THÈSE

préparée à

L'INRIA Sophia-Antipolis

et présentée à

L'ÉCOLE CENTRALE PARIS

pour obtenir le grade de

DOCTEUR de L'ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES

Spécialité

Traitement de l'image

par

Pascal CACHIER

Sujet de la thèse :

RECALAGE NON RIGIDE D'IMAGES MEDICALES VOLUMIQUES

CONTRIBUTIONS AUX APPROCHES ICONIQUES ET GÉOMÉTRIQUES

Soutenance prévue le 29 janvier 2002 devant un jury composé de :

Laurent	**COHEN**	Rapporteurs
Dirk	**VANDERMEULEN**	
Nicholas	**AYACHE**	Directeur
Jean-François	**MANGIN**	Examinateurs
Xavier	**PENNEC**	
Christian	**SAGUEZ**	

Remerciements

Table des matières

Introduction

1 Contexte

Cette thèse se démarquera peu de celles de mes aînés d'Epidaure en commençant par rappeler que l'essor des traitements informatiques en imagerie médicale s'explique naturellement par le progrès exponentiel et la généralisation des moyens de calculs, mais également par l'accroissement tout aussi impressionnant du volume des données acquises quotidiennement en routine clinique.

En effet, les modalités d'imagerie médicale se sont multipliées depuis 30 ans sous la poussée d'innovations technologiques majeures : scanner hélicoïdaux puis *multiarray* ; imagerie par résonance magnétique (IRM) T1, T2, marquée, et plus récemment IRM fonctionnelle ou de diffusion ; échographie tridimensionnelle, *doppler*, ou harmonique ; imageries isotopiques telles que la tomographie par émission de positons (TEP) ou par émission monophotonique (TEMP)... Les progrès accomplis sont énormes.

De surcroît, les images acquises sont de plus en plus souvent *volumiques*. Elles représentent une partie tridimensionnelle du corps du patient, et non simplement une projection, comme en radiologie conventionnelle, ou une coupe, comme en échographie. Leurs résolutions sont également devenues impressionnantes : la taille des voxels descend fréquemment en dessous du millimètre, voire du demi-millimètre. Une image scanner typique a une dimension de $512 \times 512 \times 128$ — codée sur deux octets, l'image occupe pas moins de 64Mo.

Face à cette montée du volume des données cliniques, l'intérêt de développer des outils de traitement facilitant la tâche des médecins s'est imposée comme une évidence. L'utilisation des ressources volumiques demande un traitement beaucoup plus *complexe* qu'avec des images bidimensionnelles classiques. Par exemple, le calcul de la fraction d'éjection du ventricule gauche du cœur, utilisée pour l'étude des maladies cardio-vasculaires, suppose que l'on segmente cette cavité dans les images cardiaques. Or, si le médecin peut réaliser cette tâche rapidement dans les images bidimensionnelles, la segmentation d'une image tridimensionnelle est beaucoup plus laborieuse.

L'un des problèmes les plus courants posés par ces images est celui de leur alignement, ou de leur recalage, pour reprendre la terminologie en usage. C'est à ce problème que nous allons nous intéresser tout au long de cette thèse.

2 Le recalage d'images

Si l'on devait résumer le recalage d'images en une phrase, on pourrait dire que cela consiste à déplacer ou à déformer une image de manière à ce qu'elle ressemble à une autre. En fait, il y a de multiples raisons pour lesquelles on peut s'intéresser à ce genre de traitement, et pratiquement chacune a des priorités différentes ; leur point commun, cependant, est que ces tâches sont souvent très laborieuses, voire impossibles , à faire manuellement pour des images volumiques. Les algorithmes de recalage sont de ce fait assez nombreux et variés.

