UNIVERSITÉ PARIS-IX DAUPHINE
U.F.R. MATHEMATIQUES DE LA DECISION

MEMOIRE

présenté par

Laurent David COHEN

pour obtenir le diplôme d'

HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES

arrêté du 23 Novembre 1988
Spécialité : Mathématiques Appliquées

le 10 Mai 1995 devant le Jury composé de:

Jean-Michel MOREL	Coordinateur et Rapporteur
Philippe CINQUIN	Rapporteur
Demetri TERZOPOULOS	Rapporteur
Nicholas AYACHE	Examinateur
Robert AZENCOTT	Examinateur
Mike BRADY	Examinateur
Pierre-Louis LIONS	Examinateur

Je voudrais tout d'abord exprimer ma profonde gratitude à Mr Jean-Michel MOREL pour avoir accepté d'être coordinateur et rapporteur, et pour ses remarques et conseils fructueux.

Etant membre du CEREMADE depuis plus de cinq ans, je remercie tout particulièrement Mr Pierre-Louis LIONS, directeur du CEREMADE, de l'honneur qu'il me fait de se joindre à ce jury.

MM. Philippe CINQUIN et Demetri TERZOPOULOS ont accepté spontanément d'être rapporteurs. Je tiens à leur témoigner toute ma reconnaissance.
Je remercie de plus Mr Demetri TERZOPOULOS, Pr. à Toronto, de venir spécialement de si loin. Je suis heureux de sa présence dans ce jury car il a ouvert le vaste champ de recherches des modèles déformables en vision par ordinateur.

Je suis très reconnaissant à Mr Nicholas AYACHE qui m'a permis de découvrir le monde passionnant du *Medical Image Understanding* et a prodigué encouragements et conseils tout au long de mes recherches. Je salue par la même occasion tous les membres du projet EPIDAURE de l'INRIA, à Rocquencourt puis à Sophia-Antipolis, pour leur accueil toujours chaleureux.

Je tiens à exprimer ma gratitude à Mr Robert AZENCOTT de me faire l'honneur de participer à ce jury, ainsi que pour son accueil régulier au séminaire du CMLA "Imagerie et Déformation".

Je suis très honoré par la présence de Mr Mike BRADY, Pr. à Oxford, l'un des fondateurs de la vision par ordinateur.

Certains travaux présentés dans ce mémoire ont été écrits en collaboration avec Nicholas Ayache, Eric Bardinet, Isaac Cohen (INRIA), Ron Kimmel (TECHNION) et Andy WITKIN (CMU). Je leur exprime toute ma sympathie et espère que ces collaborations se poursuivront.

Pour m'avoir permis d'utiliser dans les meilleures conditions le matériel informatique, je remercie Michel Vanbreugel, toujours prêt à faire face aux caprices des machines.

J'exprime toute mon amitié à l'équipe de traitement d'images, au groupe de travail, ainsi qu'à tous les membres du CEREMADE, et en particulier les directeurs de l'URA CNRS Yves Meyer, puis Maria Esteban, mes voisins de bureau Albert Cohen, Jean Dolbeault et Eric Séré.
Merci enfin à Josette Levy, Magali Marc-Dibildos, Lucette Jean-Pierre et Irene Mazzella au secrétariat, à Mme Dupont-Jubien et au service de la Recherche pour leur disponibilité et leur aide.

Travaux de recherches 1983-1994

Méthodes Variationnelles pour le Traitement d'Images

Laurent COHEN
Chargé de Recherche 1ère classe
Ceremade, URA 749
Université Paris-9 Dauphine
Place du Marechal de Lattre de Tassigny
75775 Paris cedex 16
Tél. (1) 44 05 46 78 Fax (1) 44 05 45 99
Courrier Electronique: Laurent.Cohen@ceremade.dauphine.fr

1 Cursus et Diplômes

Entré à l'Ecole Normale Supérieure, rue d'Ulm en Mathématiques en 1981, j'ai suivi un cursus en Mathématiques appliquées.

Ayant obtenu en fin de deuxième année d'école, Licence, Maîtrise et DEA en Analyse Numérique à Paris 6 ainsi que l'Agrégation de Mathématiques (Major), j'ai préparé une thèse avec le Pr. H. BREZIS (membre de l'Académie des Sciences) à Paris 6.

1.1 Première Thèse Equations aux Dérivées Partielles

voir références [1, 2, 3, 4, 5]

Cette thèse a été soutenue en 1986 à Paris 6 devant le jury composé de H. BREZIS, P. BARAS, H. BERESTYCKI et P. CIARLET.

L'ensemble des résultats de cette thèse porte sur des problèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires. Ils sont divisés en trois parties:

- L'explosion totale après un temps fini T_{max} pour l'équation de la chaleur non linéaire,
- L'explosion en temps fini T_{max} pour les équations de Schrodinger et de la chaleur à non linéarité polynomiale,
- L'étude des solutions positives d'une équation elliptique non-linéaire.

Explosion totale après un temps fini T_{max} de la solution d'une équation de la chaleur non linéaire.

On étudie l'équation de la chaleur non linéaire:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(u) \quad \text{sur} \quad \Omega \times [0, T_{max}[, \\ u(0) = u_0 \quad \text{sur} \quad \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \times [0, T_{max}[, \end{cases} \tag{1}$$

Ω étant un ouvert borné de $I\!R^n$. Pour des données initiales u_0 bornées, l'équation ci-dessus admet une unique solution régulière sur un intervalle maximal $[0, T_{max}[$ avec

$$T_{max} = \infty \quad \text{ou} \quad \lim_{t \to T_{max}} \|u(t)\|_\infty = \infty.$$

Les deux cas précédents présentent des problèmes différents:

1. Si $T_{max} = \infty$, on étudie l'ensemble des valeurs d'adhérence au voisinage de l'infini de la solution $u(t)$. Les propriétés de cet ensemble permettent éventuellement de conclure à la convergence vers un régime permanent. Un état d'équilibre à l'infini donne une solution du problème elliptique.

2. Si $T_{max} < \infty$, il y a un phénomène d'explosion (Blow-up), on étudie dans ce cas le comportement de la solution au voisinage de T_{max} en estimant sa norme dans différents espaces.

Dans l'équation non linéaire, deux termes s'opposent:

- Le terme de diffusion $-\Delta u$ a un effet régularisant et produit quand il est seul ou avec un second terme Lipschitzien une solution globale, c'est à dire $T_{max} = \infty$.

- Le terme de réaction $f(u)$, qui fait exploser les solutions. Par exemple, pour l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} = |u|^{p-1}u$, $u(0) = u_0 > 0$, il y a toujours explosion en temps fini lorsque $p > 1$.

Suivant la donnée initiale et la non-linéarité, c'est l'un ou l'autre des deux termes qui l'emporte et détermine le comportement de la solution.

Dans le cadre de cette thèse, nous nous sommes toujours intéressé au cas où il y a effectivement explosion en temps fini. Ce qui peut être assuré en prenant des données initiales assez grandes (cf. [6, 7] et corollaire 2.2. dans [3]). **Au contraire, dans le cadre des modèles déformables, c'est la recherche d'un état d'équilibre qui nous intéresse. Dans nos problèmes (voir (19)), le second membre $F = -\nabla P$ étant toujours Lipschitzien, l'existence de solutions globales est assurée.**

F.B.Weissler a montré [8] que pour des données initiales positives symétriques à décroissance radiale, la solution admet une limite ponctuelle en T_{max}, qui est finie partout sauf en un point. Friedmann et Mc Leod [9] ont amélioré ce résultat en démontrant pour une donnée initiale positive que l'ensemble des points d'explosion est un compact mais n'ont pas d'exemple d'une explosion en plus d'un point.

La question que nous avons étudié est le comportement de la solution après T_{max}. Peut-on par exemple prolonger après T_{max} la solution en un sens plus faible? Pour aborder ce problème, nous considérons une suite de problèmes approchés:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_n}{\partial t} - \Delta u_n = f_n(u_n) \quad \text{sur} \quad \Omega \times [0, T_{max}[, \\ u_n(0) = u_0 \quad \text{sur} \quad \Omega, \\ u_n = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \times [0, T_{max}[, \end{cases} \tag{2}$$

où f_n est globalement Lipschitzienne et converge vers f. Les solutions u_n sont donc globales pour l'équation approchée sur $I\!R_+$. On étudie alors la limite quand n tend vers l'infini des u_n.

On montre que sous certaines hypothèses sur la non-linéarité, par exemple si f est convexe et $f(u)/u^p$ est croisante pour un $p > 1$:

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} u_n(x,t) = \infty, \quad \forall t > T_{max}, \\ \lim_{n\to\infty} u_n(x,t) = u(x,t), \quad \forall t < T_{max}, \\ \lim_{n\to\infty} u_n(x,t) = \lim_{t\to T_{max}} u(x,t) \quad \textit{pour} \quad t = T_{max}. \end{cases} \tag{3}$$

Explosion en temps fini pour les équations de Schrodinger et de la chaleur.

On considère l'équation de Schrodinger

$$\begin{cases} i\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = |u|^{\gamma-1}u \quad \text{sur} \quad]0, T[\times I\!R^n, \\ u(0,x) = u_0(x) \quad \text{sur} \ I\!R^n, \\ u \in C^1([0,T], L^2(I\!R^n)) \cap C([0,T], H^2(I\!R^n)), \end{cases} \tag{4}$$

avec $1 < \gamma < \frac{n+2}{n-2}$. On lui associe le problème faible suivant:

$$\begin{cases} u(t) = S(t\ )u_0 + \int_0^t S(t-s\ )|u|^{\gamma-1}u(s)ds, \\ u \in C([0,T], L^{\gamma+1}(I\!R^n)) \end{cases} \tag{5}$$

où $S(t)$ est le semi-groupe associé à l'équation homogène. On montre des résultats d'existence et d'unicité pour les deux problèmes précédents. On sait que pour une donnée initiale $u_0 \in H^2(I\!R^n)$, il existe une unique solution classique au premier problème sur un intervalle maximal $[0, T_{max}[$ qui vérifie si T_{max} est fini:

$$\lim_{t\to T_{max}} \|u(t)\|_{H^2} = \infty.$$

On montre l'existence d'une unique solution de l'équation intégrale sur un intervalle maximal $[0, T_*[$. La comparaison des natures des explosions en T_{max} et T_* permet alors de conclure à l'égalité de ces temps d'explosion et des solutions des deux problèmes sur $[0, T_{max}[= [0, T_*[$. On en déduit que les propriétés de chacune des solutions sont vérifiées par l'autre. En particulier, on a:

$$\lim_{t\to T_{max}} \|u(t)\|_q = \infty \ \ \forall q > n\frac{(\gamma-1)}{2}.$$

alors que l'on savait seulement que la limite supérieure était infinie.

On montre aussi tous les résultats précédents pour l'équation de la chaleur non linéaire:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = |u|^{\gamma-1}u \quad \text{sur} \quad]0,T[\times\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x) \quad \text{sur } \Omega, \\ u(t,x) = 0 \quad \text{sur} \ [0,T]\times\partial\Omega, \\ u \in C^1([0,T],L^2(\Omega)) \cap C([0,T],H^2\cap H_0^1(\Omega)). \end{array}\right. \tag{6}$$

où Ω est supposé borné. On lui associe le problème faible suivant:

$$\left\{\begin{array}{l} u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)|u|^{\gamma-1}u(s)ds, \\ u \in C([0,T],L^{\gamma+1}(\Omega)) \end{array}\right. \tag{7}$$

Comme le semigroupe de la chaleur vérifie certaines propriétés identiques à celles du semigroupe de l'équation de Schrodinger, les résultats et démonstrations pour les deux équations sont analogues.

Solutions positives d'une équation elliptique non-linéaire.

Le problème étudié dans cette dernière partie était de trouver une non linéarité f telle que le problème suivant n'admette pas de solution.

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta u + f(u) \ = \ 0 \ \text{ sur } B, \\ u > 0 \ \text{ sur } \ B, \\ u = 0 \ \text{ sur } \ \partial B. \end{array}\right. \tag{8}$$

où B est le disque unité de $I\!R^2$, et f est telle que:

$$f(0) = f'(0) = 0 \ \text{ et } \ \lim_{u\to\infty} \frac{f(u)}{u} = \infty \ \text{ et } f \text{ est croissante.}$$

On étudie le problème précédent sur la boule unité de $I\!R^n$ pour n réel quelconque après avoir transformé l'équation en équation différentielle ordinaire sur l'intervalle $[0,1]$, la solution étant forcément radiale par symétrie du domaine:

$$\left\{\begin{array}{l} u'' + \frac{n-1}{r}u' + f(u) = 0, \ r \in [0,1], \\ u(0) = u_0, \\ u'(0) = 0 \end{array}\right. \tag{9}$$

où $u_0 > 0$ est donné. On voit que pour $n = 2$, la solution s'annule nécessairement en un $r_0 > 0$ et après changement d'échelle, cela montre que r_0^2 est une valeur propre du problème:

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta u + \lambda f(u) \ = \ 0 \ \text{ sur } B, \\ u > 0 \ \text{ sur } B, \\ u = 0 \ \text{ sur } \partial B. \end{array}\right. \tag{10}$$

On définit ainsi pour chaque $u_0 > 0$

$$\left\{\begin{array}{l} r_0(u_0) = Max\ \{\, r \geq 0, / \ \ u(\tau) \geq 0 \ \ sur \ \ [0,r]\}, \\ \lambda(u_0) = r_0(u_0)^2. \end{array}\right. \tag{11}$$

On a alors soit $r_0(u_0) = \infty$, soit $r_0(u_0) < \infty$ et $u(r_0(u_0)) = 0$. On est donc amené à étudier dans [4] le comportement de $\lambda(u_0)$ et des solutions quand u_0 tend vers l'infini. On obtient des estimations précises sur la nature de l'explosion des solutions quand on fait tendre la donnée initiale vers l'infini.

Ensuite, on étudie le problème par l'autre bout. On étudie le comportement des solutions du problème suivant:

$$\begin{cases} u'' + \frac{n-1}{r}u' + f(u) = 0, \ r < r_0, \\ u(r_0) = 0, \\ u'(r_0) = u_1 \end{cases} \tag{12}$$

où $u_1 < 0$ est donné.

1.2 Traitement d'images

Parallèlement à mes recherches en mathématiques, je me suis intéressé de plus en plus au traitement d'images et j'ai obtenu un second DEA en Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle à Paris 6. Dirigé par les Prs. J.-C. SIMON et J.-L. LAURIERE, il comportait une partie traitement d'images avec plusieurs projets numériques et une partie de Logique et Intelligence Artificielle donnant lieu à la réalisation d'un système expert.

1.3 Seconde Thèse en Traitement d'images

Ayant changé de domaine, j'ai par la suite regroupé certains de mes travaux de recherche en traitement d'images effectués à Schlumberger et à l'INRIA pour valider une seconde thèse à Paris-Sud Orsay en 1990 [10], devant le Jury composé de N. AYACHE, R. AZENCOTT, A. GAGALOWICZ, H. MAITRE et C. PUECH. Ces travaux ([11, 12, 13, 14, 15]) correspondent aux sections 2.1.1, 3 et au début des travaux de la section 4.2.

1.4 EDP et Traitement d'images

J'ai par la suite relié mes deux spécialités en m'intéressant depuis 1989 aux méthodes variationnelles et équations aux dérivées partielles pour le traitement d'images. C'est pourquoi j'ai rejoint en 1990 le CEREMADE où J.M. MOREL, P.L. LIONS, Y. MEYER et leurs étudiants se sont intéréssés au formalisme de problèmes de Traitement d'images dans un cadre d'équations aux dérivées partielles. De plus, l'équation de la chaleur, sur laquelle j'avais travaillé pour ma thèse, s'est avérée d'une importance fondamentale en traitement d'images ([16, 17, 18]).

2 Centres de Recherche de Schlumberger

2.1 Schlumberger Palo Alto Research

J'ai travaillé au centre de recherche de Schlumberger en Californie avec Andrew WITKIN pendant l'année 1985 dans le groupe "Perception & Graphics" de traitement et synthèse d'images. Pendant ce séjour, j'ai travaillé sur deux projets, l'un en traitement et analyse d'images [19, 11], l'autre en synthèse d'images [20].

2.1.1 Quantification Vectorielle, compression d'images et textures

voir référence [19]

Ce premier sujet a été repris en partie par la suite et publié [11].

Il s'agit de décrire un signal à partir du minimum d'informations afin de le coder ou de générer la même texture pour créer de nouveaux signaux lui ressemblant. Ce signal peut être en dimension quelconque, scalaire ou image et on ne sait rien a priori sur les motifs recherchés. On veut au moins une méthode qui donne une description parfaite pour le cas extrême d'un signal périodique. C'est à dire un "petit signal" et une fréquence. Pour un signal quelconque, la méthode extrait les éléments caractéristiques dont il est composé. On obtient alors une description donnant d'une part des motifs proches des motifs constitutifs de la structure du signal et d'autre part, leur distribution le long de ce signal.

Une approche souvent utilisée en compression d'images est la décomposition de l'image, ou d'imagettes extraites, dans une base bien choisie d'un espace de matrices. La compression est alors obtenue lorsque l'image peut être décomposée sur un petit nombre de vecteurs de la base. Cela revient en fait à projeter l'image ou l'imagette orthogonalement sur un espace de petite dimension pour une erreur assez faible.

Pour simplifier, on a réduit le problème à chercher, pour une image donnée, un ensemble de vecteurs $V_1, .., V_n$ tels que, pour toute imagette extraite X, il existe un couple (ix, jx) pour lequel la distance à $Vect(V_{ix}, V_{jx})$ est assez petite et de manière à minimiser l'erreur quadratique totale:

$$\sum_X \|X - \alpha_x V_{ix} - \beta_x V_{jx}\|^2.$$

Il s'agit donc d'une généralisation de la quantification vectorielle où on cherche un ensemble de vecteurs appelés "quanta" constituant les mots d'un dictionnaire.

L'aspect nouveau de la méthode est de projeter une imagette sur l'espace engendré par le quantum au lieu de le remplacer simplement par le quantum le plus proche dans le cas de la quantification vectorielle classique.

Cela revient à opérer un changement d'échelle des niveaux de gris des quanta. Dans un deuxième temps un changement d'échelle spatiale permet une décomposition plus efficace dans l'esprit de la décomposition multi-échelle introduite par Andrew WITKIN [16], ainsi que des ondelettes [21].

Une deuxième innovation introduite est l'utilisation d'un "grand quantum" ou "quantificateur" appelé le "quantizer" dans l'article. Tout se passe comme dans le cas d'une famille de quanta mais ils sont tous extraits d'une même imagette. Cette méthode est plus adaptée à la recherche de texture.

Pour la compression d'image, cette approche permet d'atteindre des taux de l'ordre de 30 sans détérioration notable de la qualité d'image.

2.1.2 Modèles de déformations de type "Annuaire"

voir référence [20]
Pour ce qui est de mon travail en synthèse d'image, il a consisté en la modélisation de déformations pour les intégrer au modeleur géométrique d'animation développé à SPAR.

Dans ce modeleur géométrique, on dispose d'objets élémentaires comme des parallélépipèdes ou des sphères, et on écrit les déformations que l'on applique à ces objets. L'interface en langage objet se présente avec un menu de boîtes reliées les unes aux autres pour constituer les objets les plus complexes. Par exemple, on peut aplatir, élargir, tordre, déplacer suivant des directions et paramètres à définir.

J'ai travaillé plus particuliérement sur les déformations des objets de type "annuaire téléphonique". Quand on tord un bloc de caoutchouc, il y a compression et les bords restent droits. Lorsqu'il s'agit d'un annuaire téléphonique, il n'y a pas de compression, les pages glissent les unes sur les autres et le bord n'est plus droit. J'ai réalisé une déformation générale qui, appliqué à un objet, le déforme suivant une courbe quelconque dessinée sur l'écran avec la "souris", en donnant à l'objet un coefficient de compressibilité, lui donnant des propriétés intermédiaires entre la compression totale (caoutchouc) et le glissement de lamelles les unes sur les autres en conservant leur longueur ("annuaire téléphonique"). La courbe $C(s)$ donnée par la souris est paramétrée par son abscisse curviligne. L'image par cette transformation "annuaire" d'un point $(x, 0)$ de l'axe de référence $(y = 0)$ est le point sur cette courbe $C(x)$ à une longueur x de l'origine sur cette courbe. Cette transformation est étendue à tout l'espace en définissant l'image de l'axe $y = y_0$ par la courbe parallèle à $C(s)$ déplacée d'une distance y_0 dans la direction normale:

$$C_{y_0} = C(s) + y_0 \overrightarrow{n}(s) \tag{13}$$

en éliminant les boucles qui apparaissent et en conservant la distance le long de cette courbe. Cette courbe est aussi appelée *offset* dans [22]. L'image d'un point (x, y_0) est telle que la longueur de la partie de courbe image du segment $[(0, y_0), (x, y_0)]$ est égale à x. Ceci est implémenté de manière simplifié en définissant la courbe initiale par une suite d'arcs de cercle (voir figure 1).

