclusion - perspectives

Nous allons revenir brièvement, dans cette section, sur les points importants de l'architecture de notre simulateur. Nous ne prétendons en aucun cas que notre solution est idéale. C'est une solution qui nous a semblé bien adaptée à notre problème et qui répond à l'ensemble des besoins que nous nous étions fixés.

7.6.1 Avantages de l'architecture du simulateur

L'utilisation d'une architecture distribuée, dans laquelle les machines communiquent par une liaison Ethernet, permet une grande modularité. Il est possible de remplacer une des deux machines sans problème et de bénéficier ainsi de ses nouvelles performances. Ce fut d'ailleurs notre cas puisque la station graphique *Dec Alpha Station* a été remplacée par une station *Silicon Graphics* offrant de meilleures performances graphiques.

En ce qui concerne les temps de calculs, la répartition de charge entre le calcul des déformations et l'affichage d'une part et le calcul des collisions et des forces d'autre part, permet un gain de temps appréciable. On tire ainsi parti de notre algorithme dans lequel le calcul des forces est "indépendant" du calcul des déformations (cf. chapitre 3). La possibilité de calculer les forces directement sur le PC évite d'introduire des phénomènes de latence, particulièrement néfastes pour les applications ayant recours à un système à retour d'effort. C'est en grande partie ce qui a justifié le choix initial d'une architecture distribuée.

L'utilisation de la mémoire partagée pour stocker les données de position du système à retour de force permet un gain de temps important, contribuant à la réduction de la latence. On évite ainsi le protocole classique consistant à faire une requête de position puis à attendre la transmission de cette position. Avec une fréquence de transfert de l'ordre de 500 Hz on garanti également que la position lue est très proche de la position actuelle de l'instrument.

7.6.2 Inconvénients, améliorations et future architecture

Le mode de transfert *UDP*, utilisé pour la communication entre les deux machines, permet d'optimiser les temps de transfert. La possibilité d'avoir une liaison dédiée au simulateur entre les deux machines contribuera sans doute à réduire encore ce délai et surtout à garantir qu'il sera respecté en permanence. Malgré tout, il peut être utile de filtrer les positions qui arrivent sur la station graphique afin d'éviter les valeurs erronées, le mode de transmission choisi ne garantissant pas l'intégrité des données transférées.

En ce qui concerne le prototype que nous avons décrit jusqu'ici, une amélioration importante - du point de vue des chirurgiens - concerne l'ajout d'un second système à retour d'effort.

Comme nous n'avons disposé d'un tel périphérique qu'à la fin de la rédaction de ce manuscrit, les commentaires et résultats concernant le nouveau prototype seront simplement reportés dans le chapitre (8).

Notons enfin que l'architecture décrite pour la prise en compte des interactions avec des modèles hybrides, présente certaines faiblesses. En particulier, le grand nombre de données à transférer devient rapidement un problème pour des maillages comportant un nombre élevé de sommets. L'utilisation d'une liaison dédiée et très rapide permettrait de réduire la latence et d'augmenter la fréquence de transfert. On peut cependant se demander si, dans ce cas, il ne serait pas plus efficace d'utiliser une telle liaison pour le transfert des consignes de forces entre la station de travail et l'unité de contrôle. Dans ce cas, une architecture future possible peut être constituée d'une machine bi-processeurs et d'un PC. Dans ce cas, le PC ne serait chargé que de la gestion du (des) système(s) à retour d'effort. L'ensemble des calculs serait pris en charge par la machine multi-processeurs. Avec une station graphique bi-processeurs telle qu'une *Silicon Graphics Onyx 2*, il est possible d'avoir un processeur dédié aux calculs de la déformation, le second étant chargé de la détection de collision et du calcul des forces; la carte graphique accélératrice permettant de décharger les processeurs de la gestion de l'affichage.

8.

Simulation de chirurgie hépatique

*Dans ce chapitre, nous décrivons un exemple d'application du simulateur de chirurgie. Cela nous permettra d'illustrer comment les différents éléments, décrits au cours des chapitres précédents, s'articulent entre eux. L'intégration d'algorithmes et de solutions techniques issus de domaines parfois éloignés nous semble être un point particulièrement important de la simulation. L'exemple que nous allons présenter concerne le domaine de la chirurgie hépatique. L'intérêt particulier porté au foie s'explique d'une part par l'importance du rôle joué par cet organe dans le fonctionnement du corps humain, et d'autre part, par la nécessité de développer des techniques laparoscopiques destinées à remplacer les interventions réalisées en chirurgie ouverte. En dehors de ces motivations, l'objectif poursuivi reste, en premier lieu, l'entraînement au geste opératoire. Le prototype actuel permet de réaliser des simulations simples mais relativement réalistes. Un second exemplaire du prototype est actuellement en service dans le centre d'entraînement de l'*Ircad *afin de procéder à une phase de validation.*

8.1 Introduction

Le foie est l'organe abdominal le plus important, autant par sa taille que par son rôle biologique au sein de l'organisme humain. Le métabolisme, surtout celui des glucides et des lipides, la digestion grâces aux sels biliaires, la circulation du sang grâce à la fabrication de facteurs de la coagulation, l'immunité par l'intermédiaire des immunoglobulines, dépendent d'un fonctionnement hépatique correct. Une telle importance biologique explique les nombreuses recherches menées pour soigner les pathologies touchant cet organe. Le plus souvent, cependant, les problèmes rencontrés concernent la présence de tumeurs, lésions, kystes, etc. nécessitant une intervention chirurgicale.

Les résultats que nous allons présenter dans ce chapitre concernent essentiellement le problème de l'entraînement au geste opératoire ainsi que la simulation d'opérations chirurgicales simples, en particulier la découpe de tissus mous.

Les travaux que nous avons réalisés et leurs applications futures peuvent ainsi se diviser en deux classes :

- **Étape 1** : proposition d'un ensemble d'outils simples permettant de s'entraîner à des gestes chirurgicaux simples sur un modèle du foie. Utilisation d'un système à retour d'effort pour rendre les interactions réalistes. Le modèle géométrique est un modèle générique, correspondant à celui d'un patient moyen. La loi de comportement est une simplification de la loi de comportement réelle. La figure (8.1) rappelle les différents liens entre modèle géométrique et modèle physique.
- **Étape 2** : développement d'outils et de modèles plus complexes pour permettre aux chirurgiens déjà expérimentés de mettre au point de nouvelles procédures laparoscopiques. En effet, la chirurgie laparoscopique n'est pas une technique courante en ce qui concerne, par exemple, la résection de segments hépatiques. Cela s'explique par de nombreux problèmes techniques qu'une simulation pourrait permettre de résoudre en partie, avant de réaliser une expérimentation animale. Cette étape est sensiblement plus complexe que la première, et nécessite, en particulier, une modélisation plus précise de la loi de comportement.

8.2 Création d'un modèle "générique"

Le choix d'une représentation géométrique optimale est de première importance en simulation. Ce choix doit être guidé par le meilleur compromis entre réalisme et facilité d'interaction. Dans notre méthode, l'aspect réaliste des organes est obtenu, tout d'abord, par une segmentation très précise d'une image médicale volumique et dans un second temps par une représentation appropriée de la surface de l'organe segmenté. Afin de créer un modèle du foie le plus précis possible, avec de nombreux détails anatomiques nous avons eu recours à la base de donnée mise à disposition sur le réseau Internet par la *National Library of Medicine*. Cette base de donnée, appelée *Visible Human*, se compose d'un nombre très important de coupes de

différentes modalités - scannographie à rayons X, IRM et cryogéniques [1] - décrivant un homme adulte de la tête aux pieds.

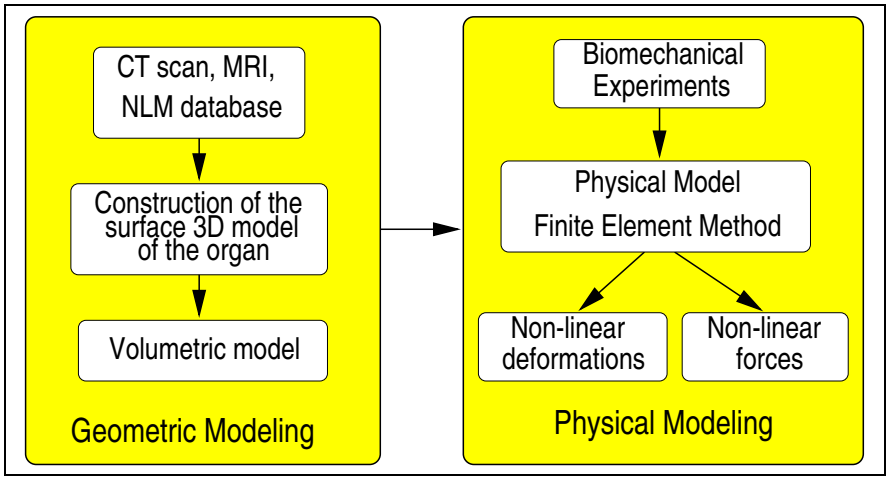


FIG. 8.1 – *Création du modèle déformable. Tout d'abord un modèle géométrique de l'organe est extrait d'une image médicale 3D. Ensuite, une loi de déformation et des paramètres d'élasticité sont définis pour cet organe.*

8.2.1 Maillage de la surface

Les données scannographiques consistent en un ensemble de coupes axiales du corps entier, espacées de 1 mm. Les coupes anatomiques correspondent à des photographies couleur scannérisées - sur 24 bits - de coupes cryogéniques, également du corps entier. La taille des images est de 2048x1216 pixels. Ces coupes anatomiques sont également espacées de 1 mm et coïncident avec les coupes scannographiques. Il y a 1878 coupes pour chaque modalité.

Enveloppe du foie

Afin d'extraire l'enveloppe du foie à partir de cet ensemble de données, nous avons eu recours aux images couleur en raison de leur meilleurs résolution et contraste entre le foie et les organes voisins. Nous verrons, à la section (8.4), que l'extraction de l'enveloppe à partir d'images scannographiques est un problème très complexe.

L'ensemble des données axiales, comprenant le foie, est composé de 180 coupes. Après un traitement bidimensionnel des images, un modèle déformable "snake" (Kass et al., 1988) est utilisé pour une segmentation semi-automatique. Un ensemble d'images binaires est alors crée à partir de ces contours (cf. figure 8.3). Ces coupes sont ensuite superposées pour former une image binaire volumique (cf. figure 8.4).

Ce travail, ainsi que la segmentation du réseau vasculaire, a été réalisé par Jean-Marie Clément, ingénieur à l'IRCAD.

1. Après avoir été cryogénisé, le corps entier a été découpé - coupes axiales de 0,5 mm d'épaisseur - puis chaque coupe a été photographiée.

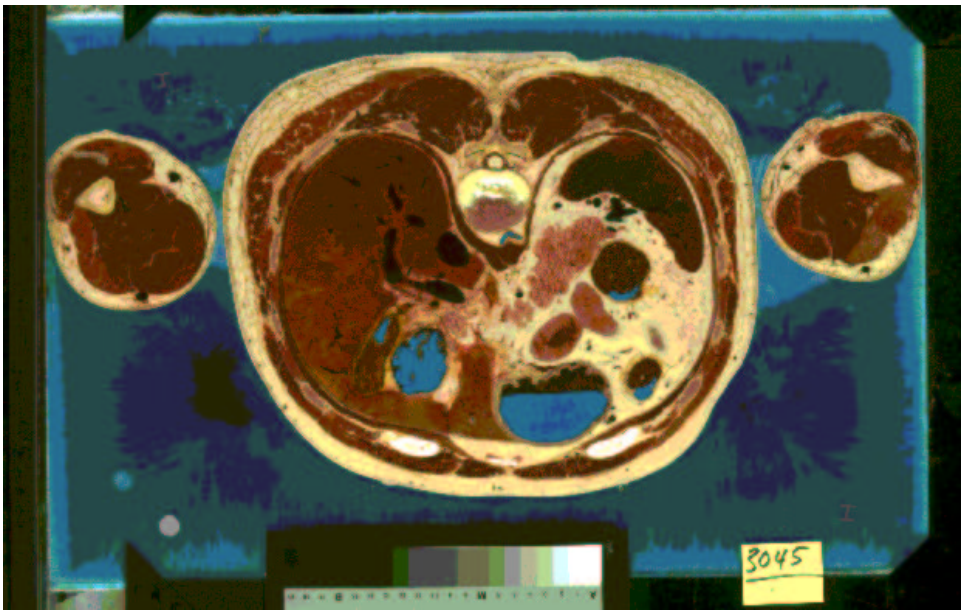


FIG. 8.2 – *Les données utilisées pour la création d'un modèle géométrique générique du foie proviennent de la* NLM *et consistent en un ensemble de coupes cryogéniques en couleur de très haute résolution.*

Pour générer un maillage de la surface à partir d'une image volumique, nous avons vu au chapitre (3), que nous pouvons avoir recours à deux techniques. L'extraction d'iso-surface présente l'inconvénient de générer un trop grand nombre de triangles et de conduire à des irrégularités de la surface si l'on ne lisse pas l'image volumique (cf. figure 8.5).

Afin d'obtenir un maillage plus lisse de l'enveloppe du foie, nous avons utilisé les *maillages simplexes* décrits au chapitre (3). En partant d'un maillage initial sphérique, celui-ci se déforme vers l'image binaire du foie. En l'absence de décimation, le nombre de sommets obtenus dépend du nombre de sommets présents dans le modèle de départ. Le maillage présenté à la figure (8.6) comporte ainsi 14000 faces alors que l'extraction d'iso-surface avait généré 94000 polygones. De plus, l'algorithme adaptatif a permis de concentrer les sommets dans les zones de forte courbure.

L'intégration des maillages simplexes dans le processus de segmentation permet d'obtenir une représentation très intéressante de la surface : (a) à partir d'un nombre défini de sommets, le maillage obtenu correspond à une représentation optimale de l'enveloppe hépatique; (b) ce maillage est le dual topologique d'une triangulation, ce qui va nous permettre de définir un modèle tétraédrique.

Réseau vasculaire

En dehors de l'enveloppe hépatique, qui est le seul élément visible lors d'une simulation pour l'entraînement au geste opératoire, il est également utile d'extraire le réseau vasculaire. Celui-ci peut permettre de présenter un modèle tridimensionnel complet du foie à des fins d'enseignement. Mais il peut également servir à l'introduction d'un comportement non-homogène, comme nous le verrons plus loin.

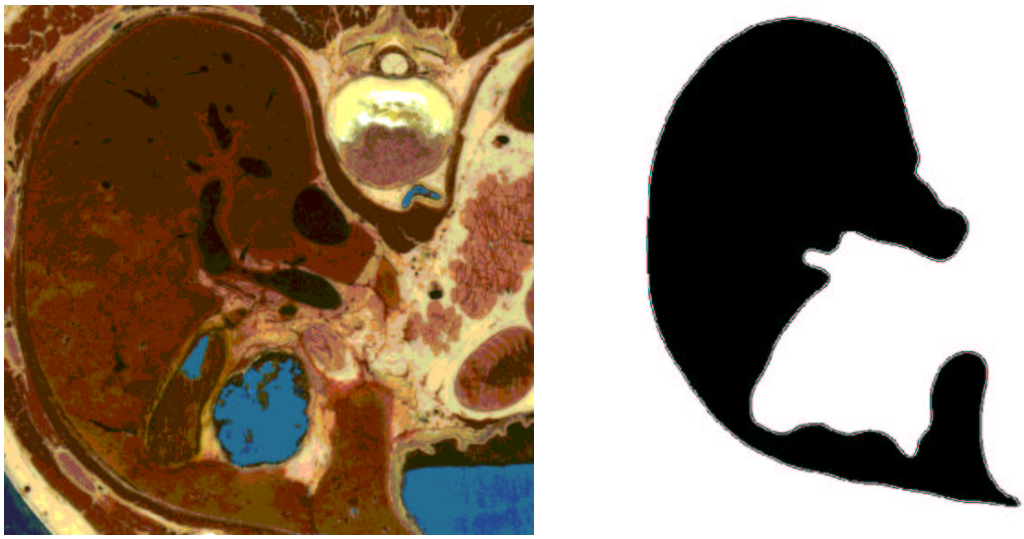


FIG. 8.3 – **À gauche** *: la segmentation de l'enveloppe du foie est réalisée coupe par coupe.* **À droite** *: pour chaque coupe on obtient une image binaire bidimensionnelle.*

En utilisant un principe similaire à celui décrit dans la section précédente, un ensemble de quatre maillages a été obtenu. Ces quatre maillages décrivent respectivement : la veine cave, la veine porte et les veines sus-hépatiques, les artères et le canal biliaire. La précison obtenue est très élevée grâce à la qualité et la haute résolution des images utilisés. Avec des données scannographiques, il est beaucoup plus difficile d'obtenir une segmentation précise.

8.2.2 Définition des segments hépatiques

La définition des segments hépatiques (Couinaud, 1957) est utilisée par les chirurgiens, lors de la phase préopératoire, pour déterminer le schéma de résection des zones cancéreuses. Il existe huit segments de Couinaud définis à partir de la distribution des réseaux porte et sus-hépatiques. Ils sont utilisés dans les résections hépatiques dites anatomiques[2], comme unités d'intervention.

8.2.3 Modèle pour la simulation

Pour réduire les temps de pré-calculs et également le temps nécessaire à l'affichage graphique du modèle lors des interactions, nous avons créé un second maillage de l'enveloppe du foie, comportant un nombre réduit de sommets. C'est sur la base de ce maillage que nous avons réalisé la décomposition en tétraèdres du volume, à l'aide du logiciel *Simail*[3].

2. Ablation chirurgicale d'une partie du foie selon des repères anatomiques précis.
3. Simail est un produit de Simulog S.A. - 1, rue James Joule - 78286 Guyancourt Cedex - France

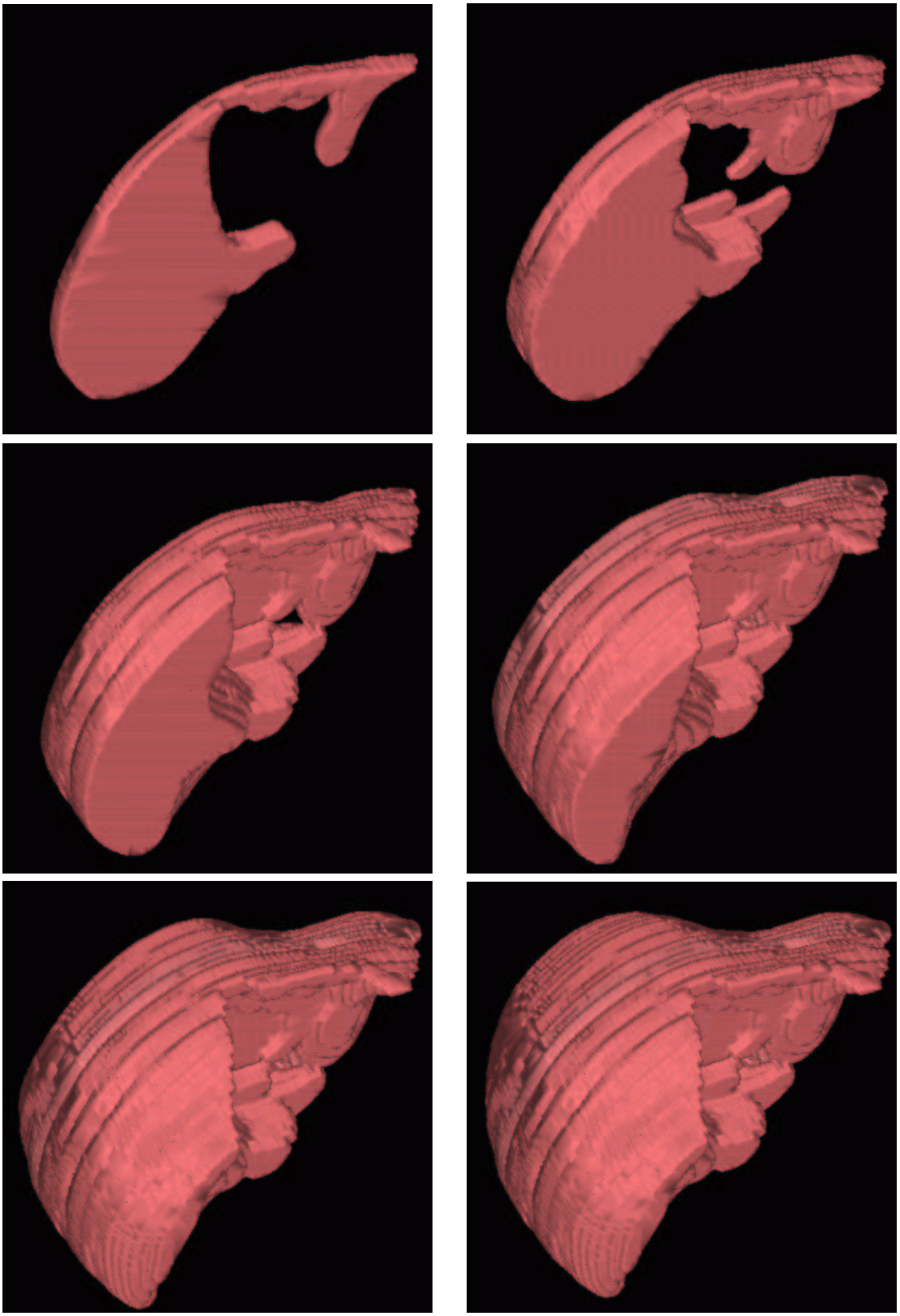


FIG. 8.4 – *L'image volumique binaire correspondant au foie segmenté est obtenue par superposition d'un ensemble d'images binaires correspondant à une segmentation bidimensionnelle.*

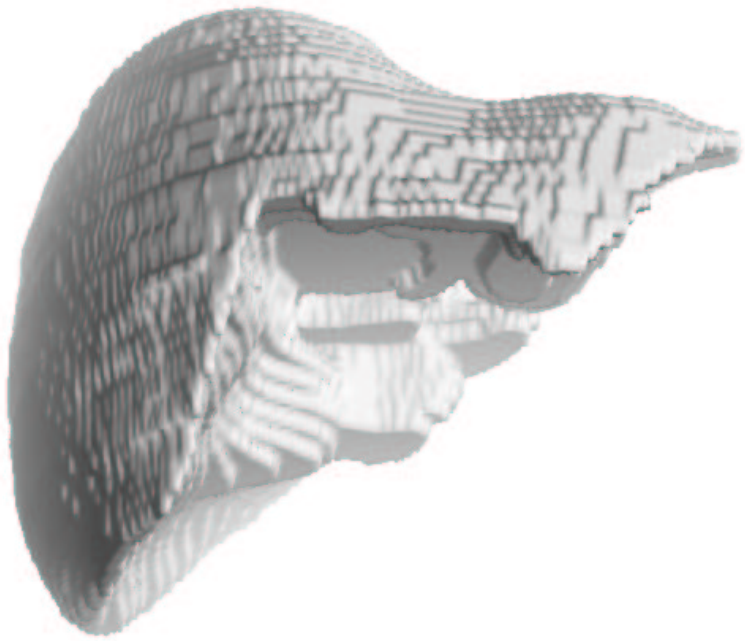


FIG. 8.5 – *Après une extraction d'iso-surface sur l'image binaire volumique du foie, on obtient un maillage de la surface du foie. Ce maillage comporte un grand nombre d'éléments - 94000 triangles - et la surface présente des irrégularités.*

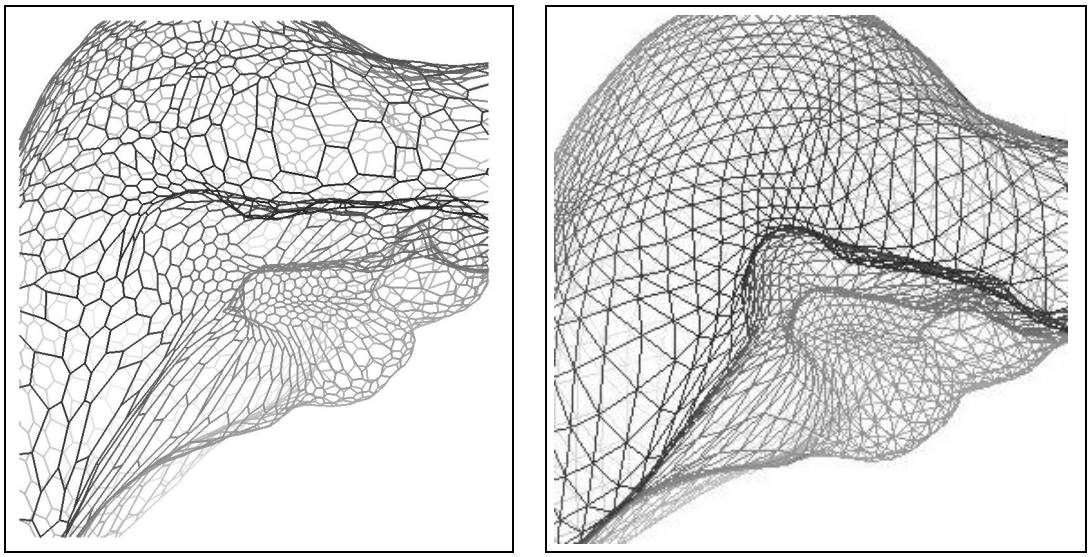


FIG. 8.6 – *L'enveloppe du foie, obtenue par une segmentation à l'aide d'un modèle simplexe, est régulière et permet une description optimale de la surface à partir d'un nombre donné de sommets. Un maillage simplexe étant le dual topologique d'une triangulation, il est très facile d'obtenir cette seconde description de la surface, composée uniquement de triangles.*

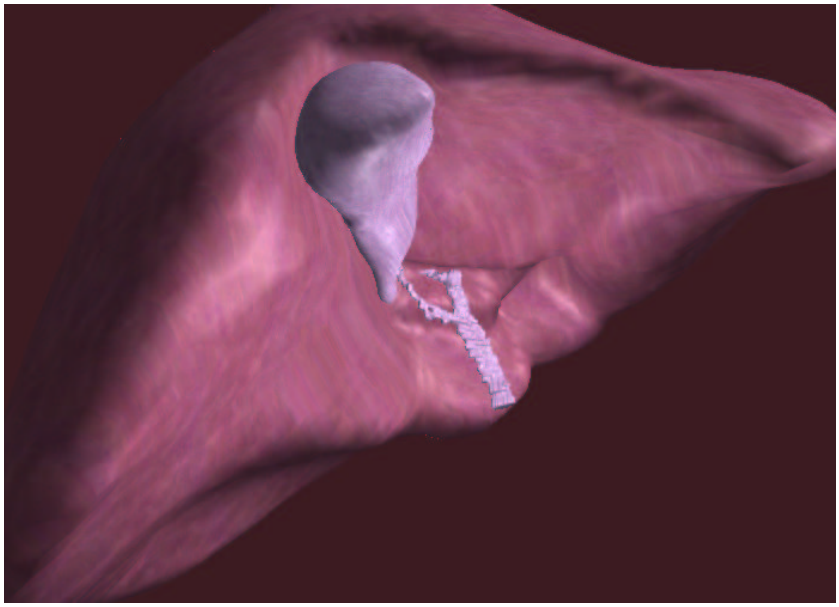


FIG. 8.7 – *En plaquant, sur la surface du foie, une texture issue d'un enregistrement vidéo d'une opération de chirurgie laparoscopique, il est possible d'obtenir des images relativement réalistes.*