Dans le cas du suivi d'un patient atteint de sclérose en plaques, le médecin est amené à comparer des IRM d'un patient acquises à plusieurs semaines d'écart. Dans ces images, la position de la tête du patient n'est jamais exactement la même ; or, pour détecter les évolutions, par exemple en soustrayant l'une des images à l'autre, celles-ci doivent être alignées dans le même système de coordonnées. Pour cela, le médecin s'appuiera sur un recalage rigide monomodal monosujet : *rigide*, puisque l'objet présent dans les images (la tête du patient) ne s'est pas déformée entre les acquisitions ; *monomodal*, parce que les deux images proviennent de la même modalité d'imagerie ; *monosujet*, parce que les deux images représentent le même organe du même patient.

Parfois, les déformations recherchées sont *non rigides*, notamment pour des tâches de suivi de déformations. Un exemple d'une telle application est le suivi de l'affaissement du cerveau dû à la perte de liquide céphalorachidien au cours d'une opération de neurochirurgie endoscopique, en utilisant un système d'imagerie per-opératoire comme les échographies. Cette simple différence dans l'espace de recherche du lien géométrique entre les images édifie en fait un véritable mur entre les méthodes, car les algorithmes de recalage non rigide doivent faire face au problème de la *régularisation* de la transformation, c'est-à-dire de la modélisation des contraintes physiques de continuité et de déformation des milieux présents dans l'image.

Le problème de recalage peut aussi être *multimodal*. Ce cas arrive lorsque l'on désire recaler des images provenant de modalités différentes afin d'en tirer des informations complémentaires, par exemple pour visualiser des données fonctionnelles données par des images TEP sur une anatomie fournie par une IRM. Cette tâche est beaucoup plus compliquée que l'alignement d'images provenant de la même modalité, car leur contenu n'est pas directement comparable. Cette division entre recalages monomodal et multimodal est également un deuxième critère important de classification.

Enfin, le recalage peut être *intersujet*, autrement dit, les images à comparer contiennent les anatomies d'individus distincts. Le problème du recalage intersujet est mal posé, car il n'existe *a priori* aucune transformation qui relie les anatomies de deux sujets distincts. La transformation doit être plutôt comprise comme un ensemble d'appariements entre points géométriques ou anatomiques homologues ; or, ces homologies dépendent de l'application que l'on vise au travers de ce recalage, c'est-à-dire d'une connaissance *a priori* sur la solution recherchée. Par exemple, nous pouvons recaler deux foies simplement en fonction de leur forme extérieure ; mais pour une application de chirurgie hépatique, nous devons en plus aligner les segments de Couinaud homologues, qui reposent sur les embranchements de la veine porte à l'intérieur du foie. Les algorithmes de recalage intersujet les plus récents prennent en compte explicitement ces connaissances supplémentaires, le plus souvent sous la forme de segmentations étiquetées ; cette complexification et cette spécialisation de ces nouveaux algorithmes intersujets tendent actuellement à renforcer ce troisième critère de classification.

3 Problématique de la thèse

3.1 De nouveaux outils de compréhension

Les algorithmes de recalage non rigide, qui sont au cœur de cette thèse, sont probablement ceux ayant le plus déchaîné l'imagination des chercheurs. Les techniques sont très diversifiées et les sources d'inspirations multiples : formulations statistiques, mécanique des milieux élastiques ou mécanique des fluides, théorie de la thermodynamique, flux optique, splines, base de Fourier, ondelettes, recalage par blocs...

Pour s'y retrouver, ces algorithmes sont traditionnellement classés selon une matrice comprenant deux axes (les critères que nous venons d'évoquer à la section précédente faisant référence à l'application plus qu'à la méthodologie). D'un côté, l'axe des primitives sépare les algorithmes *iconiques* (utilisant l'intensité des images) des algorithmes *géométriques* (utilisant des amers géométriques extraits des images, comme les bords d'un objet). De l'autre, l'axe des régularisations divise les algorithmes en trois classes : les algorithmes *paramétriques* (utilisant des transformations paramétriques, comme des polynômes ou des B-splines), les algorithmes *compétitifs* (utilisant une énergie de régularisation portant sur la transformation) et les algorithmes *fluides* (contraignant la transformation à évoluer de manière continue vers la solution).