J'ai réalisé un film d'animation illustrant les méthodes développées, montrant la formation et transformation de divers objets familiers pour meubler une chambre: Tapis se déroulant, canapé, chaise, table,... Un autre film présente un livre fermé posé sur une table qui s'ouvre puis ses pages se mettent à tourner [20] (voir figure 2 et entêtes de pages de ce mémoire). Ce film a été présenté lors d'un séminaire à l'université de Stanford.

2.2 Schlumberger Montrouge Recherche

Chef du projet "Théorie de l'Information", j'ai dirigé des études en Cryptographie, Sécurité Informatique, Compression de Données texte et Image, Traitement d'Images pour des

Figure 1 : A gauche, un exemple de déformation d'un parallélépipède, remarquer le décalage des lamelles sur le bord droit; à droite, exemple d'image de synthèse obtenue utilisant ces déformations.

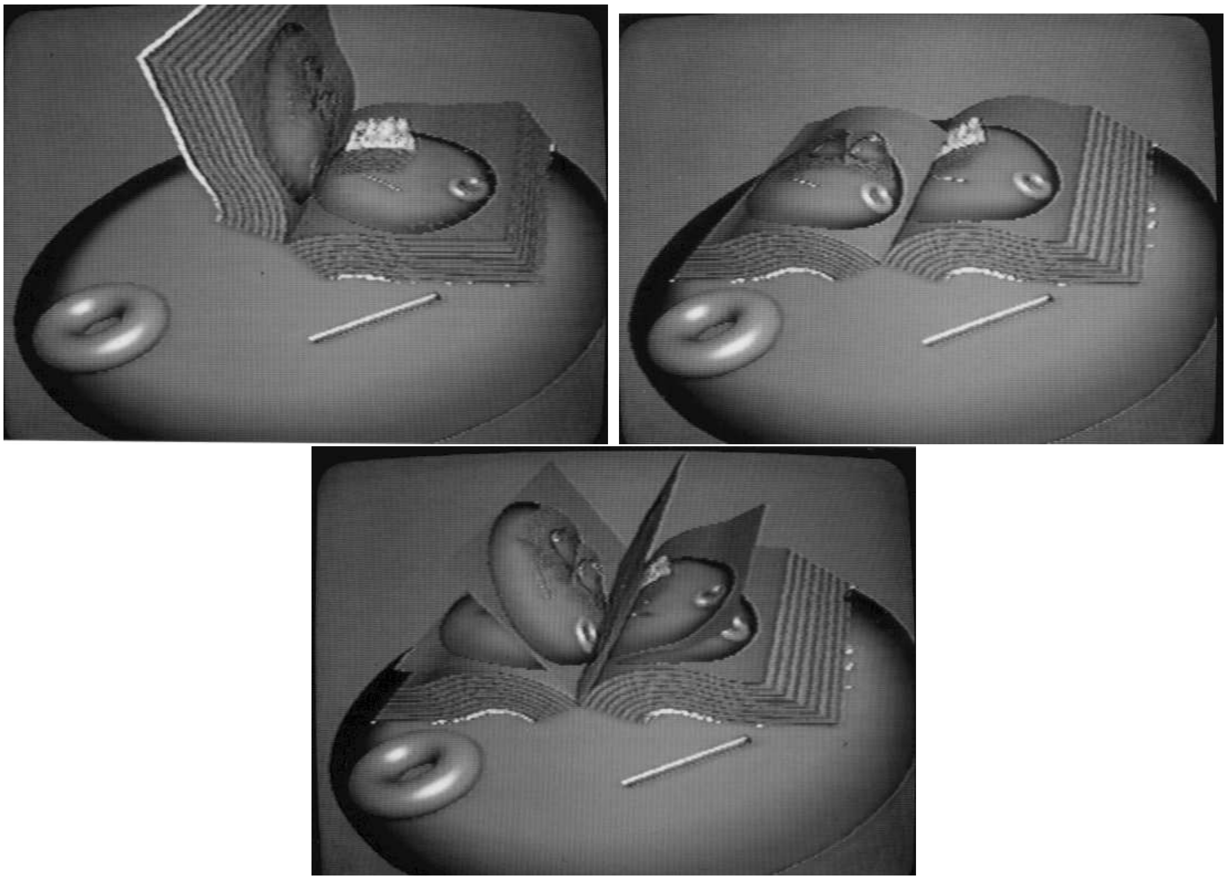


Figure 2 : quelques images de la déformation du livre.

applications à diverses unités du groupe Schlumberger.

J'ai mené des projets pour la Société Paymatec, unité s'occupant de l'activité carte à mémoire/carte bancaire du groupe Schlumberger, en cryptographie et sécurité informatique et en compression de données.

Puis les domaines qui m'ont occupé principalement ont été la compression et l'amélioration d'images.

Le premier sujet correspondait à un projet commun avec Schlumberger Velizy (Enertec) (s'occupant d'enregistrement magnétique et en particulier de boites noires pour les avions) pour la transmission à terre de ce que voit un pilote à bord d'un avion lors d'essais en vol.

J'ai en particulier repris mes travaux sur la quantification vectorielle de SPAR pour les appliquer à la compression, parallèlement à d'autres méthodes utilisant la quantification.

Dans le cadre de l'amélioration et du traitement des images, j'ai travaillé en collaboration avec le laboratoire de physique nucléaire sur des images de radiographie d'objets lourds pour l'unité Balteau construisant des sytèmes de sécurité pour les aéroports.

Pour mener à bien ces projets, j' ai dirigé de nombreux stagiaires de grandes écoles (X, Ulm). D'autre part, j'ai organisé un séminaire hebdomadaire de mathématiques. Lors de ce séminaire, des membres de SMR ou des collaborateurs extérieurs présentaient leurs travaux.

Ayant quitté SMR pour effectuer mon service militaire, j'ai continué à travailler depuis pour SMR, puis d'autres unités du groupe Schlumberger comme expert conseil pour le traitement d'images de radiographie, restoration, segmentation, compression d'images,... J'ai ainsi dirigé les orientations des méthodes utilisées, cherché de nouvelles méthodes pour améliorer ces images bruitées et convoluées à un noyau de type gaussien dû aux divers défauts du système et en extraire des informations utiles. Cette activité a aussi compris la direction et le conseil de stagiaires et d'ingénieurs sur place.

Cette activité industrielle me permet de mettre en pratique et d'évaluer des algorithmes de traitement d'images, en particulier utilisant des méthodes variationnelles pour des applications qui marchent.

Principaux Rapports Internes

- Rapports internes de synthèse "SCHLUMBERGER Montrouge Recherche (SMR)" en cryptographie, sécurité informatique, compression des données texte et image, restauration d'images, 1986-1987.

- Articles parus dans le journal SMR (Scientific Magazine of Research) de diffusion de la recherche dans le groupe Schlumberger:

  - DES, Data Encryption Standard.
  - Quantization and Image data compression (2 parties).

- Rapports d'activités de conseil entre 1988 et 1994 sur les sujets suivants: Déconvolution et Amélioration d'image. Filtres adaptatifs et contours. Extraction de contours. Reconnaissance des formes. Détection de contours et Segmentation par minimisation d'énergie. Fusion Stéréo avec discontinuités. Mise en correspondance de signaux par minimisation d'énergie. Problèmes de Restauration d'images, de segmentation et fusion de données par minimisation d'énergie.

3 Mise en correspondance d'images, approche régions

voir référence [12]

Ce travail a été effectué lors de mon service militaire en qualité de scientifique du contingent commme chercheur à l'INRIA dans le groupe de traitement et synthèse d'images dirigé par A. GAGALOWICZ, sur le projet de Stéréovision par mise en correspondance de régions après segmentation.

La reconstruction d'une scène 3D à partir d'une paire d'images stéréo nécessite l'extraction et la mise en correspondance d'entités dans les deux images. Nous avons développé une technique de mise en correspondance qui comporte une double originalité. Premièrement, nos entités sont des régions, leur structure plus complète permettant des mises en correspondance plus fiables que les algorithmes basés sur des droites ou des points. Deuxièmement, et c'est là la nouveauté de la méthode, nous considérons l'extraction des régions et leur mise en correspondance comme des processus interdépendants. Au lieu de les considérer de manière séquentielle [23, 24], c'est à dire segmentation complète et indépendante pour chaque image suivie de la mise en correspondance, nous les faisons coopérer.

Prenons par exemple une région G de l'image gauche, pour laquelle on cherche une région correspondante D dans l'image droite. Si aucune n'est convenable, nous considérons que la segmentation elle même est à refaire. Ainsi les correspondances aident à déterminer les segmentations naturelles des deux images.

Pour implémenter l'algorithme, nous avons élaboré une structure hiérarchique (un graphe) de segmentations à résolutions multiples, ce qui nous permet de considérer de nouvelles segmentations pour la mise en correspondance, simplement en nous déplaçant dans le graphe. Chaque niveau de segmentation est construit par croissance des régions du niveau précédent. Nous utilisons, pour fusionner les régions, des critères relatifs aux niveaux de gris des images. La complémentarité entre les méthodes de détection de contours et les méthodes de segmentation d'images en régions nous permet d'utiliser les deux méthodes simultanément pour générer les segmentations. Notre algorithme commence la recherche des régions en correspondances par le "haut", c'est à dire par les régions du niveau de segmentation le plus grossier (qui sont les plus robustes), puis on explore le niveau immédiatement inférieur du graphe etc... . Pour la région G de gauche, chaque région droite D est considérée si elle vérifie les contraintes induites par la géométrie des caméras. La mise en correspondance est effectuée avec la paire de régions gauche-droite de moindre coût au sens de critères de formes.

On obtient ainsi les images segmentées lorsque l'on a effectué toutes les mises en correspondance possibles. Les régions mises en correspondance appartiennent à la segmentation finale. L'intervention des régions voisines pour déterminer la cohérence ou la vraissemblance des appariements a été étudiée ultérieurement par P. Sander. La reconstruction 3D à partir des couples de régions a été traitée par M. Peyret [25].

3.1 Segmentation Hiérarchique

Malgré les améliorations apportées à la segmentation par l'utilisation des contours, les mises en correspondance ne sont pas possibles pour toutes les régions de la paire stéréo pour la simple raison que les segmentations donnent des résultats differents pour les deux images :

localement, on peut obtenir un ensemble de régions pour une image et celles-ci peuvent être agglomérées dans l'autre image pour des raisons de différence de géométrie, de calibration et de nature des deux caméras...

Pour pouvoir compenser ce type de défaut, nous avons créé et stocké, pour chaque image, un arbre des segmentations à différentes echelles.

Cet arbre fournit, pour une suite de critères de plus en plus lâches, une suite de segmentations emboitées, c'est à dire que chaque région à un niveau donné est l'union de régions du niveau inférieur.

Les deux images sont segmentées indépendamment en une hiérarchie de régions candidates pour la segmentation finale. L'algorithme de segmentation, initialisé par une méthode de regroupement par *quadtree* ([26]), est du type "croissance de régions". Si R est la réunion de régions adjacentes (4 pour le quadtree) la fusion a lieu dès que le critère d'agglomération est satisfait:

$$Max(R) - Min(R) < \epsilon$$

Pour éviter de commencer l'algorithme de segmentation au niveau du *pixel*, le *quadtree* permet de réduire sensiblement le nombre de régions initiales en regroupant de manière itérative des blocs carrés de quatre régions carrées ou *pixels*. L'information "contour" est déjà incorporée à ce niveau.

Ensuite, nous utilisons les régions issues du *quadtree* pour construire par regroupements successifs les différents niveaux de segmentation. Chaque niveau est obtenu en relachant un peu plus la valeur du critère que doit vérifier chaque paire de régions adjacentes candidates au regroupement. La structure permet de retrouver facilement l'historique de la création d'une région, ainsi que ses caractéristiques et les régions voisines.

Le critère "MinMax" est utilisé au moins pour la construction du *quadtree* mais aux étapes suivantes on choisit aussi un critère de moyenne. C'est à dire que 2 régions R_1 et R_2 se fusionnent dès que

$$|Moyenne(R_1) - Moyenne(R_2)| < \epsilon \tag{14}$$

Ce critère peut trouver une justification en considérant la recherche d'une segmentation d'énergie minimale dans l'esprit de [27, 28] comme décrit dans [10]:

$$E(u, B) = \int_{R^2} \|u - g\|^2 + CN(B) \tag{15}$$

où $N(B)$ est le nombre de régions définies par B. Ce critère correspond à la minimisation de l'erreur en ayant le moins de régions possible. Le critère de fusion pour obtenir une déscente d'énergie devient:

$$(m_1 - m_2)^2 \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} < C. \tag{16}$$

Ce dernier critère est assez proche de l'équation (14).

Utilisation des contours

La recherche des contours permet de détecter les changements d'intensité, qui correspondent aux limites des régions que nous recherchons dans chaque image. Les trois conditions suivantes : réponse unique à un contour, bonne localisation et faible probabilité de non détection sont vérifiées par le détecteur de contours de Canny. Nous utilisons les contours comme des barrières pour empêcher les mauvais regroupements de régions : des régions adjacentes ne peuvent être regroupées si leur union est traversée par un contour.

L'algorithme de segmentation a été modifié de manière à traiter séparément les régions ne contenant pas de contours et les régions-contours (qui ne contiennent que des points de contours) et ces dernières sont attribuées à telle ou telle région uniquement en fin de manipulation.

La couleur

Comme la couleur permet à l'œil de mieux segmenter les images, nous avons généralisé la technique au cas des images couleur. Pour ce faire, nous avons utilisé les trois composantes R.V.B. de l'image uniquement dans la phase d'initialisation de l'algorithme. L'algorithme évolue donc ensuite de la même manière que dans le cas noir et blanc.

3.2 La mise en correspondance

La mise en correspondance est basée sur la structure du graphe. Contrairement à la segmentation, on commence par chercher des correspondances pour les régions du dernier niveau stocké (les régions à l'echelle la plus grossière). Pour chaque région gauche du niveau courant, on cherche dans l'ensemble des régions droites les correspondantes admissibles. Par admissibles, on entend l'ensemble des régions qui ont des caractéristiques voisines, par exemple la taille, la géométrie ou la position (distance du centre de gravité à la ligne épipolaire). On sélectionne ensuite celle qui minimise un critère pondéré entre les différentes caractéristiques. Puis on effectue les correspondances dans l'ordre croissant de leur coût. Pour passer au niveau inférieur on enlève de la liste des régions à traiter celles qui ont une correspondante et on ajoute les régions "filles" (du niveau inférieur) de celles qui restent dans la liste etc.

Lorsque toutes les correspondances possibles sont effectuées, on construit les segmentations finales des images gauche et droite.

4 Modèles déformables

Depuis 1989, je travaille sur les applications des méthodes variationnelles ou d'autres méthodes de l'analyse fonctionnelle et des EDP au traitement d'images. Cela est particulierement utile pour l'extraction ou la reconstruction d'objets déformables dans des images médicales 2D ou 3D. Nous avons été pionniers dans ce domaine où maintenant tous les centres de recherche traitant des images médicales développent ce type d'approches.

4.1 Reconstruction avec Régularisation

Nos travaux traitent de l'utilisation des modèles déformables et modèles paramétriques pour le traitement d'images en particulier pour le problème de segmentation et reconstruction avec régularisation. Le problème général de la reconstruction d'une courbe ou surface v à partir de données u présegmentées se formalise par la minimisation par rapport à v de:

$$E(v,u) = \int R(v(s))ds + \int V(v(s),u(s))ds \tag{17}$$

où

- $R(v)$ mesure le lissage de la reconstruction v (courbe ou surface). On impose la régularité de v
  - soit à travers le terme $R(v)$ composé alors de dérivées de v dans le cas de courbe ou surface libre, il s'agit des modèles déformables les plus généraux;
  - soit en restreignant v à un ensemble de forme d'un certain type, $R(v)$ est alors vide, c'est le cas de modèles paramétriques (Bsplines, superquadriques, hyperquadriques,...).
- V mesure la fidélité de v à la donnée u. Il peut être
  - explicite: $\int V(v,u) = \int \|v(s) - u(s)\|^2$
  - implicite: $\int V(v,u) = \int P_u(v)$ où P_u est un Potentiel d'attraction.

Cette formulation s'applique à de nombreux domaines du traitement d'images incluant extraction de contours, segmentation, amélioration, restoration et mise en correspondance de signaux [29, 30, 31, 28, 32, 33, 34, 35, 36, 37].

Modèles de Contours Actifs ou Snakes

Dans le cas des courbes planes, on recherche une courbe $v(s) = (x(s), y(s))$ minimisant l'énergie:

$$v \mapsto E(v) = \int_\Omega w_1\|v'(s)\|^2 + w_2\|v''(s)\|^2 + P(v(s))ds \tag{18}$$

Cette énergie modélise des propriétés mécaniques intermédiaires entre un élastique (premier ordre) et une poutre (second ordre).

Partant d'une estimation initiale, on résoud alors l'équation d'évolution de type parabolique avec des conditions aux bords fixes ou périodiques:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial s}(w_1 \frac{\partial v}{\partial s}) + \frac{\partial^2}{\partial s^2}(w_2 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}) = F(v) \tag{19}$$

où $F = -\nabla P$, est la force d'attraction vers les contours. Cette équation revient à effectuer une descente d'énergie pour converger vers un minimum de (18).

Surfaces minimisantes

Pour une surface déformable, l'énergie à minimiser est de la forme:

$$E(v) = \int_\Omega w_{10} \left\| \frac{\partial v}{\partial r} \right\|^2 + w_{01} \left\| \frac{\partial v}{\partial s} \right\|^2 + w_{20} \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right\|^2 + w_{02} \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \right\|^2 + 2w_{11} \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial s} \right\|^2 dx + \int_\Omega P(v)dx \tag{20}$$

Dans ce cas, on modélise une surface intermédiaire entre une membrane elastique (premier ordre, par exemple du plastique transparent alimentaire) et une plaque mince (second ordre, par exemple transparents pour projection, régle plate).

L'équation aux dérivées partielles à résoudre s'écrit:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r}(w_{10} \frac{\partial v}{\partial r}) - \frac{\partial}{\partial s}(w_{01} \frac{\partial v}{\partial s}) + \frac{\partial^2}{\partial r^2}(w_{20} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}) + \frac{\partial^2}{\partial s^2}(w_{02} \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}) + 2\frac{\partial^2}{\partial r \partial s}(w_{11} \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial s}) = F(v) \tag{21}$$

Résolution

L'existence de solutions régulières aux équations (19) et (21) pour une donnée initiale $v_{t=0} = v_0$ est assurée car, quitte à lisser le potentiel P, la non linéarité F est définie sur un domaine borné et elle est Lipschitzienne (voir section 1.1). On résoud numériquement l'équation par différences finis ou élements finis. On peut dans tous les cas écrire une itération en temps sous la forme d'un système:

$$(Id + \tau A)v^t = (v^{t-1} + \tau F(v^{t-1})) \tag{22}$$

où v^t represente le vecteur des inconnues (noeuds ou degrés de liberté) de la courbe ou surface à l'itération t.

4.2 Modèles déformables sur des images 2D ou 3D

voir références [38] à [46]

Ma recherche s'est surtout portée sur l'utilisation des modèles déformables de contours actifs sur des images 2D ou 3D. Ces travaux ont débuté lorsque j'étais à plein temps au Projet EPIDAURE d'imagerie médicale à l'INRIA puis ont continué lorsque je suis entré au CEREMADE et en collaboration avec l'INRIA où j'ai dirigé la thèse d'Isaac Cohen (soutenue en 1992) sur ce sujet.

Nous avons introduit un nouveau modèle de contours actifs, qui améliore de manière importante la détection de contours fermés. Cette recherche fait partie d'un vaste projet visant à l'interprétation automatique d'images médicales 2D ou 3D, IRM, échographie ou autre, décrit dans [39, 13, 47].

L'utilisation des modèles déformables pour extraire des caractéristiques dans les images a été introduite par Kass, Witkin et Terzopoulos en 1987 [33, 48, 49, 50], sous le nom de "snakes" (serpents) ou courbes minimisantes. Le problème est d'extraire des formes régulières d'objets apparaissant dans des images 2D (courbes) ou 3D (surfaces).
Pour cela, on minimise une énergie comportant d'une part des termes régularisants et d'autre part un Potentiel d'attraction définissant des contraintes de manière implicite. On recherche alors un compromis entre régularité et localisation du contour. On doit résoudre simultanément segmentation et reconstruction:

(1) localiser les "edgels" appartenant à la frontière d'un même objet.