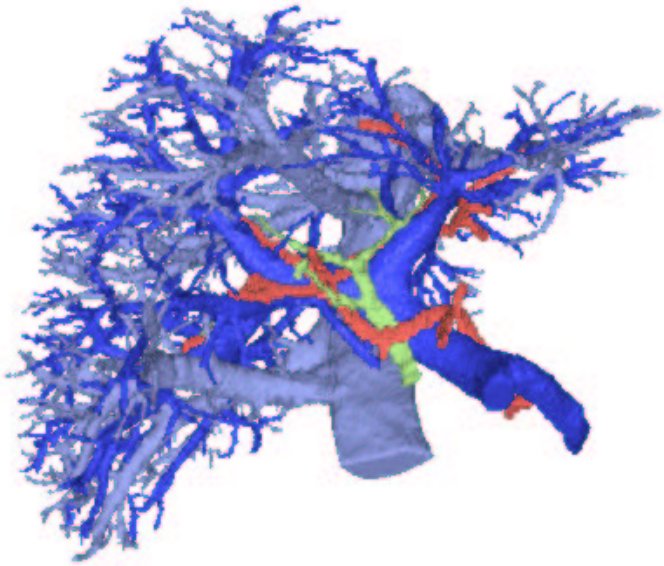


FIG. 8.8 – *Le système vasculaire hépatique.*

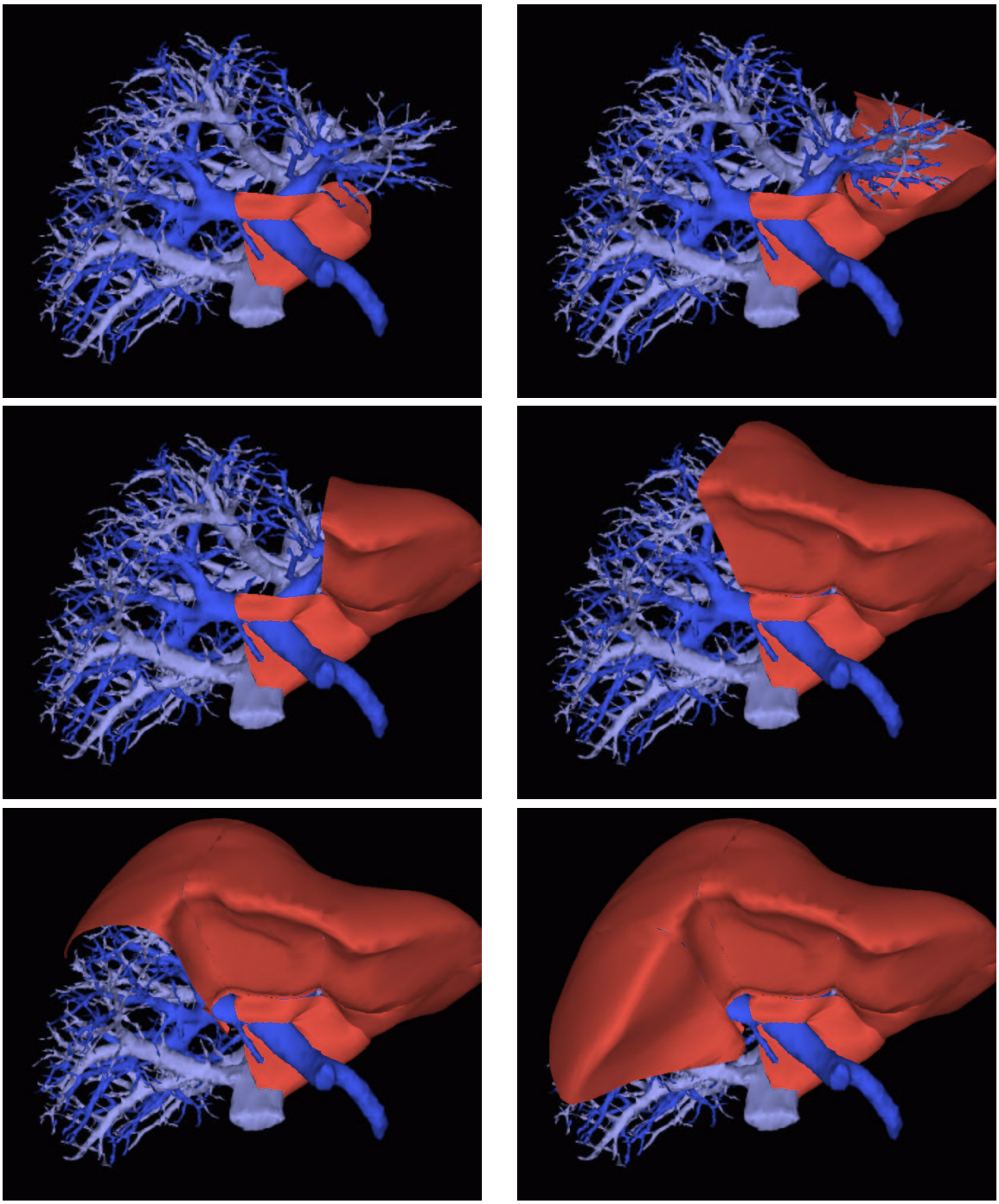


FIG. 8.9 – *Les huit segments hépatiques tels qu'ils sont définis par Couinaud. Ces segments sont définis à partir de la géométrie des principales branches de l'arborescence vasculaire.*

Simplification

Les algorithmes de décimation et d'adaptation doivent être utilisés avec précaution lorsqu'ils interviennent dans une méthode d'éléments finis. En effet, nous avons donné, au chapitre (2) quelques critères de qualité pour le maillage d'éléments finis. Sans chercher à avoir des valeurs maximales de la qualité des maillages, il est cependant risqué d'utiliser des maillages de trop mauvaise qualité, entraînant des erreurs numériques élevées ainsi que des problèmes de conditionnement (cf. chapitre 3). La qualité du maillage volumique dépendant en grande partie de la qualité de la triangulation de la frontière du domaine et certaines situations doivent être, si possible, évitées. Par exemple, la présence de "petits" triangles à côté de "grands" triangles. Or les algorithmes d'adaptation ou de décimation peuvent entraîner de telles configurations. Afin de pallier ce problème, nous avons combiné la contrainte d'adaptation du maillage basée sur l'aire des triangles avec les deux algorithmes précédents.

La première simplification de la surface, présentée à la figure (8.10), comporte 3902 tétraèdres, 1070 triangles sur la surface et 939 nœuds (surface + internes). La réduction du nombre de sommets de la description de la surface a été possible grâce à l'algorithme de décimation développé par Hervé Delingette (Delingette, 1994b) (cf. chapitre 3). Cependant, la qualité de la triangulation n'est pas très bonne et peut entraîner des erreurs de précision numérique.

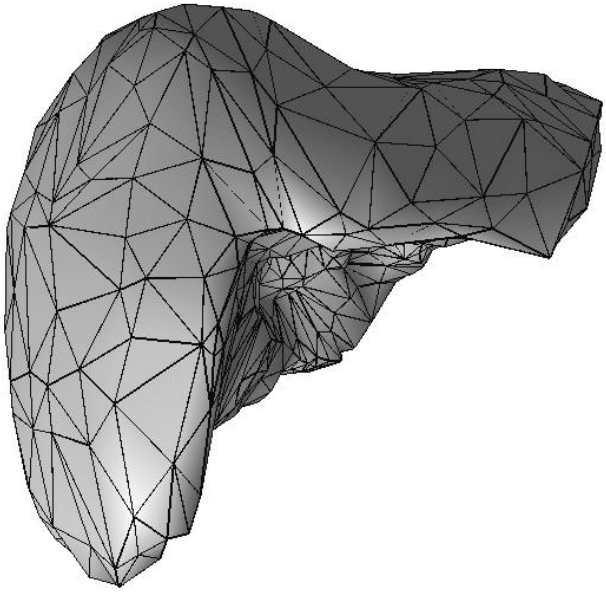


FIG. 8.10 – *La triangulation simplifiée de l'enveloppe du foie. L'algorithme de simplification utilisé dans ce cas n'a pas pris en compte la contrainte de qualité des triangles.*

En intégrant une contrainte supplémentaire sur l'aire des triangles (Delingette, 1994b) , on peut obtenir une surface plus régulière, pour un nombre similaire de sommets. La qualité du maillage est améliorée et les déformations sont plus régulières. Ce nouveau maillage (cf. figure 8.11) comporte 6495 tétraèdres, 1210 triangles sur la surface et 1404 nœuds (surface + internes).

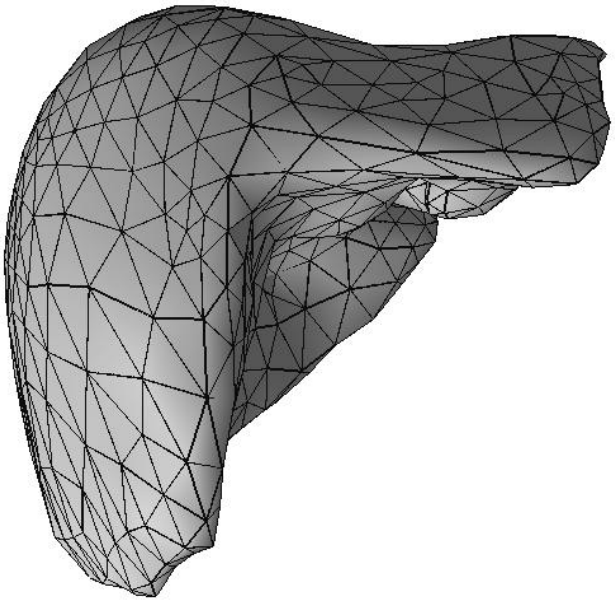


FIG. 8.11 – *La triangulation simplifiée de l'enveloppe du foie avec une contrainte de régularité sur l'aire des triangles.*

Création du maillage volumique

Le maillage volumique est obtenu à l'aide du logiciel *Simail* et repose sur un algorithme de Delaunay-Voronoï. Rappelons que le choix d'une décomposition du volume en tétraèdres est mieux adaptée à la géométrie complexe de la plupart des structures anatomiques.

Il faut également noter que les éléments finis composant un maillage ne doivent pas nécessairement être identiques. Le point important est qu'ils respectent certains critères de régularité et que la variation de taille d'un élément à un élément voisin ne soit pas trop importante. Il est ainsi courant qu'un maillage utilisé en mécanique des structures comporte de "petits" éléments dans les zones de forte courbure et d'autre plus "grands" dans les zones de faible courbure.

8.3 Entraînement au geste opératoire

Nous allons présenter dans cette section différents exemples de simulation utilisant le modèle "générique" du foie provenant de la base de données de la NLM. Cette première série de résultats ne fait intervenir qu'un seul instrument et donc un seul système à retour de force. Le premier modèle utilise une loi de comportement linéaire, le second une loi non-linéaire.

8.3.1 Un seul instrument - élasticité linéaire/non linéaire

Les figures (8.12) et (8.13) présentent le premier prototype du simulateur, utilisant un seul périphérique à retour de force pour les interactions.

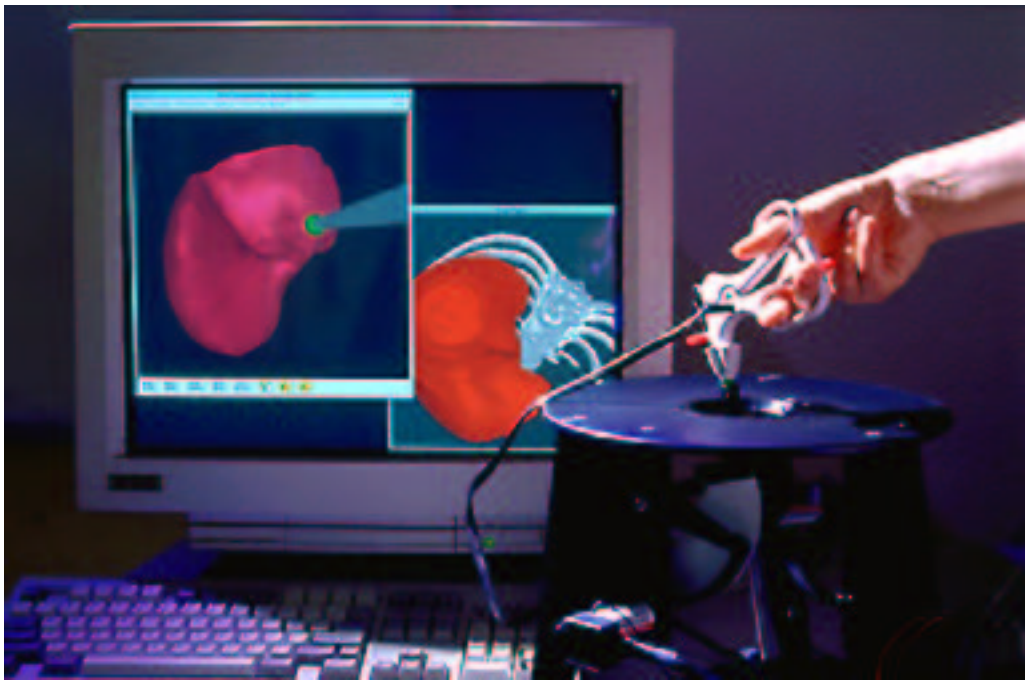


FIG. 8.12 – *Le chirurgien, en manipulant le système à retour d'effort, contrôle le mouvement de l'instrument chirurgical. Si une collision est détectée avec la surface de l'organe, le maillage est déformé en temps-réel et la force de réaction calculée. Celle-ci est alors transmise au système à retour d'effort et ressentie dans la main de l'opérateur.*

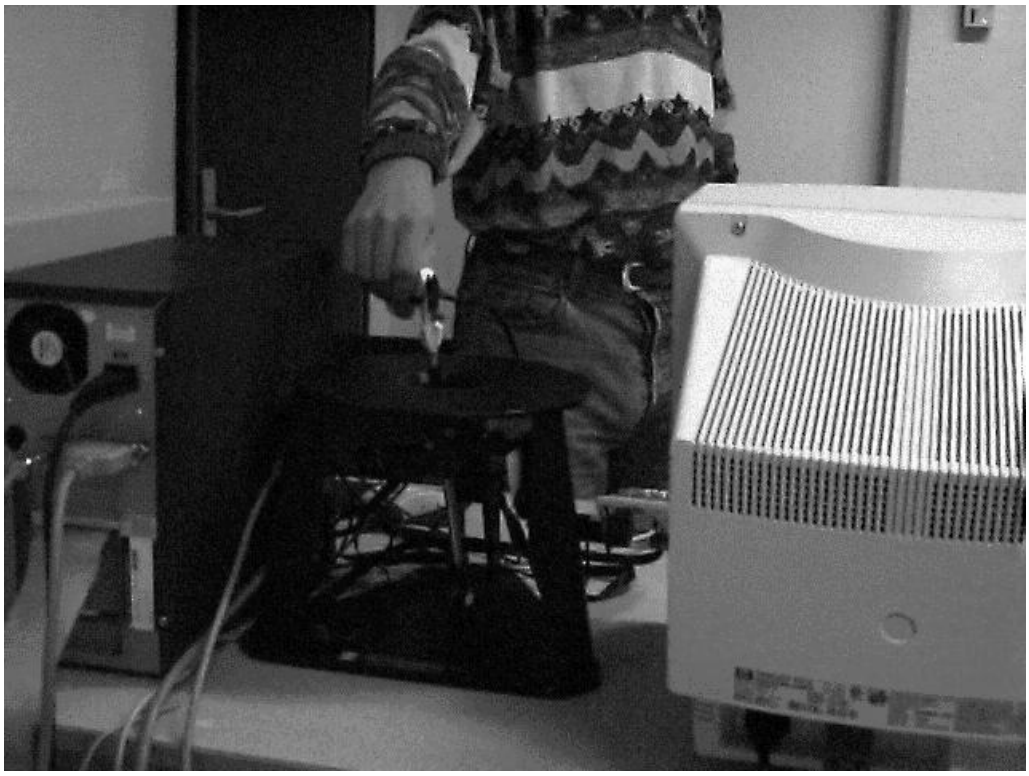


FIG. 8.13 – *La première version de notre prototype avec Hervé Delingette dans le rôle du chirurgien.*

La figure (8.14) montre un ensemble de déformations "quasi non-linéaires" basées sur les courbes expérimentales présentées au chapitre (3). À la vue des résultats obtenus, ainsi qu'en raison des approximations faites pour préserver des fréquences de calcul élevées, nous estimons qu'un tel modèle présente peu d'avantages, dans le cadre d'un apprentissage au geste opératoire, par rapport à un modèle linéaire. D'un autre côté, les difficultés de validation des résultats en 3D ne permettent pas de le comparer à un organe réel, ce qui pose des problèmes pour son utilisation dans le cadre d'une simulation d'intervention.

8.4 Modèle d'un patient

Dans le cas où l'on cherche à réaliser une simulation sur la base d'images de patients réels, un grand nombre de problèmes se posent. Parmi ceux-ci, la segmentation s'avère une étape très complexe, en raison de la faible qualité des images et des grandes variations de forme ou de topologie des structures à segmenter.

Le but des travaux menés en simulation étant de permettre au chirurgien de planifier une opération puis de s'entraîner sur le modèle d'un patient réel, nous avons choisi de présenter dans cette section un ensemble de résultats illustrant les différentes étapes nécessaires pour y parvenir. Ces résultats font largement référence aux travaux de Johan Montagnat et Luc Soler, tous deux travaillant au projet Epidaure dans le cadre du projet Master.

8.4.1 Maillage de l'enveloppe du foie

Le premier point concerne la segmentation à l'aide de modèles déformables (maillages simplexes) de l'enveloppe du foie. Ces travaux sont réalisés par Johan Montagnat (Montagnat et Delingette, 1997). Afin de mettre en correspondance un modèle surfacique avec les données considérées, il a recours à une méthode intégrant à la fois une approche globale - recalage - et une approche locale - modèles déformables. Un tel processus de déformation permet un meilleur contrôle de la déformation et, en définitive, une plus grande robustesse pour le traitement de données bruitées ou en présence de points aberrants. Ceci est très important dans le cas d'images scannographiques X du foie, souvent très bruitées et peu contrastées (cf. figures 8.15 et 8.16).

Le maillage de l'enveloppe du foie va permettre de réaliser, d'une part, le maillage volumique, et d'autre part, de créer un masque dans l'image volumique pour aider à la segmentation des vaisseaux.

8.4.2 Segmentation des vaisseaux

L'extraction du réseau vasculaire de la veine porte dans les angioscanners 3D du foie est également un point très important pour la planification d'opérations et pour la simulation. Comme nous l'avons vu précédemment, ce réseau est utilisé en pratique pour repérer les huit segments de Couinaud utilisés par le chirurgien pour déterminer le schéma de résection.

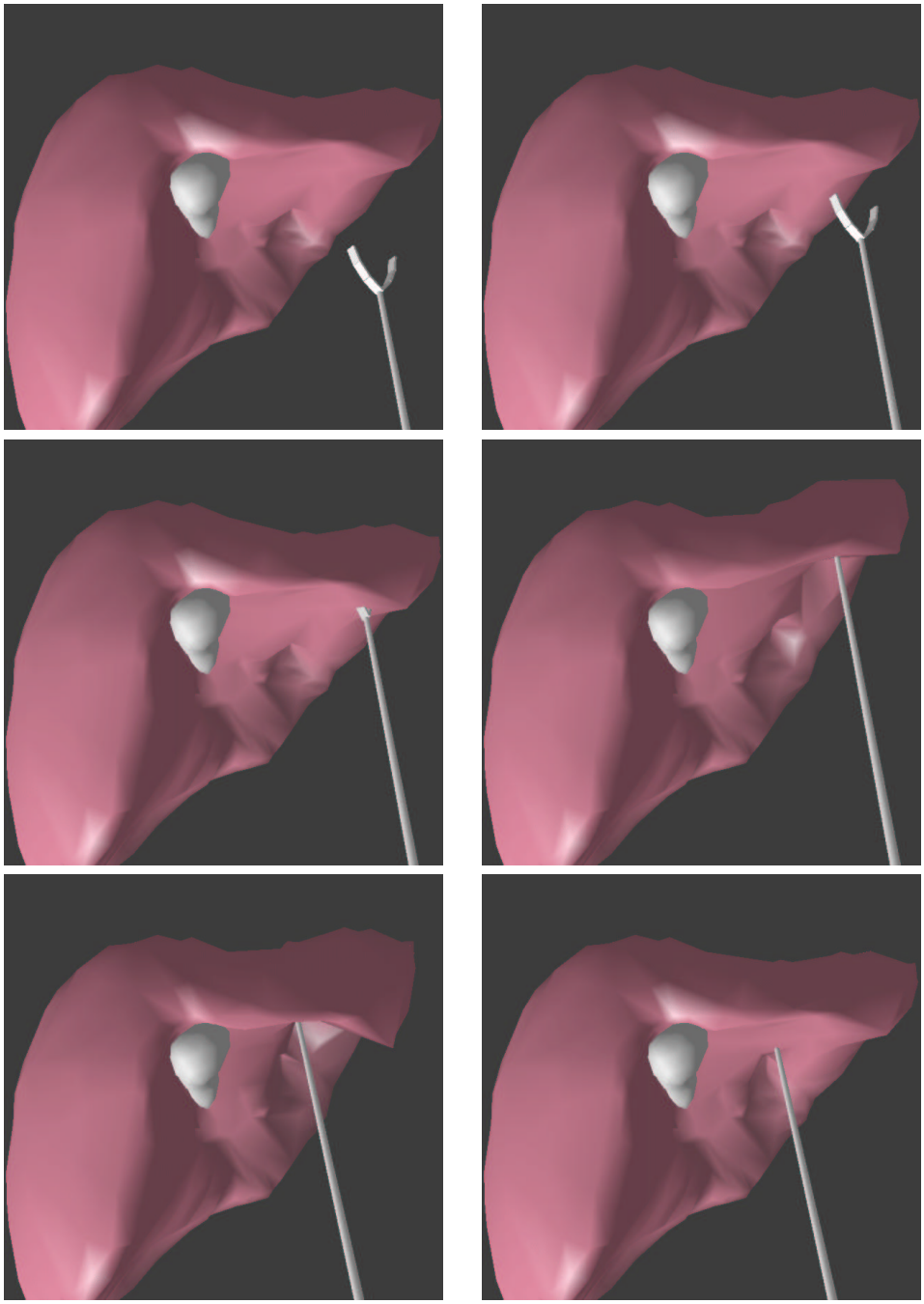


FIG. 8.14 – *Une séquence d'images issues d'une simulation. La fréquence d'affichage de la scène est de 50 Hz environ et la fréquence de calcul des forces de 500 Hz. Le mouvement de l'instrument est approximativement une translation de haut en bas, puis de bas en haut dans la dernière image. En ce qui concerne la détection de collision, nous autorisons une partie de la pince à pénétrer dans le foie pour plus de réalisme.*

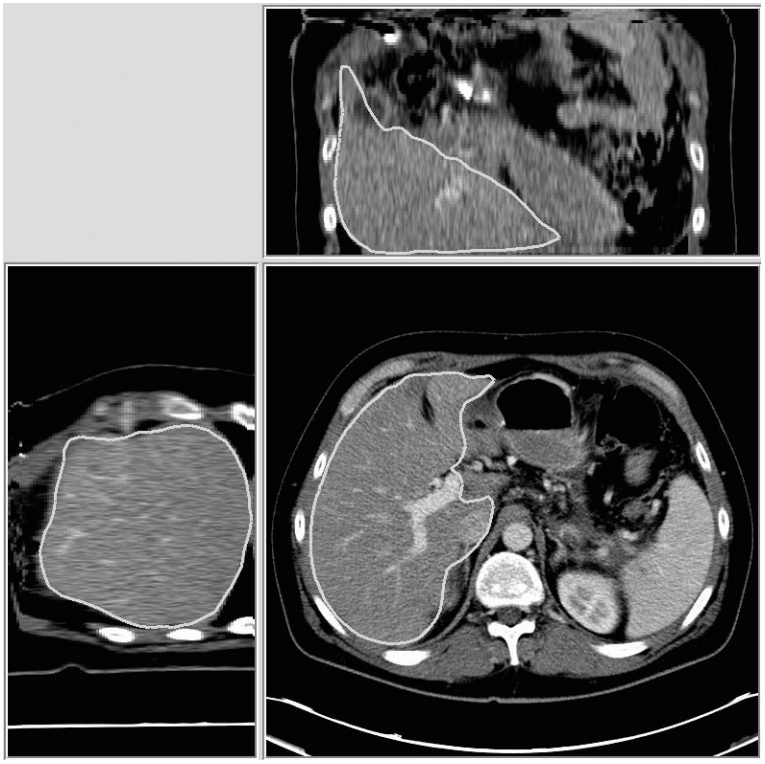


FIG. 8.15 – *Segmentation de l'enveloppe du foie à l'aide de maillages simplexes. On peut voir la trace du contour dans les différents plans de coupe de l'image volumique.*

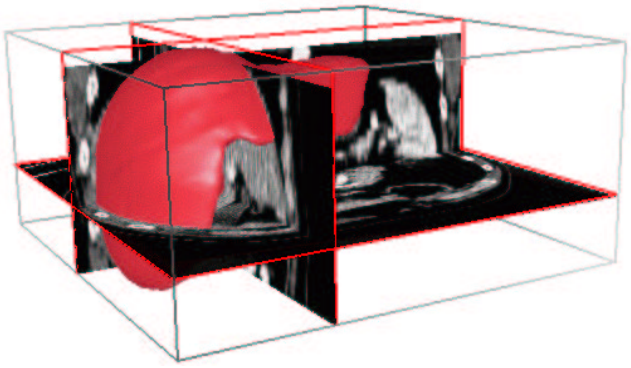


FIG. 8.16 – *Le maillage du foie, à la fin de l'étape de segmentation, "plongé" dans l'image volumique.*

Les travaux de Luc Soler (Soler et al., 1997) ont permis de mettre au point une méthode automatique de segmentation basée sur une analyse de l'histogramme d'intensité de l'image. Cette analyse permet de classifier les principaux tissus (tumeurs, parenchyme hépatique et vaisseaux) par l'ajustement d'un ensemble de trois gaussiennes sur les pics correspondants dans l'histogramme (cf. figure 8.17).

Par la suite, une méthode de correction locale puis une analyse topologique et géométrique permettent de segmenter précisément ce réseau difficile à délimiter dans la pratique.

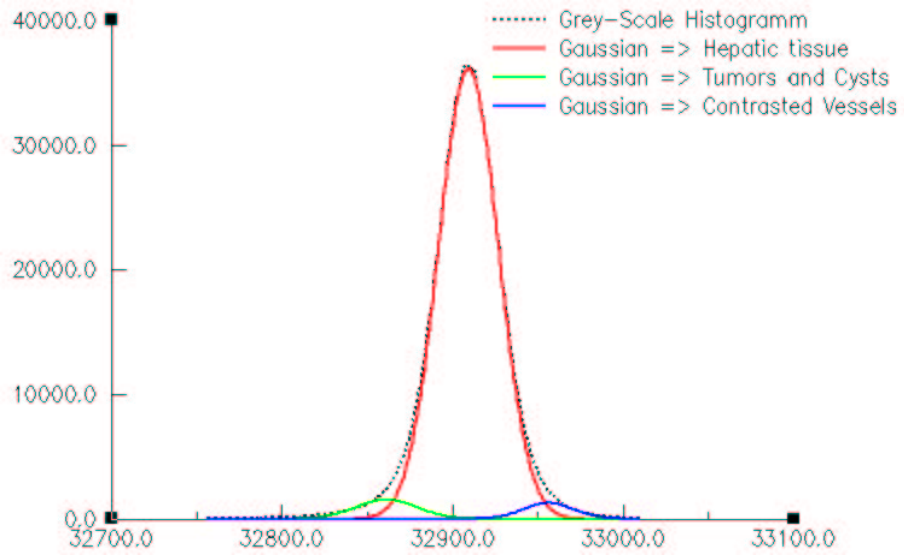


FIG. 8.17 – *Histogramme d'intensité de la zone correspondant au foie dans une image scannographique X de l'abdomen d'un patient. Un produit de contraste est injecté dans le réseau vasculaire hépatique. Cet histogramme fait apparaître trois types de tissus différents.*

8.4.3 Définition des segments hépatiques

La connaissance de la géométrie et de la topologie du réseau vasculaire de la veine porte permet de délimiter les huit segments anatomiques. La figure (8.18) présente trois coupes, réalisées selon trois plans différents, de l'image volumique générée par l'algorithme de (Soler et al., 1997). Chacun des huit segments est représenté par un niveau d'intensité uniforme.

8.4.4 Modèle hybride

Afin de pouvoir déformer et découper un modèle du foie, il est nécessaire de définir un modèle hybride. L'inconvénient de ces modèles, dans le cas général, réside dans la définition d'un domaine fixe - associé au modèle masses/tenseurs - où la modification de la topologie du maillage est possible. Cela implique d'imposer une "zone de découpe". Dans le cas de la simulation de chirurgie hépatique, nous avons limité cet inconvénient en nous basant sur l'utilisation, au niveau chirurgical, des segments de Couinaud. Supposons, comme c'est le cas dans la figure (8.19), qu'une tumeur soit présente dans le segment 7. Cela signifie que la plupart des incisions seront pratiquées dans ce segment et que, par conséquent, c'est ce sous-maillage qu'il est intéressant d'extraire du maillage global.

La connaissance du niveau d'intensité associé à chaque segment permet, selon le principe décrit au chapitre (6), de subdiviser le maillage d'éléments finis en deux sous-domaines. Le premier maillage, correspondant à l'un des huit segments, sera représenté par un modèle masses/tenseurs et le second sera un modèle éléments finis pré-calculés.

Les figures (8.20) et (8.21) présentent deux résultats de subdivision de maillage. Le premier concerne le segment 7, le second le segment 6.