Or, cette matrice est trop grossière pour expliquer les différences fondamentales entre certains algorithmes. En particulier, la catégorie des algorithmes de recalage iconique compétitif est beaucoup trop large. D'un côté, nous y trouvons des algorithmes bien posés, minimisant une somme pondérée d'une énergie de similarité des intensités et d'une énergie de régularisation. De l'autre côté, nous trouvons des algorithmes procédant généralement en alternant deux étapes, une étape de déplacement en utilisant une énergie de similarité, et une étape de lissage de ces déplacements — dans cette thèse, nous les qualifions d'algorithmes « apparie-et-lisse » (*Pair-and-Smooth*, ou P&S). Dans cette catégorie, nous trouvons les algorithmes de recalage par blocs (*block matching*), les algorithmes reposant sur l'équation du flux optique comme l'algorithme des « démons », ou encore les techniques reposant sur l'alignement des profils d'intensités. La quasi-totalité de ces algorithmes ne minimise pas d'énergie. Dès lors, nous sommes en droit de nous poser la question de savoir si les algorithmes P&S sont simplement des versions peu rigoureuses, bien qu'efficaces, des autres algorithmes.

Dans cette thèse nous montrons qu'au contraire, ces algorithmes forment bien une classe à part, et qu'il convient de les différencier, car leur comportement les oppose complètement. Nous montrons que ces algorithmes P&S reposent sur des *primitives différentes*. En conséquence, nous scindons les algorithmes iconiques en deux classes.

- D'un côté, les algorithmes iconiques standard (*Standard Intensity Based*, ou SIB), reposant sur les intensités, et dont la transformation est contrainte à la fois par une mesure de similarité des intensités et par une régularisation paramétrique, compétitive, ou fluide.
- De l'autre côté, les algorithmes reposant sur l'appariement d'*amers iconiques* (*Iconic Feature Based*, ou IFB), et dont la transformation est contrainte à la fois à être proche de ces appariements, et à être lisse par une technique de régularisation paramétrique, compétitive ou fluide. Les algorithmes IFB compétitifs sont généralement en deux étapes, et donc P&S.

Cette distinction que nous avons introduite est fondamentale pour comprendre les différences de comportement entre ces deux classes d'algorithmes. Par exemple, les solutions fournies par les algorithmes P&S ont une régularité beaucoup plus uniforme que les algorithmes SIB compétitifs. Grâce à notre concept d'amers iconiques, cela s'explique facilement par l'inhomogénéité du compromis entre les deux énergies de similarité et de régularité des algorithmes SIB compétitifs, et qui est rendu homogène dans les algorithmes P&S. De ce fait, les algorithmes P&S fournissent de meilleurs résultats de recalage.

Cependant, et malgré leurs performances, les algorithmes P&S (et d'une manière générale, les algorithmes IFB) ne minimisent généralement pas d'énergie globale. Nous avons donc conçu une nouvelle énergie de recalage d'amers iconiques, dont la minimisation mène à un algorithme P&S. Cette énergie généralise d'ailleurs de manière remarquable les énergies des rares algorithmes P&S qui minimisent une énergie globale, comme l' « ICP généralisé », et explique d'autres algorithmes, comme les « démons », comme étant des cas limites de cette énergie lorsque certains paramètres tendent vers zéro. Ces explications permettent d'éclaircir de manière élégante, et de corriger, certaines bizarreries des algorithmes P&S traditionnels, comme la faible robustesse face aux hypothèses de conservation de l'intensité, et la nécessité d'alterner des minimisations très peu poussées.