(2) Reconstruire, à partir d'un ensemble des "edgels" précédents, donnés dans un ordre connu, une courbe ou une surface régulière, et en déduire éventuellement ses caractéristiques différentielles pour une interprétation ultérieure ([45]).

Dans les méthodes de reconstruction classiques, l'étape (2) est effectuée après l'extraction de données (étape (1)) par minimisation d'une énergie comportant des contraintes explicites. La méthode des "snakes" définit ces contraintes de manière implicite et les deux étapes sont confondues.

Un modèle déformable est définit comme la donnée d'un espace de déformations admissibles et d'une fonctionnelle à minimiser. On exprime dans l'énergie à minimiser à la fois les propriétés de régularisation et, par la définition d'un potentiel, les propriétés de localisation désirées.

Dans notre travail, on modifie cette dernière approche en y ajoutant un aspect de la première. En effet, on définit un potentiel d'attraction à partir d'une extraction préalable de contours comme une fonction de la distance au contour le plus proche.

Ayant en vue des applications pour des images médicales 3D, l'introduction de nouveaux modèles de contours actifs a progressé en plusieurs phases, augmentant en complexité:

1. Modéle de courbe ballon sur une image 2D [40]. (voir figure 3)
2. Reconstruction 3D à partir d'une suite de problèmes 2D [40, 41] (voir figure 4).
3. Modèle 3D simplifié [44, 43] (voir figures 6 et 7).
4. Modèle général de surfaces minimisantes 3D utilisant une méthode d'éléments finis (voir figures 9 et 10) suivi d'une extraction des caractéristiques différentielles en vue de mise en correspondance [45, 44].

Ces modèles ont été utilisés pour la segmentation automatique d'images bruitées 2D ou 3D IRM ou d'échographie de la région du cœur ou de la tête. (voir figures 3 et 9).

Dans ces modèles de contours actifs, des modifications sont introduites pour résoudre certains des problèmes rencontrés avec la méthode originale des "snakes". Les nouvelles caractéristiques suivantes ont été ajoutées:

1. Les forces extérieures sont modifiées et **normalisées** pour donner des résultats plus stables [40].

2. La courbe ou surface se comporte comme un **ballon** qui est gonflé. Cela évite à la courbe de rester bloquée par des points isolés erronés et rend le résultat beaucoup moins sensible à la donnée initiale [40]. On définit de même en 3D une force de "poids".

3. On remplace la Méthode des Différences Finies par la Méthode des **Eléments Finis** [41] obtenant des résultats plus stables et nécessitant moins de noeuds.

4. On définit un **Potentiel d'attraction** prenant en compte des points de contour extraits au préalable par un détecteur local. Le potentiel est obtenu soit par convolution de l'image binaire avec un noyau Gaussien, soit comme un fonction de la distance au contour le plus proche [40, 44] (voir figure 5).

5. Le modèle de courbe 2D est généralisé à une **surface déformable** pour la détection des contours d'objets dans une image 3D ([45, 44]). Les modifications précédentes sont intégrées aux autres modèles et le problème est résolu en utilisant des éléments finis de Bogner-Fox-Schmidt.

D'autres travaux ont été effectués sur ce sujet dont les suivants:

- Comportement des contours actifs aux points anguleux [51]
- Accélération des méthodes de contours actifs par utilisation de méthodes multirésolution [52].
- Etude des différentes définitions du Potentiel d'attraction [53].

4.3 Formalisme général des Modèles Déformables

Ces méthodes ont été développées par l'équipe de Andrew WITKIN, se basant notamment sur les travaux de Demetri TERZOPOULOS ([48, 50, 34]).

Le modèle général de déformation est une application

$$v(x) = (v_1(x), ..., v_d(x)) \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^p \quad , \quad v(x) \in \mathbb{R}^d$$

où

- p est la dimension de la variété,
- d est le nombre de degrés de liberté.
- n est la dimension de l'espace image.

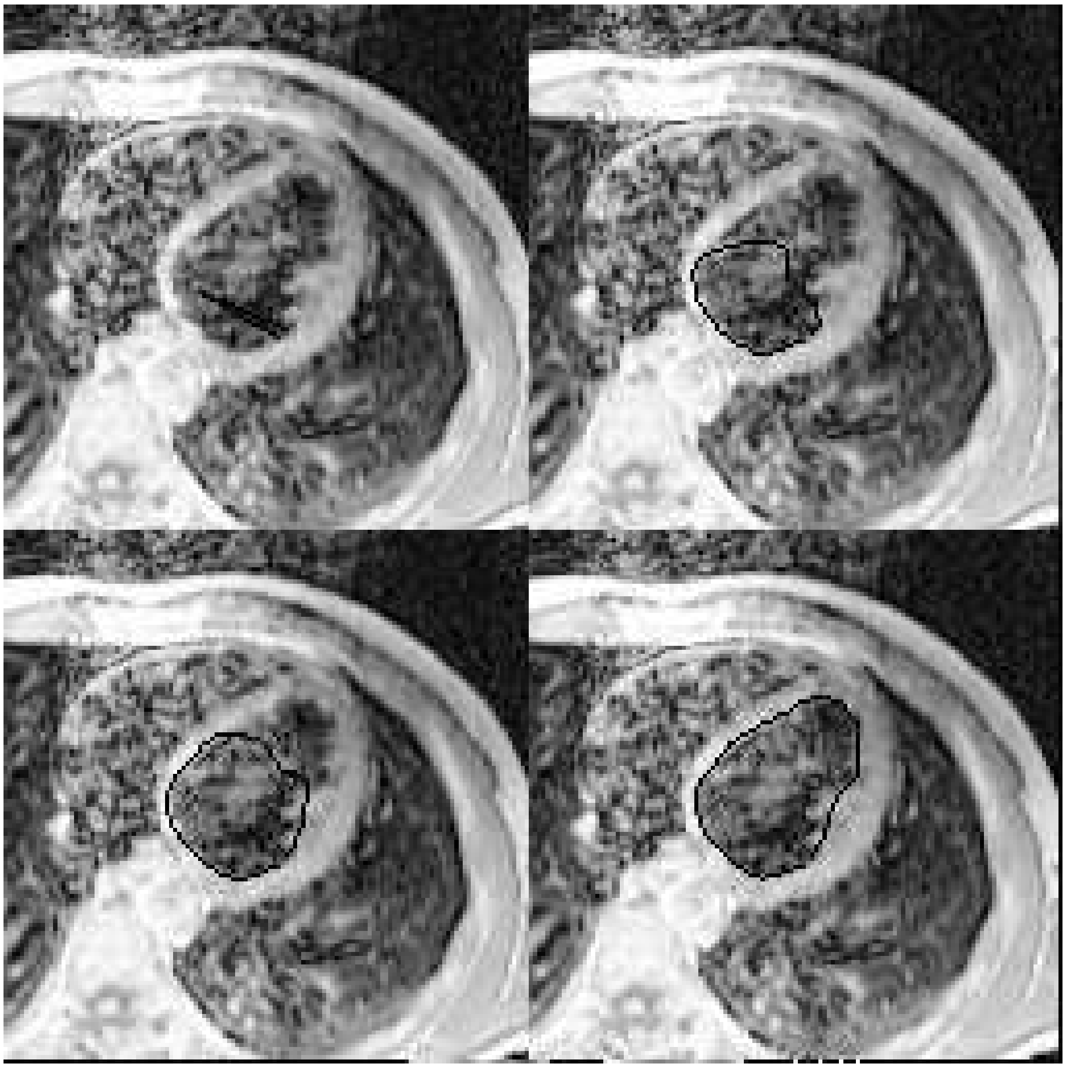


Figure 3 : Image de Résonnance Magnétique dans la région du coeur. Evolution de la courbe ballon pour détecter le ventricule gauche (extrait de [40]).

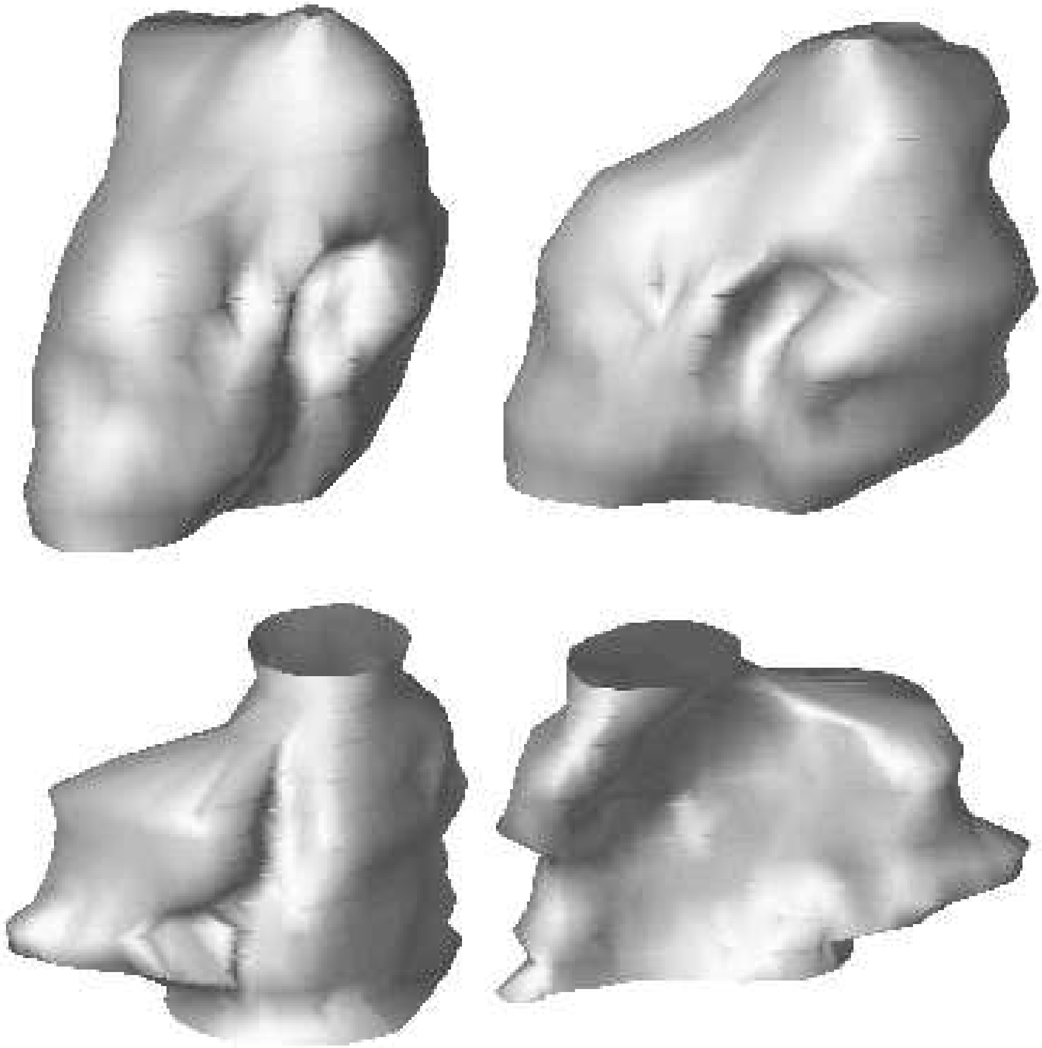


Figure 4 : Deux vues de la reconstruction 3D de la cavité intérieure des ventricules gauche et droit (extrait de [40]).

Exemple: pour les contours $p = 1, d = 2, n = 2,\ s \mapsto (x(s), y(s))$

On définit un modèle déformable d'ordre $q > 0$ comme la donnée d'un espace de déformations admissibles Ad et d'une fonctionnelle E à minimiser représentant une énergie de la forme :

$$E : Ad \rightarrow I\!R$$
$$v \mapsto E(v) = \sum_{m=0}^{q} \sum_{|j|=m} \frac{m!}{j_1! \ldots j_p!} \int_\Omega w_j(x) \left\| \frac{\partial^m v}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_p^{j_p}} \right\|^2 dx + \int_\Omega P(v(x))dx$$

où P est le potentiel associé aux forces extérieures. Il est calculé en fonction des données de l'image, suivant le but recherché. Pour être attiré par les points de contours, on prendra $P(v) = -\|\nabla I(v)\|^2$.

Cela s'applique à la recherche de bons contours sur une image. On "place" la courbe à coté du but recherché et l'action des forces dérivées de l'image la placera jusqu'au bout du chemin. La position recherchée correspond à l'équilibre atteint au minimum de son énergie.

Cette méthode a été appliquée dans [33] au suivi de contours dans une suite d'images en mouvement et à la stéréo. Dans ce dernier cas, on a deux images $I_1(x, y)$ et $I_2(x, y)$ et on recherche la déformation de la première image pour l'appliquer sur la deuxième.

Un modèle de surface de pseudo-révolution a aussi été utilisé pour reconstruire une forme 3D à partir d'une simple image 2D, en supposant que l'objet recherché dans l'image possède approximativement une symétrie de révolution (voir [50]).

4.4 Le Modèle de Ballon

voir références [38, 40]

Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés, pour la recherche de contours, au cas d'une courbe plane:

$$\Omega = [0, 1] \rightarrow I\!R^2$$
$$s \mapsto v(s) = (x(s), y(s))$$

Et nous voulons minimiser l'énergie E:

$$E : Ad \rightarrow I\!R$$
$$v \mapsto E(v) = \int_\Omega w_1\|v'(s)\|^2 + w_2\|v''(s)\|^2 + P(v(s))ds$$

Un minimum vérifie les équations d'Euler:

$$\left\{ \begin{array}{l} -(w_1 v')' + (w_2 v'')'' + \nabla P(v) = 0 \\ v(0), v'(0), v(1) \text{ et } v'(1) \text{ donnés.} \end{array} \right. \tag{23}$$

La courbe se trouve ainsi soumise d'une part à des forces intérieures imposant une certaine régularité, et d'autre part à une force extérieure d'attraction vers les points de fort gradient.

Cette équation peut avoir plusieurs solutions. En effet, l'énergie pouvant avoir plusieurs minima locaux, on en recherche un qui soit localisé dans une région donnée et on suppose posséder une valeur approchée de la solution v^0.

On résoud alors cette équation en y ajoutant un terme d'évolution $\frac{\partial v}{\partial t}$ pour former (19).
On a résolu cette équation d'abord par différences finies puis par éléments finis.

Méthode des Différences finies (MDF)

Ayant discrétisé la courbe avec un pas h du paramètre s, on remplace les dérivées de (23) par des différences finies et on obtient le système suivant:

$$\frac{1}{h}(a_i(v_i - v_{i-1}) - a_{i+1}(v_{i+1} - v_i)) +$$
$$\frac{b_{i-1}}{h^2}(v_{i-2} - 2v_{i-1} + v_i) - 2\frac{b_i}{h^2}(v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}) + \frac{b_{i+1}}{h^2}(v_{i+2} - 2v_{i+1} + v_i) -$$
$$(F_1(v_i), F_2(v_i)) = 0$$

où on a posé $v_i = v(ih); a_i = \frac{w_1(ih)}{h}; b_i = \frac{w_2(ih)}{h^2}$.
Ce système peut s'écrire

$$AV = F$$

où A est une matrice pentadiagonale et V et F représentent les vecteurs de positions v_i et forces $F(v_i)$ en ces points. (V et F sont des matrices à 2 colonnes, la première pour les composantes en x et la seconde pour y).

Le terme d'évolution est aussi remplacé par une différence finie de pas de temps τ.

A chaque itération en temps, On doit alors résoudre le système:

$$(Id + \tau A)v^t = (v^{t-1} + \tau F(v^{t-1})) \tag{24}$$

Cette formulation discrète rend le problème similaire à un ensemble de masses reliées par des ressorts de longueur nulle. Sans force extérieure, la courbe s'écrase sur elle-même. Serge Maitrejean, physicien à Schlumberger, m'a rapporté que c'est la démarche inverse qui a eu lieu historiquement en réalité du point de vue des physiciens. C'est une modélisation des phonons du type ressort par chaine d'oscillateurs harmoniques couplés qui a conduit à la formulation de l'équation de la chaleur [54] en physique des solides (Loi de Fick).

Modification des forces

Dans (24), tout se passe comme si on ajoute d'abord à v^{t-1} une force $\tau F(v^{t-1})$, puis on inverse $(Id + \tau A)$. Cette dernière opération correspond à un noyau de régularisation.

Le choix du pas de temps τ est déterminant pour l'évolution de la courbe. S'il est trop petit, cela évolue trop lentement, s'il est trop grand, la force τF risque de passer par dessus le contour et de s'en éloigner. De plus, un τ donné sera trop petit pour certains points et trop grand pour d'autres. Les auteurs de [33], faisaient varier ce pas de temps de manière interactive à l'aide d'un potentiomètre. D'autres auteurs ont aussi abordé ce problème différemment (voir [55, 56]).

Dans [40], on modifie la force F en la normalisant. Cela permet, en quelque sorte d'avancer avec un pas de temps défini localement en fonction du point de la courbe. De plus, on évalue F en chaque point par interpolation linéaire à partir des valeurs connues seulement sur un ensemble discret pour permettre à la courbe de se stabiliser autour d'un équilibre. La force s'écrit donc $F = -k\frac{\nabla P}{\|\nabla P\|}$, où P est le potentiel $P(v) = -\|\nabla I(v)\|^2$.

Potentiel d'attraction P

Au lieu de prendre le potentiel $P(v) = -\|\nabla I(v)\|^2$ introduit dans le modèle original [33], il s'est avéré plus intéressant d'utiliser un potentiel d'attraction à un ensemble de points de contours déjà extraits au préalable. En effet, le gradient n'étant pas constant en général le long d'un contour, cela permet d'uniformiser les contours leur donnant un poids d'attraction égal le long de ce bord. Cela peut éviter une concentration de noeuds en certains points de fort gradient et permet d'obtenir de meilleurs résultats. Par ailleurs, cette image de contours est en général disponible en même temps que l'image originale. De plus cela permet aussi de résoudre le problème dans le cas où la donnée est une image binaire de contours. Pour cela deux approches ont été utilisées:

- Convolution avec une Gaussienne ou
- Fonction de la distance de Chanfrein aux contours.

  $$P(v) = g(d(v))$$

  où $d(v)$ est la distance entre un point v et le contour le plus proche. La distance de Chanfrein, une bonne approximation de cette carte de distance, peut être obtenue rapidement par un passage de filtres simples [57, 58]. g fonction croissante. Par exemple, $P(v) = -e^{-d(v)^2}$.

On montre dans la figure 5 un exemple de carte de distance. On peut donner à ces différents potentiels une interprétation en termes de forces de tension de ressorts de longueur nulle au repos liés entre des points de la courbe et des points de données [44]. Remarquons que lorsqu'une fonction de la distance est utilisée, la force n'est plus normalisée, car c'est la fonction f qui définit la norme de la force $F = -\nabla P$.

Force d'expansion

Pour converger vers la solution, on doit fournir manuellement une courbe initiale assez proche de la solution. Un mauvais choix de la valeur initiale peut conduire à une solution éloignée de celle désirée.

En effet:

- Un “serpent” qui n'est pas suffisamment proche d'un contour n'est pas attiré par lui.
- Le modèle original des “serpents”, lorsqu'il n'est soumis à aucune force extérieure trouve l'équilibre en se réduisant, soit à un point, soit à un segment de droite, suivant les paramètres et conditions aux limites.