La figure (8.22) représente le modèle hybride créé à partir des deux sous-maillages de la

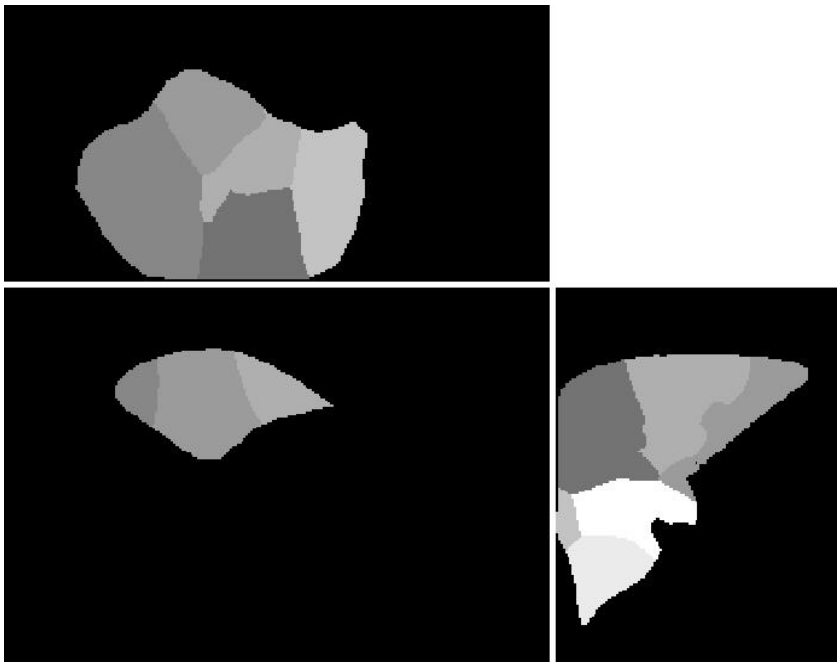


FIG. 8.18 – *Différents plans de coupe de l'image volumique décrivant les 8 segments de Couinaud.*

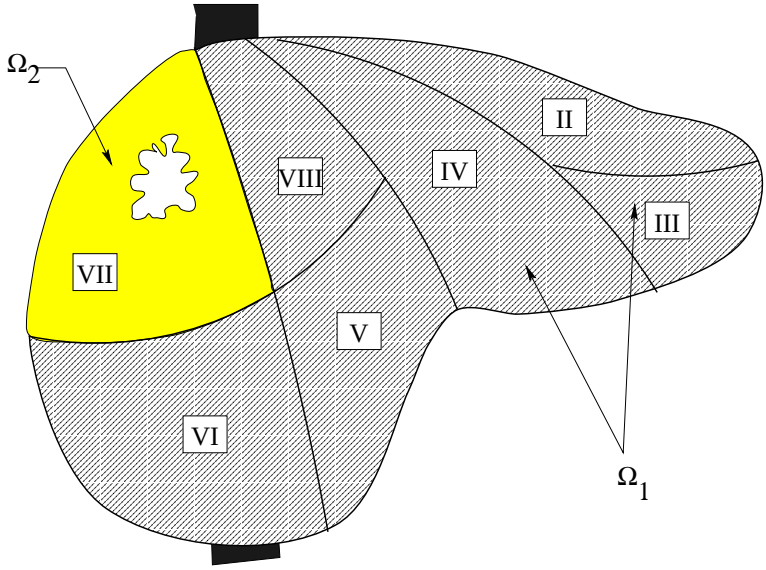


FIG. 8.19 – *Dans le cas de la chirurgie hépatique, il est possible de déterminer, grâce à un scanner préopératoire, la méthode d'exérèse idéale. En intégrant également, dans la phase de planification, la définition de deux sous-domaines du foie, correspondants, dans ce cas, au segment 7 et aux sept autres segments, il est possible de créer un modèle hybride adapté à l'opération planifiée.*

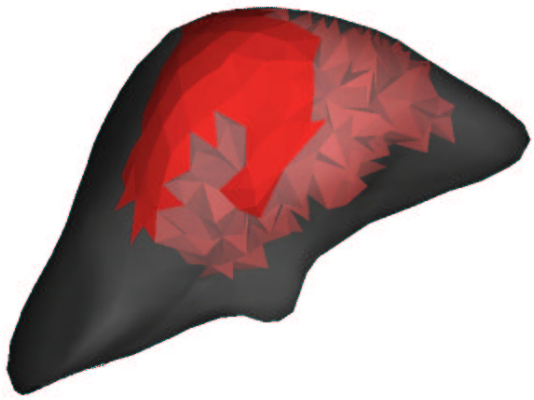


FIG. 8.20 – *L'enveloppe du foie d'un patient et, par transparence, le sous-maillage d'éléments tétraédriques correspondant au segment 7.*

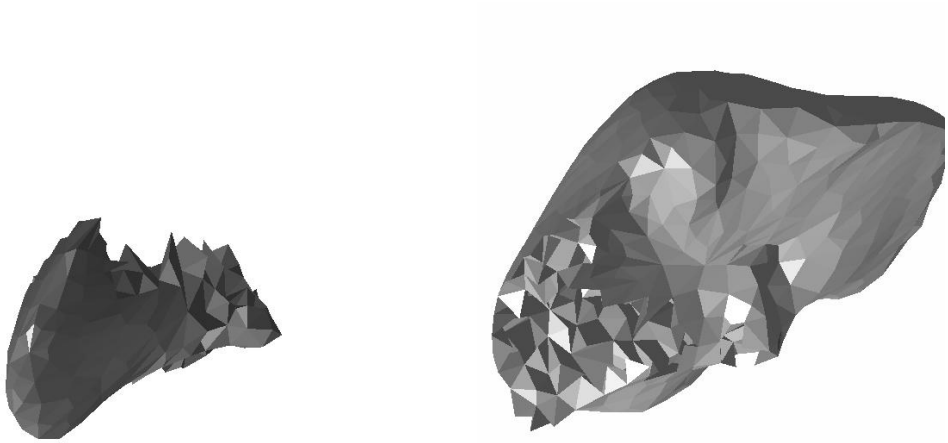


FIG. 8.21 – **À gauche** *: le sous-domaine correspondant au segment 6.* **À droite** *: le sous-domaine correspondant aux segments 1, 2, 3, 4, 5, 7 et 8.*

figure (8.21).

8.4.5 Simulation à l'aide de deux instruments

Déformations

L'utilisation de deux instruments est une étape indispensable à la mise en œuvre d'un simulateur proche des besoins des chirurgiens. L'intégration de deux systèmes à retour d'effort a nécessité le développement d'un nouveau *driver* prenant en compte la gestion simultanée des deux systèmes. Nous continuons à utiliser une machine séparée (PC Pentium 166 Mhz) pour le contrôle des deux instruments, la détection de collisions et le calcul des forces. La quantité de calculs étant le double de celle nécessaire à un seul périphérique, il devient plus difficile de

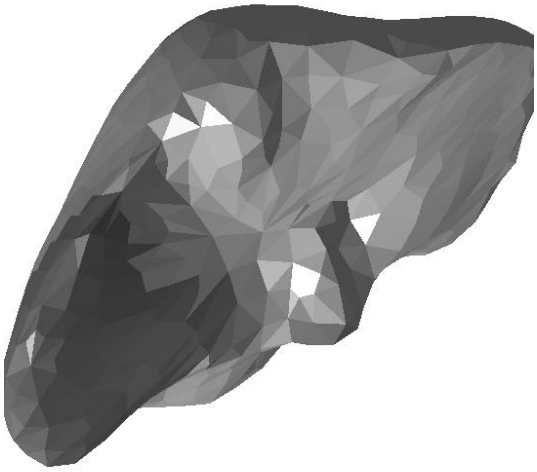


FIG. 8.22 – *Modèle hybride du foie dans lequel le maillage masses/tenseurs correspond au segment 6.*

conserver des fréquences élevées.

Le maillage volumique ainsi quel les pré-calculs sur le maillage du foie de ce patient présentent les caractéristiques suivantes :

- taille du maillage :
  - nœuds : 1537
  - tétraèdres : 7039
  - triangles sur la surface : 1378
- réduction de la quantité d'informations : 40% des déplacements sont conservés
- durée des pré-calculs : 3 h 30 min sur une station *Silicon Graphics* bi-processeurs

La figure (8.23) présente quelques déformations issues d'une simulation faisant intervenir un modèle élastique linéaire du foie, utilisant uniquement des pré-calculs. Malgré l'utilisation de deux systèmes à retour de force, des fréquences de l'ordre de 300Hz ont pu être obtenues pour le calcul des forces.

Découpes

L'utilisation de deux systèmes à retour de force présente également un grand intérêt pour la découpe de tissus mous. Dans ce cas, une pince permet au chirurgien de manipuler le foie afin de faciliter l'accès à la zone d'intérêt, puis, à l'aide d'un bistouri électrique, il va réaliser une "incision". Par manque de temps, nous n'avons pu interfacer la fonction de découpe avec les périphériques à retour de force. Les résultats présentés dans la figure (8.24) montrent ainsi la découpe d'une partie du segment 6, sur le modèle hybride décrit précédemment. Une pince permet de manipuler et déformer le modèle du foie puis la découpe est réalisée en sélectionnant, à l'aide d'une souris, un ensemble de triangles de la surface. Le tétraèdre ayant une face en commun avec ce triangle est alors supprimé.

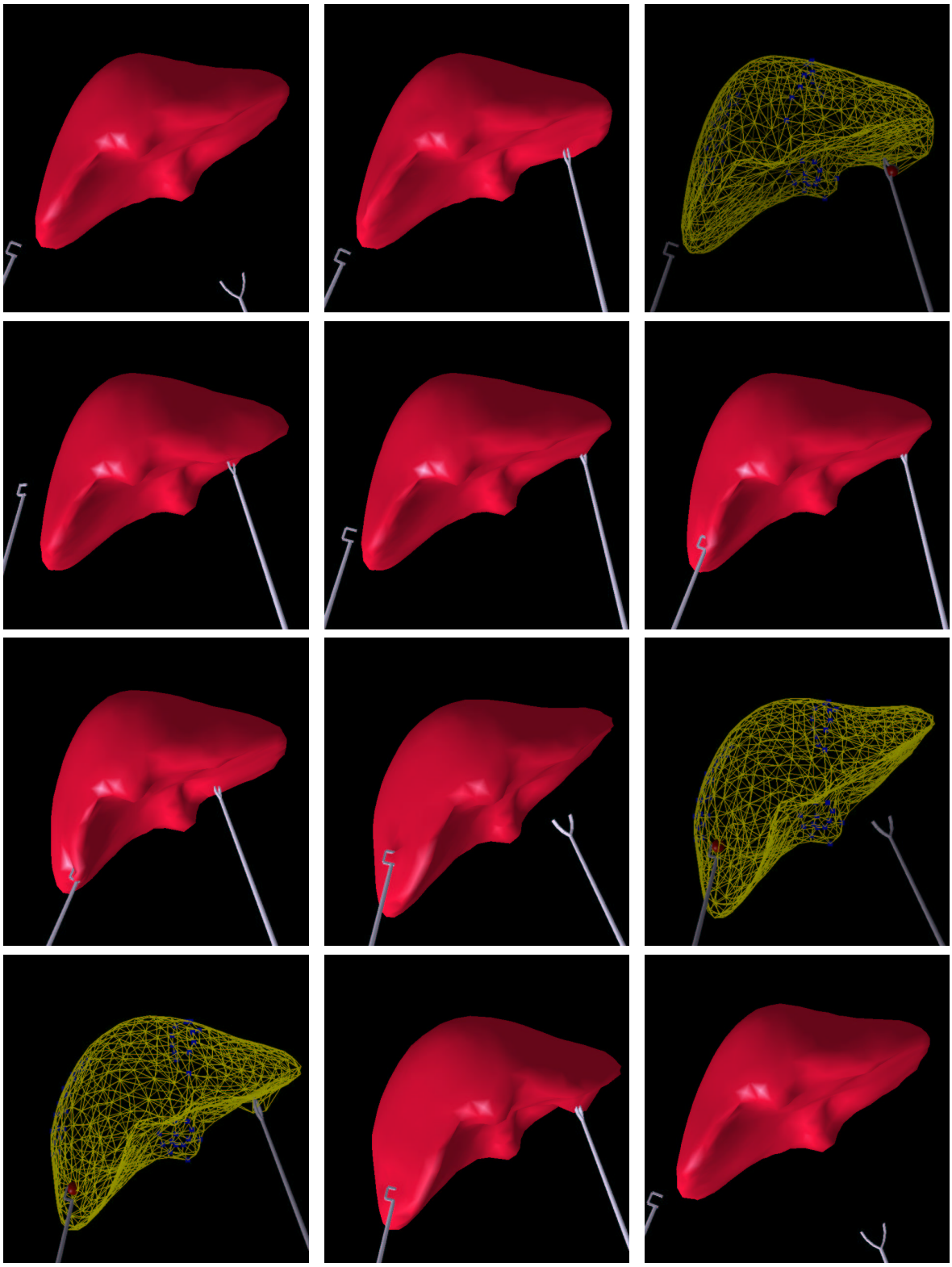


FIG. 8.23 – *Déformations d'un modèle élastique linéaire du foie d'un patient, à l'aide de deux instruments.*

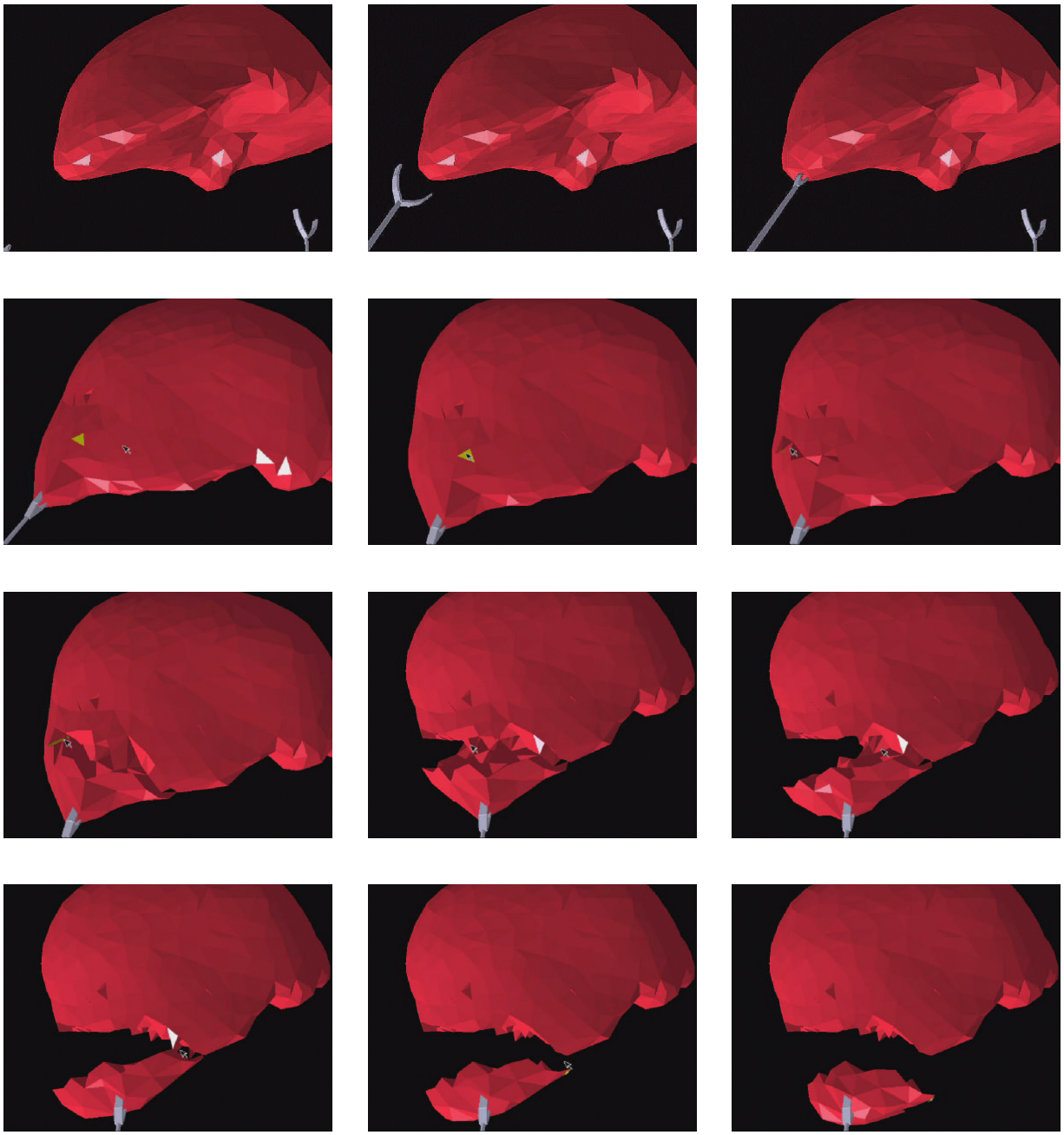


FIG. 8.24 – *Déformations et découpes d'un modèle hybride. La pince saisit le segment 6 puis celui-ci est découpé interactivement.*

8.5 Étude rhéologique du parenchyme hépatique

De nombreuses études ont été menées jusqu'à présent pour déterminer les propriétés mécaniques des différents tissus biologiques tels que la peau, les muscles, le cerveau, etc. Cependant, aucune étude n'a été effectuée sur le parenchyme hépatique afin d'en déterminer les caractéristiques biomécaniques. La seule étude a consisté en une mesure de la tolérance au choc de cet organe à l'aide de tests impulsionnels (McElhaney et al., 1976).

Les résultats reportés dans ce paragraphe ont été menés au Laboratoire des Systèmes Biomécaniques (LSBM) de l'Université Louis Pasteur de Strasbourg, à la demande de l'IRCAD. Ces résultats ne font donc pas partie de nos contributions. Ils sont par contre significatifs de notre effort de validation des modèles utilisés ainsi que de la nécessité de mesures biomécaniques, même dans le cadre de simulations temps-réel. Nous ne présentons ces résultats que de façon générale, dans le simple but de montrer le lien entre le modèle élastique linéaire que nous avions choisi de manière heuristique et les résultats obtenus par la suite montrant le comportement réel d'un échantillon de tissu hépatique.

Les tests ont été effectués sur des échantillons de parenchyme hépatique de porc. Il s'agit de cinq essais œdométriques, d'une recherche du domaine de linéarité entre 1 Hz et 40 Hz, et enfin de cinq tests de rhéologie classiques. L'objectif est de déterminer une loi de comportement des tissus hépatiques.

Les tests œdométriques ont été réalisés dans le but de déterminer les paramètres mécaniques élastiques linéaires du parenchyme. Ces tests permettent d'obtenir le module de compressibilité K et le coefficient de Poisson ν. On peut alors en déduire les coefficients de Lamé utilisés dans le calcul de la matrice de rigidité lors d'une modélisation par éléments finis. Les tests ont bien entendu été réalisés *in vitro* mais suffisamment tôt après l'abattage de l'animal pour ne pas avoir une différence de comportement trop importante par rapport à comportement *in vivo*.

La détermination du domaine de linéarité est réalisée en soumettant un échantillon de foie de 3mm d'épaisseur à un balayage de contrainte sinusoïdale. Ce balayage se fait à fréquence constante. La déformation, enregistrée en fonction de la contrainte, est un indicateur de la linéarité du matériau utilisé[4]. Les résultats montrent que le comportement est viscoélastique linéaire. Comme nous avons fait l'hypothèse d'une loi d'évolution quasi-statique, nous nous contenterons de retenir que la relation entre contrainte et déformation est linéaire, comme nous en avions fait l'hypothèse. Le domaine de linéarité est de l'ordre de 200 KPa - soit 2 atmosphères -, et ce quelle que soit la fréquence de balayage.

Enfin, la dernière étape de cette série d'expériences a consisté à comparer les courbes théoriques de différents modèles viscoélastiques aux courbes rhéologiques du parenchyme hépatique. Des expériences complémentaires s'avèrent nécessaire pour déterminer avec exactitude le modèle le plus proche de la réalité (cf. chapitre 1).

En conclusion de ces mesures biomécaniques, nous pouvons, dans un premier temps, conclure que l'hypothèse de linéarité est vérifiée pour une plage de contraintes correspondant

4. Un matériau est linéaire, dans une gamme de fréquence donnée, lorsque la déformation est proportionnelle à la contrainte imposée, et ceci quelle que soit la fréquence.

assez bien aux forces intervenant en chirurgie. En intégrant, dans le calcul de la matrice de rigidité du modèle linéaire, les valeurs mesurées des coefficients de Lamé, on se rapproche encore un peu plus du comportement réel. Cependant, nous sommes encore loin du comportement d'un foie humain. Pour y parvenir, il faudrait tout d'abord réaliser les tests sur du parenchyme de foie humain, ainsi que sur d'autres structures, en particulier le réseau vasculaire. Il est également nécessaire de ne pas se limiter au domaine de linéarité, mais d'étudier le comportement lorsque les contraintes deviennent plus importantes. Enfin, les mesures réalisées *in vitro*, même dans de bonnes conditions, sont sans doute légèrement différentes de ce que pourraient donner des tests *in vivo*, actuellement impossibles à réaliser.

Conclusion et Perspectives

Dans ce chapitre final, nous dressons une conclusion sur les différentes méthodes que nous avons présentées dans ce manuscrit. Après avoir rappelé les grandes lignes de nos approches, nous présenterons les améliorations possibles ainsi que les pistes qu'il nous semble intéressant de suivre.

1 Rappel des travaux présentés

Nous avons abordé, dans ce manuscrit, un ensemble de méthodes que nous espérons utiles pour la résolution du vaste problème que représente la simulation de chirurgie. Nous nous sommes intéressés essentiellement à l'entraînement au geste opératoire, sous ses aspects les plus simples. Nous avons visé principalement la réalisation d'un ensemble d'outils permettant de développer un prototype de simulateur de chirurgie laparoscopique. Cette récente technique de chirurgie, présente de nombreux avantages pour le patient. En contrepartie, le travail du chirurgien est devenu plus complexe et demande un entraînement particulier. Nous avons ciblé deux applications lors du développement du simulateur : un apprentissage au geste, permettant d'acquérir une bonne coordination œil-main et la simulation d'opérations simples telles que la découpe de tissus mous, représentant un premier pas vers la simulation d'une opération complète.

L'entraînement à la manipulation des instruments endoscopiques afin de coordonner correctement le mouvement des instruments avec le mouvement perçu sur le moniteur vidéo, nécessite la représentation et le calcul de déformations en temps-réel. Pour cela, nous avons étudié en détail différentes méthodes d'optimisation pour la résolution d'un problème d'élasticité linéaire par une méthode d'éléments finis. Cette étude a abouti au développement de la méthode que nous avons nommée *SDeLL*. L'algorithme que nous avons développé permet le calcul de la déformation - et des forces associées - d'un modèle volumique complexe en temps-réel. Les temps de calculs obtenus présentent l'avantage d'être très faibles et de varier sous-linéairement en fonction du nombre de nœuds du maillage. La déformation est induite par un ensemble de conditions aux limites et non de forces externes, afin de prendre en compte des interactions à l'aide d'un système à retour d'effort. Notons enfin que les calculs des forces et du champ de déformation peuvent être découplés, c'est-à-dire qu'à partir d'un ensemble de conditions aux limites donné, on peut calculer seulement les forces de réaction ou seulement la déformation induite. Ceci s'est avéré très utile pour la réalisation du prototype de simulateur décrit au chapitre (8). Afin de prendre en compte des lois de comportement plus complexes, nous avons apporté deux améliorations à la loi de déformation initiale : la première consiste à prendre en compte des informations contenues dans l'image volumique - à partir de laquelle nous avons créé le modèle déformable - pour introduire un comportement non-homogène; la seconde vise à reproduire le comportement non-linéaire observé lors d'expériences de biomécanique sur des tissus mous. En prenant ainsi en compte de tels paramètres dans le processus de déformation, nous pensons qu'il est possible d'améliorer à la fois le comportement déformable et la pertinence du modèle.

Nous avons ensuite étendu nos recherches à la modélisation d'opérations entraînant une modification de la topologie du maillage d'éléments finis, comme c'est le cas lors de la découpe de tissus mous. Pour cela, nous avons introduit les notions de modèle masses/tenseurs et de modèle hybride. Les découpes sont réalisées par suppression d'un ensemble de tétraèdres, solution à la fois plus simple qu'une incision à l'aide d'un scalpel, et plus réaliste vis à vis de la simulation de chirurgie laparoscopique. Les résultats sont intéressants pour deux raisons : à un niveau "théorique", nous avons montré que les approches permettant d'une part la déforma-

tion, d'autre part les découpes, peuvent se combiner dans un même modèle, en gardant leurs avantages respectifs, et en particulier des fréquences de calcul élevées. La seconde raison est plus "pratique" : en dehors des découpes, le modèle hybride permet d'induire un comportement dynamique, inexistant dans le modèle élastique linéaire initial. Bien que ce ne soit pas un point très important lors de simples déformations, cela peut présenter un intérêt lors de la découpe, afin de mieux percevoir son effet.

Enfin, l'ensemble de nos travaux a été regroupé dans un environnement de simulation intégrant un système à retour d'effort [5]. Une première version du simulateur est en fonctionnement depuis près d'un an et nous a permis de valider l'ensemble des algorithmes de déformation, détection de collision, communication, etc. mis en œuvre. Une seconde version, actuellement en cours de développement, va permettre de prendre en compte les interactions issues de deux systèmes à retour de force. L'utilisation de deux instruments est indispensable pour pouvoir réaliser à la fois des déformations et des découpes. Un instrument - une pince - permet de manipuler/déformer l'organe, alors que le second - un bistouri électrique par exemple - est utilisé pour les découpes.

2 Quelques améliorations à moyen terme

Les méthodes que nous avons développées dans ce manuscrit présentent, malheureusement, des inconvénients. Comme nous l'avons déjà souligné, le modèle déformable basé sur le pré-calcul de déformations élémentaires ne permet pas de modifications topologiques sans avoir recours à une nouvelle étape de pré-calculs, incompatible avec la contrainte de temps-réel. La définition du modèle hybride permet de pallier, en partie, cet inconvénient, mais rend impossible la simulation d'incisions sur une grande partie de l'organe. De même, le modèle masses/tenseurs, en n'utilisant plus de pré-calculs, entraîne des temps de calculs fortement liés au nombre de nœuds utilisés pour la discrétisation du modèle.

À cela, différentes solutions sont envisageables. L'une d'entre elles est relative à la décomposition de domaine et à la répartition de l'ensemble des calculs sur une architecture multi-processeurs. Cette méthode a déjà fait ses preuves en calcul numérique sur de grandes structures. Cependant, il reste difficile de prédire si des fréquences de calcul de l'ordre de 500 Hz sont envisageables, en particulier en raison des temps de communication entre les différents processeurs.

Un autre problème est lié au choix de la loi de comportement du modèle déformable. Comme nous l'avons dit précédemment, il ne semble pas envisageable de définir un modèle déformable en temps-réel permettant de prendre en compte l'ensemble des lois de comportement des différents organes. Nous avions ainsi choisi d'utiliser un modèle élastique linéaire, afin d'utiliser certaines de ses propriétés. Un tel modèle présente l'avantage de correspondre à une bonne approximation de la loi de comportement de nombreux matériaux, à condition de se limiter à de faibles déformations. Dans la simulation de chirurgie hépatique que nous avons réalisée, les expériences biomécaniques ont montré que cette hypothèse de linéarité reste valable

5. Le simulateur dispose de deux systèmes à retour de force depuis le mois d'octobre 1997.

pour un ensemble de contraintes acceptables dans le cadre d'une opération chirurgicale. Malgré tout, il est évident que dans de nombreux cas, des modèles non-linéaires, hyperélastiques, etc. doivent être envisagés. Cela soulève deux autres problèmes : le calcul des déformations en temps-réel et la validation de ces modèles par des expériences de biomécanique, si possible *in vivo* lorsque cela deviendra possible. Il nous semble en effet évident qu'à l'heure actuelle il est plus important d'avoir un modèle déformable en temps-réel réaliste dont on connaît le domaine de validité par le biais de tests biomécaniques plutôt que des modèles complexes dont on ne sait pas s'il correspondent à une quelconque réalité.

À plus court terme, nous avons déjà envisagé un certain nombre d'améliorations, concernant les points suivants :

- **pré-calculs** : mise en œuvre de l'étape de pré-calculs sur une architecture parallèle. Cette solution est facilement réalisable car il suffit d'affecter à chaque processeur un ensemble de nœuds de la surface du maillage. Il serait ainsi possible de diviser les temps de pré-calculs par le nombre de processeurs impliqués.
- **intégration des différents modules du simulateur** : c'est un problème très important et parfois sous-estimé. En effet, même si en ensemble de solutions mathématiques semblent, en théorie, applicables à un problème, leur mise en œuvre et leur intégration dans un environnement de simulation sont parfois limitées par des problèmes techniques. Nous en avons ainsi rencontrés de nombreux durant le développement du prototype de simulateur. En particulier, les besoins de communication entre les différents éléments du simulateur - système à retour d'effort, PC, station de travail - sont, à l'heure actuelle, un point bloquant. L'utilisation d'une liaison Ethernet pose en effet de nombreux problèmes, en particulier de latence, lorsqu'un grand nombre de données doivent être transmises rapidement, comme c'est le cas avec l'utilisation du modèle hybride. Une solution, qui sera probablement retenue par la suite, consiste à n'utiliser plus qu'une seule station de travail - bi ou quadri-processeurs - dans le simulateur. En centralisant ainsi l'ensemble des modules de calcul, on éviterait les problèmes liés au transfert des données. Cette solution n'est pas encore possible en raison de problèmes techniques que nous espérons voir bientôt résolus.
- **définitions de gestes élémentaires** : en assemblant - et en modifiant éventuellement - les "briques" que constituent les différentes méthodes introduites dans cette thèse, nous pensons être bientôt en mesure de définir, avec l'aide de chirurgiens, un ensemble de gestes élémentaires pour la simulation. Ces gestes permettraient, dans un premier temps, la maîtrise des différents instruments utilisés en chirurgie endoscopique. Il n'est pas utile, dans ce cas, de disposer d'un modèle déformable très réaliste. Par la suite, il serait possible, pour un étudiant, d'apprendre des opérations simples, par un enchaînement de gestes élémentaires. Cela constituerait une première étape avant la simulation d'une opération complète.