3.2 De nouveaux outils de mise en œuvre

Notre nouvelle énergie générale de recalage non rigide P&S nous donne un formalisme de travail. Elle ne précise pas quelles énergies de similarité ou de régularisation utiliser. C'est à nous de les choisir en fonction de nos applications. Dans cette thèse, nous en présentons trois.

Suivi du cerveau dans une séquence d'échographies 3D. La première application concerne le suivi des déformations du cerveau dans des séquences échographiques au cours d'une opération de neurochirurgie endoscopique. L'utilisation d'échographies pour ce genre d'opérations est une avancée majeure pour le patient, car l'opération ne nécessite plus qu'une petite ouverture dans le crâne, au lieu d'une portion beaucoup plus grosse lorsque le neurochirurgien doit opérer à l'oeil nu. En plus du gain esthétique apporté, une ouverture réduite diminue le traumatisme et décroît le risque de complications postopératoires.

Recalage intersujet de cerveaux. Notre seconde application concerne le recalage intersujet de cerveaux. Nous l'avons déjà souligné plus haut, le recalage intersujet est un problème compliqué ; il est encore plus complexe lorsqu'il s'agit de cerveaux, car la variabilité interindividuelle de cet organe est importante. Les solutions actuelles les plus abouties dans ce domaine utilisent une segmentation étiquetée de certains sillons corticaux en plus des intensités des images des cerveaux (typiquement, des IRM).

Interpolation de deux images Le problème de l'interpolation de deux images représentant la même scène à deux stades différents de son évolution consiste à créer une image intermédiaire représentant la scène dans une configuration intermédiaire plausible. L'intérêt de cette discipline porte surtout sur les effets spéciaux (morphismes d'images, ralentis de séquences vidéos) mais des applications en imagerie médicale existent, comme l'interpolation inter-coupes d'images ayant une faible résolution axiale relativement aux autres axes, typiquement des images scanner.

Toutes ces applications que nous allons traiter sont monomodales. Cependant, l'hypothèse de conservation de l'intensité n'est pas forcément valide pour autant. Les IRM que nous utilisons pour le recalage intersujet de cerveaux sont typiquement corrompues par un biais multiplicatif non uniforme. En morphisme d'images, il est improbable que deux visages aient exactement le même teint. Pour nous affranchir de l'hypothèse de conservation de l'intensité, très pénalisante, nous allons développer des *nouvelles mesures de similarité non uniformes* à la fois rapides à calculer et très efficaces.

Dans le cas du suivi de mouvement, il est important que l'algorithme de recalage fournisse des transformations réalistes. Par exemple, si un objet est étiré dans le sens de sa longueur, il paraît normal que son épaisseur diminue. Or, la majorité des énergies de régularisation ne peuvent rendre compte de ce genre de mouvement, car elles ne possèdent pas de termes croisés entre les coordonnées. Nous allons donc également développer des *énergies de régularisation plus réalistes*, possédant des termes croisés.

Enfin, concernant le recalage intersujet de cerveaux, nous modifions notre algorithme P&S en un *algorithme hybride* P&S/géométrique. La modification de notre énergie de recalage non rigide P&S aboutit à un algorithme non plus en deux mais en trois étapes. La dernière de ces étapes possède une solution explicite très jolie, mêlant convolution pour les termes iconiques et splines pour les termes géométriques. L'introduction de contraintes géométriques dans notre algorithme P&S est une avancée importante pour de nombreuses applications et qui dépasse le cadre du recalage intersujet ; elle peut servir notamment à introduire une interaction avec l'utilisateur, jusqu'ici quasiment inexistante en recalage iconique.

4 Organisation du manuscrit et contributions

Le manuscrit est composé de 9 chapitres, regroupés en deux parties. La première partie (chapitres 1 à 6) est une présentation des développements théoriques menant à nos algorithmes de recalage non rigide. La seconde partie (chapitres 7 à 9) présente trois applications particulières de nos algorithmes, dans le cadre de contrats ou de collaborations.

4.1 Partie théorique

La première partie est organisée de la manière suivante.