Ces remarques suggérent d'ajouter à notre modèle de Contour Actif une force de gonflage qui permet au modèle de bien se comporter dans ces cas [40].
La force devient alors:

$$F(v(s)) = k_1\vec{n}(s) - k\frac{\nabla P}{\|\nabla P\|}(v(s)) \tag{25}$$

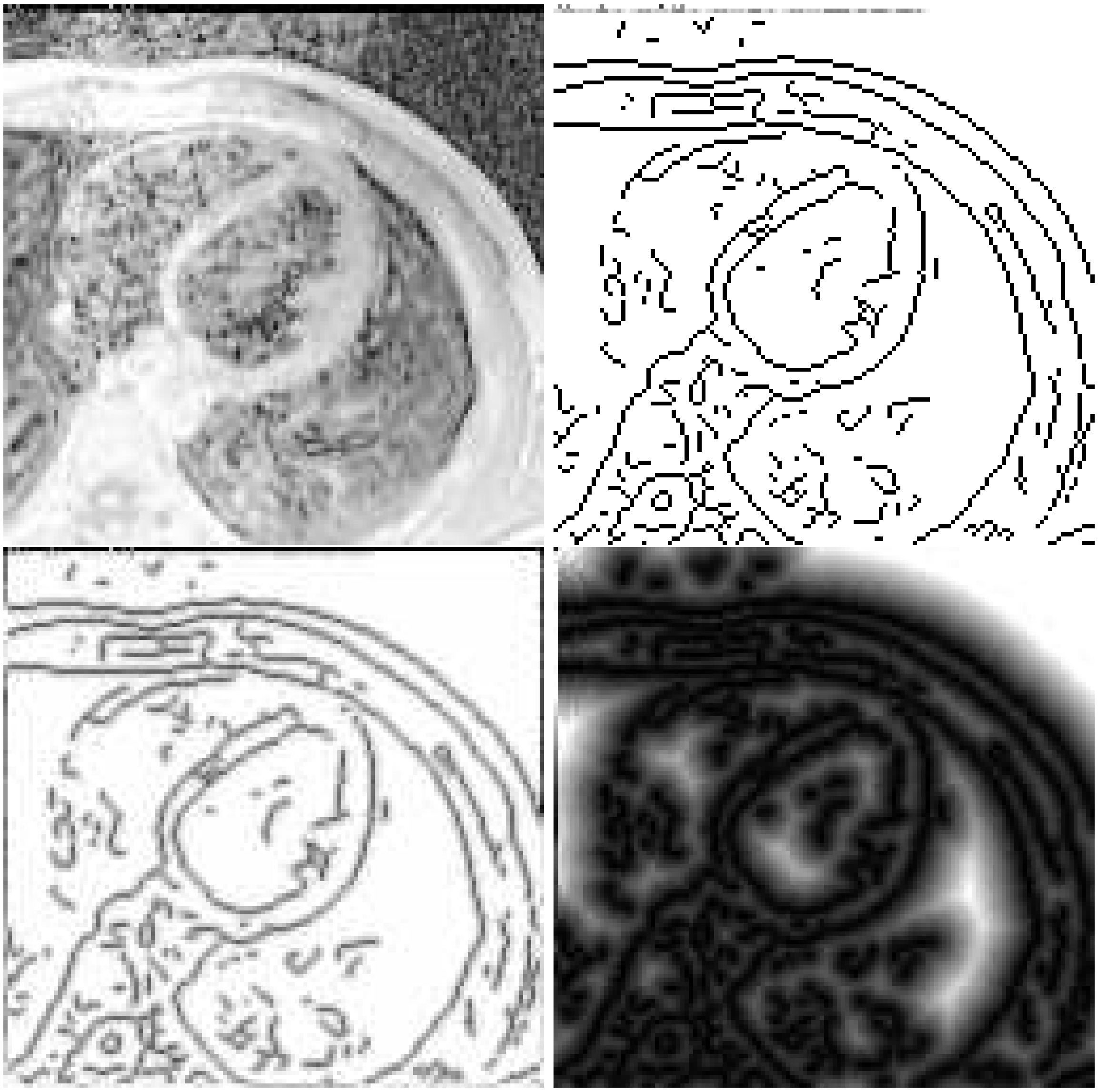


Figure 5 : Image IRM du coeur: En haut à gauche, image originale; en haut à droite image de contours; en bas à gauche convolution de l'image de contours; en bas à droite carte de distance aux contours.

où $\vec{n}(s)$ est le vecteur normal unitaire à la courbe au point $v(s)$.

La courbe se comporte comme un ballon qui est gonflé. Lorsqu'elle passe par des points de contour, elle est arrêtée si le contour est assez fort, ou passe par dessus s'il est trop faible par rapport à la force de gonflage. Cela évite à la courbe de rester bloquée par des points isolés erronés et rend le résultat beaucoup moins sensible à la donnée initiale. Cette idée m'est venu lors d'une discussion avec David Lasry (ISI) qui travaille sur la simulation du déclenchement de gonflage d'*airbag* de voiture lors d'accidents.

En se gonflant, la longueur de la courbe $v(s)$ augmente et la discrétisation de $v(s)$ devient insuffisante. En conséquence, on normalise réguliérement cette discrétisation quand la longueur varie trop.

Remarquons que cette force est le gradient dérivant d'un terme d'énergie interne surfacique:

$$E_{area} = -k_1 \int dA \tag{26}$$

mesurant l'aire à l'intérieur de la région délimitée par la courbe. La minimisation d'énergie correspond à avoir une région aussi grande que possible. Cela est obtenu par une force de pression poussant vers l'extérieur dans la direction normale.

De nombreuses études ont été faites récemment sur l'évolution des courbe planes soumises à une force d'expansion dans la direction normale à la courbe dans un cadre purement mathématique [59, 60, 61, 62, 63] puis dans de nombreuses applications au traitement d'images [64, 18, 65, 66, 67, 68, 69]. Remarquons aussi la similarité entre la définition de la déformation de type annuaire (13) et l'évolution d'une courbe plane soumise à une force d'expansion ($k = 0$ dans (25)), ainsi qu'une dilatation en morphologie mathématique.

L'évolution des courbes comme lignes de niveau d'une surface a permis la définition d'un modèle géométrique de contours actifs [66, 67, 68, 70] qui peut changer naturellement de topologie. D'autres modèles permettent aussi à la courbe ou surface de changer de topologie [71, 72, 73, 74, 75].

L'étude de l'évolution d'une forme par une équation soumise à des invariants [18] ou l'apparition de chocs dans d'autres cas (Espace Réaction-diffusion) [65, 76, 77] permet la caractérisation d'une forme.

4.5 Méthode des Eléments finis (MEF)

voir références [41, 44]

On a résolu ensuite l'équation (23) par éléments finis.

Cela donne des résultats plus stables et la paramétrisation nécessite moins de points. En effet, on déforme vraiment une courbe alors que, dans le cas des différences finies, tout se passe comme si on ne déformait qu'un réseau de points sans voir l'information entre deux points.

On conserve la force F avec les modifications des sections précédentes.

L'équation (23) est d'abord transformée en un problème variationnel équivalent:

Trouver $v \in H_0^2(\Omega)$ tel que

$$a(v, \varphi) = L(\varphi) \quad \forall \varphi \in H_0^2(\Omega) \tag{27}$$

où L représente le second terme de l'équation (23) et la forme bilinéaire $a(\varphi, \psi)$ représente les termes dérivés.

Puis on approche la solution en résolvant le problème variationnel approché dans un espace de dimension finie. C'est le principe de la méthode des éléments finis. Une bonne description se trouve dans [78].

En remplaçant l'espace de Sobolev $H_0^2(\Omega)$ par un espace V_h de fonctions polynomiales par morceaux, Le problème variationnel se transforme alors en système linéaire:

$$AV = L$$

On doit inverser alors une matrice A symétrique définie positive heptadiagonale.

Les fonctions de bases de l'espace V_h ainsi que la résolution du système sont détaillées dans l'appendice de la section *[4]* du dossier de publications.

Une fois posé le problème pour l'équation statique, on conserve un schéma itératif pour résoudre (19), similaire à celui des différences finies, en remplaçant la dérivée en temps par une différence finie de pas τ:

$$(Id + \tau A)V^t = V^{t-1} + \tau L_{V^{t-1}} \tag{28}$$

Remarquons que cette formulation revient à considérer la minimisation de l'énergie uniquement sur un espace de fonctions splines. Cela signifie que les paramètres à définir sont réduits aux degrés de liberté aux sommets de la décomposition en éléments finis au lieu du nombre total de noeuds dans le cas des différences finies. La complexité du problème est donc réduite de manière significative si la décomposition en élements finis est suffisamment espacée, tout en résolvant le problème avec une surface connue de manière analytique sur chaque élément.

L'introduction des B-Snakes [79] est assez proche de l'approche éléments finis dans l'esprit de réduire la minimisation à un espace de dimension finie. Cependant, la minimisation ne porte que sur l'énergie image sur des fonctions B-splines cubiques, compte tenu du fait que ces fonctions minimisent elles mêmes l'énergie de régularisation [47, 80]. Une autre définition des B-Snakes [81, 82] conservant le terme de lissage est en fait équivalente à notre formulation par éléments finis à la base de fonctions près.

4.6 Modèle 3D

voir références [44, 45, 43]

Avant de généraliser les travaux précédents au 3D ([44]), un modèle simplifié a été utilisé pour se donner une première idée du travail en 3D. Le principal obstacle au passage 3D est la multiplication importante du temps de calcul par la taille du système d'équations à résoudre. On a donc réduit le plus possible les calculs pour définir un modèle de surface en 3D.

Reconstruction 3D à partir de coupes

Une première approche de la reconstruction 3D a été donnée comme suite directe au travail 2D (voir figure 4). Une image 3D est considérée comme suite de plans images 2D. Sur chaque coupe, on applique la méthode 2D. Il est possible de résoudre chaque problème directement avec une petite donnée initiale qui se gonfle pour chaque coupe. Mais il vaut mieux utiliser “un ballon” pour une coupe, puis propager le résultat en prenant comme donnée initiale le résultat de la coupe précédente. En supposant que la variation d'une coupe à l'autre est assez faible, cela va bien plus vite. C'est le cas en général bien que dans l'exemple donné, il a fallu pour certaines coupes réinitialiser la courbe à cause d'une discontinuité. Une fois la suite de coupes traitées, on reconstitue la surface 3D par interpolation. Pour la figure ci-dessus, le logiciel NUAGES a été utilisé pour le rendu 3D à partir de coupes planes (voir [39]) Bien que dans notre exemple, cette méthode marche très bien, elle a deux défauts:

- Il n'y a pas d'interaction entre les coupes.
- La surface doit être cylindrique.

Modèles déformables 3D

La généralisation au 3D des modèles déformables signifie que l'on recherche la minimisation de l'énergie ci-dessus (section 4.3) définie sur les surfaces paramétrées $v(r,s) = (v_1(r,s), v_2(r,s), v_3(r,s))$. C'est à dire $p = 2, d = 2, n = 3$.

L'énergie à minimiser est de la forme:

$$\begin{aligned} E(v) &= \textstyle\sum_{m=1}^{2} \sum_{|j|=m} \frac{m!}{j_1! \ldots j_p!} \int_\Omega w_j(x) \left| \frac{\partial^m v}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_p^{j_p}} \right|^2 dx + \int_\Omega P(v(x)) dx \\ &= \textstyle\int_\Omega w_{10}(x) \left|\frac{\partial v}{\partial r}\right|^2 + w_{01}(x) \left|\frac{\partial v}{\partial s}\right|^2 + \\ & \quad w_{20}(x) \left|\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\right|^2 + w_{02}(x) \left|\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right|^2 + 2 w_{11}(x) \left|\frac{\partial^2 v}{\partial r \partial s}\right|^2 dx \\ & \quad + \textstyle\int_\Omega P(v(x)) dx \end{aligned} \tag{29}$$

Si v est un minimum de l'énergie, il vérifie l'équation aux dérivées partielles:

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial r}\left(w_{10}(x) \frac{\partial v}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial s}\left(w_{01}(x) \frac{\partial v}{\partial s}\right) + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(w_{20}(x) \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\right) \\ & + \frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(w_{02}(x) \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right) + 2 \frac{\partial^2}{\partial r \partial s}\left(w_{11}(x) \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial s}\right) = f_1(v) + f_2(v) \end{aligned} \tag{30}$$

De même qu'en 2D on recherche une solution de l'équation précédente comme limite en temps de l'équation d'évolution associée:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r}\left(w_{10}(x) \frac{\partial v}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial s}\left(w_{01}(x) \frac{\partial v}{\partial s}\right) + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(w_{20}(x) \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\right) \\ & + \frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(w_{02}(x) \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right) + 2 \frac{\partial^2}{\partial r \partial s}\left(w_{11}(x) \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial s}\right) = f_1(v) + f_2(v) \end{aligned} \tag{31}$$

En transformant les dérivées partielles en différences finies, on obtient comme en 2D une équation linéaire du type

$$\frac{V^t - V^{t-1}}{\tau} + A V^t = F(V^t)$$

où V est le vecteur formé des valeurs de v aux noeuds de la discrétisation.

Le schéma ci-dessus totalement implicite est difficile à résoudre dans la mesure où la force F n'a pas de forme connue. Dans le cas 2D, on résoud un schéma mixte explicite pour le second membre et implicite pour le premier (c'est le cas aussi bien pour les différences finies que pour les éléments finis).

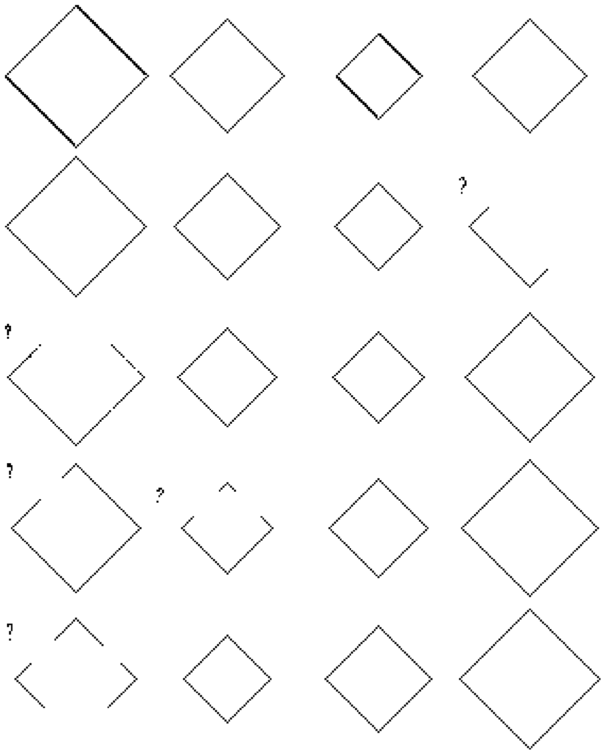


Figure 6 : contours d'un cône avec effacement de certaines parties. Les coupes marquées d'un "?" ont été modifiées. La suite des coupes se lit de haut en bas puis de gauche à droite. Le carré se retrécit puis reprend la même taille (extrait de [44]).

Modèle 3D Simpifié

Une étape intermédiaire, motivée par soucis de rapidité de l'algorithme consiste à limiter les degrés de liberté à 2 au lieu de 3 en imposant la troisième composante v_3 correspondant au niveau de la coupe et de résoudre les schémas complétement explicites.

La surface recherchée est donc représentée comme une série de courbes planes, le premier paramètre étant le numéro de la coupe. On a $v(r,s) = (v_1(r,s), v_2(r,s), r)$.

La différence essentielle avec l'approche par coupe successives réside dans l'interaction entre les coupes voisines et donc la possibilité de reconstituer un contour qui n'a pas été détecté dans une coupe à partir des contours des coupes voisines. L'étape de lissage peut être décomposée pour aller plus vite en un produit de 2 filtres passe-bas, chacun dans une direction, sans trop changer le résultat:

- Lissage intracoupe. Pour chaque coupe séparément, on opère le lissage correspondant à cette coupe dans $(Id - \tau A)$. Ce lissage est le même que pour le problème en 2D.

- Lissage intercoupe. On opère le lissage dans la direction orthogonale aux coupes. C'est essentiellement cette étape qui représente l'aspect 3D de la méthode.

On donne un exemple d'applications sur une image 3D synthétique simple dans les figures 6 et 7.

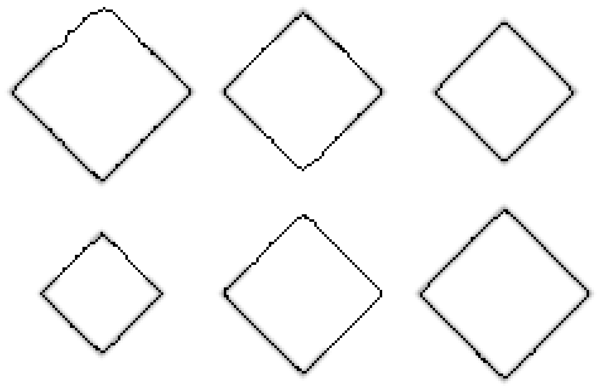


Figure 7 : Résultats pour le cône sur quelques coupes. Elles sont ordonnées de gauche à droite puis de haut en bas. Les 2 coupes de droite correspondent à des contours complets, les autres ont subi un effacement (extrait de [44]).

Modèle 3D par éléments finis

Pour plus de précision ou une complexité plus faible et pour des surfaces plus générales, nous avons résolu par éléments finis le Problème variationnel associé à l'équation (31) (voir [45, 44]):
Trouver $v \in L^2(0,T,H_0^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1(0,T,L^2(\Omega))$ tel que

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(v(t),\psi) + a(v(t),\psi) = L_v(\psi) \qquad \forall \psi \in H_0^2(\Omega) \\ v(0) = v_0(s,r) \\ w_{ij} \in L^\infty(\Omega) \ \text{ et } w_{ij}(s,r) \geq \alpha > 0 \end{cases} \tag{32}$$

où

$$a(u,v) \;=\; \int_\Omega w_{10}\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial v}{\partial s} + w_{01}\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial r} + w_{20}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + 2w_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial r}\frac{\partial^2 v}{\partial s\partial r} + w_{02}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\,dsdr$$

et

$$L_v(u) = \int_\Omega F(v)\,u\,dsdr$$

La discrétisation est faite séparément en temps et espace. La discrétisation du domaine Ω par éléments finis de Bogner-Fox-Schmit est définie par les propriétés suivantes:

- $\Omega = [0,1] \times [0,1] = \bigcup_{i,j=0}^{N_s-1,N_r-1} K_{i,j}$. pas réguliers h_s and h_r.
- Rectangle K defini par les sommets c_k $1 \leq k \leq 4$.
- $P_K = Q_3(K) = \left\{p, \;\; p(s,r) = \sum_{0\leq k,l\leq 3} \gamma_{kl} s^k r^l \right\}$
- degrés de liberté $\Sigma_K = \left\{p(c_k),\; \frac{\partial p(c_k)}{\partial s},\; \frac{\partial p(c_k)}{\partial r},\; \frac{\partial^2 p(c_k)}{\partial s \partial r} \quad 1 \leq k \leq 4\right\}$.

On résoud donc le problème variationnel dans l'espace de dimension finie:

$$V_h = \left\{ v \in \mathcal{C}^1(\Omega), \quad v_{|K_{ij}} \in Q_3(K_{ij}) \right\}$$

$$v_h = \sum_{i,j=1}^{N_s,N_r} v_h(a_{ij})\varphi_{ij} + \frac{\partial v_h}{\partial s}(a_{ij})\psi_{ij} + \frac{\partial v_h}{\partial r}(a_{ij})\eta_{ij} + \frac{\partial^2 v_h}{\partial s \partial r}(a_{ij})\zeta_{ij}$$

Après avoir discrétisé le problème en espace, on discrétise l'équation d'évolution par différences finies en temps:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{V^t - V^{t-1}}{\tau} + A \cdot V^t = L_{V^{t-1}} \\ V^0 = v_0 \text{ donnée initiale .} \end{array} \right. \tag{33}$$

où $A = (\tilde{A}_{ij})_{ij=0,\dots,Ns-1,Nr-1}$ est symétrique, positive et tridiagonale par blocs. $\tilde{A}_{ij}$ est un bloc 4×4.

On obtient donc le même type de système que pour la méthode des différences finies avec cependant des matrices et inconnues différentes (équation 24):

$$(Id + \tau A) \cdot V^t = V^{t-1} + \tau L_{V^{t-1}}$$

Nous montrons en figures 9 à 11 un exemple d'évolution de la surface déformable où une force supplémentaire de gravité a été ajoutée pour donner un mouvement plus rapide vers les données de manière analogue à la force d'expansion du ballon.

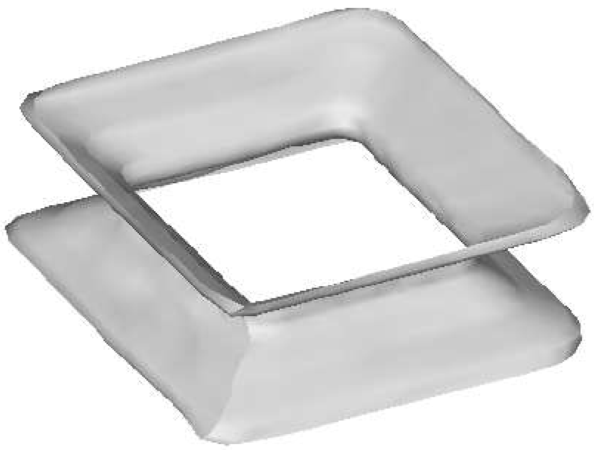


Figure 8 : Representation de la surface 3D reconstruite avec les données de Fig. 6 (extrait de [44]).