3 Perspectives

L'accroissement considérable du nombre d'interventions faisant appel à des techniques endoscopiques est la preuve de l'intérêt porté par le monde médical à la chirurgie minimalement invasive. Malgré tout, un nombre encore trop élevé d'opérations ne sont pas réalisables sous endoscopie, ou alors seulement par quelques équipes spécialisées. Il y a deux raisons à cela. Tout d'abord, une intervention endoscopique est techniquement très différente d'une opération "classique" et nécessite l'utilisation d'instruments spécialisés. La manipulation de ces instruments, les problèmes de coordination œil-main, l'absence de vision stéréoscopique[6], constituent un premier obstacle auquel la simulation peut apporter des solutions intéressantes, en permettant un entraînement intensif tout en réduisant l'utilisation d'animaux de laboratoire ou de cadavres. Mais la simulation offre des perspectives beaucoup plus vastes que le simple entraînement au geste médical.

Une des applications futures de la simulation de chirurgie laparoscopique sera la définition de nouvelles procédures chirurgicales, adaptées à ce mode d'intervention. C'est la seconde raison pour laquelle, à l'heure actuelle, certaines opérations ne sont pratiquées que par un nombre réduit d'équipes. Avant de pouvoir être appliquée sur un patient, une technique chirurgicale nécessite des dizaines d'heures de "mise au point". En utilisant les possibilités d'un simulateur - enregistrement de l'opération, visualisation sous différents angles, détection de gestes dangereux, etc. - cette mise au point serait beaucoup plus rapide.

Il est également possible d'envisager des applications en téléchirurgie, où le retour d'effort tient également une place très importante. On peut en effet imaginer qu'un système de simulation tel que celui que nous avons décrit pourrait être utilisé pour le développement de techniques de téléchirurgie. Dans ce cas, le chirurgien opérant à distance ressentirait des forces non pas transmises par des capteurs mais calculées par le simulateur. En restant encore dans le domaine médical, une application évidente des modèles déformables en temps-réel est la réalité augmentée. Cette technique, encore très peu utilisée, n'est applicable, pour l'instant, qu'à des structures rigides ou très peu déformables. Pourquoi ne pas envisager que, dans quelques années, en combinant de nouveaux modèles mathématiques et des résultats de biomécanique *in vivo*, un modèle comportemental précis d'un organe puisse suivre, en temps-réel, les déformations de l'organe réel et ainsi permettre au chirurgien de disposer d'informations supplémentaires durant l'opération...

Enfin, dans un futur beaucoup plus proche, nous attendons beaucoup de la mise en place d'un second prototype du simulateur dans la salle d'opération du centre d'entraînement EITS de Strasbourg. En analysant les impressions des chirurgiens[7], nous devrions ainsi mettre plus rapidement au point les prochains prototypes.

La simulation médicale est décidément un sujet passionnant et nous sommes persuadés que les prochaines années verront le développement et l'utilisation de simulateurs à beaucoup plus grande échelle comme ce fut le cas pour les simulateurs de vol.

6. Des systèmes utilisant des caméras endoscopiques stéréoscopiques commencent cependant à se développer.
7. Le simulateur actuel a déjà pu être testé par un chirurgien de l'IRCAD.

Deuxième partie

Reconstruction faciale

1.

Reconstruction faciale

La reconstruction faciale est une méthode utilisée en médecine légale pour l'identification d'une personne à partir de restes squelettiques. En comparant ensuite le visage reconstruit à des photographies de personnes disparues, il est parfois possible d'identifier cet individu. Pour y parvenir les spécialistes ont recours à diverses méthodes qui restent essentiellement manuelles. Par l'introduction d'une technique de reconstruction faciale assistée par ordinateur, notre but est, dans un premier temps, d'automatiser certaines étapes de la reconstruction afin de les rendre plus rapides et ainsi pouvoir modifier certaines caractéristiques faciales plus rapidement qu'avec les techniques manuelles classiques. Dans un second temps, nous proposons une méthode originale de reconstruction faciale. Enfin, après avoir appliqué la méthode sur quelques cas et essayé de quantifier les résultats, nous proposons d'autres voies à explorer afin d'améliorer la qualité de la reconstruction.

1.1 Introduction

Ce projet a débuté en Juin 1995 sous l'impulsion du Dr. Quatrehomme, médecin légiste à l'hôpital Pasteur de Nice et spécialiste de la reconstruction faciale. La reconstruction faciale est une technique d'anthropologie légale qui présente un intérêt croissant parmi les méthodes d'investigation. Bien qu'il soit peu fréquent d'y avoir recours, c'est souvent une solution ultime, lorsque toutes les autres techniques d'identification d'un cadavre ont échoué. Il existe très peu de spécialistes en France et ceux-ci sont par conséquent assez souvent sollicités. Leur avis d'expert revêt donc une grande importance et la possibilité de développer une technique plus rapide et plus robuste s'avère un atout majeur.

1.1.1 L'identification médico-légale

La médecine légale est une des spécialités impliquées dans l'analyse et la reconstitution de la scène d'un crime, lorsqu'il est nécessaire d'identifier une ou plusieurs victimes. Chaque indice doit être analysé afin de recréer la situation, les circonstances entourant la mort d'une personne. Ceci nécessite une bonne coordination entre les différents scientifiques intervenant en médecine légale, chacun apportant sa propre expérience pour ajouter une nouvelle pièce au puzzle.

Lorsqu'il est nécessaire de procéder à l'identification d'un cadavre, chaque indice, chaque preuve, va être utilisé afin d'augmenter la probabilité d'une identification. En particulier, des éléments tels que des photos d'identité, des radiographies antemortem vont présenter un intérêt particulier. Cependant,lorsqu'aucun élément, aucune preuve ne permet d'identifier le cadavre, il est nécessaire de procéder à une reconstruction faciale. Ceci constitue le domaine de l'anthropologie légale et il s'agit d'une très difficile mais importante tâche que de tenter de recouvrer l'apparence physique d'un individu à partir de restes squelettiques ou bien de faire le lien entre une photographie et une personne non identifiable.

L'identification médico-légale fait appel à de nombreuses méthodes, simples ou complexes. Il est habituel de distinguer les méthodes comparatives (lorsqu'une comparaison est possible entre des éléments antemortem et postmortem), et les méthodes reconstructives (dans tous les autres cas).

La définition de l'identification doit cependant être explicitée. En fait, le terme *identification* devrait être réservé aux identifications positives certaines. La reconnaissance d'un sujet par un proche n'est pas une identifiaction certaine. Le fait de retrouver des papiers d'identité sur une victime encore moins : il s'agit dans ce cas d'une simple présomption d'identité. Une cicatrice, un antécédent de fracture ou un tatouage ne permettent également qu'une présomption d'identité. L'identification positive n'est réalisée qu'avec des techniques comparatives permettant d'affirmer avec certitude une identité radiologique (comparaisons radiologiques ou odontologiques), ou une identité biologique (empreintes digitales ou génétiques). Même dans ces cas très favorables, certaines réserves doivent être apportées, et les limites de chaque technique bien connues de tout utilisateur. En conséquence, les réponses apportées par les différentes techniques d'identification médico-légale sont résumées par quatre possibilités (cf. tableau 1.1) : identification positive (identité certaine et absolue); identité problable; identité possible; exclusion absolue de l'identité.

Dans les deux cas intermédiaires (identité probable ou possible), il faut impérativement utiliser d'autres méthodes pour aboutir à une identité certaine ou une exclusion absolue d'identité.

Les circonstances entrainant la perte d'identité sont variables. Chez un sujet décédé, la perte d'identité peut être due à un événement perimortem (corps traumatisé), ou postmortem (corps décomposé, carbonisé, voire réduit à l'état de squelette).

Le processus d'identification commence souvent par une analyse du squelette afin de déterminer ses caractéristiques élémentaires - âge, sexe, race, stature, etc. L'étape suivante consiste à rechercher des particularités du squelette qui pourraient, par la suite, permettre de distinguer cet individu d'autres personnes ou d'essayer de trouver une ressemblance avec une personne

Qualité de l'identification	*Exemples*
Identité certaine[a]	Comparaisons radiologiques Empreintes digitales Empreintes génétiques
Identité probable	Papiers d'identité Tatouage[b] Formule dentaire compatible
Identité possible	Antécédents pathologiques Cicatrices[b]
Identité exclue	Formule dentaire incompatible Antécédent de fracture incompatible

[a] Avec les réserves décrites ci-dessus
[b] Dans certains cas, une identification certaine est possible

TAB. 1.1 – *Les différents niveaux de qualité dans le processus d'identification médico-légale.*

disparue. Enfin, si aucun de ces éléments ne permet une identification certaine une tentative de reconstruction du visage est envisagée.

L'intérêt à retrouver l'identité d'une personne est à la fois pénal (la découverte de l'identité de la victime facilite habituellement la découverte du coupable), civil (tant que l'identité n'est pas certaine, de nombreuses opérations adminstratives sont suspendues). Quant à l'intérêt moral, il est évident.

Après un rappel des principales techniques d'identification médico-légale, nous décrirons les méthodes de superposition, restauration, et de reconstruction faciales. Ces méthodes sont complexes et nécessitent une maîtrise technique importante. Elles sont rarement employées en France, et habituellement utilisées comme "méthodes de la dernière chance", quand toutes les autres techniques ont échouées.

1.1.2 Les principales méthodes d'identification

Les méthodes d'identification peuvent être très simples, comme la description du corps et de ses particularités, des vêtements, des objets personnels. Cette méthode purement descriptive permet d'aboutir à l'identification du sujet dans pratiquement 70% des cas (habituellement en quelques jours), avec cependant les réserves que nous avons définies plus haut (identification probable, tableau 1.1). D'autres méthodes ont fait la preuve de leur efficacité, comme les empreintes digitales, permettant une identification positive certaine.

Mais, dans certains cas, il faut faire appel à des méthodes plus complexes, dentaires ou radiologiques, voire très sophistiquées, comme les méthodes biologiques (empreintes génétiques). L'autopsie médico-légale est généralement indispensable pour préciser certains points, comme la pathologie antérieure ou actuelle, le type d'intervention chirurgicale subie antérieurement, etc. Au cours de l'autopsie, certains prélévements seront réalisés, à destinée anatomo-pathologique (permettant d'apprécier la pathologie du sujet, et parfois aidant à la détermination du sexe, de

la race, de l'âge), et anthropologique (Krogman et Iscan, 1986; Iscan et al., 1984; Barres et al., 1989).

L'étude de la dentition est un élément très important dans l'identification d'un sujet. Chaque bouche est différente, et une simple description des éléments en place ou absents peut rapidement permettre de faire une exclusion ou une inclusion d'identité. Ces méthodes peuvent être complétées par une étude odontologique plus précise pour l'estimation de l'âge (Ritz et al., 1996; Maples, 1978; Gustafson, 1950), du sexe (Black, 1978), de la race (Hanihara, 1967) ou d'autres caractéristiques (Krogman et Iscan, 1986).

L'identification par comparaison radiologique est particulièrement performante (Atkins et Potsaid, 1978) et bien que toutes les parties du corps peuvent être utilisées pour effectuer une comparaison radiologique (Rhine et K., 1991; Messmer et Fierro, 1986), le sinus frontal présente un intérêt particulier (Schuller, 1943). Bien que connue depuis 1921, cette méthode a fait l'objet de peu de publications sur le plan international. Il faut citer les travaux de Culbert et Law (Culbert et Law, 1927) qui furent les premiers à utiliser une comparaison du sinus frontal pour identifier le corps d'un ex-patient trouvé dans une rivière, et le travail d'Asherson (Asherson, 1965) qui compare le sinus frontal à des empreintes digitales (*frontal sinus print*). Bien que la méthode comporte certaines difficultés (Quatrehomme et al., 1996), la comparaison du sinus frontal est extrêmement performante pour l'identification positive d'un sujet car le sinus frontal est unique : même des jumeaux monozygotes ont un sinus frontal différent.

1.1.3 La superposition faciale

Quand ces méthodes simples ont échoué, on peut faire appel à des méthodes plus particulières et très spécilalisées, nécessitant du temps et une maîtrise technique importante. La superposition faciale peut aider à l'identification d'une personne disparue en comparant, par un procédé photographique, le squelette crânio-facial avec le portrait ou la photographie de la personne disparue. Dès 1883, Weckler (cité dans (Iscan et Helmer, 1993)), effectuait une première tentative de comparaison entre un crâne et le portrait d'un personnage historique. La première application médico-légale de la superpostition faciale eut lieu en 1937 grâce à Glaister et Brash (Glaister et Brash, 1937). Par la suite, le procédé de Glaister et Brash fut repris et modifié par d'autres auteurs (Mc Kenna et al., 1984; Malinowski et Polawski, 1970). Un des succès les plus significatifs est celui de Helmer (Helmer, 1987) qui identifia les restes de Josef Mengele.

En général, les photographies du disparu et du crâne sont agrandies puis comparées par transparence. Le procédé de superposition comprend une superposition des négatifs et/ou le dessin des contours de la face, et sa superposition sur le crâne (cf. figures 1.1 et 1.2).

Les problèmes posés par ces techniques sont nombreux. Le coefficient d'agrandissement de la photographie doit être déterminé avec précision, ce qui est très difficile à réaliser sans disposer d'informations supplémentaires (distance focale, éléments de comparaison sur la photographie, etc.). La distance à laquelle a été prise la photographie est évaluée indirectement, en se servant par exemple de la taille des objets visible sur l'arrière plan, la distance interpupillaire, la largeur bizygomatique, etc. Un autre problème est celui de la position exacte du crâne par rapport à

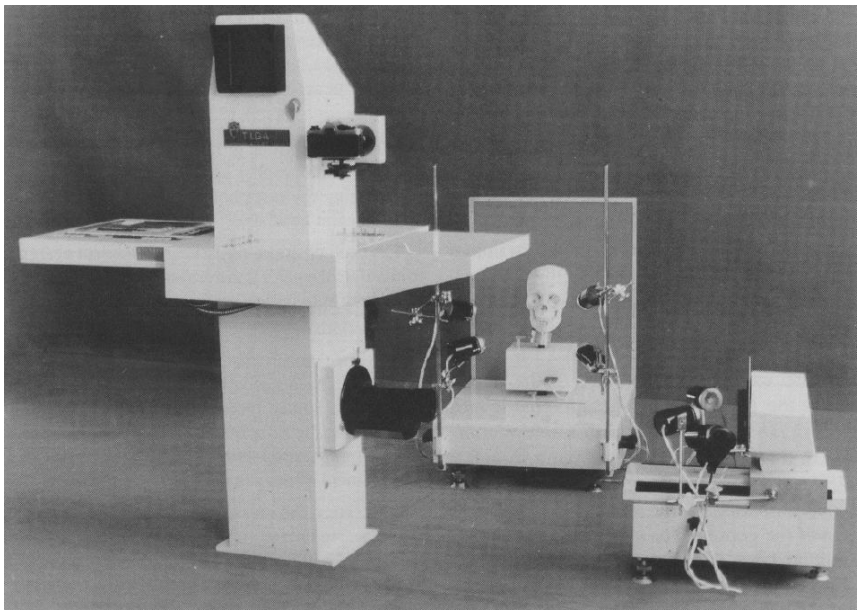


FIG. 1.1 – *Principe de superposition photographique. Le matériel utilisé pour l'identification est assez imposant et nécessite de disposer d'une photographie de chaque personne à identifier. On essaie alors de mettre en correspondance le crâne sec et la photographie d'un individu.*

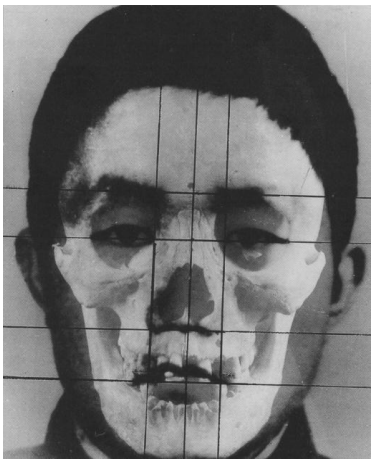


FIG. 1.2 – *Résultat de la superposition photographique de l'image du crâne sec et d'une photographie d'une personne disparue.*

celle de la photographie, le visage étant presque toujours dans une position intermédiaire (rachis cervical en flexion, extension, rotation ou inclinaisons variées). Sur la photographie fournie par la famille du disparu, les positions standardisées (face, profils ou trois-quarts) sont très rares en pratique, ce qui explique la mise au point de divers procédés (Ishibashi, 1986; Kumari et Chandra Sekharan, 1992) permettant de résoudre en partie ces problèmes.

Actuellement, la superposition faciale est aidée par des techniques vidéos (Helmer et Grüner, 1977; Krogman et Iscan, 1986; Helmer, 1987). Une image vidéo peut être très simplement superposée sur une autre, en utilisant deux caméras. Ce processus élimine une partie des problèmes qui étaient associés aux méthodes précédentes, en particulier la taille des deux images (l'agrandissement ou la réduction de l'image est obtenue instantanément), ou l'orientation dans

les différents plans (plan horizontal, plan vertical, plan sagittal). Les procédés de mixage permettent de nombreux types de superposition. Chaque étape peut être enregistrée et expliquée devant une cours d'Assises.

Grâce à l'introduction de l'informatique et des techniques de digitalisation d'images, il est possible de tentativer de quantifier objectivement les caractéristiques qui différencient les visages les uns des autres. La tendance actuelle vise à éliminer au maximum la subjectivité, en se basant en particulier sur des critères mathématiques pour évaluer les résultats et comparer différentes méthodes.

1.1.4 Les techniques de restauration faciale

Dans de nombreux cas, le procédé d'identification faciale par superposition se révèle peu fiable et trop long à mettre en oeuvre si l'on n'a pas de forte présomption quant à l'identité de la personne. Une reconstruction faciale reposant sur une étude de la morphologique crânienne et faciale doit alors être envisagée. C'est le cadre de l'anthropologie biologique où les anatomistes étudient le squelette humain, en particulier la morphologie crânienne et faciale. L'anthropologie légale en est une sous-discipline couvrant tous les aspects de l'analyse des restes de squelettes humains dans un contexte légal.

Alors que la restauration des mains (et plus précisément des doigts), pour permettre de réaliser des empreintes digitales, est régulièrement utilisée dans le domaine médico-légal (Montagu, 1935), l'utilisation de la restauration faciale dans un but d'identification médico-légale fait l'objet de publications extrêmement rares dans la littérature, la restauration faciale étant essentiellement utilisée en thanatopraxie.

Dans le domaine médico-légal, Dérobert (Dérobert, 1974) décrit le cas de sujets présentant d'importantes modifications traumatiques du visage, dont la restauration permet une amélioration spectaculaire. Cette technique fut une aide à l'identification, par l'intermédiaire des publications de photographies du visage restauré. Dérobert notait cependant que des imperfections pouvaient persister.

Plus récemment, Pötsch *et al.* (Pötsch et al., 1994) utilisent les principes de la chirurgie plastique pour aider à l'identification de sujets décédés, présentant un traumatisme crânio-facial. Après une formation aux techniques chirurgicales de restauration faciale, la méthode fut appliquée à des observations réelles, au cours de la phase autopsique. La publication de la photographie du visage restauré (ou de son dessin) permirent d'obtenir des informations utiles dans tous les cas. Les sujets furent identifiés dans les deux jours, dans 23 cas sur 24. Les auteurs insistent sur l'économie de temps et de moyens apportée par cette méthode, pour l'identification de sujets victimes de pathologie médico-légale traumatique.

Quatrehomme *et al.* (Quatrehomme et al., 1995) ont mis au point une technique originale de restauration-moulage qui peut être appliquée dans de très nombreuses pathologies médico-légales (traumatisme, décomposition, etc.). En cas de corps décomposé, la restauration fait appel à des injections de type thanatopraxique qui redonnent une certaine consistance au visage, et autorisent ensuite un moulage aboutissant à une reconstitution en trois dimensions du visage du sujet. En cas de corps sévèrement altéré par un traumatisme facial, la restauration

est extrèmement difficile et nécessite beaucoup de temps et de patience, pour arriver à un résultat souvent moyen. L'intérêt de la restauration-moulage est qu'il est possible de publier les photographies du moulage dans la presse alors que la publication de la simple restauration d'un visage traumatisé serait impossible. Cette technique a été utilisée dans différents cas (Quatrehomme et al., 1995; Quatrehomme et al., 1996). L'objectif est d'obtenir une ou plusieurs propositions d'identité. L'utilisation de techniques comparatives est ensuite indispensable pour permettre une identification positive absolue.

1.1.5 Les techniques de reconstruction faciale

Alors que les techniques de restauration s'adressent à un visage présentant une altération mais avec persistance sufficante des parties molles, la reconstruction faciale s'adresse à un crâne à l'état de squelette. Il s'agit donc de reconstruire un visage à partir d'un crâne.

La reconstruction faciale émerge de plus en plus comme un outil important en matière d'anthropologie médico-légale. La reconstruction faciale tente une approximation de la forme du visage à partir du crâne dont la finalité est d'aider à l'identification (Rathbun, 1984). De nombreuses méthodes ont été décrites, qu'elles soient bidimensionnelles, tridimensionnelles, informatiques ou non. Les premières reconstructions faciales furent développées par des anatomistes allemands à la fin du XVIIIème siècle pour identifier des personnages historiques. Plus tard, l'anthropologue Gerasimov (Gerasimov, 1971) a développé une méthode tridimensionnelle manuelle et l'a utilisée pour des affaires médico-légales. Ensuite, diverses techniques, bidimensionnelles ou tridimensionnelles, ont été proposées dans la littérature. La revue de ces différentes méthodes a été effectuée dans des ouvrages d'anthropologie médico-légale de référence (Krogman et Iscan, 1986; Helmer et al., 1993) et plus récemment une revue générale de la littérature a été effectuée par Aulsebrook *et al.* (Aulsebrook et Iscan, 1995). Alors que l'intérêt des techniques de reconstruction faciale est largement souligné dans la littérature (Snow et al., 1970; Krogman et Iscan, 1986; Aulsebrook et Iscan, 1995), l'évaluation de la fiabilité scientifique de la méthode est rarement rapportée (Krogman, 1943; Snow et al., 1970; Ubelaker, 1989; Quatrehomme et al., 1994). Le travail d'évaluation scientifique le plus important fut conduit par Helmer (Helmer et al., 1989; Helmer et al., 1993), dans lequel deux examinateurs indépendants ont conduit un essai en double aveugle pour reconstruire les tissus mous à partir de doubles moulages de 12 crânes (chaque examinateur pratiquait sa propre reconstruction). Les résultats montraient des variations dans la qualité de la reconstruction, allant de moyenne à excellente.

Quelle que soit la technique utilisée, la reconstruction faciale est fondée (a) sur une analyse anthropologique rigoureuse, à partir des mensurations anthropologiques classiques effectuées au niveau du squelette crâniofacial (Krogman et Iscan, 1986), et de données céphalométriques radiologiques (Sassouni, 1969). Ceci permet d'apréhender certains caractères morphologiques particuliers à chaque cas, et un certain nombre d'hypothèses sur la forme du crâne et du visage peuvent être proposées (b) sur la connaissance des épaisseurs moyennes de tissus mous, au niveau d'un certain nombre de points anthropologiques, qui sont publiés dans la littérature (Rhine et Campbell, 1980; Aulsebrook et Iscan, 1995), pour diverses populations et divers

états pondéraux (maigre, normal, obèse). Enfin, (c) elle est fondée sur l'expérience clinique et radiologique, par exemple pour la position des yeux, la forme du nez, la taille des oreilles, etc.

La relation entre les structures osseuses et les tissus mous a fait l'objet de nombreux travaux de recherche. Welcker, cité par (Iscan et Helmer, 1993), a mesuré l'épaisseur des parties molles sur des cadavres. His, cité dans (Iscan et Helmer, 1993), ainsi que Kollman et Büchly (Iscan et Helmer, 1993), poursuivirent le même type d'approche. Kollman et Büchly ont décrit quatre catégories en fonction du statut pondéral, et ont comparé leurs résultats avec ceux de His. Leurs travaux sont les fondements des travaux ultérieurs. Les mesures faites sur le cadavre souffrent de beaucoup de critiques (Suk, 1935) : les points anthropologiques ne sont pas toujours localisés avec exactitude; les modifications cadavériques, notamment la deshydratation, la rigidité, l'effet de la pesanteur, modifient les épaisseurs mesurées alors que la corrélation avec les épaisseurs mesurées sur le vivant n'est pas connue; la décomposition joue aussi un rôle évident pour favoriser les erreurs. D'autre aprt, l'épaisseur des parties molles varie avec les groupes ethniques (cf. tableaux 1.3 et 1.4).

1.1.6 Informatique et reconstruction faciale

La reconstruction faciale apparaît comme un outil d'importance croissante en anthropologie et pathologie légale, constituant un progrès pour une identification positive par rapport aux techniques comparatives classiques. Les techniques informatiques ont été surtout utilisées dans le domaine des bases de données afin de stocker et restituer des images de banques de données faciales. Certains logiciels plus spécialisés proposent de modifier ou d'ajouter la pilosité ou des signes particuliers sur l'image d'un visage donné, selon le principe utilisé pour la création de portraits robots. Ces logiciels ne traitent donc pas du problème de reconstruction à partir d'un crâne et ne concernent que le traitement d'images bidimensionnelles.

La reconstruction faciale 3D par ordinateur présente trois avantages majeurs. Premièrement, la procédure de reconstruction en elle-même se trouve simplifiée. Nous ne pouvons pas concevoir actuellement de rendre cette procédure totalement automatique; cependant, il est clair que les techniques d'imagerie 3D peuvent considérablement réduire le temps passé par le médecin légiste pour proposer un modèle. Un autre bénéfice réside dans la possibilité de pouvoir produire plusieurs modèles à partir d'un même crâne en fonction de différents paramètres (hypothèses sur la morphologie, l'âge ou le sexe de la personne).

1.2 Travaux précédents

De nombreuses méthodes de reconstruction faciale ont été développées depuis le XIXème siècle, date des premiers travaux dans ce domaine. Qu'elles concernent une représentation bidimensionnelle ou tridimensionnelle, qu'elles aient recours à l'utilisation de l'informatique ou non, la plupart de ces méthodes est présentée dans les ouvrages d'anthropologie légale (Krogman et Iscan, 1986; Stewart, 1979) ainsi que dans une récente étude réalisée par Aulsebrook (Aulsebrook et Iscan, 1995).

1.2.1 Dans le domaine de l'anthropologie légale

Les techniques de reconstruction ont d'abord été développées par les anatomistes allemands à la fin du XIXème siècle afin d'identifier certains personnages historiques. Plus tard, l'anthropologiste russe Gerasimov a développé une méthode tridimensionnelle à base de moulages en argile et l'a utilisée dans le cadre de la médecine légale (Gerasimov, 1971; Gerasimov et al., 1986). Cette méthode consiste à positionner, en des points caractéristiques du crâne, un ensemble de marqueurs (petites tiges métalliques) dont la hauteur correspond à l'épaisseur moyenne du tissu facial en cet endroit (cf. figure 1.5). L'épaisseur moyenne en un point donné du crâne est décrite dans des tables telles que celles présentées figures (1.3) et (1.4). Ensuite, un ensemble de pièces d'argile est appliqué sur le crâne avec la contrainte que l'épaisseur d'argile est égale à la hauteur des marqueurs, puis extrapolée à partir de ceux-ci dans les zones où il n'y a pas de marqueur.