Chapitre 1 : Nouvelle classification du recalage. Le premier chapitre est un état de l'art du domaine du recalage d'images médicales. Nous présentons notre nouvelle classification des algorithmes de recalage, en introduisant la notion d'amers iconiques. Cette nouvelle classification est fondamentale pour comprendre les différences de comportement entre certains algorithmes iconiques.

Chapitre 2 : Première étude des algorithmes P&S. La motivation de ce chapitre est une généralisation de l'algorithme P&S des « démons » ; en particulier, nous voulons nous affranchir de l'hypothèse de conservation de l'intensité, très contraignante. Nous montrons comment relier l'algorithme des « démons » à une minimisation alternée de deux énergies, et partant de ce constat, nous développons l'algorithme `MAMAN`. Nous développons pour cet algorithme une régularisation mixte élastique/fluide, qui permet de tirer le meilleur de ces deux types de régularisation ; nous introduisons également une technique de reparamétrisation de la transformation, très utile en grands déplacements. Ce travail a été partiellement publié dans (Cachier et al., 1999).

Chapitre 3 : Une énergie pour le recalage P&S. Le troisième chapitre est la clé de voûte de ce travail. Dans une première partie, nous montrons d'un point de vue expérimental les différences entre les algorithmes P&S et SIB compétitifs, afin de mettre en avant la nécessité de notre nouvelle classification. Dans une seconde partie, nous développons une nouvelle énergie pour le recalage P&S. Cette énergie généralise la plupart des approches P&S précédentes et nous permet en outre d'éclaircir de nombreux comportements inexpliqués jusqu'ici, dont certains étaient soulevés au chapitre précédent. Ce chapitre a été publié dans (Cachier et Ayache, 2001a).

Chapitre 4 : Nouvelles mesures de similarité. Dans ce chapitre, nous développons des énergies de similarité reposant sur des modèles relationnels affines entre les intensités des images. En outre, ces modèles relationnels sont *non uniformes*, c'est-à-dire que les paramètres des modèles peuvent varier en fonction de la position. Cela permet, par exemple, de nous affranchir des biais non uniformes typiques de l'IRM. De plus, nous élaborons une technique de calcul très rapide, à base de convolutions. Ce chapitre a fait l'objet d'une publication dans (Cachier et Pennec, 2000).

Chapitre 5 : Nouvelles énergies de régularisation vectorielle. Dans ce chapitre, nous développons des énergies vectorielles quadratiques isotropes possédant des effets croisés entre les coordonnées. Les énergies que nous développons généralisent l'énergie de l'élasticité linéaire aux ordres de dérivation plus élevés. Nous déduisons les filtres et les splines associés, nécessaires pour leur application en recalage géométrique ou P&S. Nous établissons également une famille de filtres séparables isotropes, généralisant le filtrage gaussien aux champs de vecteurs, et implémentables au moyen de filtres récursifs. Nous avons publié sur les énergies isotropes vectorielles dans (Cachier et Ayache, 2001b).

Chapitre 6 : Symétrie du recalage. Enfin, le chapitre 6 s'intéresse au problème de la symétrie du recalage. La quasi-totalité des algorithmes de recalage, y compris `MAMAN` et `PASHA`, sont dissymétriques, c'est-à-dire que les résultats diffèrent selon laquelle des deux images est prise comme image de référence. Nous expliquons les raisons de la dissymétrie par une liste de trois causes, puis nous résolvons l'une d'elles en élaborant le concept d'énergie invariante par inversion. L'intérêt de ce travail est profond, à la fois pour comprendre les différences de comportement des algorithmes entre les croissances et les décroissances, que certains auteurs avaient déjà remarquées mais expliquées de manière peu satisfaisante, et pour apporter des solutions concrètes à ces problèmes. Ce travail a fait l'objet d'une publication dans (Cachier et Rey, 2000).