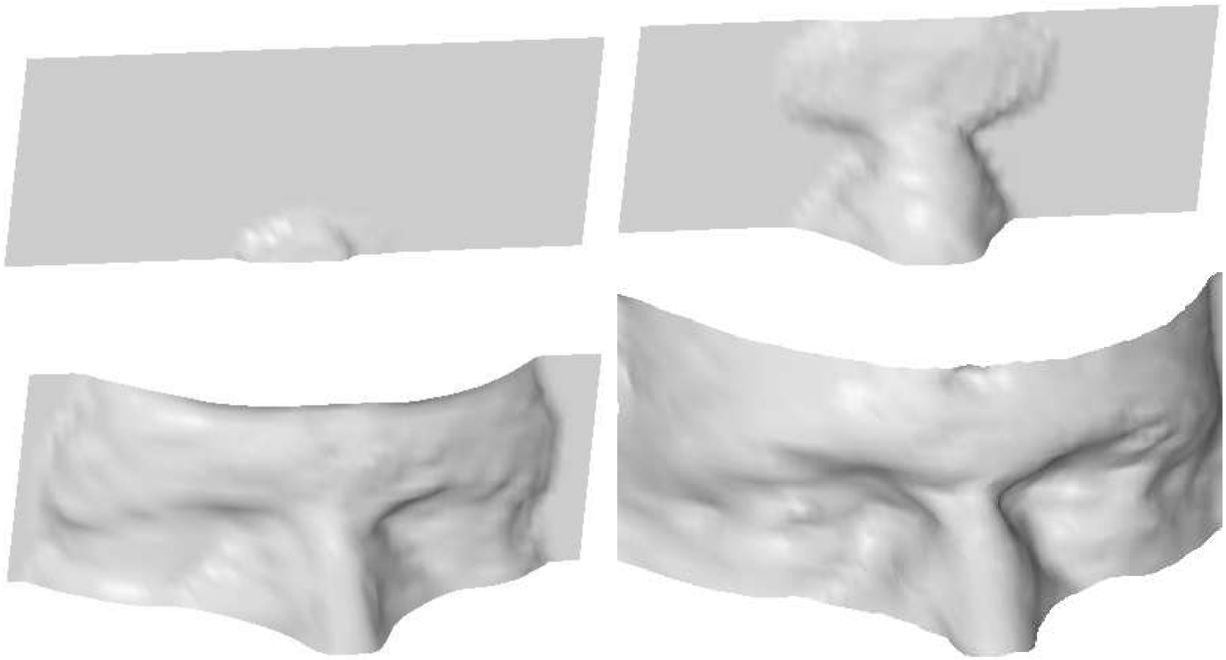


Figure 9 : Illustration de la convergence de l'algorithme 3D vers un minimum de l'énergie. La condition initiale donnée est une surface plane (extrait de [44]).

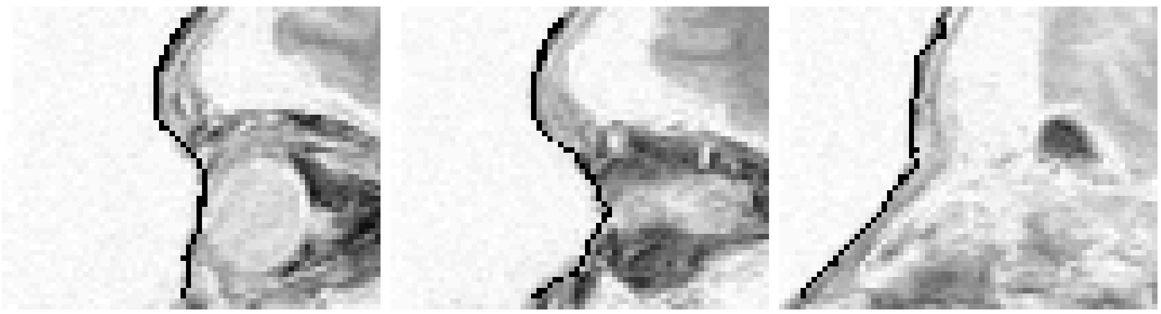


Figure 10 : Superposition de quelques coupes verticales avec l'intersection de la surface finale (extrait de [44]).

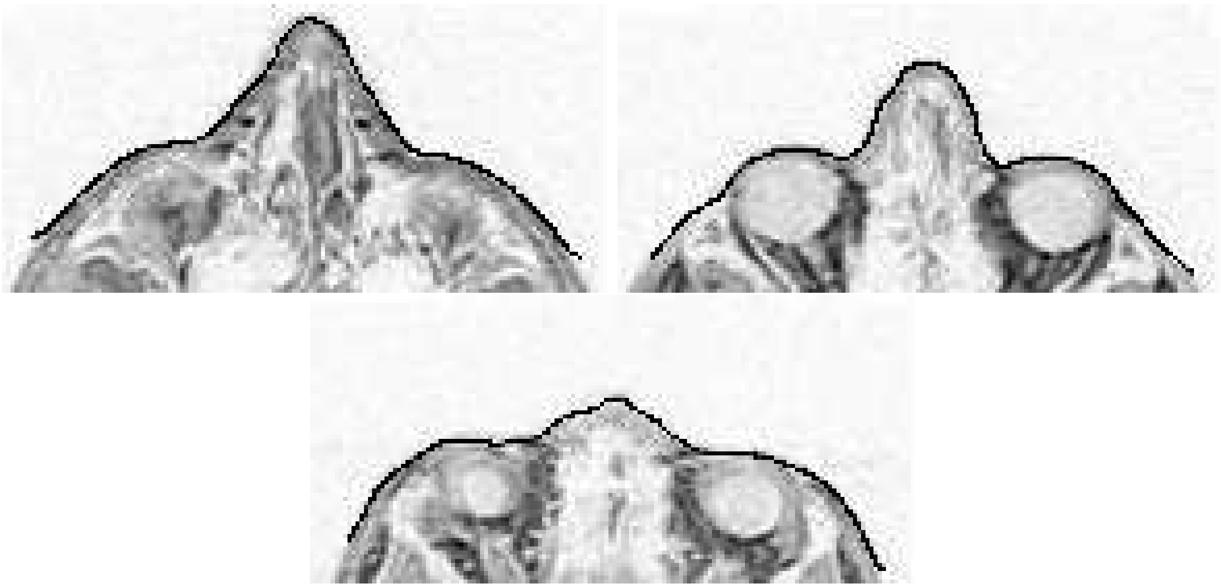


Figure 11 : Superposition de quelques coupes horizontales avec l'intersection de la surface finale (extrait de [44]).

5 Contours actifs et segmentation en régions

voir référence [83]
Les modèles de contours actifs ne prennent en compte que l'information le long d'une courbe et cela bloque parfois son évolution à cause de minima locaux. Nous prenons ici en compte le fait que le contour délimite une région homogène en introduisant un terme surfacique sur l'intérieur de la région définie par le contour. On définit ainsi le problème de reconstruction d'une surface composée de deux types de régions de régularités différentes. La frontière entre les régions, representée par une courbe fermée est déterminée à l'aide d'un modèle de contour actif. Cela combine les deux problèmes de reconstruction de surface avec discontinuité et detection de contour. On minimise pour cela une énergie fonction du couple d'inconnues (surface u, courbe frontière v). Nous avons appliqué ce modèle à deux types d'images, un Modèle Numérique de Terrain avec un lac et une image médicale avec région d'intérêt (ventricules du cerveau).

Une surface **lac** est caractérisée par les propriétés géometriques suivantes: discontinuité de tangente au bord, surface horizontale,le bord est à un niveau supérieur au lac. L'image est segmentée en deux régions: l'interieur du lac L, qui est une région constante, le fond $(R - L)$ qui doit être lissé. On définit ainsi une solution utilisant un modèle intermediaire entre Mumford & shah [28] et Morel & Koepfler [27, 84, 85] où on doit trouver: un bord fermé B séparant le lac du fond, le niveau du lac u_0; c'est la valeur constante de u à l'intérieur, l'image lissée u à l'extérieur du lac, préservant les contraintes de bord. La minimisation d'une énergie globale permet l'interaction directe des termes de surface et de contour actif (voir figure 12). L'initialisation du contour est ainsi facilitée ([83]).

$$\begin{aligned} E_g(u,v) &= E_{snake}(v) + E_{lake}(u,v) + E_{outside}(u,v) \\ &= E_{snake}(v) + \int_L (u_0 - d(x,y))^2 dxdy + \\ & \int_{R-L} (u-d)^2 + \lambda^2 \int_{R-L} \|\nabla u\|^2 + \int_\Gamma (u-u_0)^2 \end{aligned} \tag{34}$$

où Γ correspond aux points du bord B determinés par le "snake", tels que $(u - u_0) < 0$.

L'algorithme minimise de manière alternée l'énergie E_g par rapport aux deux variables u et v. A u fixée, la minimisation en v correspond à l'évolution d'un snake auquel des forces exterieures sont ajoutées dérivant des autres termes d'énergie surfaciques. Cela permet de tenir compte de l'information niveau de gris à l'intérieur de la courbe pour segmenter une région homogène. Ces forces supplémentaires évitent à la courbe d'être bloquée par des contours intermédiaires.

La courbe v étant fixée, la régularisation pour u est simple, la constante u_0 est la valeur moyenne à l'intérieur de la région définie par la courbe, la valeur de u à l'exterieur est obtenue par régularisation classique.

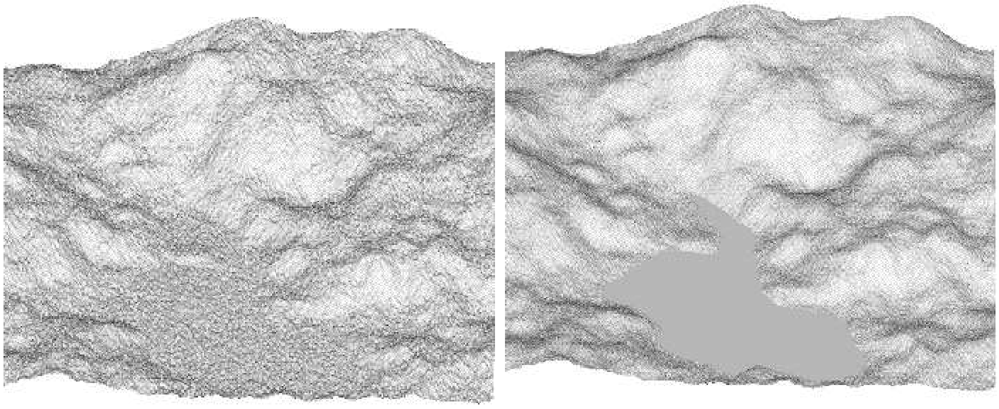


Figure 12 : Modèle Numérique de Terrain avec un lac: image bruitée et reconstruction (extrait de [83]).

Figure 13 : Ventricules du cerveau.

6 Modèles paramétriques Déformables

Nous avons illustré la capacité des modèles déformables 2-D et 3-D pour définir une description locale des structures apparaissant dans les images. Cette modélisation locale ne permet pas de contraindre la forme globale des courbes pour imposer des formes génériques. L'utilisation de courbe et surface paramétriques (cercles, paraboles, segments dans [86], ellipses dans [53], voir une étude complète dans [87]) permet de définir des contraintes globales sur la forme de la structure que nous cherchons à caractériser tout en utilisant le même type de potentiel d'attraction. On minimise donc l'intégrale de P le long de cette courbe définie par un petit nombre de paramètres. Par conséquent, nous pouvons à l'aide de modèles de superquadriques ou d'hyperquadriques incorporer une connaissance a priori de la structure et de plus disposer d'une description de la structure 2-D ou 3-D par le biais de quelques paramètres. Ces modèles permettent de retrouver des informations manquantes et donne une représentation stable et compacte des données mais ne peuvent modéliser des propriétés locales. Nous présentons deux approches permettant d'affiner localement le modèle paramétrique après avoir obtenu une première estimation globale de la forme.

6.1 Hyperquadriques

voir référence [88]

Nous avons étudié des modèles paramétriques permettant à la fois de décrire des propriétés globales et locales : les hyperquadriques hybrides.

Une hyperquadrique est définie par l'ensemble des points (x, y, z) vérifiant l'équation :

$$H(x,y,z) = \sum_{i=1}^{N} |a_i x + b_i y + c_i z + d_i|^{\gamma_i} = 1. \tag{35}$$

où a_i, b_i, c_i, d_i et γ_i sont des constantes et N représente le nombre de formes affines utilisées dans la description. Ce modèle permet de considérer un nombre arbitraire N de formes affines et de modéliser des structures non symétriques. Ces surfaces ne sont régulières que pour $\gamma_i > 1$. Dans ce cas, les formes obtenues sont convexes.

En complétant cette description à l'aide d'exponentielles d'hyperquadriques (e^{-H}), nous pouvons modéliser certaines propriétés locales et introduire des concavités. Ainsi, le modèle hybride est défini par l'équation implicite :

$$H(x,y,z) = \sum_{i=1}^{N} |K_i|^{\gamma_i} + \sum_{j=1}^{M} c_j \mathrm{e}^{-\sum_{l=0}^{L_j} |K_{jl}|^{\gamma_{jl}}} = 1, \tag{36}$$

où les K_{jl} sont des formes affines de $I\!R^3$, M représente le nombre de concavités utilisées et L la description de celles-ci par une hyperquadrique. Le modèle est ainsi défini à l'aide de $5 \times (N + \sum_{j=1}^{M} L_j)$ paramètres. Ces paramètres caractérisent la forme de la courbe ou de la surface et permettront d'identifier les structures représentées. Notre approche permet, à l'aide d'une étude géométrique des propriétés du modèle, de définir des termes supplémentaires n'introduisant qu'une déformation locale de la forme, permettant ainsi l'insertion de concavités (voir les figures 14 à 17).

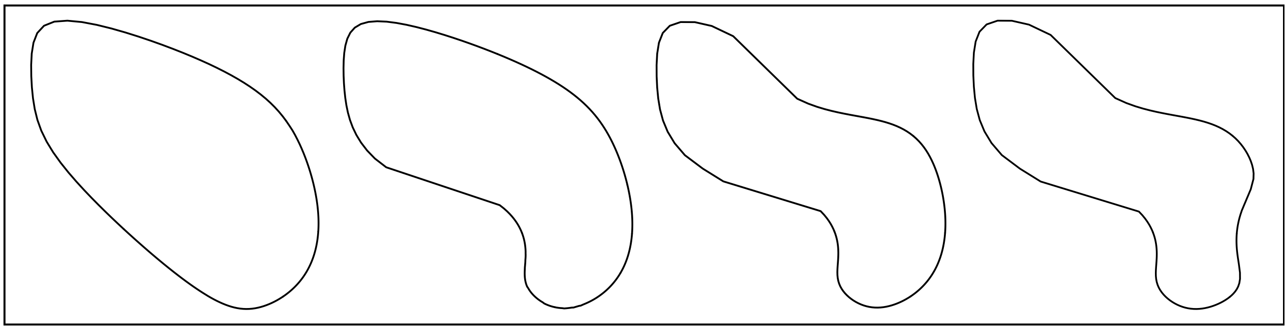


Figure 14 : Illustration de la définition locale par ajout successif de trois concavités à partir d'une hyperquadrique définie à l'aide de cinq termes (extrait de [88]).

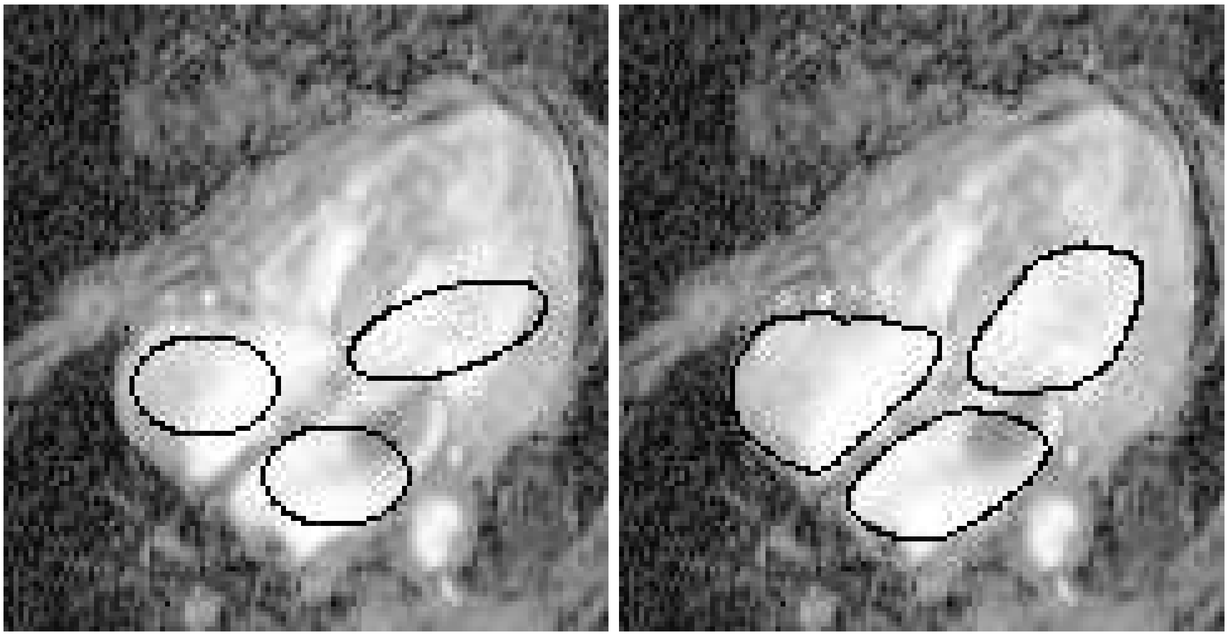


Figure 15 : Extraction des contours des cavités du coeur dans une image IRM à l'aide d'hyperquadriques 2-D (extrait de [88]).

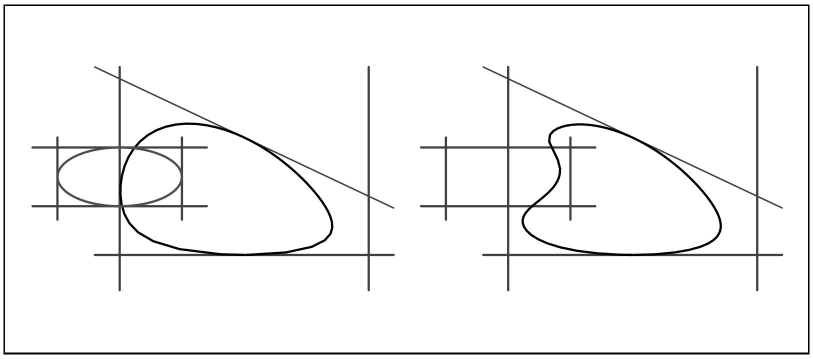


Figure 16 : Illustration de l'introduction d'une concavité par définition de son domaine. A gauche, l'hyperquadrique initiale définie par trois termes encadrée par son polygone (en gris) et l'ellipse définissant le domaine de concavité. A droite, l'hyperquadrique hybride obtenue. Le contrôle local de la forme résulte de la définition locale du terme supplémentaire exponentiel. La position et la taille de l'ellipse entraînent une déformation locale de l'hyperquadrique (extrait de [88]).

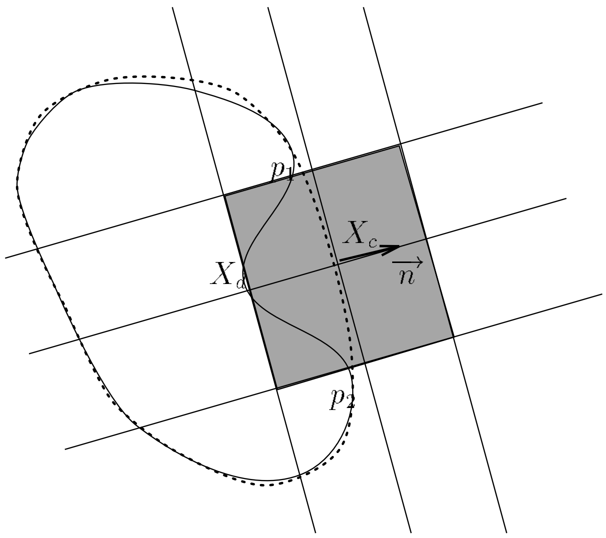


Figure 17 : Illustration de la méthode proposée pour ajouter automatiquement une concavité à la forme hyperquadrique. La donn'ee à reconstruire est en ligne continue, et la superquadrique en pointillés. la région grise représente le polygone d'encadrement de la concavité. Celle ci est centrée au point d'écart maximal X_c, les longueurs des cotés sont définies par X_d, la normale $\overrightarrow{n}$ et p_1, p_2 (extrait de [88]).

6.2 Superquadriques et Déformations Libres (*Free-Form Deformation*)

voir référence [89], cette partie correspond au travail de thèse d'Eric Bardinet, que je dirige en collaboration avec Nicholas Ayache.