TABLE 1. Variation of Soft Tissue Thickness (mm) in Males and Females of Different Ethnic Groups

		Koreans		Buryats		Kazakhs		Bashkirs		Uzbeks		Armenians		Abkhazians		Russians		Lithuanians	
Landmarks	Sex	Mean	S.D.	Mean	S.D.	Mean	S.D.	Mean	S.D.	Mean	S.D.	Mean	S.D.	Mean	S.D.	Mean	S.D.	Mean	S.D.
N	M	91		95		84		155		55		55		50		72		188	
	F	91		167		99		—		71		74		59		101		188	
Metopion	M	4.5	0.98	4.5	0.88	4.5	0.87	5.1	0.85	5.1	0.71	4.7	0.81	4.5	0.72	5.3	0.86	4.7	0.83
	F	4.5	0.89	4.7	0.95	4.9	0.90	—	—	5.0	0.71	4.9	0.91	4.6	0.77	5.3	0.77	4.6	0.67
Superciliary	M	5.2	0.81	5.4	0.79	5.2	0.82	5.6	0.89	5.4	0.76	5.2	0.83	5.2	0.72	5.8	0.98	5.1	0.72
	F	5.2	0.86	5.7	1.00	5.6	0.87	—	—	5.5	0.77	5.8	1.09	5.4	0.63	5.9	0.95	5.3	0.70
Glabella	M	5.1	0.80	5.4	0.75	5.3	0.79	5.6	0.84	5.4	0.75	5.3	0.90	5.2	0.74	5.8	0.79	5.5	0.75
	F	5.4	0.89	5.6	0.88	5.6	0.86	—	—	5.5	0.77	5.7	0.98	5.4	0.75	6.0	0.89	5.5	0.78
Nasion	M	4.5	0.79	4.8	0.85	4.8	0.91	5.8	0.85	5.7	0.87	5.8	0.89	5.8	1.15	5.6	0.94	5.4	0.96
	F	4.4	0.86	4.5	0.89	4.6	0.70	—	—	5.3	0.77	5.7	0.84	5.4	0.84	5.5	0.90	5.0	0.77
Rhinion	M	2.8	0.31	2.8	0.43	3.0	0.38	3.8	0.56	4.1	0.68	3.2	0.47	3.0	0.41	3.8	0.81	3.1	0.20
	F	2.9	0.35	2.8	0.30	2.9	0.38	—	—	4.0	0.56	3.4	0.62	3.0	0.61	3.7	0.70	3.1	0.25
Lateral point	M	2.9	0.31	2.9	0.33	3.0	0.36	4.0	0.75	3.9	0.66	3.3	0.51	—	—	3.9	0.83	3.1	0.27
of the nose	F	2.9	0.28	2.9	0.33	3.0	0.33	—	—	3.9	0.58	3.5	0.51	—	—	3.8	0.75	3.2	0.22
Maxillary	M	13.2	1.86	14.5	1.96	13.2	1.63	11.6	2.36	14.1	1.88	13.2	2.58	—	—	12.4	2.36	12.4	1.83
	F	13.9	1.65	15.8	1.79	14.5	1.90	—	—	15.5	2.14	15.2	1.84	—	—	14.2	2.49	13.5	1.39
Malare	M	9.8	1.85	10.6	1.77	9.8	2.02	9.3	1.47	9.3	2.04	9.3	1.31	—	—	9.8	1.60	9.3	1.64
	F	12.2	2.02	13.6	1.78	12.6	2.09	—	—	11.7	1.93	12.3	2.09	—	—	12.4	1.97	11.7	1.77
Zygion	M	4.7	0.80	4.5	0.89	4.5	0.78	5.0	0.93	4.5	0.58	4.8	0.66	—	—	5.1	0.87	4.7	0.64
	F	5.6	0.90	5.0	0.77	5.3	0.88	—	—	5.0	0.70	5.3	0.96	—	—	5.4	0.92	4.9	0.65

FIG. 1.3 – *Table de référence utilisée pour la reconstruction faciale à base de moulages. Cette table donne les épaisseurs moyennes de tissus faciaux en certains points caractéristiques du crâne, en fonction de critères d'âge, de sexe, etc.*

Supracanine	M	10.4	1.33	10.8	1.21	10.7	1.34	10.1	1.34	10.2	1.66	10.5	1.41	10.7	1.34	10.5	1.30	11.2	1.32
	F	9.3	0.95	9.8	1.04	9.9	1.01	—	—	9.8	1.04	9.6	0.93	9.7	1.24	9.7	1.14	9.6	1.15
Philtrum	M	11.1	1.44	11.8	1.52	11.7	1.40	11.6	1.64	11.9	1.63	12.0	1.53	—	—	11.5	1.59	12.5	1.45
	F	9.6	1.13	10.2	1.23	10.3	1.30	—	—	11.0	1.27	10.1	1.06	9.7	1.04	10.6	1.49	10.6	1.49
Upper lip	M	12.6	1.73	13.5	1.90	12.4	1.70	13.0	1.90	13.1	2.02	12.8	1.75	12.0	1.80	12.4	1.91	13.2	1.83
	F	10.6	1.57	11.7	1.81	11.1	1.53	—	—	12.1	1.51	10.8	1.52	10.0	1.47	10.9	1.77	11.0	1.79
Lower lip	M	13.8	1.51	14.5	1.63	13.7	1.61	14.5	1.72	14.0	1.98	14.3	1.51	13.3	1.77	13.8	1.75	14.1	1.60
	F	12.3	1.49	13.1	1.73	12.4	1.42	—	—	13.1	1.52	12.2	1.45	11.9	1.51	12.3	1.70	12.2	1.57
Upper point	M	11.3	1.34	11.7	1.53	11.2	1.07	11.3	1.47	11.2	1.46	11.2	1.19	11.7	1.50	11.5	1.40	11.1	1.26
of the chin	F	11.1	1.16	11.2	1.37	11.1	1.20	—	—	10.8	1.40	10.4	1.21	11.5	1.78	11.1	1.21	10.5	1.40
Chin	M	10.6	1.85	11.4	1.93	10.9	1.66	10.9	1.88	11.2	1.90	11.2	1.89	11.7	1.89	11.6	1.83	11.5	1.76
	F	11.1	1.71	11.9	1.82	11.4	1.53	—	—	10.6	1.52	10.8	1.57	11.3	1.87	11.8	1.74	11.1	1.53
Gnathion	M	6.3	1.17	6.8	1.18	6.4	1.25	—	—	6.4	0.97	6.8	0.88	—	—	—	—	6.7	0.94
	F	6.5	1.12	6.9	1.28	6.6	1.21	—	—	6.3	1.00	6.3	0.90	—	—	—	—	6.2	0.98
Mandibular	M	12.8	3.43	13.1	3.12	12.6	2.80	10.1	2.26	11.4	2.94	13.3	2.51	—	—	12.0	3.07	13.2	3.15
body	F	14.6	2.83	14.8	2.54	14.6	2.72	—	—	13.1	2.40	14.3	2.77	—	—	13.8	2.65	14.6	2.55
Lower margin	M	6.1	1.62	6.2	1.43	5.6	1.22	—	—	6.0	1.46	6.8	1.24	—	—	—	—	6.0	1.07
of mandible	F	6.9	1.53	7.2	1.57	7.0	1.58	—	—	6.5	1.09	7.1	1.38	—	—	—	—	6.0	1.15
Mandibular	M	17.0	2.26	17.2	2.02	17.0	2.06	—	—	16.8	2.02	—	—	—	—	—	—	18.0	2.08
branch	F	17.0	2.18	17.5	1.67	16.9	2.13	—	—	16.9	1.95	—	—	—	—	—	—	17.5	2.10
Gonion	M	4.6	0.96	4.5	0.94	4.6	0.79	5.4	1.07	5.1	0.72	5.2	0.82	—	—	5.2	1.05	4.7	0.76
	F	5.4	1.22	5.1	1.01	5.2	1.24	—	—	5.3	0.99	5.5	1.00	—	—	5.3	0.98	4.7	0.85

FIG. 1.4 – *Table de référence utilisée pour la reconstruction faciale à base de moulages (suite).*

Depuis les travaux remarquables de Snow (Snow et al., 1970), la technique s'est étendue

au niveau mondial (Gatliff, 1984). Pourtant, l'évaluation de la fiabilité de la méthode utilisant l'argile est rarement rapportée. La première tentative de test scientifique a été réalisé par Snow (Snow et al., 1970). Nous pouvons également citer Aulsebrook and Van Rensburg (Aulsberook et Van Rensburg, 1986), Ubelaker (Ubelaker, 1989), Krogman (Krogman, 1943), Neave (Neave, 1986), et Quatrehomme (Quatrehomme et al., 1994). Le travail le plus étendu est celui de Helmer (Helmer et al., 1989; Helmer et al., 1993) qui conduit à des essais en double-aveugle dans lesquels deux examinateurs indépendants ont reconstruit différents masques faciaux à partir des moulages de douze crânes. Les résultats furent très variés, s'échelonnant de mauvais à excellent. Ces variations ont été précédemment analysées par Aulsebrook (Aulsebrook et Iscan, 1995) et montrent bien l'importance de la connaissance, de l'expérience du médecin légiste dans la phase de reconstruction. Ces différences s'expliquent aussi par le faible nombre de points caractéristiques sur le crâne servant à la mesure des distances crâne-peau. Seules les mesures en ces points sont fiables, les valeurs en d'autres endroits étant extrapolées à partir de ces valeurs en faisant appel aux connaissances du médecin légiste.

La reconstruction faciale est une technique d'autant plus difficile qu'il existe de nombreuses variations faciales, particulièrement liées à l'état nutritionnel de l'individu et aux différents stades du vieillissement. De plus, les détails du nez, des yeux, des oreilles, des lèvres, du menton ne peuvent pas être déduits précisément à partir de caractéristiques crâniennes.

Pour toutes les raisons que nous venons d'évoquer, l'utilisation d'une technique de reconstruction faciale assistée par ordinateur pourrait apporter une aide précieuse aux anthropologues et médecins légistes.

1.2.2 Dans le domaine de l'informatique

La tendance actuelle dans la reconstruction faciale en médecine légale est au développement de méthodologies nouvelles, ayant souvent recours à l'informatique, avec comme principaux avantages la rapidité de traitement et l'automatisation de certaines tâches. La possibilité d'une reconstruction faciale assistée par ordinateur ainsi que sa validation ont été étudiées par différents auteurs. Perper (Perper et al., 1988) a développé un système de « morphographie » faciale permettant la détermination de caractéristiques faciales en se basant sur des mesures céphalométriques précises obtenues par scannographie à rayons X. Le reste de la méthode continue à faire appel aux techniques manuelles habituelles. Vanezis (Vanezis et al., 1989) a appliqué une technique de dessin en trois dimensions pour la reconstruction faciale et achevé la comparaison avec des techniques de sculpture. Miyasaka (Miyasaka et al., 1995) a développé une méthode de reconstruction faciale assistée par ordinateur utilisant la même voie méthodologique que la technique de dessin bidimensionnelle classique. Sa conclusion fut que les images obtenues constituent une grande avancée par rapport aux images résultant de méthodes conventionnelles, aussi bien sur l'aspect opérationnel que dans la flexibilité à créer des variations multiples sur la base d'un premier résultat. C'est dans une optique similaire que nous avons développé notre méthode de reconstruction. Celle-ci présente l'avantage d'être tridimensionnelle et de pouvoir générer rapidement différents résultats, à partir d'une base de donnée de modèles de référence.

1.3 Description de la méthode

Le but de notre travail est d'expérimenter une méthode originale intégrant des techniques issues de l'imagerie médicale, dans le cadre de la reconstruction faciale. Contrairement à Tyrrell (Tyrrell et al., 1997) ou Perper (Perper et al., 1988), nous ne nous limitons pas à l'étape de reconstruction tridimensionnelle de données scannographiques, mais nous proposons une méthode générale pour parvenir à l'élaboration d'un modèle facial.

Cette reconstruction se décompose en plusieurs étapes. Certaines d'entre elles continuent à faire appel à des techniques d'anthropologie légale, d'autres font intervenir de récentes techniques d'imagerie médicale et de reconstruction tridimensionnelles.

La première étape consiste à créer, pour chaque individu, un moulage[1] du visage puis à réaliser une scannographie à rayons X du crâne sec et du moulage. A partir des images volumiques ainsi obtenues, la seconde étape va permettre d'extraire de ces données une représentation tridimensionnelle du crâne et du visage. La troisième partie concerne la tâche réelle de reconstruction faciale, c'est à dire la proposition d'un visage du cadavre basé sur la forme de son crâne. La quatrième et dernière étape peut être considérée comme une phase de validation, avec la comparaison du visage réel au visage reconstruit.

1.3.1 Étape 1 : les données

En reconstruction faciale conventionnelle, le médecin légiste ne dispose souvent que de restes squelettiques. Cependant, lorsqu'une partie du visage est encore présente mais insuffisante pour identifier le cadavre, il commence par réaliser un moulage du visage. Dans notre cas, les moulages sont réalisés sur des cadavres ne posant pas de problèmes d'identification. Les moulages de visage serviront ainsi de référence pour valider la méthode. Le crâne sec est ensuite obtenu par rétraction des tissus faciaux. C'est à partir de ces données que le médecin légiste va réaliser la reconstruction.

Cette reconstruction est réalisée selon la méthode décrite précédemment, c'est-à-dire qu'elle requiert la définition d'un ensemble de points caractéristiques sur le crâne (cf. figure 1.5) ainsi que la connaissance des caractéristiques morphométriques de l'individu.

Il faut également noter que le médecin légiste ne construit jamais son modèle directement sur le crâne réel mais sur un moulage de celui-ci. Ceci permet éventuellement de faire plusieurs reconstructions basées sur des critères différents.

Dans la méthode que nous proposons ici, nous allons remplacer l'étape de moulage du crâne par une reconstruction 3D après scannographie de la tête de la victime, et ensuite proposer une reconstruction faciale basée sur une transformation volumique d'un visage de référence.

Les données nécessaires pour notre méthode sont simplement constituées de l'image scanner du crâne de la personne à identifier.

- **Préparation des crânes et moulages avant scannographie**

1. Ce moulage est réalisé pour nous permettre de valider les résultats ou pour obtenir une image 3D du visage de référence.

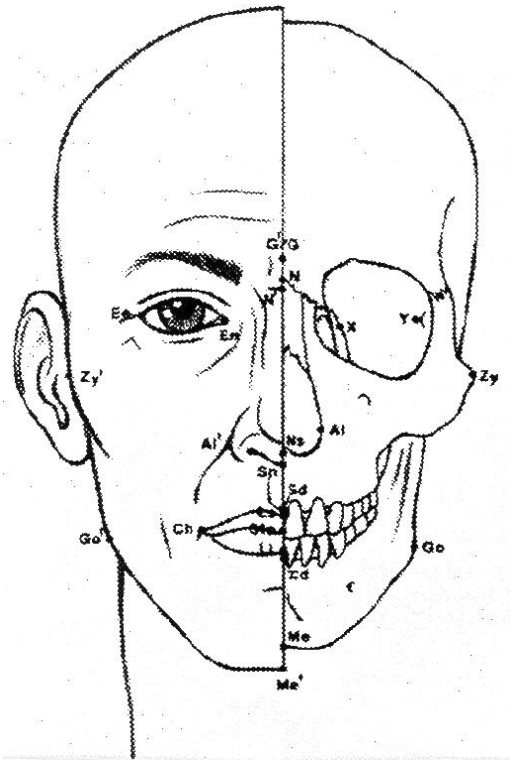


FIG. 1.5 – *Position des repères anatomiques sur le crâne et le visage. Ces repères correspondent à des points caractéristiques du crâne et à leur projection sur le visage. Ce sont pour la plupart des points saillants ou points de forte courbure.*

Les techniques de moulage légal ont été développées au Laboratoire de Médecine Légale de Nice, en collaboration avec le Laboratoire d'Ethnologie de Nice (Quatrehomme et al., 1995; Quatrehomme, 1997). La réalisation d'un scanner de moulage du visage est assez facile à réaliser, même si subsistent quelques problèmes. Le premier réside dans la nécessité de reconstruire la partie postérieure du moulage de la tête, parce que la méthode de moulage employée ne concerne que la face : ce problème a été précédemment résolu via une reconstruction classique en argile (Quatrehomme et al., 1996). Le second est lié à l'ouverture de la mandibule qui doit toujours être d'angle constant, à la fois sur lors du moulage du visage puis sur le crâne squelettisé. Nous avons partiellement résolu ce dernier point en fixant la position de la mâchoire avant de réaliser le moulage de la face. Ainsi la position de la mandibule est la même sur le moulage du visage que sur le crâne sec. Cependant, en raison de différences dentaires entre les individus, il est difficile de garantir que cet angle reste constant dans chaque cas.

- **Acquisition des données**

  L'acquisition des données a été réalisée par scannographie X, ce qui permet de disposer d'un volume de données recouvrant entièrement la tête du sujet alors que la plupart des méthodes utilisées en anthropologie légale sont basées sur des données radiographiques. Ces techniques ne permettent donc de disposer que d'un ensemble de données 2D (en général une vue de face et de profil du crâne) que seule l'expérience du médecin légiste permet d'intégrer de façon à en créer une représentation tridimensionnelle (concrétisée

en général sous la forme d'un moulage).

Les techniques d'imagerie médicale actuelles permettent d'effectuer de nombreux traitements sur des images volumiques de différentes modalités. Cette possibilité a priori très intéressante pour un problème tel que la reconstruction faciale a cependant un inconvénient : il est plus difficile de traiter de telles données et d'en extraire les informations pertinentes du point de vue de la reconstruction faciale. Par contre, le résultat obtenu est beaucoup plus facilement utilisable (on n'a pas seulement une vue de profil et de face mais on peut avoir une vue sous n'importe quel angle).

Les données scanner obtenues dans notre cas se composent d'un ensemble de coupes espacées de 2 mm couvrant tout le volume crânien. La qualité de la reconstruction finale étant liée à la précision des données, il est nécessaire d'avoir une résolution assez fine (voxel de taille inférieure ou égale à 1x1x2 mm^3). C'est pourquoi il nous a été impossible de réaliser les scanners de nos "visages de référence" sur des sujets vivants en raison de la quantité importante de radiations reçues par le sujet. D'un autre côté, réaliser un scanner de la tête d'un cadavre peut engendrer certains problèmes, particulièrement au niveau technique (artefacts dus aux matériaux métalliques dentaires) mais aussi éthique. Par conséquent, nous avons choisi de créer deux moulages séparés du crâne et du visage puis d'en obtenir l'image volumique par scanner. Cette contrainte va poser des problèmes supplémentaires, en particulier la nécessité d'effectuer un recalage de l'image du crâne par rapport à celle du visage.

1.3.2 Étape 2 : reconstruction 3D et visualisation

- **Les données** :

  Les images volumiques du visage et du crâne ont une résolution initiale de 512x512 pixels, et l'espace inter-coupes est fixé à 2 mm. Le protocole a été ainsi défini afin de correspondre à un compromis entre la précision de l'image et la taille des données à manipuler. L'ensemble des coupes est alors superposé de façon à créer une image volumique. On peut noter que les images du crâne sec et du moulage du visage sont presque des images binaires puisque dans les deux cas le matériau est presque homogène.

- **Calcul d'iso-surfaces**

  Afin d'obtenir une surface correspondant soit à la surface extérieure du crâne soit à la surface du moulage, nous avons eu recours à une extraction d'iso-surface (Lorensen et Cline, 1987). Après avoir déterminé le seuil d'intensité correspondant à la composante à segmenter (crâne ou moulage du visage), l'algorithme d'extraction d'iso-surface va génerer la surface polygonale correspondante.

- **Triangulations et simplifications de maillages**

  A partir de l'ensemble de polygones décrivant la surface, il est facile de déterminer une triangulation de cette surface puis de l'afficher, soit en développant un logiciel de visualisation basé sur une bibliothèque graphique (OpenGL), soit en utilisant un logiciel commercial.

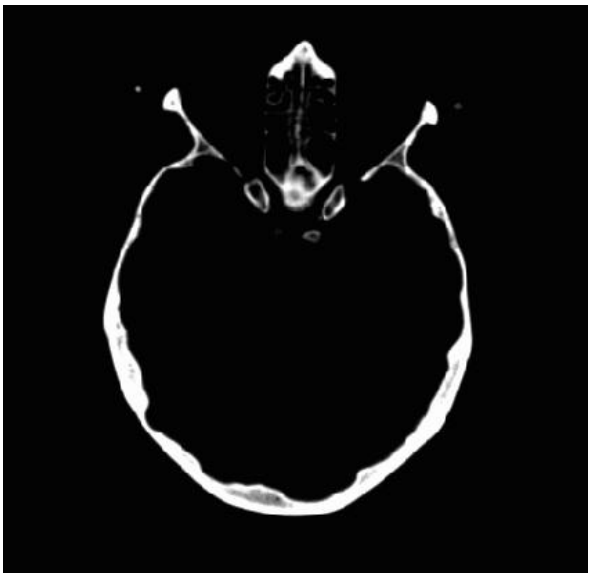


FIG. 1.6 – *Coupe prise dans l'image volumique d'un crâne sec. L'acquisition a été faite par scannographie X.*

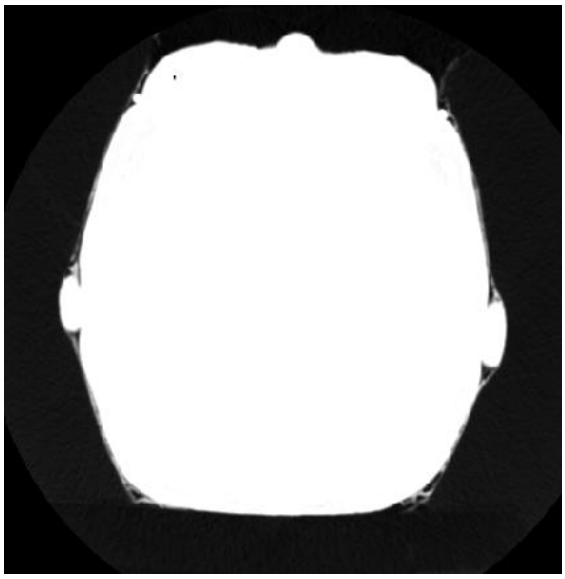


FIG. 1.7 – *Coupe d'un moulage de visage obtenue par scanner X.*

- **Interface de visualisation**

  Pour cette première application, nous avons eu recours à un logiciel commercial (AVS[2]). Nous avons par contre développé une interface particulière, sur la base de ce logiciel. Cette interface permet en particulier de guider l'étape de recalage par un positionnement manuel de la surface du visage par rapport à celle du crâne (cf. figure 1.9). Il est également possible de sélectionner des paires de points sur les surfaces du crâne et du visage et de calculer ainsi l'épaisseur des tissus faciaux en ces points, puis de les comparer à des valeurs de référence.

2. Advanced Visual Systems Inc., 300 Fifth Avenue, Waltham, MA 02451, USA

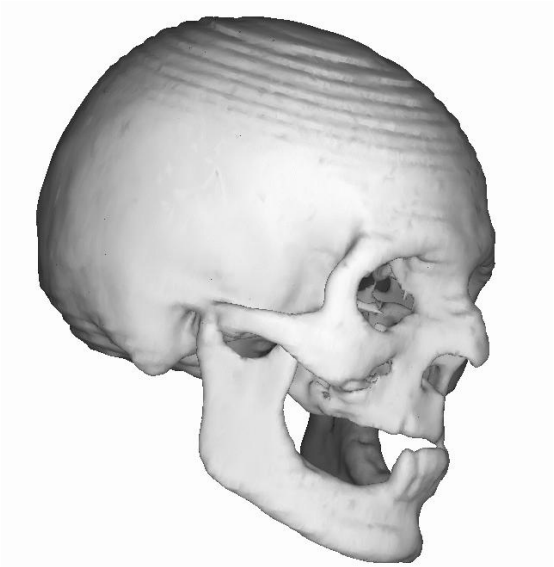


FIG. 1.8 – *Reconstruction 3D de la surface d'un crâne par extraction d'iso-surface.*

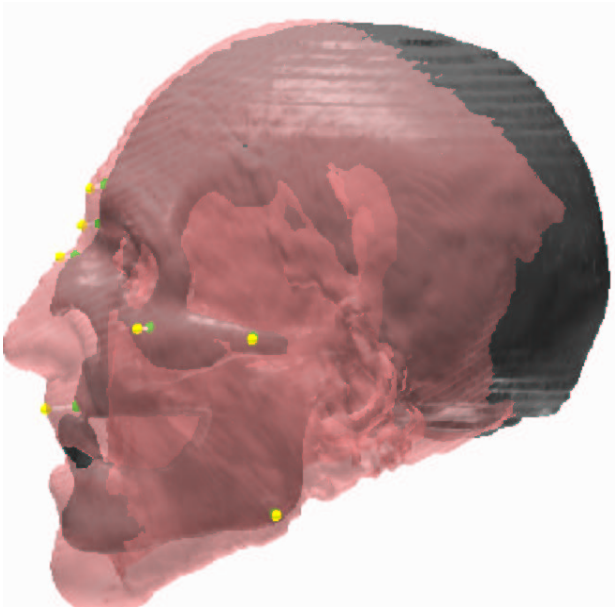


FIG. 1.9 – *Exemple de visualisation possible après reconstruction des surfaces du crâne et du visage. L'utilisation de la transparence et la possibilité de sélectionner les points caractéristiques (jaunes et verts) constituent une première aide à la reconstruction faciale.*

1.3.3 Étape 3 : reconstruction faciale

- **Principe :**

  A partir d'un moulage du visage d'une personne décédée (que nous qualifierons également d'« inconnue ») et du crâne sec correspondant, nous définissons l'ensemble $H_i = \{\text{crâne, visage}\} = \{F_i, S_i\}$. A partir du même type de données provenant d'une personne connue, prise comme référence, nous définissons un second ensemble $H_r = \{F_r, S_r\}$. Le moulage du visage de la personne inconnue servira de test afin de valider la qualité de la reconstruction.

  La première méthode est basée sur l'hypothèse suivante : *considérons deux crânes S_i et S_r présentant des caractéristiques morphométriques similaires. Si T est une transformation permettant de transformer S_r vers S_i (c'est-à-dire $S_i = T(S_r)$), alors l'application de la transformation T sur le visage de référence F_r devrait donner un modèle facial proche du visage inconnu F_i (c'est-à-dire $T(F_r) \approx F_i$).* Le schéma (1.10) décrit ce principe.

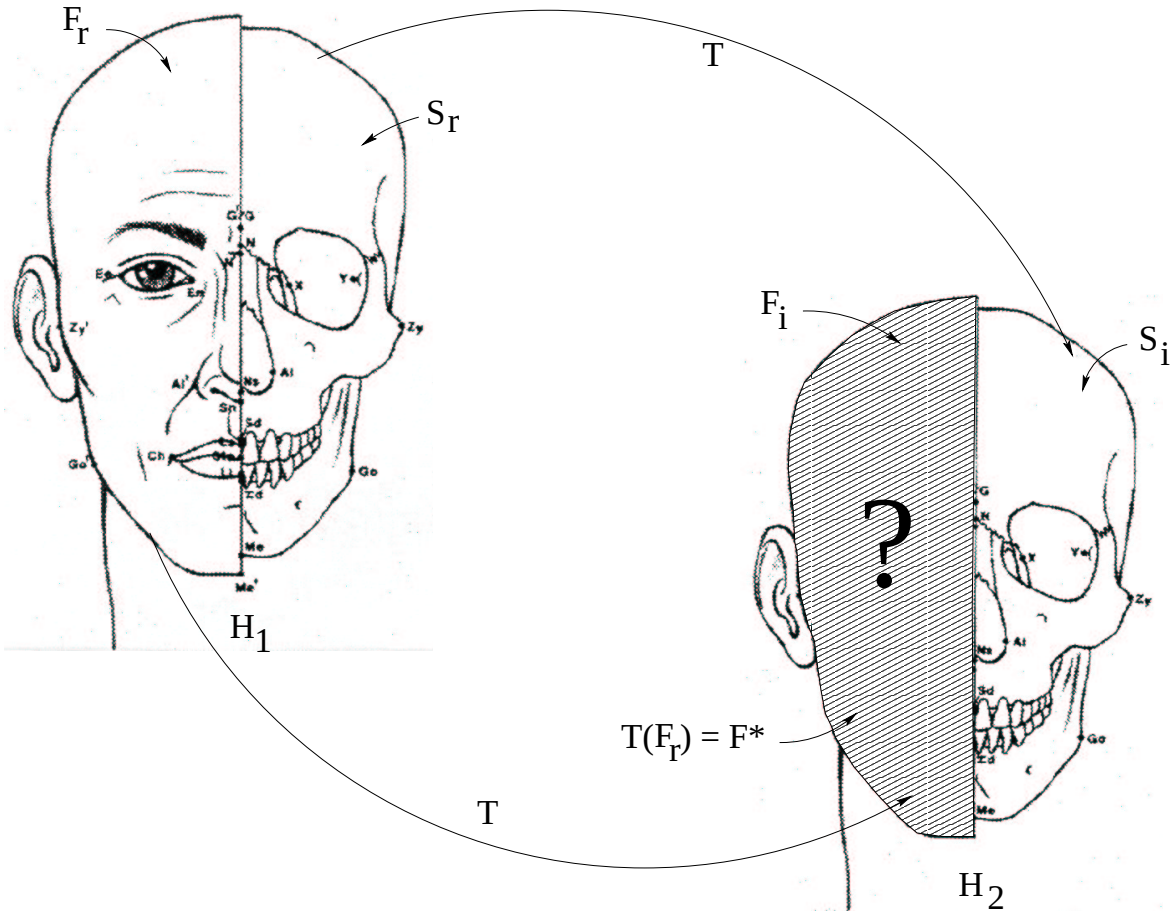


FIG. 1.10 – *Schéma général de la méthode 1 de reconstruction faciale.*

- **Calcul de la transformation T :**

  Afin de calculer cette transformation T, nous avons utilisé une méthode proposée par Subsol (Subsol et al., 1996a; Subsol et al., 1996b; Subsol et al., 1998) dans le cadre de la construction automatique d'atlas anatomiques. L'algorithme utilisé est dérivé de

l'algorithme *Iterative Closest Point* (Zhang, 1994; Besl et McKay, 1992) et appliqué aux *lignes de crête*. La définition mathématique des lignes de crêtes, introduites par Thirion *et al* (Thirion et Gourdon, 1995), (Gourdon, 1995), (Monga et al., 1992) se trouve également détaillée dans (Subsol et al., 1996b)). L'intérêt de ces lignes de crête est qu'elles ont également un sens "anatomique" puisqu'elles correspondent aux lignes saillantes que l'on peut identifier sur le crâne (cf. figure 1.11) ou sur d'autres structures anatomiques. L'étape suivante de l'algorithme va donc consister à mettre en correspondance chaque ensemble de lignes défini sur les deux crânes.