4.2 Partie expérimentale

La seconde partie du manuscrit est organisé de la manière suivante.

Chapitre 7 : Suivi du mouvement dans des séquences échographiques. Le chapitre 7 présente nos travaux sur le suivi de déformations dans une séquence d'échographies 3D, dans le cadre du projet européen Roboscope. Ce projet est une étude de faisabilité de l'utilisation d'échographies pour suivre les déformations du cerveau dans le cadre d'une opération de neurochirurgie endoscopique. Nous montrons que l'algorithme `MAMAN` permet de suivre un fantôme dans une telle séquence, et de générer, à partir d'une IRM prise dans la position de départ, des IRM virtuelles très proches de celles obtenues par des acquisitions réelles. Ce chapitre a été publié dans (Pennec et al., 2001).

Chapitre 8 : Recalage intersujet de cerveaux. Le cortex humain possède une variabilité topologique interindividuelle phénoménale. En conséquence, un algorithme classique ne peut recaler deux cerveaux différents sans connaissance anatomique supplémentaire. En reprenant un résultat théorique établi au chapitre 5, nous ajoutons dans l'énergie minimisée par `PASHA`, en plus de l'énergie de similarité des intensités, une distance géométrique entre les sillons corticaux, préalablement segmentés et étiquetés par les algorithmes du service hospitalier Frédéric Joliot du CEA, et améliorons ainsi considérablement à la fois la précision et la robustesse du recalage. Les résultats remarquables obtenus par notre algorithme ont incité son transfert au service hospitalier Joliot Curie du CEA, actuellement en cours. Nous avons publié cet algorithme dans (Cachier et al., 2001).

Chapitre 9 : Interpolation de deux images. Enfin, nous présentons au chapitre 9 une solution au problème de l'interpolation de deux images reposant sur l'algorithme de recalage symétrique développé au chapitre 6. L'intérêt de notre approche est qu'elle est symétrique et automatique, contrairement à la majorité des approches qui reposent sur une segmentation manuelle des images. Les résultats sont d'une grande qualité ; notre algorithme permet même d'*extrapoler* les images de manière très réaliste. Notre méthode a fait l'objet d'une étude pour la société RealViz, spécialisée dans le traitement de l'image et les effets spéciaux. Ce travail a été soumis à ECCV'02.

Enfin, nous conclurons cette thèse en faisant le bilan de notre approche et de nos contributions, et en donnant une perspective des points qui nous semblent important d'améliorer dans le futur.

Première partie

Développements théoriques

Chapitre 1

État de l'art et nouvelle classification des algorithmes de recalage

« — *Composons une* Histoire de France, *avec tous les détails, en cinquante volumes.*

Cette proposition m'enchanta, et je l'accueillis avec des battements de mains et des cris de joie.

— Tous les détails ! répéta Fontanet. Il faut mettre tous les détails !

C'est bien ainsi que je l'entendais. Tous les détails ! (...)

Nous la commençâmes, cette histoire. Je ne sais, ma foi, plus pourquoi nous la commençâmes par le roi Teutobochus. Mais telle était l'exigence de notre plan. Notre premier chapitre nous mit en présence du roi Teutobochus, qui était haut de trente pieds, comme on put s'en assurer en mesurant ses ossements retrouvés par hasard. Dès le premier pas, affronter un tel géant ! La rencontre était terrible. Fontanet lui-même en fut étonné.

— Il faut sauter par-dessus Teutobochus, me dit-il.

Je n'osai point.

L' Histoire de France *en cinquante volumes s'arrêta à Teutobochus.*».

Anatole France, *Le livre de mon ami*, 1885.