Les superquadriques sont une généralisation des coniques avec des exposants quelconques et un cas particulier d'hyperquadriques:

$$F(x,y,z) = \left(\left(\left(\frac{x}{a_1}\right)^{2/\epsilon_2} + \left(\frac{y}{a_2}\right)^{2/\epsilon_2} \right)^{\epsilon_2/\epsilon_1} + \left(\frac{z}{a_3}\right)^{2/\epsilon_1} \right)^{\epsilon_1/2} = 1. \tag{37}$$

La représentation d'un nuage de points par une surface de type superquadrique est intéréssante dans la mesure où d'une part la surface est déterminée par 11 paramètres et d'autre part, on peut donner facilement un maillage de la surface pour la visualiser ou la faire évoluer sur les données.

Les surfaces issues de l'imagerie médicale sont cependant trop complexes pour être décrites uniquement par des superquadriques. Pour ajuster au mieux le modèle sur les données, une déformation libre est ajoutée (**free-form deformation** introduite par Sederberg et Parry en synthèse d'images), c'est-à-dire un produit tensoriel tri-dimensionnel de courbes B-splines:

$$\boldsymbol{X} = \sum_{i,j,k=0}^{l,m,n} C_l^i C_m^j C_n^k (1-s)^{l-i} s^i (1-t)^{m-j} t^j (1-u)^{n-k} u^k \boldsymbol{P_{ijk}} \tag{38}$$

où s, t et u sont les coordonnées locales de $\boldsymbol{X}$ dans la boite des points de contrôle $\boldsymbol{P_{ijk}}$. Pour cela on itère à partir d'une donnée initiale l'algorithme de minimisation suivant:

1 : Calcul du champ de déplacement : $X_n^a = X_n + \delta X_n$

2 : Points de contrôle P_{n+1} par minimisation de $\|BP - X_n^a\|^2$

$X_{n+1} = BP_{n+1}$

Les résultats obtenus sur des données cardiaques, illustrés par la figure 18, se sont révélés très encourageants. En effet pour représenter un nuage d'environ 6000 points 3D, un modèle décrit par 130 points 3D (boite 5x5x5) est globalement satisfaisant, soit un facteur de compression de 46. Cette approche s'applique parfaitement au suivi de la déformation de la surface dans une suite d'images temporelle (voir figure 19). Le premier modèle utilise une superquadrique mais ensuite le résultat pour la surface n est obtenu par déformation de la surface précédente $n-1$. Cela permet d'obtenir une estimation du mouvement en chaque point de la surface et ainsi de détecter d'éventuelles régions pathologiques nécrosées pour lesquelles le déplacement est faible. Un modèle de référence peut aussi être utilisé de manière indépendante pour chaque donnée.

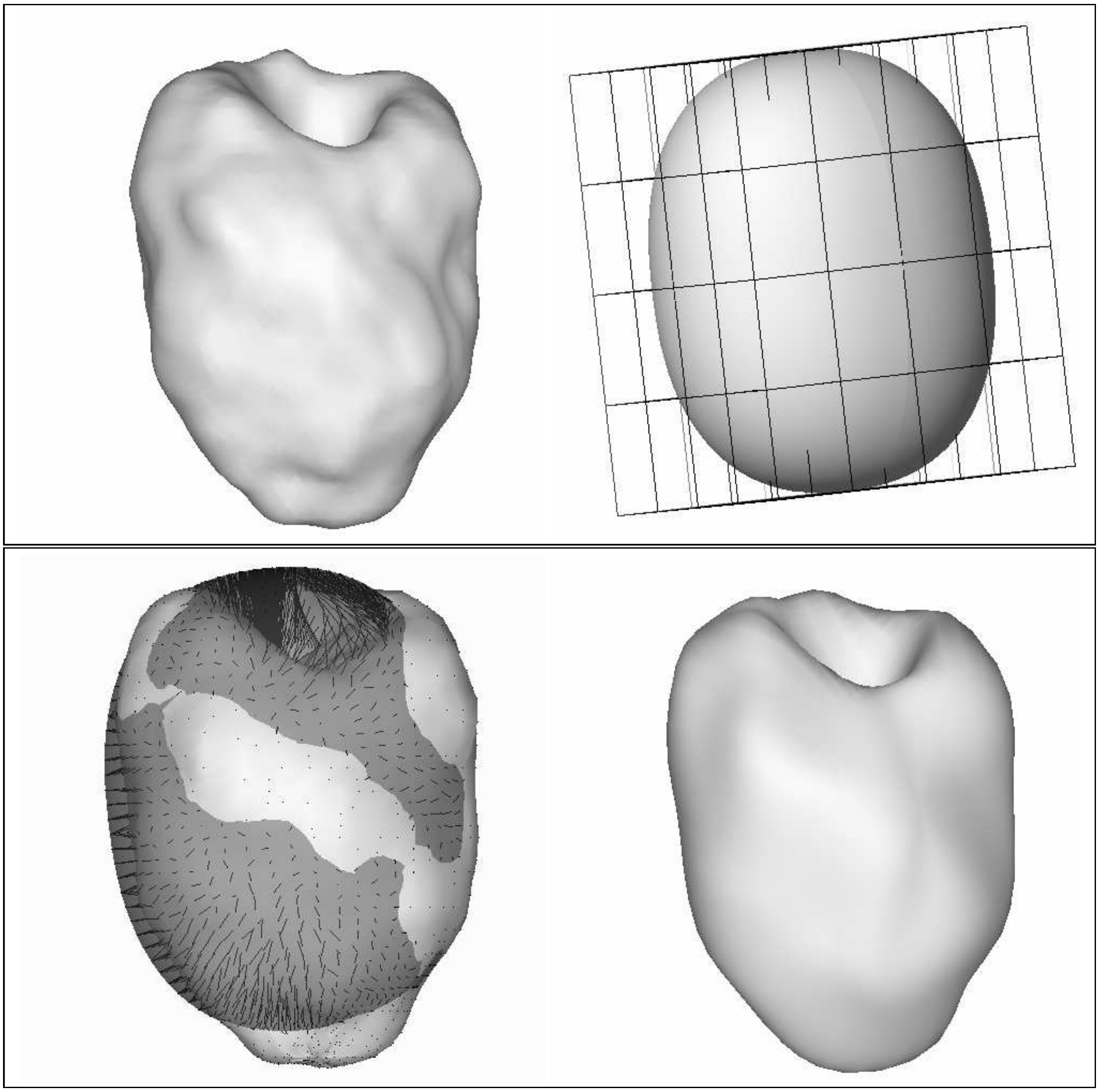


Figure 18 : Etapes de la reconstruction. En haut à gauche, les données, à droite la superquadrique et la boîte initiale de points de contrôle. En bas à gauche, le champs de déplacement à partir de la superquadrique (étape 1.) et à droite le modèle final après minimisation (étape 2.); (extrait de [89]).

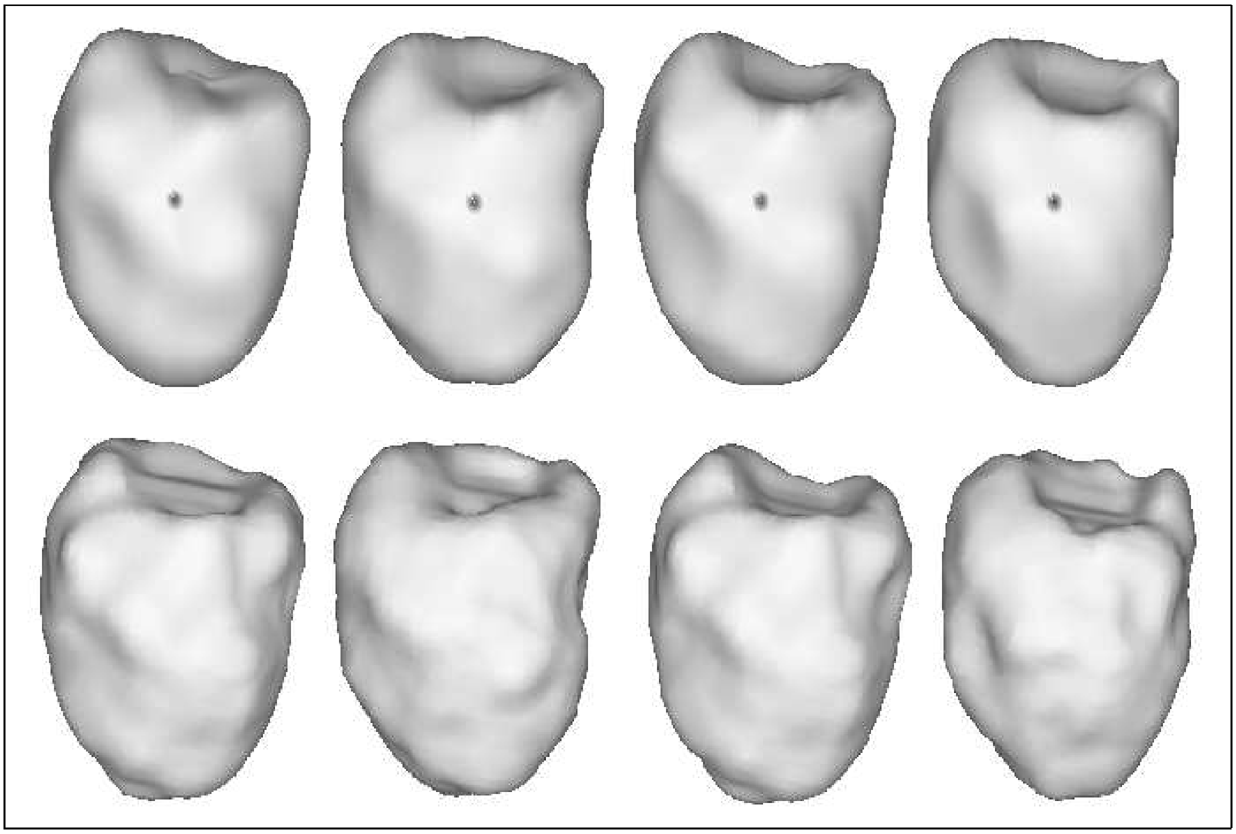


Figure 19 : Suivi du ventricule gauche avec une boite 5x5x5 en haut, les modèles; en bas, les données (extrait de [89]).

7 Variables auxiliaires et Algorithmes Itératifs à deux étapes.

voir référence [90]
Comme nous l'avons vu, beaucoup de problèmes de Vision par Ordinateur se formulent par la minimisation d'une énergie. L'extraction d'une forme est obtenue par minimisation d'une énergie composée d'un terme de régularisation interne et d'un potentiel d'attraction externe. Souvent, dans le schéma itératif de minimisation, chaque itération est divisée en deux étapes. Ces deux étapes cherchent à minimiser successivement les 2 termes de l'énergie. Ces deux étapes peuvent s'interprêter comme une séparation entre une transformée globale dûe au terme de régularisation et une déformation locale correspondant aux forces d'attraction vers les données (voir figure 20). Dans le cas des contours actifs, cela peut être vu aussi comme la succession des effets de diffusion et de réaction (voir section 1.1). Dans le cas des modèles déformables paramétriques, du recalage et des "Spline-Snakes", cela correspond à un ajustement global du modèle suivi d'une déformation locale.

Nous avons étudié plus précisément ces algorithmes en deux étapes et montré comment les formuler comme la minimisation d'une énergie à deux variables, successivement par rapport à chacune de ces deux variables. On donne une condition sur le potentiel pour que l'algorithme en deux étapes puisse être équivalent à la minimisation de l'énergie auxiliaire. On en déduit que l'algorithme correspond bien à une descente et minimise l'énergie de départ. En général, l'énergie peut s'écrire:

$$E_P(v) = \int R(v) + \int P(v) \tag{39}$$

La modification de ce problème par l'introduction de variables auxiliaires consiste à minimiser l'énergie

$$E_{aux}(v,w) = \int R(v(s))ds + \int \|v(s) - w(s)\|^2 ds + \int P_1(w(s))ds \tag{40}$$

où la variable auxiliaire w représente l'estimation courante de la forme inconnue v. Et à partir d'une valeur initiale de v, on minimise successivement E_{aux} par rapport à w et v de manière itérative. Cela permet de résoudre deux problèmes simples à chaque itération.
Pour un w donné, la minimisation de cette énergie par rapport à v est un problème de régularisation convexe pour lequel le potentiel implicite (et non convexe) $P(v)$ de (39) est transformé en potentiel explicite $\|v(s) - w(s)\|^2$ dans (40).
Pour un v donné, la minimisation de E_{aux} par rapport à w est un problème qui peut être rendu convexe même si P_1 ne l'est pas.

Cela a l'avantage d'assurer par le bon choix de P_1 de minimiser par des itérations à deux étapes la bonne énergie initiale du problème (39). Le potentiel auxiliaire P_1 doit être défini relativement à P pour avoir:

$$\inf_w E_{aux}(v,w) = E(v) \tag{41}$$

Dans ce cas:

$$arg_v \inf_{(v,w)} E_{aux}(v,w) = arg \inf_v E(v) \tag{42}$$

On montre que si $\frac{1}{2}\|N\|^2 - P(N)$ est convexe, P_1 existe et est défini par l'égalité:

$$\frac{1}{2}\|M\|^2 + P_1(M) = \{\frac{1}{2}\|N\|^2 - P(N)\}^* \tag{43}$$

Nous avons déterminé le calcul de P_1 dans le cas où $P = f(d)$ est une fonction de la distance au contour le plus proche même dans le cas où P ne satisfait pas l'hypothèse de convexité. Le résultat intéressant est d'avoir ramené le problème en dimension 1:
$P_1 = f_1(d)$, si $(\frac{x^2}{2} - f(x))$ est convexe, f_1 est définie par:

$$(\frac{\lambda^2}{2} + f_1(\lambda)) = \{\frac{1}{2}d^2 - f(d)\}^* \tag{44}$$

Cela permet de se contenter de déterminer une fois pour toute un couple (f, f_1) convenable. Il peut être alors utilisé pour toutes données définies par une fonction distance d.

En posant

$$E_1(v,w) = \int R(v(s))ds + \frac{1}{2}\int \|v(s) - w(s)\|^2 ds \tag{45}$$

$$E_2(v,w) = \frac{1}{2}\int \|v(s) - w(s)\|^2 ds + \int P_1(w(s))ds \tag{46}$$

On obtient l'algorithme à deux étapes suivant:
après n itérations ayant déterminé la paire (v^n, w^n),

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{Etape 1.} & \text{Minimiser } E_2 \text{ à } v = v^n & \text{Potentiel, déformation locale} \\ & E_{aux}(v^n, w^{n+1}) & = \inf_w E_{aux}(v^n, w) = E(v^n) \\ & w^{n+1} & = \psi(v^n) \\ & & \\ \text{Etape 2.} & \text{Minimiser } E_1 \text{ à } w = w^{n+1} & \text{Régularisation} \\ & E_{aux}(v^{n+1}, w^{n+1}) & = \inf_v E_{aux}(v, w^{n+1}) \\ & v^{n+1} & = lissage(w^{n+1}) \end{array}\right. \tag{47}$$

Il y a bien descente d'énergie au bout des 2 étapes:

$$\begin{array}{ll} E(v^{n+1}) = E_{aux}(v^{n+1}, w^{n+2}) & \leq E_{aux}(v^{n+1}, w^{n+1}) \\ & \leq E_{aux}(v^n, w^{n+1}) \quad = E(v^n) \end{array} \tag{48}$$

Cette approche s'applique à des algorithmes itératifs en deux étapes pour les modèles déformables, les modèles paramétriques, les splines-snakes ainsi que pour la mise en correspondance de formes. Nous donnons ainsi une nouvelle interprétation des B-snakes comme minimisation d'une énergie auxiliaire. Cela donne par la même occasion une formulation mathématique uniforme pour ces problèmes.

D'autres approches utilisant des variables auxiliaires ont aussi été utilisées récemment pour la restauration d'images [91, 36, 92, 93].

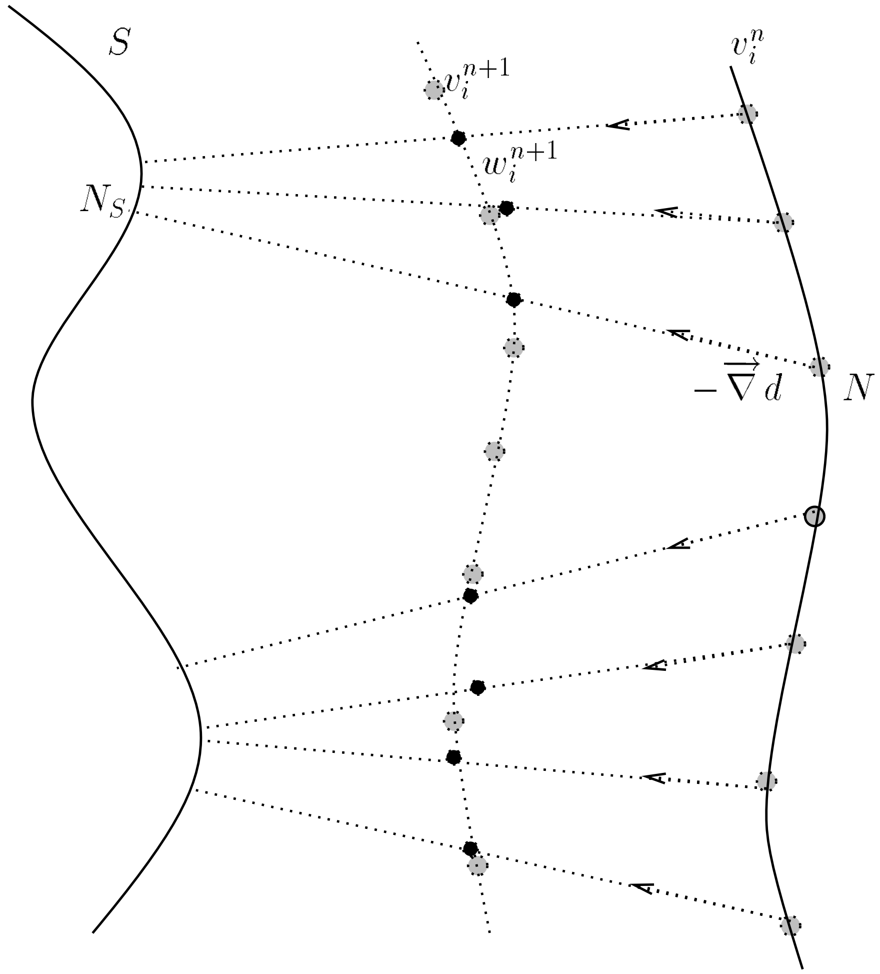


Figure 20 : Illustration d'une itération à deux étapes. A gauche, les données, à droite l'estimée courante des v_i, et au milieu les w_i auxiliaires (en noir) obtenus par déformation locale suivant la force d'attraction. Les points gris et la nouvelle courbe représentent la nouvelle valeur des v_i après régularisation des w_i (extrait de [90]).

8 Minimum global d'un contour actif par géodésiques

voir référence [94]

Une nouvelle approche pour les modèles de contours contours actifs est introduite dans [94]. La détection du contour entre deux points est interprétée comme le chemin minimal entre ces deux points le long d'une surface. Toutes les méthodes de contours actifs déterminent un minimum local de l'énergie dépendant de la donnée initiale. Notre approche permet de trouver le minimum global de l'énergie du contour actif.

L'algorithme procède en deux étapes. La première, basée sur les travaux de Kimmel, Amir et Bruckstein [95], permet de définir par une approche d'évolution de fronts la valeur en chaque point de l'image du chemin minimal entre un point de départ donné et ce point. Cela correspond à une distance pondérée [96]. La méthode pour déterminer le plus court chemin le long d'une surface entre un point de départ x_S et une destination x_D est présentée dans [95]. Il est montré que la projection sur le plan image des courbes de niveau de la distance géodésique sur $\mathcal{S}$ à x_S peut être obtenue par un simple schéma d'évolution de courbes. Utilisant l'approche de propagation de fronts de Osher-Sethian [60], la fonction de distance $\mathcal{M}_S$ à x_S sur $\mathcal{S}$ est définie par la projection sur $\mathbb{R}^2$ de ses courbes de niveau. Celles-ci sont identiques à l'évolution de la courbe de niveau zéro de la fonction $\phi : \mathbb{R}^2 \times [0,T) \to \mathbb{R}$ définie par l'équation d'évolution:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -V_N \|\nabla \phi\|. \tag{49}$$

où V_N est définie par des propriétés locales de la surface $\mathcal{S}$ et de ϕ.