Étant donnés deux ensembles de lignes de crête L_1 et L_2, extraits à partir des images de deux crânes différents, on cherche à déterminer la transformation T telle que les lignes du premier crâne soient mises en correspondance avec les lignes du second crâne. Les ensembles de lignes diffèrent cependant en orientation, taille, nombre de lignes, forme, topologie et niveau de discrétisation. Leur mise en correspondance nécessite un recalage non rigide, rendant impossible l'utilisation d'invariants basés sur la courbure. La méthode consiste donc à appliquer itérativement un ensemble de transformations rigides, basées sur une mise en correspondance de type *Iterative Closest Point*. Cette succession de transformations rigides a pour but de superposer l'ensemble L_2 sur l'ensemble L_1. À chaque itération, les points des lignes de L_2 sont associés à leur plus proche voisin dans L_1, selon leur distance euclidienne. Ceci donne une liste de couples de points appariés. À partir de cette nouvelle liste de paires de points, deux coefficients sont calculés, qui représentent la proportion de la ligne i de L_2 mise en correspondance avec L_1 et vice versa. On considère que les lignes sont recalées correctement lorsque les deux coefficients sont supérieurs à $1/2$. À partir de ce nouveau sous-ensemble de points appariés, il est possible de calculer, par un critère aux moindres carrés, une transformation d'un type donné. Nous utilisons tout d'abord des transformations rigides de façon à aligner les deux ensembles, puis des transformations affines pour prendre en compte le facteur d'échelle, des transformations quadratiques pour modéliser des déformations naturelles ou des transformations spline 3D (Declerck et al., 1995) permettant des déformations plus locales. La transformation T ainsi obtenue est appliquée à L_2, rendant L_2 plus similaire à L_1 puis le processus est répété.

Finalement, on obtient une transformation T pouvant être appliquée à l'ensemble des points de la surface du crâne, et non plus seulement aux lignes de crête. Étant donnée la similarité entre les lignes de crête et les lignes saillantes du crâne, l'application de la transformation T donne une très bonne approximation du crâne réel : $T(S_i) \approx S_r$.

- **Transformation du visage :**

  D'après notre hypothèse de travail, il reste maintenant à appliquer cette même transformation à l'image du visage de référence V_r afin d'obtenir une première approximation du visage inconnu V_i. Cette étape n'est cependant possible que si l'image du visage de référence et l'image du visage inconnu se trouvent dans le même référentiel que les images des crânes correspondants. Cela suppose que la "tête" entière soit scannée, et non pas le crâne et le visage séparément. En pratique, il s'avère très difficile de disposer de ce type de donnée et par conséquent il est nécessaire d'avoir recours à une étape supplémentaire

permettant de recaler l'image du crâne avec l'image du visage correspondant.

- **Recalage :**
  Étant donnée la différence relativement importante qui existe entre les images de crâne et de visage, il est difficile de trouver suffisamment de points communs pour obtenir un recalage correct et suffisamment précis pour la reconstruction. Afin de pallier ce problème, nous avons utilisé l'interface décrite précédemment pour manipuler les représentations surfaciques du crâne et du visage afin de les positionner correctement l'une par rapport à l'autre.
  La tâche de recalage peut être simplifiée en utilisant une méthode de recalage automatique permettant d'obtenir une première approximation de la position relative des deux surfaces. Un positionnement plus précis des deux surfaces est ensuite réalisée manuellement. Le recalage est estimé correct lorsque l'épaisseur de tissus mous en chaque point caractéristique correspond aux valeurs moyennes définies dans les tables telles que celles représentées figures (1.3) et (1.4).
  Remarque : lorsque nous avons défini notre hypothèse de travail, nous avons supposé que le crâne « inconnu » et le crâne de référence ont à peu près les mêmes caractéristiques morphologiques. Nous supposons donc que : *si les crânes ont des formes similaires, alors les visages correspondants ont des caractéristiques communes.* Afin de garantir la validité de cette condition dans tous les cas, il sera nécessaire de constituer une base de données de modèles de référence, chaque modèle correspondant à un "type" morphologique particulier tels que ceux décrits dans les tables (1.3) et (1.4).

Remarque générale: contrairement aux méthodes précédentes, notre approche n'est pas basée sur un calcul de distances cranio-faciales mais uniquement sur l'homologie entre les deux ensembles de données.

1.3.4 Premiers résultats

Pour les premiers essais, nous n'avons pu disposer que de deux ensembles de modèles : le premier ensemble $H_1 = \{S_1, F_1\}$, constitué du crâne S_1 et du visage F_1 doit être considéré comme la tête dont le visage est à reconstruire, alors que le second ensemble représente la tête de référence H_r. Idéalement, il aurait fallu, d'après ce qui précède, que les crânes S_1 et S_r soient proches puisque l'ensemble de référence guide l'algorithme de reconstruction; S_r devrait présenter des caractéristiques communes et appartenir grossièrement aux mêmes âge, sexe, race et statut nutritionnel que le crâne S_1. Bien que ce ne soit pas le cas – H_1 est un homme et H_2 une femme, les deux sont d'âge semblable mais apparemment de statut nutritionnel différent – et de façon à évaluer la méthode, nous avons construit un modèle F^* à partir de F_r c'est-à-dire $F^* = T(F_r)$ avec T telle que $S_1 = T(S_r)$. Le succès de la reconstruction peut être évalué par la comparaison du modèle proposé F^* avec le profil réel du visage F_1.

La figure (1.12) montre la reconstruction du visage et le visage original. Il existe bien entendu des différences importantes, mais elles s'expliquent en partie par la grande dissemblance du modèle de référence avec le crâne inconnu.

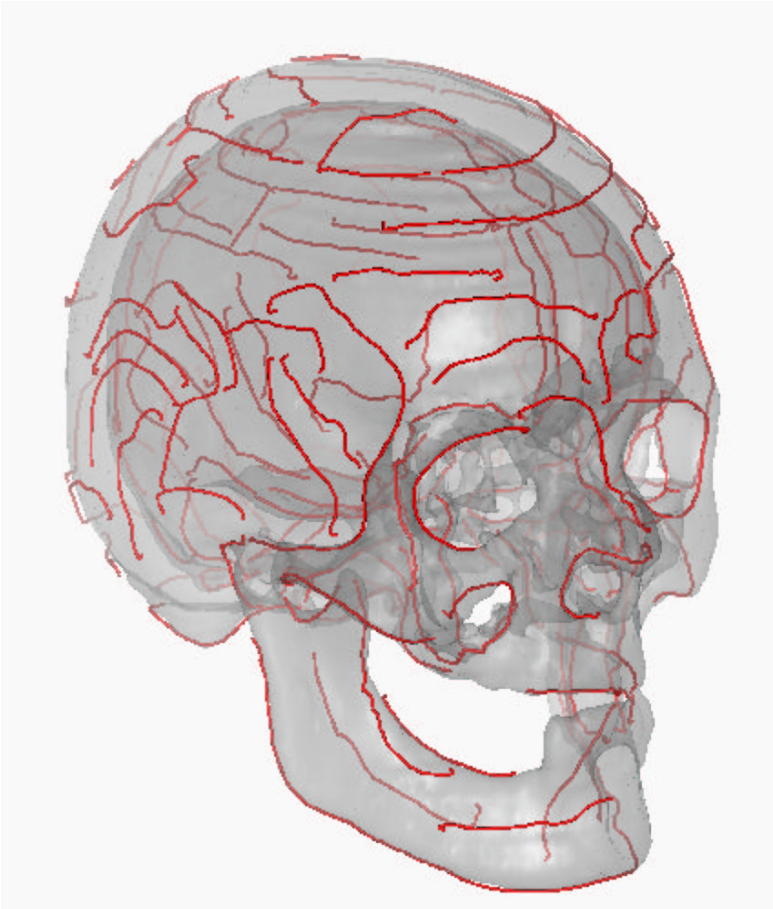


FIG. 1.11 – *Lignes de crête sur un crâne. Mathématiquement, ces lignes sont définies comme les lignes de maxima de la plus grande courbure principale dans la direction associée. Sur un crâne, les lignes de crêtes correspondent par exemple aux contours du mandibule, des orbites, des pommettes ou des tempes.*

1.3.5 Nouveaux résultats

Les résultats que nous présentons ici utilisent deux nouveaux jeux de données. Le protocole d'acquisition est différent de celui ayant permis d'obtenir les images de H_1 et H_2. En particulier, seule la partie du masque facial a été réalisée, de même que seule une partie du crâne a été scannée. Ce protocole particulier va permettre de voir comment il est possible d'utiliser des données très différentes dans la méthode.

Nous présentons les résultats préliminaires de deux ensembles de données provenant de deux crânes secs et de deux moulages faciaux. Le recalage crâne/visage a été réalisé, mais avec des problèmes dus aux différents degrés d'ouverture du mandibule. De plus, les deux visages ont une morphologie très différente. Par conséquent, l'hypothèse de similarité d'âge et des caractéristiques principales du visage n'est pas vérifiée. La Figure (1.12) montre la comparaison entre le visage reconstruit à partir du crâne par l'algorithme (gauche) et le visage réel (droite), ou plus précisément le moulage du visage de la personne décédée. Nous avons pu observer que une bonne correspondance de la partie supérieure du visage, cependant quelques différences sont mises en évidence vers le menton, principalement dues aux problèmes mentionnés plus haut.

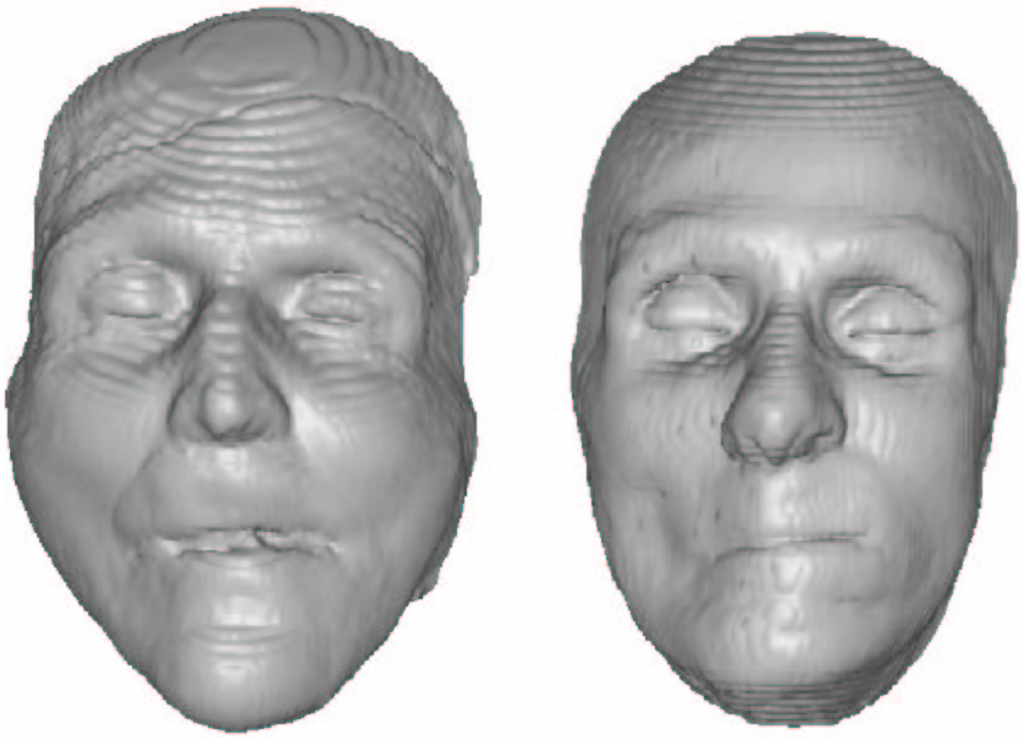


FIG. 1.12 – **À gauche** *: le visage de H_1 reconstruit et* **à droite**, *le moulage du visage original de H_1.*

1.3.6 Modélisation des tissus faciaux

La différence entre le modèle du visage que nous calculons et le visage réel s'explique par le fait que nous ne prenons pas en compte, lors de la transformation, les caractéristiques biomécaniques des tissus faciaux.

Bien entendu, l'application de la transformation permet d'obtenir une bonne approximation de la forme du visage. Cependant, la forme du nez ou des joues ne peut pas être entièrement déterminée à partir de la seule forme du crâne, même avec l'ajout d'informations telles que l'épaisseur des tissus ou muscles faciaux en certains points caractéristiques. Une perspective intéressante pourrait donc consister à représenter par un modèle élastique volumique les tissus/muscles faciaux. De façon générale, le maillage s'apparente géométriquement – sur sa partie interne – à la surface du crâne transformé. La partie externe – qui va finalement déterminer la forme du visage – est, quant à elle, modifiée sous l'action de certaines contraites.

Ces contraintes sont d'une part un critère de distance – épaisseur des tissus en chaque point caractéristique – et un critère de conformité par rapport à une forme de référence – c'est-à-dire la forme du visage calculée par la transformation.

En utilisant les résultats que nous avons présentés dans les chapitres précédents, il est possible de générer une mouvelle forme du visage – en temps-réel – permettant d'essayer différentes stratégies ou même d'avoir recours à des interactions de la part de l'utilisateur.

1.4 Validation des résultats

Le problème de la validation des résultats est un problème complexe en raison de l'importante subjectivité qui peut intervenir dans la phase de reconnaissance/identification.

En ce qui concerne la validation de la méthode elle-même, il est bien entendu possible de calculer une carte de distance des différences entre le modèle facial reconstruit et le moulage du visage réel.

Ceci dit, cela ne permet pas de déterminer à partir de quelle « erreur » – quel que soit le moyen utilisé pour calculer cette erreur – l'identification devient problématique. En effet, d'autres paramètres interviennent dans le processus de reconnaissance tels que la pilosité, les rides, etc. qu'ils n'est pas directement possible de déterminer à partir des données dont nous disposons.

Cependant les techniques de reconstruction manuelles se heurtent aux mêmes problèmes, et l'estimation du résultat n'est en général obtenue – quand cela est possible – que par comparaison visuelle.

1.5 Discussion & conclusion

La méthode que nous avons développée est originale en ce sens qu'elle n'est pas basée sur l'utilisation de marqueurs spécifiques et la connaissance de l'épaisseur moyenne des tissus faciaux. Elle est basée sur (i) une transformation paramétrique globale d'un crâne de référence vers le crâne « inconnu »; (ii) cette transformation est basée sur des lignes de crête, correspondant anatomiquement à des lignes remarquables sur le crâne. Ensuite le même algorithme est appliqué pour transformer le visage de référence vers un « nouveau » visage que nous espérons être proche du visage à reconstruire.

Par cette méthode, nous sommes capables d'obtenir une reconstruction faciale qui est realtivement proche du visage réel. La validation des résultats est cependant difficile à effectuer étant donné que le processus d'identification d'une personne n'est pas facilement modélisable.

L'intérêt de cette méthode repose également sur sa rapidité et sur la possibilité de générer différents ensembles de résultats en modifiant certains paramètres : utilisation de différents modèles de référence, modification des critères de la transformation spline, etc.

De plus, et contrairement aux différentes méthodes décrites dans la littérature « traditionnelle » en médecine légale, la possibilité de travailler en trois dimensions sans avoir à passer par la réalisation de moulages est très innovante, même si d'un point de vue informatique ces aspects nous semblent familiers. Il est ainsi possible de translater, de tourner, d'agrandir ou d'altérer ce modèle tridimensionnel. La possibilité d'ajouter une « perspective » dans la photographie d'une personne disparue est très utile pour la phase d'identification. Les résultats actuels sont prometteurs et nous croyons qu'ils peuvent être considérablement améliorés par l'utilisation de banques de données plus larges couvrant plusieurs catégories d'individus. Cependant, quelques problèmes doivent être traités comme le recalage précis entre le crâne et le modèle facial ou le positionnement précis et invariable du mandibule. La méthode nécessite de plus amples investigations et expériences. Nous espérons cependant que cette technique

originale va apporter une contribution dans le domaine de l'identification légale.

Ces travaux ont donné lieu à une publication dans un journal international, *Journal of Forensic Science* (Quatrehomme et al., 1997).

Annexes

A.

Algorithmes

A.1 Calcul des tenseurs de force

```
1: nt ⇐ nombre de tétraèdres dans le maillage
2: for t = 0 to nt do
3:   ESM_{12×12} ⇐ matrice de rigidité élémentaire
4:   for i = 1 to 4 do
5:     for j = 1 to 4 do
6:       v_i ⇐ indice global du sommet i
7:       v_j ⇐ indice global du sommet j
8:       lv_i ⇐ indice local du sommet i par rapport au tétraèdre T
9:       lv_j ⇐ indice local du sommet j par rapport au tétraèdre T
10:      s ⇐ indice de la liaison reliant v_i et v_j
11:      for k = 1 to 3 do
12:        for l = 1 to 3 do
13:          if v_i = v_j then
14:            masse i : T_{k,l} ⇐ T_{k,l} + ESM_{lv_i+4*k,lv_i+4*l}
15:          else if v_i <v_j then {un seul tenseur est stocké par liaison}
16:            springs s : T_{k,l} ⇐ T_{k,l} + ESM_{lv_i+4*k,lv_j+4*l}
17:          end if
18:        end for
19:      end for
20:    end for
21:  end for
22: end for
```

A.2 Calcul des forces internes

Algorithme 4 Calcul des forces internes (1)

1: $n_m \Leftarrow$ nombre de masses dans le maillage
2: **for** $i = 0$ to n_m **do**
3: **if** $masse_i$ n'est pas fixée **then**
4: mass $\Leftarrow$ masse($masse_i$)
5: $(x_t, y_t, z_t) \Leftarrow$ position de la masse à l'instant t
6: $(x_0, y_0, z_0) \Leftarrow$ position initiale de la masse
7: $d_x \Leftarrow x_t - x_0$
8: $d_y \Leftarrow y_t - y_0$
9: $d_z \Leftarrow z_t - z_0$
10: $a_x \Leftarrow (T_{11}dx + T_{12}dy + T_{13}dz)$ / mass
11: $a_y \Leftarrow (T_{21}dx + T_{22}dy + T_{23}dz)$ / mass
12: $a_z \Leftarrow (T_{31}dx + T_{32}dy + T_{33}dz)$ / mass
13: **end if**
14: **end for**

A.3 Calcul des forces internes (suite)

Algorithme 5 Calcul des forces internes (2)

1: $n_s \Leftarrow$ nombre de liaisons le maillage
2: **for** $i = 0$ to n_s **do**
3: $m_1 \Leftarrow$ masse 1 de la liaison
4: $m_2 \Leftarrow$ masse 2 de la liaison
5: $(x_t^1, y_t^1, z_t^1) \Leftarrow$ position de m_1 à l'instant t
6: $(x_t^2, y_t^2, z_t^2) \Leftarrow$ position de m_2 à l'instant t
7: $(x_0^1, y_0^1, z_0^1) \Leftarrow$ position initiale de m_1
8: $(x_0^2, y_0^2, z_0^2) \Leftarrow$ position initiale de m_2
9: **if** m_1 n'est pas fixée **then**
10: mass $\Leftarrow$ masse(m_1)
11: $d_x \Leftarrow x_t^1 - x_0^1$
12: $d_y \Leftarrow y_t^1 - y_0^1$
13: $d_z \Leftarrow z_t^1 - z_0^1$
14: $a_x \Leftarrow a_x$ - $(T_{11}dx + T_{12}dy + T_{13}dz)$ / mass
15: $a_y \Leftarrow a_y$ - $(T_{21}dx + T_{22}dy + T_{23}dz)$ / mass
16: $a_z \Leftarrow a_z$ - $(T_{31}dx + T_{32}dy + T_{33}dz)$ / mass
17: **end if**
18: **if** m_2 n'est pas fixée **then**
19: mass $\Leftarrow$ masse(m_2)
20: $d_x \Leftarrow x_t^2 - x_0^2$
21: $d_y \Leftarrow y_t^2 - y_0^2$
22: $d_z \Leftarrow z_t^2 - z_0^2$
23: $a_x \Leftarrow a_x$ - $(T_{11}dx + T_{12}dy + T_{13}dz)$ / mass
24: $a_y \Leftarrow a_y$ - $(T_{21}dx + T_{22}dy + T_{23}dz)$ / mass
25: $a_z \Leftarrow a_z$ - $(T_{31}dx + T_{32}dy + T_{33}dz)$ / mass
26: **end if**
27: **end for**

A.4 Mise à jour des tenseurs lors de la suppression d'un tétraèdre

```
1:  t ⇐ tétraèdre supprimé
2:  ESM_{12×12} ⇐ matrice de rigidité élémentaire
3:  for i = 1 to 4 do
4:    for j = 1 to 4 do
5:      v_i ⇐ indice global du sommet i de tétraèdre t
6:      v_j ⇐ indice global du sommet j de tétraèdre t
7:      lv_i ⇐ indice local du sommet i de tétraèdre t
8:      lv_j ⇐ indice local du sommet j de tétraèdre t
9:      s ⇐ indice de la liaison reliant v_i et v_j
10:     for k = 1 to 3 do
11:       for l = 1 to 3 do
12:         if v_i = v_j then
13:           masse i : T_{k,l} ⇐ T_{k,l} - ESM_{lv_i+4*k,lv_i+4*l}
14:         else if v_i <v_j then
15:           springs s : T_{k,l} ⇐ T_{k,l} - ESM_{lv_i+4*k,lv_j+4*l}
16:         end if
17:       end for
18:     end for
19:   end for
20: end for
```

B.

Schémas d'intégration numérique

B.1 Schémas d'intégrations

Les schémas d'intégration numérique utilisés pour la méthode des éléments finis appliquée au problème de l'élasticité linéaire sont donnés dans les deux sections suivantes. Pour plus de détails sur les méthodes d'intégration, on pourra consulter (Hammer et al., 1956).

B.1.1 Schéma d'intégration sur un tétraèdre

SCHÉMA 1 $\begin{cases} \text{Exact pour les polynômes de degré 1} \\ \text{1 seul nœud d'intégration dont les caractéristiques sont données ci-dessous.} \end{cases}$

Coordonnées barycentriques	Poids
$(\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{4})$	V

V est le volume du tétraèdre.

B.1.2 Schéma d'intégration sur un triangle

SCHÉMA 2 $\begin{cases} \text{Exact pour les polynômes de degré 1.} \\ \text{1 seul nœud d'intégration dont les caractéristiques sont données ci-dessous.} \end{cases}$

Coordonnées barycentriques	Poids
$(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3})$	S

S représente l'aire du triangle.

C.

Anatomie du foie

C.1 Fonction

Le foie est un organe très important, aussi bien par sa taille que par le rôle qu'il assure au niveau physiologique. Sa situation lui permet d'accomplir des fonctions indispensables à la vie : il est placé sur le trajet du courant sanguin qui provient de l'intestin, de telle sorte qu'il peut contrôler tout l'apport alimentaire. Cependant, dans l'échelle zoologique, le développement du foie est en relation avec la présence du glucose à un taux constant dans le sang circulant. Ce fait illustre la tâche primordiale du foie qui est, chez des êtres vivants ne s'alimentant pas de façon continue, de métaboliser sans cesse les nutriments ingérés de façon intermittente de manière à fournir à l'organisme un courant incessant de matériaux susceptibles d'être transformés en énergie.

Les recherches physiologiques ont également mis en évidence l'extraordinaire polyvalence métabolique du tissu hépatique : fonction glycogénique, réglant le taux de glucose sanguin, fonction de synthèse des protéines (sérum-albumine, fibrogène, complexe prothrombinique), fonction de synthèse et de dégradation des graisses (lipides), fonction de détoxication (transformation de poisons, substances chimiques, etc. par mise en œuvre d'un processus de conjugaison), fonction uréogénétique (élimination, sous forme d'urée, de substances produites par la dégradation des acides aminés) et enfin fonction biliaire.

C.2 Couleur et consistance

Le foie est rouge brun. Il a une consistance assez ferme et cependant il est friable, fragile et se laisse déprimer par les organes voisins.

C.3 Poids et dimensions

Le foie est l'organe le plus volumineux de l'organisme. Son poids est d'environ 1500 grammes sur le cadavre. Chez le vivant, le foie contient en plus 800 à 900 grammes de sang. Il mesure en moyenne 28 centimètres dans le sens transversal, 16 de haut et 8 d'épaisseur, dans la région la plus volumineuse du lobe droit.

C.4 Configuration extérieure et rapport

Dans son ensemble, le foie peut être comparé au segment supérieur d'un ovoïde dont le grand axe serait transversal, la grosse extrémité à droite et qu'on aurait sectionné de gauche à droite, suivant un plan incliné regardant en haut, en avant et à droite. La surface du foie est lisse. Il présente 2 faces et deux bords.

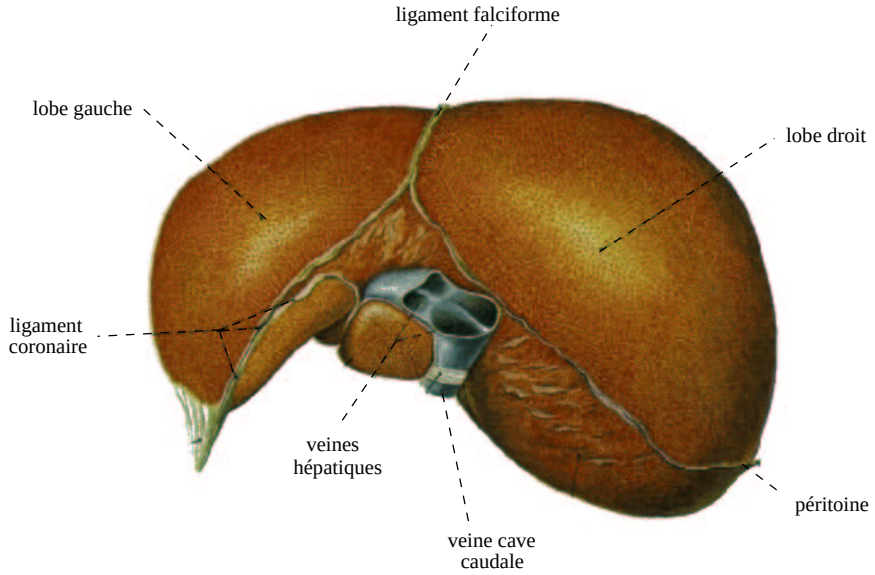


FIG. C.1 – *Face diaphragmatique du foie, partie supérieure. On distingue en particulier les lobes gauche et droit ainsi que les ligaments.*

Anatomie

Le foie est un organe thoraco-abdominal. La majeure partie de cette glande est logée sous la très profonde coupole diaphragmatique droite qui sépare le foie du poumon droit et d'une partie du cœur. Il surplombe la partie droite des viscères abdominaux (cf. figures C.2 et C.4) auxquels le relient d'une part des vaisseaux (veine porte et artère hépatique qui apportent le sang; veines sus-hépatiques qui en assurent le drainage) et d'autre part les voies biliaires qui permettent l'évacuation de la bile vers l'intestin.

La face diaphragmatique est convexe, lisse, unie. Elle comporte 3 segments : le segment antérieur, le segment supérieur et le segment postérieur.

- **le segment antérieur** entre en contact avec la paroi abdominale antérieure. Il est parcouru par l'insertion du ligament falciforme (ligament suspenseur) qui le divise en 2 bords (droit et gauche).
- **le segment supérieur** se moule en haut sur la concavité du diaphragme. Sa partie latérale droite est à peu près entièrement recouverte par la cage thoracique et s'élève, comme le diaphragme, jusqu'au quatrième espace intercostal.
- **le segment postérieur** est vertical et présente une concavité transversale très prononcée, qui s'adapte à la saillie de la colonne vertébrale. Il est limité en bas par le bord postérieur.

On y trouve deux sillons verticaux :

- **le sillon vertical droit** ou sillon de la veine cave inférieure : c'est une gouttière profonde et large, contenant la veine cave inférieure.
- **le sillon vertical gauche** ou sillon du canal veineux : son extrémité supérieure aboutit à l'extrémité supérieure du sillon de la veine cave.