Nous appliquons ces idées à notre problème pour trouver une courbe d'action minimale par rapport à un potentiel. L'énergie du nouveau modèle est de la forme:

$$\begin{aligned} E: \quad & \mathcal{A} \to \mathbb{R} \\ & \mathcal{C} \mapsto E(\mathcal{C}) = \int_\Omega w + P(\mathcal{C}(s))ds = \int_\Omega \tilde{P}(\mathcal{C}(s))ds \end{aligned} \tag{50}$$

Ici $\mathcal{A}$ est l'espace de toutes les courbes reliant les deux points donnés: $\mathcal{C}(0) = p_0$ and $\mathcal{C}(L) = p_1$, et L est la longueur de la courbe. Contrairement aux snakes classiques, s représente ici l'abscisse curviligne. L'énergie ne dépend donc que de l'arc géométrique et plus de la paramétrisation. Le terme régularisant comportant w mesure maintenant exactement la longueur de la courbe. Ce changement de potentiel est d'autant plus justifié qu'il a été montré par ailleurs que la minimisation de l'énergie des contours actifs classiques est équivalente à la recherche d'une géodésique pour une métrique proche de la notre [69]. Cependant ces derniers auteurs ne donnent pas de méthode pour obtenir effectivement le minimum global.

L'algorithme utilisé ici peut être soit une approche de propagations de front du type Osher-Sethian [60] soit par l'algorithme de Shape from Shading de Rouy-Tourin [97].

Dans un deuxième temps on redescend simplement à partir du point de destination jusqu'au point de départ pour tracer le chemin minimal qui les relie.

Cela s'applique bien sûr au problème des contours actifs avec les deux bords fixes. Cependant, nous pouvont aussi appliquer cette approche à un contour fermé en ne donnant qu'un seul point de départ. Un second point est alors trouvé sur le contour fermé tel que deux chemins minimaux relient ces points. Ce point est déterminé par un test de point selle. Le contour complet est obtenu en suivant les deux chemins minimaux reliant ces deux points.

On montre les résultats sur une image de routes (figures 21 à 23) pour trouver le chemin reliant deux points. Comme les routes sont les zones les plus claires de l'image, nous utilisons comme potentiel l'opposé de l'image en niveau de gris. Remarquer dans l'image d'action minimale (en bas à droite de la figure 22) comment les lignes de fronts se déplacent plus vite le long de la route.

Figure 21 : Image originale de Routes

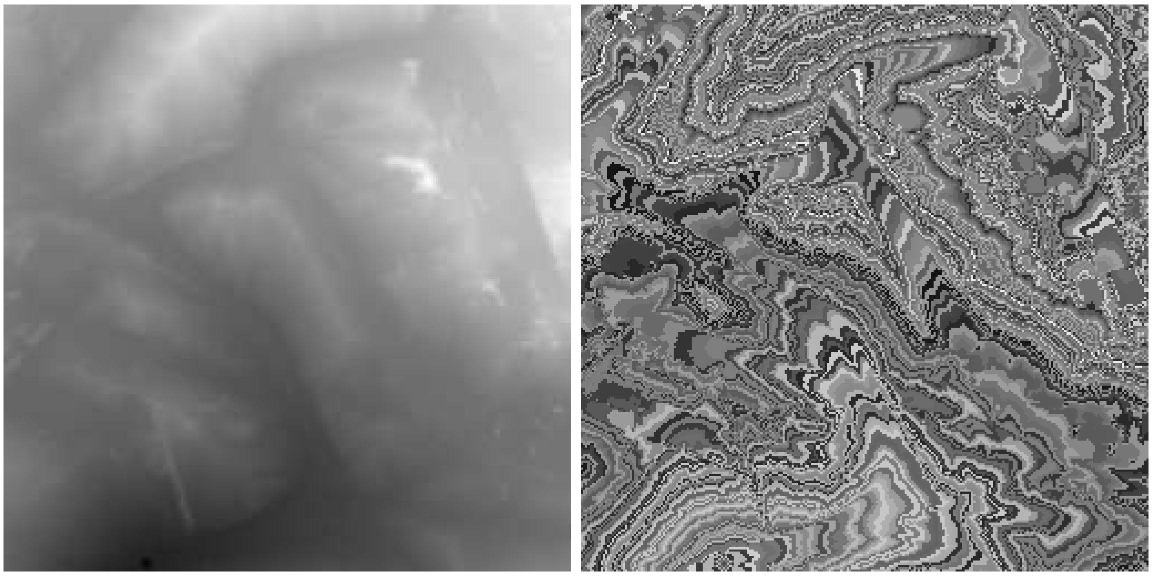


Figure 22 : action minimale U à partir du point de départ en bas à gauche. A gauche, les valeurs basses de U correspondent au noir. A droite une table de couleurs aléatoire est utilisée pour mieux visualiser les courbes de niveau de la surface U (extrait de [94]).

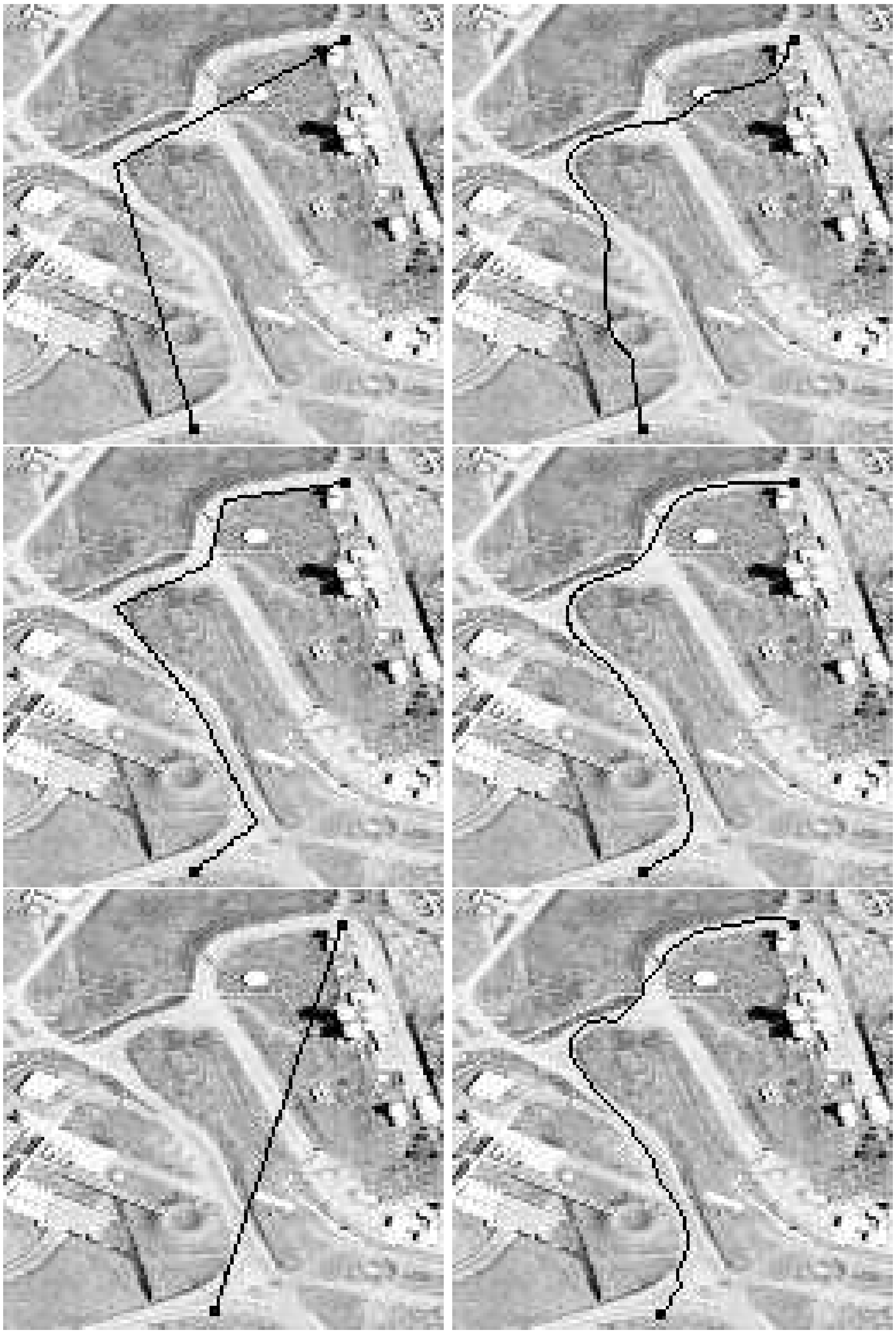
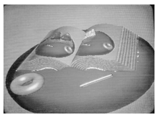


Figure 23 : Comparaison des snakes classiques et de l'approche proposée. A gauche la courbe initiale, à droite le résultat. En haut et au milieu, les snakes classiques nécessitent une initialisation très proche, en bas avec l'approche géodésique entre 2 points (extrait de [94]).



9 Bibliographie

[1] Laurent D. Cohen. *Etude de quelques problèmes semi-linéaires paraboliques et elliptiques.* PhD thesis, Paris 6, 1986.

[2] P.Baras and L. D. Cohen. Explosion totale après t_{max} de la solution d'une équation de la chaleur non linéaire. *Comptes Rendus de l' Académie des Sciences Sér.I*, 300(10), 1985.

[3] P.Baras and L. D. Cohen. Complete blow-up after t_{max} for the solution of a semilinear heat equation. *Journal of Functional Analysis*, 71(1):142–174, March 1987.

[4] L. D. Cohen. An ODE approach to study the existence and behavior of solutions of elliptic equations. Technical report, Université Paris VI, 1986. inclus dans la thèse.

[5] L. D. Cohen. Explosion en temps fini des solutions des équations de schrodinger et de la chaleur non linéaires. Technical report, Université Paris VI, 1985. inclus dans la thèse.

[6] J. M. Ball. Remarks on blow-up and nonexistence theorems for nonlinear evolution equations. *Quart. J. Math. Oxford Sér.*, 28:473–486, 1977.

[7] P. Baras and M. Pierre. Critère d'existence de solutions positives pour des équations semi-linéaires non monotones. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 2(3):185–212, 1985.

[8] F. B. Weissler. Single point blow-up for a semilinear initial value problem. *J. Differential Equations*, 1985.

[9] A. Friedman and B. MacLeod. Blow-up of positive solutions of semilinear heat equations. *Indiana Univ. Math. J.*, 34:425–447, 1985.

[10] Laurent D. Cohen. *Etude des modèles de contours actifs et d'autres techniques de traitement d'Images.* PhD thesis, Université Paris-Sud Orsay, 1990.

[11] Laurent D. Cohen. A new approach of vector quantization for image data compression and texture detection. In *International Conference on Pattern Recognition*, Rome, 1988.

[12] Laurent Cohen, Laurent Vinet, Peter T. Sander, and André Gagalowicz. Hierarchical region based stereo matching. In *Proc. 1989 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, San Diego, June 1989.

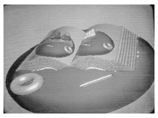
[13] N. Ayache, J.D. Boissonnat, L. Cohen, B. Geiger, O. Monga, J. Levy-Vehel, and P. Sander. Steps toward the automatic interpretation of 3D images. *NATO ASI Series on 3D Imaging in Medicine*, F 60:107–120, 1990.

[14] Laurent D. Cohen. On active contour models. Technical Report 1075, INRIA, August 1989.

[15] Laurent D. Cohen and Isaac Cohen. A finite element method applied to new active contour models and 3D reconstruction from cross sections. Technical Report 1245, INRIA, June 1990.

[16] Andrew Witkin. Scale-space filtering. In *Image Understanding.* S.Ullman, W.Richards, 1984.

[17] Pietro Perona and Jitendra Malik. Scale space and edge detection using anisotropic diffusion. In *Proc. IEEE Workshop on Computer Vision*, pages 16–22, Miami, FL, 1987.



[18] L. Alvarez, F. Guichard, P.L. Lions, and J.M. Morel. Axiomes et équations fondamentales du traitement d'images. (analyse multiéchelle et e.d.p.). *C.R. Acad. Sci. Paris Série I*, 315:135–138, 1992.

[19] L. D. Cohen. Quantification vectorielle appliquée à la détection de textures. Technical report, SCHLUMBERGER Palo Alto Research, Californie, USA, 1985.

[20] L. D. Cohen and A. Witkin. Recursive book. Film, 1985. SCHLUMBERGER Palo Alto Research.

[21] S.G. Mallat. A theory for multiresolution signal decomposition : The wavelet representation. Technical Report MS-CIS-87-22, U. of Penn., May 1987.

[22] R. Kimmel and A. M. Bruckstein. Shape offsets via level sets. *CAD*, 25(5):154–162, March 1993.

[23] André Gagalowicz and Olivier Monga. A new approach to image segmentation. In *Proceedings of the Eighth International Conference on Pattern Recognition*, Paris, October 1986.

[24] Jean-Pierre Cocquerez and André Gagalowicz. Mise en correspondence de régions dans une paire d'images stéréo. In *Machines et Réseaux Intelligents*, Paris, May 1987.

[25] André Gagalowicz and Michel Peyret. Reconstruction 3D basée sur une analyse en régions d'un couple d'images stéréo. In *Proceedings of Pixim*, Paris, October 1989. In preparation.

[26] S.L. Horowitz and T. Pavlidis. Picture segmentation by a directed split-and-merge procedure. In *Proceedings of the Second International Joint Conference on Pattern Recognition*, pages 424–433, 1974.

[27] Jean-Michel Morel and Sergio Solimini. Segmentation d'images par méthode variationnelle: une preuve constructive d'existence. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 1988.

[28] D. Mumford and J. Shah. Boundary detection by minimizing functionals. In *Proceedings of Computer Vision and Pattern Recognition*, San Francisco, June 1985.

[29] T. Poggio, H. Voohrees, and A. Yuille. A regularized solution to edge detection. *Journal of Complexity*, 4:106–123, 1988.

[30] W.E.L. Grimson. *From Images to Surfaces: A computational study of the Human Early vision system*. The MIT Press, 1981.

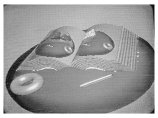
[31] Demetri Terzopoulos. The computation of visible-surface representations. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-10(4):417–438, July 1988.

[32] Andrew Blake and Andrew Zisserman. *Visual Reconstruction*. The MIT Press, 1987.

[33] Michael Kass, Andrew Witkin, and Demetri Terzopoulos. Snakes: Active contour models. *International Journal of Computer Vision*, 1(4):321–331, 1988.

[34] Demetri Terzopoulos, Andrew Witkin, and Michael Kass. Constraints on deformable models: recovering 3D shape and nonrigid motion. *AI Journal*, 36:91–123, 1988.

[35] Isaac Weiss. Shape reconstruction on a varying mesh. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-12(4), April 1990.



[36] D. Geman and C. Yang. Nonlinear image recovery with half-quadratic regularization. Technical report, Umass, July 1993. to appear in *IEEE Transactions on Image Processing.*

[37] D. Geiger and A.L. Yuille. A common framework for image segmentation. *International Journal of Computer Vision*, 6(3):227–234, August 1991.

[38] Laurent D. Cohen. On active contour models. In *Proceedings of NATO ASI Active perception and Robot vision*, Maratea, July 1989. Springer.

[39] N. Ayache, J.D. Boissonnat, E. Brunet, L. Cohen, J.P. Chièze, B. Geiger, O. Monga, J.M. Rocchisani, and P. Sander. Building highly structured volume representations in 3D medical images. In *Computer Aided Radiology*, Juin 1989. Berlin, West-Germany.

[40] Laurent D. Cohen. On active contour models and balloons. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing : Image Understanding*, 53(2):211–218, March 1991.

[41] Laurent D. Cohen and Isaac Cohen. A finite element method applied to new active contour models and 3D reconstruction from cross sections. In *Proc. Third International Conference on Computer Vision*, pages 587–591, Osaka, Japan, December 1990.

[42] L.D. Cohen and Isaac Cohen. Using a finite element method for active contour models and 3-D reconstruction from cross sections. In Y.A. Feldman and A. Bruckstein, editors, *Artificial Intelligence and Computer Vision*, pages 237–247. Elsevier Science Publishers B.V., North-Holland, 1991.

[43] Laurent D. Cohen and Isaac Cohen. Deformable models for 3D medical images using finite elements & balloons. In *Proc. 1992 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, Champain, Illinois, June 1992.

[44] Laurent D. Cohen and Isaac Cohen. Finite element methods for active contour models and balloons for 2-D and 3-D images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-15(11), November 1993.

[45] Isaac Cohen, Laurent D. Cohen, and Nicholas Ayache. Using deformable surfaces to segment 3-D images and infer differential structures. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing : Image Understanding*, 56(2):242–263, September 1992.

[46] Isaac Cohen, Laurent D. Cohen, and Nicholas Ayache. Using deformable surface to segment 3-D images and infer differential structures. In *Proc. Second European Conference on Computer Vision*, pages 648–652, Santa Margherita Ligure, Italy, May 1992. In Lecture Notes in Computer Science: Computer Vision – ECCV92, Vol. 588 Springer-Verlag.

[47] N. Ayache, P. Cinquin, I. Cohen, L. Cohen, F. Leitner, and O. Monga. Segmentation of complex 3D medical objects : a challenge and a requirement for computer assisted surgery planning and performing. In R. Taylor and S. Lavallee, editors, *Computer Integrated Surgery.* MIT Press, 1994.

[48] Demetri Terzopoulos. On matching deformable models to images. In *Topical meeting on machine vision, Technical Digest Series*, volume 12, pages 160–163. Optical Society of America, 1987.

[49] Demetri Terzopoulos. On matching deformable models to images: Direct and iterative solutions. In *Topical meeting on machine vision, Technical Digest Series*, volume 12, pages 164–167. Optical Society of America, 1987.

[50] Demetri Terzopoulos, Andrew Witkin, and Michael Kass. Symmetry-seeking models for 3D object reconstruction. In *Proceedings of the first International Conference on Computer Vision*, pages 269–276, June 1987.

[51] Bertrand Leroy. Etude de quelques proppriétés des modèles de contours actifs. Technical report, INRIA, Septembre 1991. Rapport de DEA Dauphine.

[52] Laurent D. Cohen and Bertrand Leroy. Multiresolution active contour models. 1992.

[53] Anne Gorre. Etude de quelques problèmes liés au modèles de contours actifs. Technical report, INRIA, Septembre 1992. Rapport de DEA Dauphine.

[54] Claude Cohen-Tannudgi, Bernard Diu, and Franck Laloé. *Mecanique quantique*. Hermann, 1973. chapitre V.

[55] Pascal Fua. *Une approche Variationnelle pour la reconnaissance d'objets*. PhD thesis, Université d'Orsay, Sept. 1989.

[56] M.O. Berger. *Les contours actifs: modélisation, comportement et convergence*. PhD thesis, Institut Polytechnique de Lorraine, Février 1991.

[57] Gunilla Borgefors. Distance transformations in arbitrary dimensions. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 27:321–345, 1984.

[58] P. E. Danielsson. Euclidean distance mapping. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 14:227–248, 1980.

[59] M. Gage and R.S. Hamilton. The heat equation shrinking convex plane curves. *J. Differential Geometry*, 23:69–96, 1986.

[60] S. J. Osher and J. A. Sethian. Fronts propagation with curvature dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, 79:12–49, 1988.

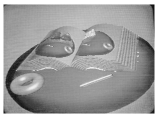
[61] J. A. Sethian. A review of recent numerical algorithms for hypersurfaces moving with curvature dependent flows. *J. Differential Geometry*, 31:131–161, 1989.

[62] B.B. Kimia, A. R. Tannenbaun, and S.W. Zucker. On the evolution of curves via a function of curvature,1 : the classical case. *J. Math Anal. Appl.*

[63] G. Sapiro and A. Tannenbaum. On affine plane curve evolution. *Journal of Functional Analysis*, 119(1):79–120, 1994.

[64] F. Leymarie and M. D. Levine. Tracking deformable objects in the plane using an active contour model. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 15(6):617–634, 1993.

[65] G. Sapiro and A. Tannenbaum. On invariant curve evolution and image analysis. *Indiana Univerity Mathematics Journal*, 42(3), 1993.



[66] V. Caselles, F. Catté, T. Coll, and F. Dibos. A geometric model for active contours. *Numerische Mathematik*, 66:1–31, 1993.

[67] R. Malladi, J. A. Sethian, and B. C. Vemuri. Evolutionary fronts for topology-independent shape modeling and recovery. In *Proc. Third European Conference on Computer Vision*, pages 3–13, Stockholm, Sweden, May 1994.

[68] R. Malladi, J. A. Sethian, and B. C. Vemuri. Shape modeling with front propagation: A level set approach. *IEEE Trans. on PAMI*, 1995. in press.

[69] Vincente Caselles, R. Kimmel, and G. Sapiro. Geodesic snakes. Technical report, Univ. Illes Baleares, 1994.

[70] R. Malladi, J. A. Sethian, and B. C. Vemuri. A fast level set based algorithm for topology independent shape modeling. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 1995. special issue on Topology and Geometry in Computer Vision, Ed. A. Rosenfeld and Y. Kong, to appear.

[71] F. Leitner and P. Cinquin. Dynamic segmentation: Detecting complex topology 3D-object. In *Proceedings of International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*, pages 295–296, Orlando, Florida, November 1991.

[72] R. Szeliski and D. Tonnesen. Surface modeling with oriented particle systems. In *SIGGRAPH'92 Conference Proceedings Computer Graphics*, volume 26, pages 185–194, 1992.

[73] R. Szeliski, D. Tonnessen, and D. Terzopoulos. Curvature and continuity control in particle-based surface models. In *Proceedings SPIE 93 Conference on Geometric Methods in Computer Vision*, San Diego, CA, July 1993.

[74] Salim Djeziri. *Segmentation d'images fondée sur une méthode de croissance de régions contrôlée par un modèle géométrique de contours*. PhD thesis, Université Paris XII- Val de Marne, Novembre 1994.

[75] T. McInerney and D. Terzopoulos. Medical image segmentation using topologically adaptable snakes. In Springer, editor, *Proceedings of the First International Conference on Computer Vision, Virtual Reality, and Robotics in Medicine CVRMed'95*, Nice, France, April 1995.

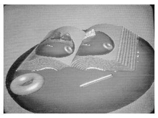
[76] B.B. Kimia, A. R. Tannenbaun, and S.W. Zucker. Shapes, shocks and deformations, I: the components of shape and the reaction-diffusion space. *International Journal of Computer Vision*, 1995. to Appear.

[77] H. Tek and B.B. Kimia. Shock based reaction-diffusion bubbles for image segmentation. Technical Report LEMS-138, Division of Engineering, Brown University, August 1994.

[78] P. G. Ciarlet. *The finite element methods for elliptic problems*. NORTH-HOLLAND, 1987.

[79] F. Leitner, I. Marque, S. Lavallée, and P. Cinquin. Dynamic segmentation: finding the edge with snake-splines. In *Proceedings of International Conference on Curves and Surfaces*, pages 1–4, Chamonix, France, June 1990. Academic Press.

[80] Laurent D. Cohen. Use of auxiliary variables in computer vision problems. Technical Report Cahiers de Mathématiques de la Décision 9409, Ceremade, February 1994. to appear in JMIV.



[81] Sylvie Menet, Philippe Saint-Marc, and Gerard Medioni. B-snakes: Implementation and application to stereo. In *Proceedings of the Seventh Israeli Conference on Artificial Intelligence and Computer Vision*, pages 227–240, Tel aviv, Israel, December 1990.

[82] S. Sinha and B. Schunk. Surface approximation using weighted splines. In *Proc. 1991 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, Maui, Hawai, June 1991.

[83] Laurent Cohen, Eric Bardinet, and Nicholas Ayache. Surface reconstruction using active contour models. In *Proceedings SPIE 93 Conference on Geometric Methods in Computer Vision*, San Diego, CA, July 1993. autre version RR Inria 1824, Décembre 1992.

[84] J.M. Morel G. Koepfler and S. Solimini. Segmentation by minimizing a functional and the "merging" methods. In *Proceedings of GRETSI*, pages 1033–1036, Juan-les-Pins, September 1991.

[85] G. Koepfler, C. Lopez, and J.M. Morel. A multiscale algorithm for image segmentation by variational method. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 31(1), february 1994.

[86] A.L. Yuille, P.W. Hallinan, and D.S. Cohen. Feature extraction from faces using deformable templates. *International Journal of Computer Vision*, 8(3), September 1993.

[87] Benedicte Bascle. *Contributions et applications des modèles déformables en Vision par Ordinateur*. PhD thesis, Université de Nice Sophia Antipolis, Juillet 1994.

[88] Isaac Cohen and Laurent D. Cohen. A hybrid hyperquadric model for 2-D and 3-D data fitting. In *Proceedings of the 12th IEEE International Conference on Pattern Recognition (ICPR'94)*, pages B–403–405, Jerusalem, 1994. Part of Inria TR 2188, to appear in *Computer Vision, Graphics, and Image Processing : Image Understanding*.

[89] Eric Bardinet, Laurent Cohen, and Nicholas Ayache. Fitting 3D data using superquadrics and free-form deformations. In *Proceedings of the 12th IEEE International Conference on Pattern Recognition (ICPR'94)*, pages A–79–83, Jerusalem, October 1994.

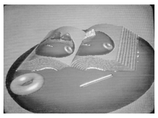
[90] Laurent D. Cohen. Auxiliary variables and two-step iterative algoritms in computer vision problems. Technical report, Ceremade, Février 1995. Cahiers de Mathématiques de la Décision 9511, to appear in Journal of Mathematical Imaging and Vision and Proceedings ICCV'95, Boston.

[91] D. Geman and Reynolds. Constrained restoration and the recovery of discontinuities. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14:367–383, March 1992.

[92] A. Chambolle and P.L. Lions. Image recovery via total variation minimization and related problems. Technical Report 9509, CEREMADE, Université Paris-Dauphine, Paris, France, February 1995.

[93] G. Aubert, M. Barlaud, L. Blanc-Féraud, and P. Charbonnier. A deteministic algorithm for edge-preserving computed imaging using Legendre transform. In *Proc. 12th International Conference on Pattern Recognition*, pages C–188–191, Jerusalem, Israel, October 1994.

[94] L. Cohen and R. Kimmel. Edge integration using minimal geodesics. Technical report, Ceremade, Université Paris Dauphine, Janvier 1995. Cahiers de Mathématiques de la Décision 9504.



[95] R. Kimmel, A. Amir, and A. Bruckstein. Finding shortest paths on surfaces using level sets propagation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI, 1994. to appear.

[96] R. Kimmel, N. Kiryati, and A. M. Bruckstein. Distance maps and weighted distance transforms. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 1995. Special Issue on Topology and Geometry in Computer Vision, to appear.

[97] E. Rouy and A. Tourin. A viscosity solutions approach to shape-from-shading. *SIAM. J. Numer. Analy.*, 29:867–884, 1992.

[98] W. Neuenschwander, P. Fua, G. Szekely, and O. Kubler. Making snakes converge from minimal initialization. In *Proc. 12th International Conference on Pattern Recognition*, pages A–613–615, Jerusalem, Israel, 1994.

[99] F. Leymarie and M. D. Levine. Simulating the grassfire transform using an active contour model. *IEEE Transations on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14(1):56–75, 1992.

[100] D. Rutovitz. Data structures for operations on digital images. In G.C. Cheng, R.S. Ledley, D.K. Pollock, and A. Rosenfeld eds, editors, *Pictorial pattern recognition*, pages 105–133. Thompson Book, Washington, 1968.

[101] P W Verbeek and B J H Verwer. Shading from shape, the eikonal equation solved by gray-weighted distance transform. *Pattern Recognition Letters*, 11:681–690, 1990.

[102] R. Malladi and J. A. Sethian. A unified framework for shape segmentation representation, and recognition. Technical Report LBL-36069 UC-405, Dept. of Mathematics, Univ. of California, Berkeley, August 1994.

[103] M. Sussman, P. Smereka, and S. Osher. A level set approach for computing to incompressible two-phase flow. Technical Report CAP 93-18, Dept. of Mathematics, Univ. of California, Los Angeles, June 1993.

10 Curriculum Vitae

ETUDES:

Juin 1979: Baccalauréat C, Mention B.
1979-1981: Classes préparatoires aux Grandes Ecoles au Lycée Louis-le-Grand à Paris.
1981-1985: Elève de **l'Ecole Normale Supérieure** (45 rue d'Ulm,Paris).
Juin 1982: Maîtrise de Mathématiques, Mention TB, à Paris VI.
Juin 1983: DEA d'Analyse Numérique, Mention TB, à Paris VI.
Juillet 1983: reçu **Major à l'Agrégation** de Mathématiques.
1983-1986: Doctorat de Mathématiques sous la direction du Pr H.BREZIS à Paris VI.
Juin 1985: DEA d'Intelligence Artificielle et Reconnaissance des Formes à Paris VI
1988-1990: Second Doctorat en Informatique à Paris XI- Orsay, regroupant certaines de mes contributions au traitement d'images à l'INRIA.

EXPERIENCE PROFESSIONNELLE

Avril-Juin 1984: Stage chez "Avions Marcel Dassault-Bréguet Aviation" (S^t Cloud) dans le Service d'Aérodynamique Théorique de Mr P.PERRIER.

Novembre-Décembre 1984: Tuteur à l'"International Centre for Theoretical Physics" à Trieste (Italie) pendant l'"Autumn Course on Semigroups, Theory and Applications".

Mai-Décembre 1985: "SCHLUMBERGER Palo Alto Research"(Palo Alto, Californie, Etats-Unis) :Chercheur dans le groupe "Perception & Graphics" de Traitement et Synthèse d'Images dirigé par A.WITKIN.

Juillet 1986-Novembre 1987: "SCHLUMBERGER Montrouge Recherche": 12 place des Etats-Unis, 92124 Montrouge, France. Chef du Projet de Recherche en Théorie de l'Information comprenant des études en Cryptographie, Sécurité Informatique, Compression de Données texte et Image, Traitement d'Images.

Depuis Janvier 1988: "SCHLUMBERGER Montrouge Recherche": Expert Conseil en traitement d'images pour des projets en compression d'image, restauration d'images de radiographie industrielle, extraction de contours et segmentation, reconnaissance de formes.

Janvier-Décembre 1988: INRIA (Institut National de Recherche en Informatique et Automatique, Rocquencourt, France) : Service Militaire scientifique, Chercheur dans le projet SYNTIM de traitement et synthèse d'images dirigée par A. GAGALOWICZ travaillant sur le projet de Stéréovision par mise en correspondance de régions après segmentation.

Depuis Janvier 1989: INRIA : Conseiller Scientifique pour le projet d'imagerie médicale EPIDAURE dirigée par N. AYACHE travaillant sur les applications des modèles déformables à l'extraction et la reconstruction de formes dans des images médicales.

Depuis 1989: Cours de DEA à Orsay puis à Dauphine sur les applications des modèles déformables au traitement d'images. Participation aux modules de Robotique et vision à Centrale, aux Mines, à l'ENSTA et à l'INSTN. Encadrement de stagiaires de DEA et thésards.

Depuis Janvier 1990: CNRS: Chargé de Recherches 1ère classe au CEREMADE, URA 749, Université Paris-Dauphine, sur les applications des méthodes variationnelles au traitement d'images.

EXPERIENCE INFORMATIQUE: SUN, HP sous Unix, DEC VAX/VMS, Machine LISP de Symbolics; C, LISP, PASCAL, FORTRAN, SMP, LaTeX.

Module Intensif de DEA (1 semaine de cours+TD/Machine): APPLICATIONS DES MÉTHODES VARIATIONNELLES AU TRAITEMENT D'IMAGES

Laurent D. COHEN
CEREMADE, Université Paris - Dauphine

Ce cours présente la formulation mathématique en termes de minimisation de fonctionnelle et/ou d'equations aux dérivées partielles de problèmes fondamentaux du Traitement d'Images.
L'utilisation d'une énergie à minimiser pour traduire les propriétés recherchées a permis, ces dix dernieres années, de définir une nouvelle approche pour la segmentation, la restauration, l'extraction de contour et l'introduction des contours actifs.

Introduction et Généralités sur le Traitement d'Images

Segmentation d'images.
Segmentation définie par prédicats. Croissance de régions. Energie d'une segmentation.
Extraction de contours. Calcul du gradient. Seuillage. Extraction des maxima. Chainage.

Formulation Mathématique du calcul de Gradient

Approximation des fonctions. Fonctions Splines.
Méthode de Canny. Critères de localisation et réponse unique à un contour.
Régularisation de Tikhonov pour le problème de dérivation.
Résolution du problème discret.

Scale Space Filtering

Scale Space: Représentation multiechelle. Filtrage multiechelle. Diffusion anisotropique.

Modèles Déformables et Contours Actifs

"Snakes". Théorie génerale. Modèle de Ballon. Potentiel d'attraction. Distance à un ensemble de contours. Résolution Numérique.
Surfaces Déformables. Reconstruction 3D.
Modèles paramétriques déformables (superquadriques, hyperquadriques, B-snakes). Autres Applications (Stéréo, Surface à quasi symétrie de révolution,...). Justification mathématique du lien entre "snakes" et contours.
Liens avec évolution de courbes planes par déformation normale. Modèles de contour actif géométrique et géodésique par évolution de courbes de niveau d'une surface, déplacement de fronts.

Régularisation avec détection de discontinuités

Modèle elastique avec continuité faible. Energie de Mumford et Shah, Blake et Zisserman.
Seuils de détection. Localisation et erreurs.
Modèles de poutre, membrane et plaque avec continuité faible.
Résolution par non convexité graduée.

11 Principales Publications

[1] P.Baras and L. D. Cohen. Explosion totale après t_{max} de la solution d'une équation de la chaleur non linéaire. *Comptes Rendus de l' Académie des Sciences Sér.I*, 300(10), 1985.

[2] P.Baras and L. D. Cohen. Complete blow-up after t_{max} for the solution of a semilinear heat equation. *Journal of Functional Analysis*, 71(1):142–174, March 1987.

[3] Laurent D. Cohen. Méthodes de moindres carrés pour l'équation de burgers. Technical report, Avions Marcel Dassault-Bréguet Aviation, 1984.

[4] L. D. Cohen. Quantification vectorielle appliquée à la détection de textures. Technical report, SCHLUMBERGER Palo Alto Research, Californie, USA, 1985.

[5] L. D. Cohen and A. Witkin. Recursive book. Film, 1985. SCHLUMBERGER Palo Alto Research.

[6] Laurent D. Cohen. *Etude de quelques problèmes semi-linéaires paraboliques et elliptiques.* PhD thesis, Université Paris 6, 1986.

[7] Laurent D. Cohen. A new approach of vector quantization for image data compression and texture detection. In *International Conference on Pattern Recognition*, Rome, 1988.

[8] Laurent Cohen, Laurent Vinet, Peter T. Sander, and André Gagalowicz. Hierarchical region based stereo matching. In *Proc. 1989 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, San Diego, June 1989.

[9] N. Ayache, J.D. Boissonnat, E. Brunet, L. Cohen, J.P. Chièze, B. Geiger, O. Monga, J.M. Rocchisani, and P. Sander. Building highly structured volume representations in 3D medical images. In *Computer Aided Radiology*, Juin 1989. Berlin, West-Germany.

[10] Laurent D. Cohen. On active contour models. In *Proceedings of NATO ASI Active perception and Robot vision*, Maratea, July 1989. Springer. aussi RR Inria 1075.

[11] N. Ayache, J.D. Boissonnat, L. Cohen, B. Geiger, O. Monga, J. Levy-Vehel, and P. Sander. Steps toward the automatic interpretation of 3D images. *NATO ASI Series on 3D Imaging in Medicine*, F 60:107–120, 1990.

[12] Laurent D. Cohen. *Etude des modèles de contours actifs et d'autres techniques de traitement d'Images.* PhD thesis, Université Paris-Sud Orsay, 1990.

[13] L.D. Cohen and Isaac Cohen. Using a finite element method for active contour models and 3-D reconstruction from cross sections. In Y.A. Feldman and A. Bruckstein, editors, *Artificial Intelligence and Computer Vision*, pages 237–247. Elsevier Science Publishers B.V., North-Holland, 1991. aussi Proceedings de ICCV'90 et RR Inria 1245.

[14] Laurent D. Cohen. On active contour models and balloons. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing : Image Understanding*, 53(2):211–218, March 1991.

[15] Isaac Cohen, Laurent D. Cohen, and Nicholas Ayache. Using deformable surfaces to segment 3-D images and infer differential structures. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing : Image Understanding*, 56(2):242–263, September 1992. présenté en partie dans les Proceedings des conférences CVPR91, IAICV91, EMBS91 et RR Inria 1403, May 1991.

[16] Laurent D. Cohen and Isaac Cohen. Finite element methods for active contour models and balloons for 2-D and 3-D images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-15(11), November 1993. version longue dans Cahiers de Mathématiques de la Décision 9124, Novembre 1991, voir aussi Proceedings de CVPR'92, Champain, Illinois, Juin 1992.

[17] N. Ayache, P. Cinquin, I. Cohen, L. Cohen, F. Leitner, and O. Monga. Segmentation of complex 3D medical objects : a challenge and a requirement for computer assisted surgery planning and performing. In R. Taylor and S. Lavallee, editors, *Computer Integrated Surgery*. MIT Press, 1994.

[18] Laurent Cohen, Eric Bardinet, and Nicholas Ayache. Surface reconstruction using active contour models. In *Proceedings SPIE 93 Conference on Geometric Methods in Computer Vision*, San Diego, CA, July 1993. autre version RR Inria 1824, Décembre 1992.

[19] Isaac Cohen and Laurent D. Cohen. A hybrid hyperquadric model for 2-D and 3-D data fitting. In *Proceedings of the 12th IEEE International Conference on Pattern Recognition (ICPR'94)*, pages B–403–405, Jerusalem, 1994. Extrait de RR Inria 2188, à paraître au journal *Computer Vision and Image Understanding*.

[20] Eric Bardinet, Laurent Cohen, and Nicholas Ayache. Fitting 3D data using superquadrics and free-form deformations. In *Proceedings of the 12th IEEE International Conference on Pattern Recognition (ICPR'94)*, pages A–79–83, Jerusalem, October 1994. aussi congrès WBIA'94 et CVRMed'95.

[21] Laurent D. Cohen. Auxiliary variables and two-step iterative algoritms in computer vision problems. Technical report, Ceremade, Université Paris Dauphine, Février 1995. Cahiers de Mathématiques de la Décision 9511, à paraître au Journal of Mathematical Imaging and Vision et Proceedings conférence ICCV'95, Boston.

[22] L. Cohen and R. Kimmel. Edge integration using minimal geodesics. Technical report, Ceremade, Université Paris Dauphine, Janvier 1995. Cahiers de Mathématiques de la Décision 9504.

12 Publications Jointes au Mémoire

[1] Laurent D. Cohen. A new approach of vector quantization for image data compression and texture detection. In *International Conference on Pattern Recognition*, Rome, 1988.

[2] Laurent Cohen, Laurent Vinet, Peter T. Sander, and André Gagalowicz. Hierarchical region based stereo matching. In *Proc. 1989 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, San Diego, June 1989.

[3] Laurent D. Cohen. On active contour models and balloons. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing : Image Understanding*, 53(2):211–218, March 1991.

[4] Laurent D. Cohen and Isaac Cohen. Finite element methods for active contour models and balloons for 2-D and 3-D images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-15(11), November 1993. version longue dans Cahiers de Mathématiques de la Décision 9124, Novembre 1991, voir aussi Proceedings de CVPR'92, Champain, Illinois, Juin 1992.

[5] Isaac Cohen, Laurent D. Cohen, and Nicholas Ayache. Using deformable surfaces to segment 3-D images and infer differential structures. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing : Image Understanding*, 56(2):242–263, September 1992. présenté en partie dans les Proceedings des conférences CVPR91, IAICV91, EMBS91 et RR Inria 1403, May 1991.

[6] Laurent Cohen, Eric Bardinet, and Nicholas Ayache. Surface reconstruction using active contour models. In *Proceedings SPIE 93 Conference on Geometric Methods in Computer Vision*, San Diego, CA, July 1993. autre version RR Inria 1824, Décembre 1992.

[7] Isaac Cohen and Laurent D. Cohen. A hybrid hyperquadric model for 2-D and 3-D data fitting. In *Proceedings of the 12th IEEE International Conference on Pattern Recognition (ICPR'94)*, pages B–403–405, Jerusalem, 1994. Extrait de RR Inria 2188, à paraître au journal *Computer Vision and Image Understanding*.

[8] Eric Bardinet, Laurent Cohen, and Nicholas Ayache. Fitting 3D data using superquadrics and free-form deformations. In *Proceedings of the 12th IEEE International Conference on Pattern Recognition (ICPR'94)*, pages A–79–83, Jerusalem, October 1994. aussi congrès WBIA'94 et CVRMed'95.

[9] Laurent D. Cohen. Auxiliary variables and two-step iterative algoritms in computer vision problems. Technical report, Ceremade, Université Paris Dauphine, Février 1995. Cahiers de Mathématiques de la Décision 9511, à paraître au Journal of Mathematical Imaging and Vision et Proceedings conférence ICCV'95, Boston.

[10] L. Cohen and R. Kimmel. Edge integration using minimal geodesics. Technical report, Ceremade, Université Paris Dauphine, Janvier 1995. Cahiers de Mathématiques de la Décision 9504.

Table des matières