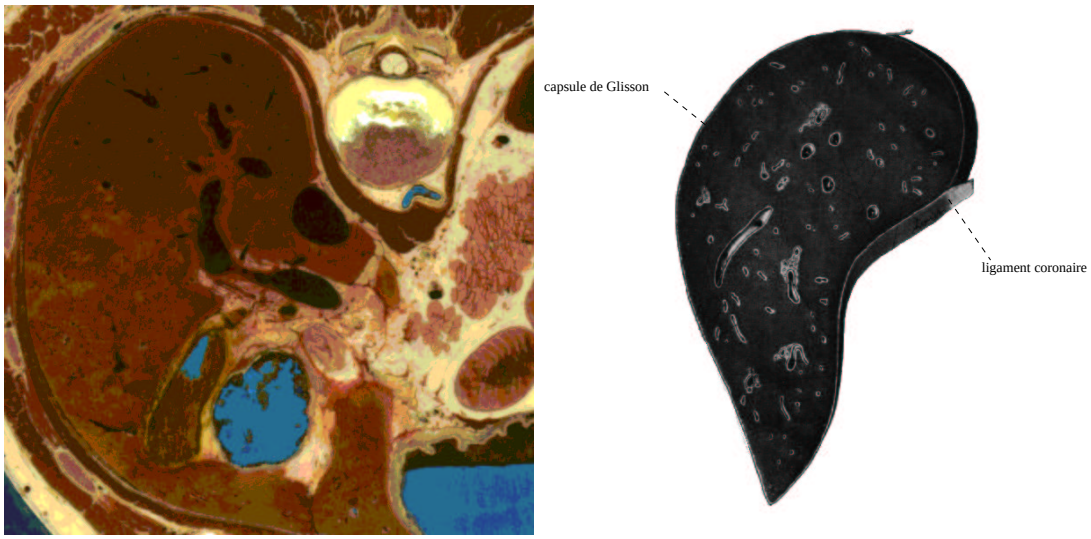


FIG. C.2 – *Exemples de coupes anatomiques du foie.* **À gauche** *: on voit bien comment la forme du foie est liée à la présence d'organes voisins.* **À droite** *: la coupe sagittale du lobe droit illustre l'importance du réseau vasculaire.*

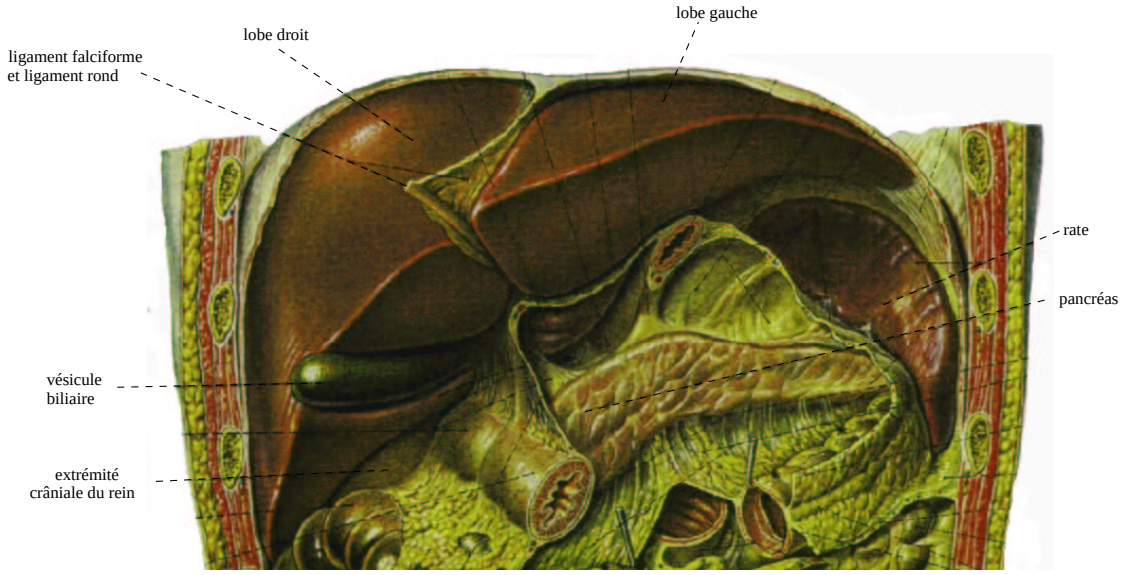


FIG. C.3 – *Position du foie par rapport aux viscères abdominaux.*

Face inférieure ou viscérale

La face inférieure, irrégulièrement plane, regarde en bas, en arrière et à gauche. Elle est parcourue par trois sillons antéro-postérieurs et un sillon transversal. Les sillons antéro-postérieurs ou longitudinaux se distinguent en sillons droit et gauche :

- **sillon antéro-postérieur gauche** : il est étroit, mais il entaille profondément la face inférieure du foie. Son extrémité antérieure creuse sur le bord antérieur de la glande une échancrure à laquelle aboutit l'extrémité antérieure du ligament falciforme.
- **sillon antéro-postérieur droit** : c'est en réalité une large gouttière peu profonde, plus large en avant qu'en arrière. Cette gouttière est appelée fossette cystique parce qu'elle

répond à la vésicule biliaire.

- **sillon transverse** : le sillon transverse est encore appelé hile du foie. Il s'étend entre les deux sillons antéro-postérieurs. Il mesure 6 à 7 centimètres de longueur et 1.5 centimètre de largeur. Il est occupé par les organes qui vont au foie ou qui en partent (vaisseaux, nerfs, voies biliaires).

Les trois sillons de la face inférieure du foie découpent sur cette face quatre segments ou lobes : le lobe gauche, le lobe droit, le lobe carré et le lobe de Spigel :

- **lobe gauche** : le lobe gauche est en dehors du sillon antéro-postérieur gauche. Sa surface concave s'appuie et se modèle sur la face antérieure, convexe, de l'estomac (empreinte gastrique).
- **lobe droit** : le lobe droit est moins étendu sur la face viscérale que sur la face diaphragmatique du foie. Sa surface creusée de dépressions larges, superficielles, qui sont les empreintes des organes sur lesquels le lobe droit repose et se modèle.
- **lobe carré** : il est limité par le sillon de la veine ombilicale à gauche, la fossette cystique à droite, le bord antérieur du foie en avant et le hile en arrière. Il est allongé dans le sens antéro-postérieur et se rétrecit un peu d'avant en arrière. Le lobe carré recouvre la partie horizontale de l'estomac, le pylore, la partie du duodénum attenante au pylore et le segment prépancréatique du colon transverse.
- **lobe de Spigel** : il est placé en arrière du hile, entre le sillon du canal veineux et le sillon de la veine cave inférieure. Il est allongé de haut en bas et appartient presque entièrement au segment postérieur de la face viscérale du foie. L'extrémité inférieure du lobe de Spigel est occupée par deux tubercules, l'un droit, l'autre gauche, séparés l'un de l'autre par une légère dépression en rapport avec la veine porte. Le tubercule gauche, arrondi, est appelé tubercule papillaire. Le tubercule droit est un tubercule caudé. Il est ainsi appelé parce qu'il émet vers la droite un prolongement connu sous le nom de processus caudé; le processus caudé sépare l'extrémité postérieure de la fossette cystique de l'extrémité inférieure de la gouttière de la veine cave inférieure.

Bords

- **le bord antérieur ou inférieur** est très aigu. Il est convexe vers le bas et présente deux échancrures situées à l'extrémité antérieure des sillons de la veine ombilicale et de la fossette cystique.
- **le bord postérieur** passe de droite à gauche, en arrière de l'empreinte rénale, au-dessous de l'empreinte surrénale et du sillon de la veine cave; puis il croise l'extrémité inférieure du lobe de Spigel et du sillon d'Arantius, s'émousse sur la gouttière oesophagienne pour devenir ensuite tranchant jusqu'à l'extrémité gauche du foie. Le bord postéro-supérieur est mousse dans toute son étendue. Il longe à gauche la ligne de réflexion du feuillet supérieur du ligament coronaire et passe, comme elle, au-dessus des sillons verticaux de la face postérieure.

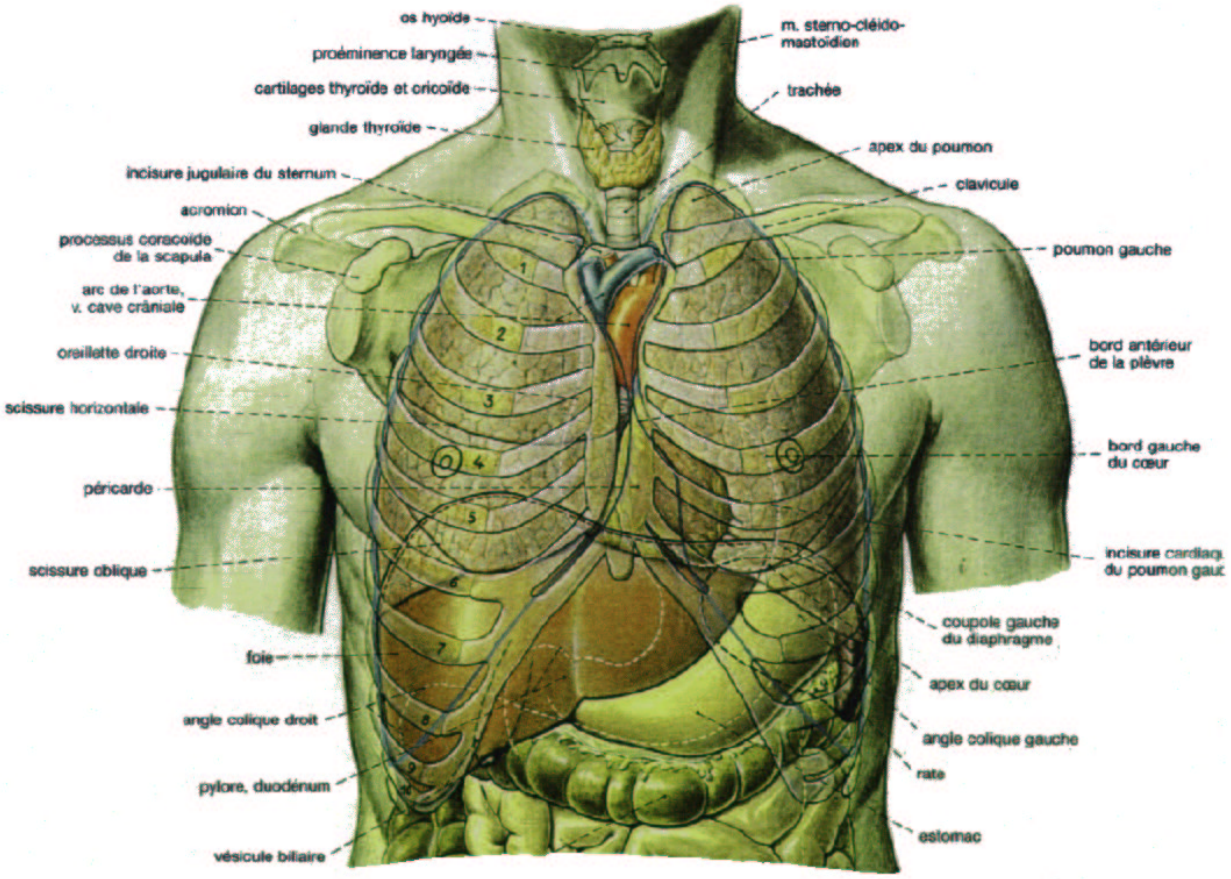


FIG. C.4 – *Projections et surfaces de contact des viscères abdominaux et thoraciques; vue ventrale. On mesure l'importance de la taille du foie dans l'abdomen ainsi que les très nombreux contacts existant entre le foie et les viscères, les côtes, etc.*

D.

Systèmes à retour d'effort

D.1 Introduction

Dans cette annexes nous présentons quelques systèmes à retour d'effort, commerciaux ou simplement prototypes de recherche. Les modèles décrits sont surtout représentatifs des différentes architectures possibles (joysticks, bras articulés, pentographes, etc.). Plus de détails pourrons être trouvés dans le livre de Burdea et Coiffet (Burdea et Coiffet, 1994). Certaines des données présentées dans ce document sont d'ailleurs issues de ce livre ainsi que des différents serveurs web cités à la fin de cette annexe.

D.2 Architecture de type joystick

Les architectures de type *joystick* ou manche à balai, présentent l'avantage d'être compacts, et de ne pas nécessiter de calibration de la part de l'utilisateur; leur utilisation est, de plus, assez intuitive. Les premiers joysticks à retour d'effort ont été développés pour des simulateurs de vol. À l'heure actuelle, les joysticks représentent la majorité des systèmes instrumentés en retour d'effort, et surtout les plus utilisés.

- **Joystick BSP** [1]

  Il est destiné à des opérations de télérobotique dans l'industrie nucléaire. Il s'agit d'un dispositif à retour d'effort 6 axes qui a été initialement conçu pour la commande d'un robot industriel (Puma 760), actuellement utilisé pour trois types de tâches :

  - l'accouplement de connecteurs pneumatiques ou électriques
  - le perçage
  - la découpe

  Le volume de travail est un cylindre de rayon 50 mm et de longueur 120mm. Le système de contrôle tourne sur PC et utilise la cinématique du joystick, la cinématique du bras esclave et des algorithmes de contrôles bi-latéraux.

- **Système PER-Force** [2]

  Le système *PER-Force* (Programmable Environment Reality through Force) est un système à retour d'effort possédant 6 degrés de liberté (cf. figure D.1). L'architecture mécanique est très proche des manches à balai utilisés en avionique et possède différents dispositifs annexes (boutons poussoirs, switch, etc.). Le retour d'effort peut être généré indépendamment sur chacun des six axes.

  Il existe une version "simplifiée" de ce système, ne possédant que trois degrés de liberté, appelée *PER-Force 3 Degree-Of-Freedom*. L'architecture de ce manche à balai est, dans ce cas, plus proche des joysticks classiques, utilisés en boucle ouverte. La complexité et le coût de ce système sont par conséquent réduits par rapport au modèle à six degrés de liberté.

1. AEA Technology
2. Cybernet Systems Corporation - http://www.cybernet.com

⇒ **caractéristiques techniques :**

- un environnement de développement en C sous le système d'exploitation MS-DOS ainsi qu'un bibliothèque de fonctions sont disponibles pour réaliser l'interface entre le système *PER-Force* et une station de travail.
- Le *PER-Force 3 Degree-Of-Freedom* est piloté par l'intermédiaire du port série, en général disponible sur de nombreuses architectures (stations de travail, PC, etc.).
- Un ensemble d'effets sont disponibles dans la bibliothèque de fonctions associée au *PER-Force 3 Degree-Of-Freedom*, essentiellement destiné au domaine ludique. Les effets de base concernent la restitution de forces d'impulsion, de forces constantes, d'effets de "vagues", etc.

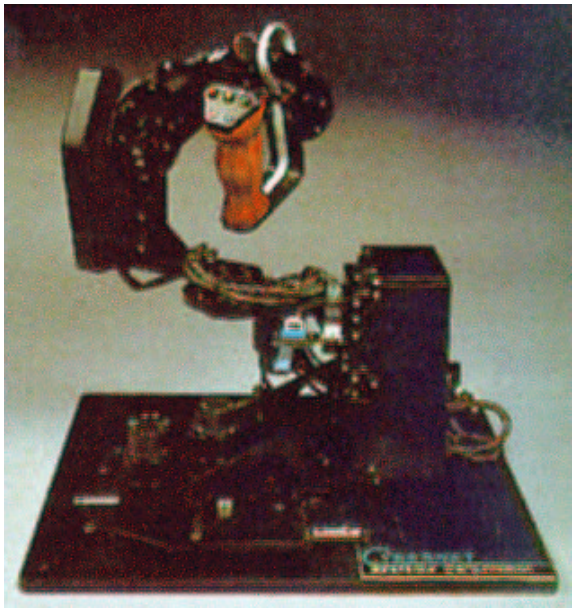


FIG. D.1 – *Le système PER-Force possède 6 degrés de liberté dont 3 sont intrumentés en retour d'effort.*

- **PowerStick**[3]

  Il s'agit d'un joystick à retour d'effort possédant deux degrés de liberté. Ce système est développé par la société *Exos*.

- **Impulse Engine 2000**

  Le système *Impulse Engine 2000* (cf. figure D.3) est un joystick à retour d'effort permettant un suivi de mouvement précis selon deux degrés de liberté. Les forces sont également restituées selon ces deux degrés de liberté. L'inertie du système et les forces de frictions sont relativement faibles. La largeur de bande pour le retour de force est assez élevée mais cependant pas assez pour restituer tout type de sensation.

- **Laparoscopic Impulse Engine**

3. EXOS Incorporation - http://www.exos.com

FIG. D.2 – *Le PowerStick, joystick à retour de force développé par la société Exos.*

FIG. D.3 – *Le joystick* Impulse Engine 2000.

Ce système à retour d'effort reprend de nombreuses solutions techniques utilisées sur le *Impulse Engine 2000*. Il possède cinq degrés de liberté, trois pour représenter les déplacements dans l'espace, un quatrième pour la rotation autour de l'axe du trocart et un cinquième associé à l'ouverture de la pince. Trois de ces degrés de liberté sont instrumentés en retour d'effort. Deux *Laparoscopic Impulse Engine* peuvent être combinés pour permettre l'usage simultané de deux outils.
La précision des encodeurs utilisés pour le suivi des positions (selon trois degrés de liberté) est relativement élevée. Cela s'explique par l'architecture particulière du *Laparoscopic Impulse Engine* qui en fait un robot hybride : à la fois robot parallèle (Merlet, 1995; Merlet, 1997) et robot série classique. La plage de forces que le système est capable de restituer, ainsi que la largeur de bande, sont suffisantes pour une application en simulation de chirurgie.
La transmission des forces est également réalisée via un système de câbles et de "cabestans" délivrant ainsi un couple assez élevé et progressif.

FIG. D.4 – *Laparoscopic Impulse Engine.*

D.3 Architecture de type bras manipulateur

Si l'avantage des architectures de type joystick réside dans leurs faibles dimensions, ils ne permettent cependant pas de s'adapter à toutes les applications. De leur côté, les bras manipulateurs utilisés en téléopération sont souvent très lourds à manipuler et encombrants. La société *Exos* est ainsi une des rares à développer des systèmes maîtres *portables*. Pour des tâches délicates, on peut avoir besoin de contrôler des forces appliquées indépendamment sur plusieurs doigts plutôt qu'au poignet, comme le font usuellement les bras maîtres et les joysticks utilisés en avionique. Dans ce cas il est préférable que la structure assurant le retour soit assez légère pour que le système soit portable. De plus cela permet d'avoir un volume de travail

plus important et permet une interaction plus naturelle entre l'opérateur et le monde virtuel, favorisant ainsi l'impression d'immersion.

- **Exoskeleton Arm-Master**
  Il s'agit d'un système complexe basé sur un exosquelette couvrant la totalité du bras de l'opérateur.

FIG. D.5 – *Le système maître portable* Exoskeleton Arm-Master.

- **SAFIRE**
  Le système *SAFIRE* (Sensing and Force Reflecting Exoskeleton) possède 8 degrés de liberté (3 pour le pouce, 3 pour l'index et 2 pour le majeur). Des moteurs à courant continu et un système de cables sont utilisés pour la restitution des forces. L'amplitude des flexions possibles est de 90 degrés. Le couple de retour s'étend de 0.35 à 0.7 Nm selon le degré de liberté considéré. Le poids du système est de 2500 grammes.
  Un tel système pourrait être utilisé pour une simulation de chirurgie ouverte.

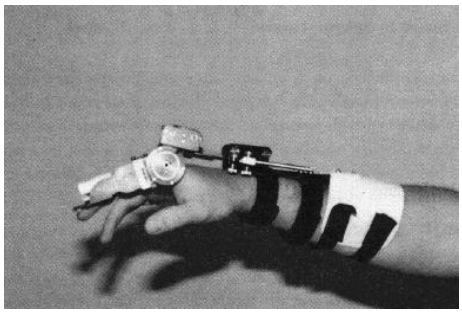


FIG. D.6 – *Le système* SAFIRE *de la société* EXOS.

- **Force Arm-Master**
  Ce système maître utilise des moteurs à courant continu pour produire un retour d'effort sur l'épaule, le coude et l'avant-bras. Cinq degrés de liberté sont motorisés (3 au niveau

de l'épaule, un au niveau du coude et le dernier à l'avant-bras). Les couples appliqués s'élèvent jusqu'à 40 Nm. Le poids est d'environ 15kg.

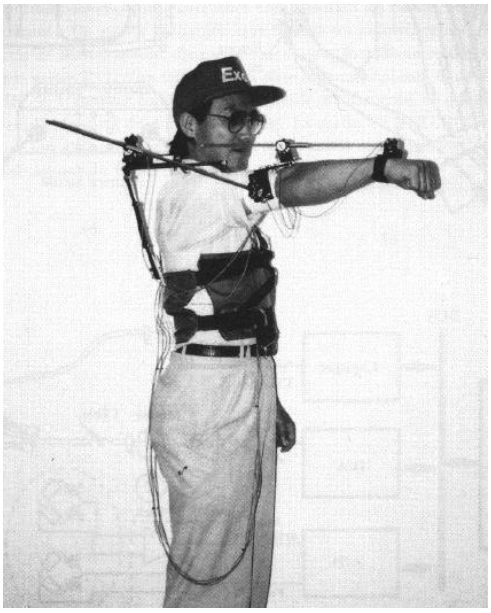


FIG. D.7 – *Le bras manipulateur portable* Force Arm-Master.

D.4 Architecture de type pantographe

- **Le PHANToM**

  Le *PHANToM*, développé au Massachussets Institute of Technology, est un système à retour d'effort de conception évolutive, sur lequel peuvent être adaptés plusieurs instruments. Le principe mécanique est relativement différent de celui des systèmes précédents et fait appel à un système de bras articulés et de poulies (cf. figure D.8).

- **Le HapticMaster**[4]

  Le HapticMaster a été conçu et développé par l'équipe du professeur Iwata à l'Université de Tsukuba au Japon. Ce système possède un retour d'effort à 6 degrés de liberté. Il est basé sur l'utilisation de trois pantographes commandés chacun par deux moteurs à courant continu. Le volume de travail est une sphère d'environ 40 cm de diamètre. Le système peut être utilisé pour simuler des interactions avec des surfaces solides, élastiques et fluides.

4. Nissho Electronics Corporation

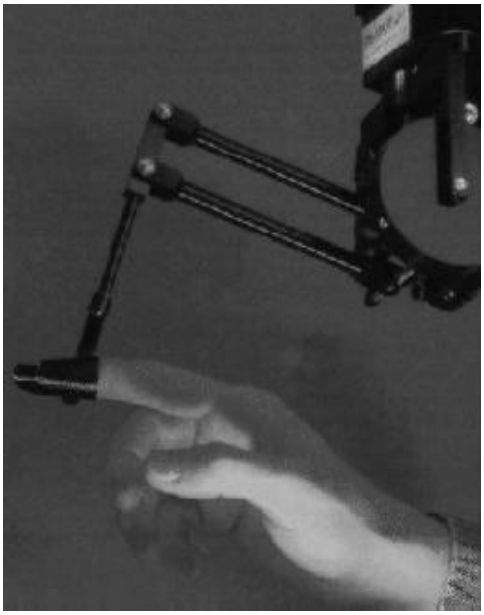


FIG. D.8 – *Système à retour d'effort PHANToM, développé au MIT.*

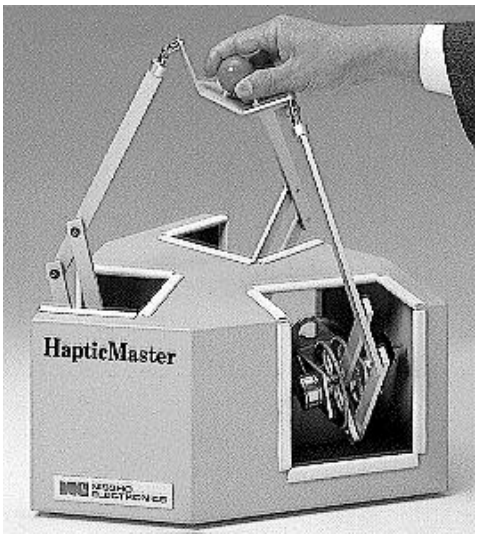


FIG. D.9 – *Le système* HapticMaster *est basé sur une architecture de type pantographe.*

Bibliographie

Arnaldi, B. et Dumont, G. (1992). « Vehicle Simulation versus Vehicle Animation ». Dans *Eurographics Workshop on Animation and Simulation*, Cambridge.

Asherson, N. (1965). « Identification by frontal sinus prints. A forensic medical pilot survey ». Rapport Technique, H.K. Lewis and Company LTD. London.

Atkins, L. et Potsaid, M. (1978). « Roentgenographic identification of human remains ». *Journal of the American Medical Association*, 240:2307–2308.

Aulsberook, W. et Van Rensburg, J. (1986). « An evaluation of two techniques used for facial reconstruction in forensic anthropology. ». Dans *Proceedings of the 16th Annual Congress of the Anatomical Society of South Africa*, volume 82, page 448.

Aulsebrook, W. et Iscan, M. (1995). « Superimposition and reconstruction in forensic facial identification: a survey ». *Forensic Science International*, 75((2-3)):101–120.

Ayache, N., Cinquin., P., Cohen, I., Cohen, L., Leitner, F., et Monga, O. (1996). Segmentation of Complex Three-Dimensional Medical Objects: A Challenge and a Requirement for Computer-Assisted Surgery Planning and Performance. Dans Taylor, R., Lavallée, S., Burdea, G., et Mösges, R., éditeurs, *Computer-Integrated Surgery*, Chapitre 4, pages 59–74. The MIT Press.

Bainville, E. (1996). « *Modélisation géométrique et dynamique d'un geste chirurgical* ». PhD thesis, Université Joseph Fourier.

Bainville, E., Chaffanjon, P., et Cinquin, P. (1995). « Computer generated visual assistance during retroperitoneoscopy ». *Computers in biology and medecine*, 2(25):165–171.

Baraff, D. et Witkin, A. (1992). « Dynamic Simulation of non-penetrating Flexible Bodies ». *Computer Graphics (SIGGRAPH'92)*, 26(2):303– 308.

Baraff, D., Witkin, A., et Harada, M. (1995). « Interactive Physically-based Manipulation of Discrete/Continuous Models ». *Computer Graphics (SIGGRAPH'95)*.

Barres, D., Durigon, M., et Paraire, F. (1989). « Age estimation from quantitation of features of "chest plate" X-rays ». *Journal of Forensic Science*, 34(1):228–233.

Bathe, K.-J. (1982). *Finite Element Procedures in engineering analysis*. Prentice Hall.

Baumann, R. et Glauser, D. (1996). « Force Feedback for Virtual Reality based Minimally Invasive Surgery Simulator ». Dans *Medecine Meets Virtual Reality*, volume 4, San Diego, CA.

Besl, P. et McKay, N. (1992). « A Method for Registration of 3D Shapes ». *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14:239–256.

Black, T. (1978). « Sexual dimorphism in the toothcrown diameters of the deciduous teeth ». *American Journal of Phys. Anthropol.*, 48:77–82.

Boes, J. L., Meyer, C. R., et Weymouth, T. E. (1995). « Liver Definition in CT Using a Population-Based Shape Model ». Dans Ayache, N., éditeur, *CVRMed'95*, volume 905 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 506–512, Nice (France). Springer-Verlag.

Boissonnat, J.-D. et Geiger, B. (1993). « 3D Simulation of Delivery ». Dans *Proceedings of Visualization'93 Conference*, San Jose.

Bouzit, M., Richard, P., et Coiffet, P. (1993). « LRP Dextrous Hand MAster Control System ». Rapport Technique, Laboratoire de Robotique de Paris, France. 21 pp.

Boyse, J. (1979). « Interference Detection among Solids and Surfaces ». *Communications ACM*, 22(1):3–9.

Breen, D. E., House, D., et Wozny, M. (1994). « Predicting the Drape of Woven Cloth Using Interacting Particles ». Dans *Computer Graphics (SIGGRAPH'94)*, pages 365–372, Orlando, Florida, USA.

Bro-Nielsen, M. (1995). « Modelling Elasticity in Solids Using Active Cubes - Application to Simulated Operations ». Dans *Computer Vision, Virtual Reality and Robotics in Medecine*, volume 905 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 535–541. Springer.

Bro-Nielsen, M. (1997). « *Medical Image Registration and Surgery Simulation* ». PhD thesis, IMM Technical University of Denmark, Lingby, Denmark. IMM-PHD-1996-25.

Bro-Nielsen, M. et Cotin, S. (1996). « Real-time Volumetric Deformable Models for Surgery Simulation using Finite Elements and Condensation ». Dans *Proceedings of Eurographics'96 - Computer Graphics Forum*, volume 15, pages 57–66.

Burdea, G. (1996). *Force and Touch Feedback for Virtual Reality.* John Wiley & Sons, New York. ISBN 0-471-02141-5.

Burdea, G. et Coiffet, P. (1994). *Virtual Reality Technology (updated English edition of 'La Réalité Virtuelle').* John Wiley & Sons, New York. ISBN 0-471-08632-0.

Cameron, S. (1990). « Collision Detection by Four-Dimensional Intersection Testing ». *IEEE Transactions on Robotics and Automatons*, 6(3):291–302.

Ch. Kuhn, U. Kühnapfel, H.-G. K. (1996). « A 'Virtual Reality' based Training System for Minimally Invasive Surgery ». Dans *Proceedings of Computer Assisted Radiology (CAR'96)*, Paris.

Chen, D. T. et Zeltzer, D. (1992). « Pump It Up: Computer Animation of a Biomechanically Based Model of the Muscle using the Finite Element Method ». *Computer Graphics (SIGGRAPH'92)*, (26):89–98.

Chinsei, K. et Miller, K. (1997). « Compression of Swine Brain Tissue - Experiment *In Vitro* ». *Journal of Mechanical Engineering Laboratory*, pages 106–115.

Ciarlet, P. G. (1987). *Mathematical elasticity Vol. 1: Three-dimensional elasticity.* , Amsterdam. ISBN 0-444-70259-8.

Cohen, I. (1992). « *Modèles déformables 2D et 3D, application à la segmentation d'images médicales* ». PhD thesis, Université de Paris IX, France.

Cotin, S., Delingette, H., Clément, J.-M., Tassetti, V., Marescaux, J., et Ayache, N. (1996). « Geometric and Physical Representations for a Simulator of Hepatic Surgery ». Dans *Proceedings of Medecine Meets Virtual Reality IV*, pages 139–151. IOS Press.

Couarraze, G. et Grossiord, J. (1991). *Initiation à la rhéologie (2ème édition).* Lavoisier - Technique et documentation. ISBN 2-85206-195-3.

Couinaud (1957). *Le foie, études anatomiques et chirurgicales.* Masson.

Cover, S. A., Ezquerra, N. F., et O'Brien, J. F. (1993). « Interactively Deformable Models for Surgery Simulation ». *IEEE Computer Graphics and Applications*, 13(6):68–75.

Culbert, W. et Law, F. (1927). « Identification by comparison of roentgenograms of nasal accessory sinuses and mastoid processes ». *Journal of the American Medical Association*, 88:1634–1636.

Cutkosky, M. et Howe, R. (1990). « *Dextrous Robot Hands* », Chapitre Human Grasp Choice and Robotic Analysis, pages 5–31. Springer Verlag.

Declerck, J. (1997). « *Étude de la dynamique cardiaque par analyse d'images tridimensionnelles* ». PhD thesis, Université de Nice - Sophia Antipolis, Projet Epidaure, INRIA, 2004 route des Lucioles, 06900 Sophia Antipolis - France.

Declerck, J., Subsol, G., Thirion, J.-P., et Ayache, N. (1995). « Automatic Retrieval of Anatomical Structures in 3D Medical Images ». Dans *Computer Vision, Virtual Reality and Robotics in Medicine*, volume 905 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 153–162. Springer-Verlag. (Also INRIA Research Report # 2485).

Delingette, H. (1994a). « *Modélisation, déformation et reconnaissance d'objets tridimensionnels à l'aide de maillages simplexes* ». PhD thesis, École Centrale de Paris.

Delingette, H. (1994b). « Simplex Meshes: a General Representation for 3D Shape Reconstruction ». Rapport Technique 2214, INRIA.

Delingette, H. (1997). « General Object Reconstruction based on Simplex Meshes ». Rapport Technique 3111, INRIA.

Delingette, H., Subsol, G., Cotin, S., et Pignon, J. (1994). « A Craniofacial Surgery Simulation Testbed ». Dans *Visualization in Biomedical Computing (VBC'94).*

Desbrun, M. et Gascuel, M.-P. (1995). « Animating Soft Substances with Implicit Surfaces ». Dans *Computer Graphics (SIGGRAPH '95)*, pages 287–290.

Desbrun, M. et Gascuel, M.-P. (1996). « Smoothed Particles : a New Paradigm for Animating Highly Deformable Bodies ». Dans *Proceedings of Computer Animation and Simulation'96.*

Deussen, O., Kobbelt, L., et Tucke, P. (1995). « Using simulated annealing to obtain a good approximations of deformable bodies ». Dans *Proc. Eurographics Workshop on Animation and Simulation.*

Dérobert, L. (1974). *Médecine légale.* Flammarion Médecine-Sciences.

Duval, B. (1996). « *Optimisation de maillages non structurés dans des géométries déformables* ». PhD thesis, Université de Rouen (France).

Elman, H. C. (1982). « *Iterative methods for large, sparse, nonsymetric systems of linear equations* ». PhD thesis, Yale University.

Farhat, C. et Roux, F.-X. (1994). *Implicit Parallel Processing in Structural Mechanics (Computational Mechanics Advances)*, volume 2 de *Computational Mechanics Advances.* North-Holland.

Feynman (1988). *Cours de physique - électromagnétisme*, volume 2. InterEditions. ISBN-2 7296 0029 9.

Foley, J., Van Dam, A., Feiner, S., et Hughes, J. (1990). *Computer Graphics - Principles and Practice*. Addison Wesley.

Forgue, M. et Shinya, M. (1991). « Real-Time Impact Dynamics Simulation ». *Compugraphics*, pages 427–435.

Fried, I. (1972). « Condition of finite element matrices generated from non-uniform meshes ». *AIAA Journal*, 10:219–221.

Fung, Y. C. (1993). *Biomechanics - Mechanical Properties of Living Tissues*. Springer-Verlag, second edition.

Gascuel, M.-P. (1989). « OSEA : un nouveau modèle de matière pour traiter les collisions entre objets déformables ». Dans *Actes de PIXIM'89*, pages 309–323.

Gascuel, M.-P. (1990). « *Déformation de surfaces complexes : techniques de haut niveau pour la modélisation et l'animation* ». PhD thesis, Université de Paris Sud, centre d'Orsay.

Gascuel, M.-P. (1993). « An implicit formulation for precise contact modeling between flexible solids ». Dans *Computer Graphics (SIGGRAPH '93)*.

Gascuel, M.-P., Verroust, A., et Puech, C. (1991). « A modeling system for complex deformable bodies suited to animation and collision processing ». *Journal of Visualization and Computer Animation*, 2(3):82–91. A shorter version of this paper appeared in *Graphics Interface'91*.

Gatliff, B. (1984). « Facial sculpture on the skull for identification ». *The American Journal of Forensic Medicine and Pathology*, 5(4):327–332.

Geiger, B. et Kikinis, R. (1995). « Simulation of Endoscopy ». Dans *Computer Vision, Virtual Reality and Robotics in Medecine*, volume 905 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 277–281.

Gerasimov, M. (1971). *The Face Finder*. J.B. Lippincott, Philadelphia, PA.

Gerasimov, M., Lebedinskaya, G., Balueva, T., et Veselovskaya, E. (1986). « *Forensic Analysis of the Skull* », Chapitre Principles of reconstruction of the face on the skull, pages 183–198. Wiley-Liss, New-York (USA).

Gibson, S., Samosky, J., Mor, A., Fyock, C., Grimson, E., Kanade, T., Kikinis, R., Lauer, H., et McKenzie, N. (1997). « Simulating arthroscopic knee surgery using volumetric object representations, real-time volume rendering and haptic feedback ». Dans Troccaz, J., Grimson, E., et Mosges, R., éditeurs, *Proceedings of the First Joint Conference CVRMed-MRCAS'97*, volume 1205 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 369–378.

Glaister, J. et Brash, J. (1937). « The medico-legal aspects of the Buck Ruxton case ». E. and S. Livingston. Edinburgh.

Gourdon, A. (1995). « *Applications de la Géometrie Différentielle à l'Imagerie Médicale Multidimensionnelle* ». PhD thesis, Université Paris XI.

Gourret, J. P., Magnenat-Thalmann, N., et Thalmann, D. (1989). « Simulation of Object and Human Skin Deformations in a Grasping Task ». Dans *Computer Graphics (SIGGRAPH'89)*, volume 23 No 3, pages 21–31, Boston, MA, USA.

Gustafson, G. (1950). « Age determination on teeth ». *Journal of American Dent. Ass.*, 41:45–54.

Hammer, P., Marlowe, O., et Stroud, A. (1956). « Numerical integration over simplexes and cones ». *Math. Tables Aids Comp.*, (10):130–137.

Hanihara, K. (1967). « Racial characteristics in the dentition ». *Journal of Dent. Res.*, 46:923–928.

Helmer, R. (1987). « Identification of the cadaver remains of Josef Mengele ». *Journal of Forensic Science*, 32:1622–1644.

Helmer, R. et Grüner, O. (1977). « Vereinfachte Schädelindentifizierung nach dem Superprojektionsverfahren mit Hilfe einer Video-Anlage ». *Z Rechtsmed*, 80:183–187.

Helmer, R., Rohricht, S., Petersen, D., , et Mohr, F. (1989). « Plastic face reconstruction as a possibility for identifying skulls (I): An evaluation of the reliability of the reconstruction technique by a double-blind trial ». *Arch. Kriminol.*, 184:75–83.

Helmer, R., Rohricht, S., Petersen, D., , et Mohr, F. (1993). « *Forensic Analysis of the Skull* », Chapitre Assessment of the reliability of facial reconstruction, pages 229–246. Wiley-Liss, New-York.

Henrici, P. (1962). *Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations.* .

Hodgskinson, R. et Currey, J. (1992). « Young Modulus, density and material properties in cancellous bone over a large density range ». *Journal of Materials Science: Materials in Medicine*, 3:377–381.

Hunter, P. et Smail, B. (1988). « The Analysis of Cardiac Function : A Continuum Approach ». *Journal of Prog. Biophysic. molec. Biology*, 52:101–164.

Hutchinson, D., M., P., et Hewitt, W. (1996). « Adaptive Refinement for Mass/Spring Simulations. ». Dans *Proceedings of Seventh Eurographics Workshop on Animation and Simulation*, Poitiers (France).

Iscan, M. et Helmer, R. (1993). *Forensic Analysis of the skull.* Wiley-Liss.

Iscan, M., Loth, et S.R. (1984). « Estimation of age from the sternal rib: a new method to estimate age at death in males ». *Journal of Forensic Science*, 29:1094–1104.

Ishibashi, H. (1986). « Identification of a person by the superimposition method ». *Japanese Journal of Legal Medecine*, 40:445.

Jambon, A.-C., Dubois, P., et Karpf, S. (1997). « A low-cost training simulator for initial formation of gynecologic laparoscopy ». Dans Troccaz, J., Grimson, E., et Mosges, R., éditeurs, *Proceedings of the First Joint Conference CVRMed-MRCAS'97*, volume 1205 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 347–356.

Jean Louchet, Xavier Provot, D. C. (1995). « Evolutionary Identification of Cloth Animation Model ». Dans *Workshop on Computer Animation and Simulation (Eurographics'95)*, pages 44–54.

Joukhadar, A. (1995). « Energy based adaptive time step and inertia-matrix based adaptive discretization for fast converging dynamic simulation ». Dans *Proc. of the Int. Workshop on Visualisation and Mathematics*, Berlin (D).

Joukhadar, A. et Laugier, C. (1996). « Adaptive time step for fast converging dynamic simulation system ». Dans *Proc. of the IEEE-RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems*, volume 2, pages 418–424, Osaka (JP).

Kaiss, M. et Le Tallec, P. (1996). « La Modélisation numérique du contact œil-trépan ». *Revue Européenne des Eléments Finis*, 5(3):375–408.

Kapur, T., Grimson, W. E. L., Wells III, W. M., et Kikinis, R. (1996). « Segmentation of Brain Tissue from Magnetic Resonance Images ». *Medical Image Analysis*, 1(2):109–127.

Kardestuncer, H. (1987). *Finite Element Handbook.* Mc Graw-Hill. ISBN-0-07-033305-X.

Kass, M., Witkin, A., et Terzopoulos, D. (1988). « Snakes: active contour models ». *International Journal of Computer Vision*, 1:321–331.

Keeve E., Girod S., G. B. (1996). « Craniofacial Surgery Simulation ». Dans *Proceedings of the 4th International Conference on Visualization in Biomedical Computing VBC'96*, pages 541–546, Hamburg, Germany.

Kenedi, R., Gibson, T., Evans, J., et Barbenel, J. (1975). « Tissue Mechanics ». *Physics in Medecine and Biology*, 20(5):163–169.

Kensaku, M., Hasegawa, J., Toriwaki, J. Anno, H., et Katada, K. (1995). « Automated Extraction and Visualization of Bronchus from 3D CT Images of Lung ». Dans Ayache, N., éditeur, *Proceedings of CVRMed*, Lecture Notes in Computer Science, pages 542–548, Nice (France).

Koch, R. M., Gross, M. H., Carls, F. R., von Büren, D. F., Fankhauser, G., et Parish, Y. (1996). « Simulating Facial Surgery Using Finite Element Methods ». Dans Rushmeier, H., éditeur, *SIGGRAPH 96 Conference Proceedings*, Annual Conference Series, pages 421–428. ACM SIGGRAPH, Addison Wesley.

Krogman, W. (1943). « *Role of the physical anthropologist in the identification of human skeletal remains* », fbi law enforcment bulletin, part i, vol. 12 edition.

Krogman, W. et Iscan, M. (1986). « *The Human Skeleton in Forensic Medicine* », Chapitre???, pages 413–457. Springfield, IL.

Kuehnapfel, U. et Neisius, B. (1993). « CAD-Based Graphical Computer Simulation in Endoscopic Surgery ». *End. Surg.*, 1:181–184.

Kumari, T. et Chandra Sekharan, P. (1992). « Remote control skull positioning device for superimposition studies ». *Forensic Science International*, 54:127–133.

Larabee, W. (1986). « A Finite Element Model of Skin Deformation - Biomechanics of Skin and Soft Tissue: a review ». *Laryngoscope*, 96:399–419.

Lombardo, J.-C. (1996). « *Modélisation d'objets déformables avec un système de particules orientées* ». PhD thesis, Université Joseph Fourier - Grenoble.

Lorensen, W., Jolesz, F., et Kikinis, R. (1995). « The Exploration of Cross-Sectional Data with a Virtual Endoscope ». Dans *Medecine Meets Virtual Reality IV*, pages 221–230. IOS Press.

Lorensen, W. E. et Cline, H. E. (1987). « Marching Cubes: A High Resolution 3D Surface Reconstruction Algorithm ». Dans *Computer Graphics (SIGGRAPH'87)*, volume 21.

Luciani, A. (1985). « *Un Outil informatique de création d'images animées : modèles d'objets, langage, contrôle gestuel en temps réel : le système ANIMA* ». PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, INPG, 38000 Grenoble, France.

Luciani, A., Jimenez, S., Florens, J., Cadoz, C., et Raoult, O. (1991). « Computational Physics: a Modeler Simulator for Animated Physical Objects ». Dans *Eurographics Workshop on Animation and Simulation*, pages 425–437, Vienna.

Malinowski, A. et Polawski, R. (1970). « L'utilité de l'expertise anthropométrique pour les essais d'identification des crânes humains par la méthode de la superposition photographique ». *Zaccharia*, 23:747–770.

Manduca, A., Muthupillai, R., Rossman, P., Greenleaf, J., et Ehman, L. (1996). « Visualization of Tissue Elasticity by magnetic Resonance Elastography ». Dans *Proc of Visualization in Biomedical Imaging (VBC'96)*, pages 63–68, Hamburg, Germany.

Maples, W. (1978). « An improved technique using dental histology for estimation of adult age ». *Journal of Forensic Science*, 23:747–770.

Masauzawa, A. (1980). « *Brain and Nerve* », volume 32, Chapitre Compliance of the Brain, pages 47–56. No to Skinkei.

Massie, T. H. et Salisbury, J. K. (1994). « The PHANToM Haptic Interface : a Device for Probing Virtual Objects ». Dans *Proceedings of the ASME Winter Annual Meeting, Symposium on Haptic Interfaces for Virtual Environment and Teleoperator Systems.*

Mc Kenna, J., Jablonski, N., et Fearnhead, R. (1984). « A method of matching skulls with photographic portraits using landmarks and measurements of the dentition ». *Journal of Forensic Science*, 29:787–797.

McElhaney, J., Roberts, V., et Hilyard, J. (1976). Handbook of Human Tolerance. Japan Automobile Research Institute Inc.

McInerney, T. et Terzopoulos, D. (1996). « Deformable Models in Medical Image Analysis: A Survey ». *Medical Image Analysis*, 1(2):91–108.

Merlet, J. (1995). « Determination of the orientation workspace of parallel manipulators ». *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 13:143–160.

Merlet, J.-P. (1997). *Les Robots parallèles.* Hermès, Paris.

Meseure, P. et C., C. (1996). « Modélisation mécanique pour la simulation d'actes chirurgicaux ». Dans *Actes du* 4eme *séminaire du groupe de travail Animatition et Simulation.*

Meseure, P. et Chaillou, C. (1997). « Deformable Body Simulation with Adaptative Subdivision and Cuttings ». Dans *Proceedings of the WSCG'97*, pages 361–370.

Messmer, J. et Fierro, M. (1986). « Personal identification by radiographic comparison of vascular groove patterns of the calvarium ». *American Journal of Forensic Medecine and Pathology*, 7:159–162.

Miller, G. (1988). « The Motion Dynamics of Snake and Worms ». Dans *Computer Graphics (SIGGRAPH'88)*, volume 22, pages 169–173, Atlanta (USA).

Miyasaka, S., Yoshino, M., Imaizumi, K., et Seta, S. (1995). « The computer-aided facial reconstruction system ». *Forensic Science International*, 74:155–165.

Miyazaki, S., Ishiguro, M., Yasuda, T., Yokoi, S., et Toriwaki, J. (1995). « *Computer Graphics: Developments in Virtual Environments* », Chapitre A Study of Virtual Manipulation of Elastic Objects - Chapter 27, pages 381–391. Academic Press Ltd. ISBN 0-12-227741-4.

Monga, O., Benayoun, S., et Faugeras, O. D. (1992). « Using partial derivatives of 3D images to extract typical surface features ». Dans *Proceedings of CVPR'92*. Also a Technical Report n° 1599.

Montagnat, J. et Delingette, H. (1997). « Volumetric Medical Images Segmentation using Shape Constrained Deformable Models ». Dans Troccaz, J., Grimson, E., et Mosges, R., éditeurs, *Proceedings of the First Joint Conference CVRMed-MRCAS'97*, volume 1205 de *Lecture Notes in Computer Science*. Springer.

Montagu, M. (1935). « Restoration of an Egyptian mummified foot ». *American Journal of Physical Anthropology*, 20:95–103.

Moore, M. et Wilhelms, J. (1988). « Collision Detection and Response for Computer Animation ». Dans *Computer Graphics (SIGGRAPH'88)*, volume 22, pages 289–298.

Neave, R. (1986). « Facial reconstruction: a study of its accuracy and reproducibility ». *American Journal of Phys. Anthropol.*, 69:244. (abstract).

Norton, A., Turk, G., Bacon, B., Gerth, J., et Sweeney, P. (1991). « Animation of Fracture by Physical Modeling ». *The Visual Computer*, 7:210–219.

Perper, J., Patterson, G., et Backner, J. (1988). « Face imaging reconstructive morphography ». *The American Journal of Forensic Medicine and Pathology*, 9:126–138.

Pflesser, B., Tiede, U., et Hoehne (1995). « Towards Realistic Visualization for Surgery Rehearsal ». Dans *Computer Vision, Virtual Reality and Robotics in Medecine*, volume 905 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 487–491. Springer.

Pieper, S., Chen, D., Delp, S., et *et al.* (1991). « Surgical Simulation: From Computer-Aided Design to Computer-Aided Surgery ». Dans *Proceedings of NICOGRAPH '91.*

Pieper, S., Rosen, J., et Zeltzer, D. (1992). « Interactive graphics for plastic surgery: A task-level analysis and implementation ». Dans *Proceedings of Computer Graphics (Symposium on Interactive 3D Graphics)*, volume 25, pages 127–134, Boston - MA (USA).

Platt, J. C. et Barr, A. H. (1988). « Constraint Methods for Flexible Models ». Dans *Computer Graphics (SIGGRAPH'88)*, volume 22 No 4, pages 279–288.

Pötsch, L., Herz, U., Lithoff, H., Urban, R., et Rittner, C. (1994). « Zur postmortalen Gesichtsrekonstruktion. Arbeitskonzept einer schnellen Identifierungsmöglichkeit ». *Rechtsmedizin*, 4:61–68.

Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A., et Vetterling, W. T. (1991). *Numerical Recipes in C.* Cambridge Press.

Provot, X. (1995). « Deformation Constraints in a Mass-Spring Model to Describe Rigid Cloth Behavior ». Dans *Proc. of Graphics Interface'95 conference*, pages 147–154.

Quatrehomme, G. (1997). « Method for identifying severly traumatized faces by facial casting ». *Journal of Forensic Sciences.* in press.

Quatrehomme, G., Cotin, S., Subsol, G., Delingette, H., Garidel, Y., Grévin, G., et Fidrich, M. (1997). « A Fully Three-Dimensional Method for Facial Reconstruction Based on Deformable Models ». *Journal of Forensic Sciences*, 42(4):649–652.

Quatrehomme, G., Garidel, Y., Bailet, P., Liao, Z., Grevin, G., et Ollier, A. (1994). « An attempt of scientific evaluation in facial reconstruction: preliminary results ». Dans *Proceedings of the XVIth Congress of the International Academy of Legal Medicine and Social Medicine*, Strasbourg, France.

Quatrehomme, G., Garidel, Y., Grevin, G., Liao, Z., Bailet, P., et Ollier, A. (1995). « Method for identifying putrefied corpses by facial casting ». *Forensic Science International*, 74((1-2)):115–124.

Quatrehomme, G., Garidel, Y., Grevin, G., Liao, Z., Boublenza, A., et Ollier, A. (1996). « Facial casting as a method to help identify severely disfigured corpses ». *Journal of Forensic Science*, 41:518–520.

Rathbun, T. (1984). « *Forensic Anthropology* », volume 3, Chapitre Personal identification: facial reconstructions, pages 347–356. Springfield.

Reeves, W. (1983). « Particle Systems - A Technique for Modeling a Class of Fuzzy Objects ». Dans *Proceedings of SIGGRAPH'83*, volume 17 de *Computer Graphics (SIGGRAPH'83)*, pages 359–376.

Reeves, W. (1985). « Approximate and Probabilistic Algorithms for Shading and Rendering Structured Particle Systems ». Dans *Proceedings of SIGGRAPH'85*, volume 19 de *Computer Graphics (SIGGRAPH'85)*, pages 313–322.

Rhine, J. et Campbell, H. (1980). « Thickness of facial tissues in the American Negro ». *Journal of Forensic Science*, 25:847–858.

Rhine, S. et K., S. (1991). « Radiographic identification by mastoid sinus and arterial pattern ». *Journal of Forensic Science*, 36:272–279.

Ritz, S., Turzynski, A., Schutz, H., Hollmann, A., et Rochholz, G. (1996). « Identification of osteocalcin as a permanent aging constituent of the bone matrix: basis for an accurate age at death determination ». *Forensic Science International*, 12(77):13–26.

Roberts, D. (1995). *PC Games Programming Explorer*. Coriolis Group Books.

Rosen, J. M., Lasko-Harvill, A., et Satava, R. (1995). « *Computer-Integrated Surgery - Technology and Clinical Applications* », volume 1, Chapitre Virtual Reality and Surgery (chapter 14), pages 231–243. MIT Press, Cambridge, MA.

Sagar, M. A., Bullivant, D., Mallinson, G., Hunter, P., et Hunter, I. (1994). « A Virtual Environment and Model of the Eye for Surgical Simulation ». Dans *Computer Graphics (SIGGRAPH'94)*, Annual Conference Series, pages 205–212.

Sassouni, V. (1969). « A classification of skeletal facial types ». *American Journal of Orthodontics*, 55:109–123.

Satava, R. (1992). « Virtual Reality Surgical Simulator ». Dans *Proceedings MMVR'92 - Medecine Meets Virtual Reality*, San Diego, CA, USA.

Satava, R. (1993). « Virtual Reality Surgical Simulator - The First Steps ». Dans *Proceedings of VR Systems'93 Conference*, pages 41–49, New-York, USA.

Schiemann, T., Nuthmann, J., Tiede, U., et Höhne, K. (1996). « Segmentation of the Visible Human for High Quality Volume Based Visualization ». Dans Höhne, K. H. et Kikinis, R., éditeurs, *Visualization in Biomedical Computing*, volume 1131 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 13–22, Hamburg (Germany). Springer. Electronic version: http://www.uke.uni-hamburg.de/Institutes/IMDM/IDV/Publications.html.

Schuller, A. (1943). « A note on the identification of skulls by X-ray pictures of the frontal sinuses ». *Medical Journal of Australia*, 1:554–556.

Shimoga, K. (1993). « Perceptual feedback issues in dextrous telemanipulation: Part I. Finger force feedback; Part II. Finger touch feedback ». Dans *Proceedings IEEE International Symposium on Virtual Reality,*, pages 263–279.

Shimoga, K., Murray, A., et Khosla, P. (1995). « A touch reflection system for interaction with remote and virtual environments ». Dans *Proceedings of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robotics and Systems*, Pittsburgh, PA (USA).

Snow, C., Gatliff, B., et McWilliams, K. (1970). « Reconstruction of facial features from the skull: an evaluation of its usefulness in forensic anthropology ». *American Journal of Physical Anthropology*, 33:221–228.

Soler, L., Malandain, G., et Delingette, H. (1997). « Segmentation Automatique : application aux angioscanners 3D du foie. ». *Traitement du Signal.* Submitted.

Song, G. J. et Reddy, N. P. (1995). « Tissue Cutting In Virtual Environment ». Dans *Medecine Meets Virtual Reality IV*, pages 359–364. IOS Press.

Speeter, T. H. (1992). « Three Dimensional Finite Element Analysis of Elastic Continua for Tactile Sensing ». *The International Journal of Robotics Research*, 11 No 1:1–19.

Stewart, T. (1979). « *Essentials of Forensic Anthropology* », Chapitre Reconstruction of facial soft parts, pages 255–274. Springfield, IL.

Stone, R. et McCloy, R. (1996). « Virtual Environment Training Systems for Laparoscopic Surgery; Activities at the UK's Wolfson Centre for Minimally Invasive Therapy ». *The journal of Medicine and Virtual Reality*, 1(2).

Subsol, G., Thirion, J. P., et Ayache, N. (1996a). « Application of an Automatically Built 3D Morphometric Brain Atlas: Study of Cerebral Ventricle Shape ». Dans Höhne, K. H. et Kikinis, R., éditeurs, *Visualization in Biomedical Computing*, volume 1131 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 373–382, Hamburg (Germany). Springer.

Subsol, G., Thirion, J. P., et Ayache, N. (1996b). « Une méthode générale pour construire automatiquement des atlas anatomiques morphométriques à partir d'images médicales tridimensionnelles : application à un atlas du crâne ». *Traitement du Signal*, 13(6):651–674.

Subsol, G., Thirion, J. P., et Ayache, N. (1998). « A General Scheme for Automatically Building 3D Morphometric Anatomical Atlases ». *Medical Image Analysis.* Accepted for publication.

Suk, V. (1935). « Fallacies of anthropological identifications and reconstructions. A critique based on anatomical dissections ». Rapport Technique 207, Masarik University.

Sukthankar, S. et Reddy, N. (1995). « Force Feedback Issues in Minimally Invasive Surgery ». Dans *Medecine Meets Virtual Reality*, pages 375–379. IOS Press.

Szeliski, R. et Tonnesen, D. (1991). « Surface modeling with oriented particle systems ». Rapport Technique CRL 91/14, DEC Cambridge Research Laboratories.

Terzopoulos, D. et Fleisher, K. (1988). « Modeling Inelastic Deformation: Viscoelasticity, plasticity, fracture ». Dans *Computer Graphics (SIGGRAPH'88)*, volume 22, no. 4, pages 269–278.

Terzopoulos, D., Platt, J., Barr, A., et Fleisher, K. (1987). « Elastically Deformable Models ». Dans *Computer Graphics (SIGGRAPH'87)*, volume 21 No 4, pages 205–214.

Thirion, J.-P. et Gourdon, A. (1995). « Computing the differential characteristics of iso-intensity surfaces ». Dans *CVGIP*, pages 190–202.

Tyrrell, A. J., Evison, M. P., Chamberlain, A., Gree, M., et Path, F. (1997). « Forensic Three-Dimensional Facial Reconstruction : Historical Review and Contemporary Developments ». *Journal of Forensic Sciences*, 42(4):649–652.

Ubelaker, D. (1989). « *Manuals of Archaeology, Second edition* », Chapitre Human skeletal remains: Excavation, Analysis, Interpretatio, page 124. Taraxacum Washington.

van der Vorst, H. et Sleijpen, G. (1993). « The effect of incomplete decomposition preconditioning on the convergence of Conjugate Gradient ». Dans Hackbusch, W. et Wittum, G., éditeurs, *Incomplete Decompositions (ILU)-Algorithms, Theory, and Applications*, volume 41 de *Notes on Numerical Fluid Mechanics,*, pages 179–187.

Vanezis, P., Blowes, R., Linney, A., Tan, A., Richards, R., et Neave, R. (1989). « Application of 3-D computer graphics for facial reconstruction and comparison with sculpting techniques ». *Forensic Science International*, 42:69–84.

Varlet, E. (1997). « *Étude d'un simulateur pour l'apprentissage de l'écho-endoscopie, modélisation et réalisation* ». PhD thesis, Université des Sciences et Techniques de Lille.

Von Herzen, B., Barr, A. H., et Zatz, H. R. (1990). « Geometric Collisions for Time Dependent Parametric Surfaces ». Dans *Computer Graphics (SIGGRAPH'90)*, volume 24, pages 39–48, Dallas, USA.

Waters, K. (1992). « A physical model of facial tissue and muscle articulation derived from computer tomography data ». Dans *Visualization in Biomedical Computing (VBC'92)*, volume 574, Chappel Hill, NC.

Zhang, Z. (1994). « Iterative point matching for registration of free-form curves and surfaces ». *International Journal of Computer Vision*, 13(2):119–152. Also INRIA Research Report #1658.

Zienkiewicz, O. (1977). *The finite element method.* McGraw-Hill, London, 3 edition.