Faire un état de l'art des techniques de recalage, c'est s'attaquer à l'un des Teutobochus du traitement de l'image médicale. La pléthore des approches et des inspirations, des formalismes et des cadres de travail, des applications et des évaluations, due en partie à la relative absence de comparaison entre algorithmes, peut être paralysante. Dans son célèbre état de l'art sur le recalage (Brown, 1992), tenant sur pas moins de 60 pages, Lisa Gottesfield Brown concède que

> *«[The] diversity in problems and their applications has been the cause for the development of enumerable independent registration methodologies. This broad spectrum of methodologies makes it difficult to classify and compare techniques since each technique is often design for specific applications (...).»*

ce qui explique peut-être l'apparition d'états de l'art plus spécifiques au problème clinique traité, dans des revues pourtant généralistes, comme celle de (Frangi et al., 2001). Ce constat est d'autant plus terrifiant qu'il date de 1992, antérieurement à de nombreuses avancées apparues depuis, dont la plus représentative est sûrement l'introduction de considérations provenant de la théorie de l'information dans les mesures de similarité, initiée par (Viola, 1995) et (Collignon et al., 1995).

Plus récemment, dans son état de l'art tout aussi connu dans le domaine (Maintz et Viergever, 1998), Maintz fait appel à pas moins de 9 axes othogonaux pour classer les algorithmes de recalage rencontrés au cours de sa thèse, et totalise un peu plus de 300 références bien que se limitant au domaine médical. Nous sommes bien en face d'un thème de recherche très général, et regroupant beaucoup d'algorithmes ayant parfois peu en commun.

L'état de l'art présenté de ce chapitre n'a donc pas pour vocation d'être exhaustif — nous passerons par exemple sous silence les problèmes de recalage 2D/3D. Nous tenterons néanmoins de fournir à notre approche, dont la présentation est à venir dans les chapitres prochains, une table d'orientation des approches voisines, afin de pouvoir mieux justifier notre choix et dresser la liste des avantages et des inconvénients de notre méthode.

L'apport principal de notre classification est une *nouvelle division* des primitives utilisées en recalage non rigide, et notamment l'apparition de la notion d'*amers iconiques*. En conséquence, nous scindons la classe des algorithmes iconiques en deux, les algorithmes de recalage d'amers iconiques (*Iconic Feature Based*, ou IFB) d'un côté et les algorithmes iconiques standard (*Standard Intensity Based*, ou SIB) de l'autre. Cette nouvelle division est fondamentale pour comprendre les différences de comportement entre certains algorithmes de recalage iconique, comme nous le verrons en détail au chapitre 3.

Les critères de classification des méthodes de recalage que nous utiliserons ici sont au nombre de cinq.

- **Les primitives** (section 1.1) : il s'agit de l'information qui est extraite des images et utilisée pour le recalage.
- **Le critère de similarité** (section 1.2) : c'est la mesure qui permet de comparer les primitives extraites précédemment.
- **Le critère de régularité** (section 1.3) est un reflet, plus ou moins exact, des contraintes physiques de continuité que subit le milieu qui se déforme.
- **La méthode de résolution** (section 1.5) est l'algorithme choisi permettant de trouver une solution raisonnable au problème modélisé par les trois points précédents.
- **L'application** : de manière surprenante, et contrairement à beaucoup d'autres domaines de l'imagerie médicale, les algorithmes de recalage sont encore largement génériques et indépendants de leur application : ce point sera une occasion pour envisager un futur possible du recalage (section 1.6).

Nous allons maintenant détailler ces cinq points.

1.1 Les primitives

Pour recaler deux images, il faut préalablement décider de l'information que l'on y extrait et qui, attachée aux points, permet de suivre leur évolution.

L'information véhiculée par les images peut paraître évidente : c'est la valeur en ce point, autrement dit la grandeur physique mesurée par la modalité de l'image dans un petit volume autour du point, qui nous permettra de le suivre au cours de son mouvement. Si cette grandeur physique se conserve au cours du mouvement, il suffit alors d'apparier les points qui ont la même intensité.

La réalité est en fait plus complexe.

L'approche géométrique, plus naturelle ?

Confrontés au même problème, quel processus mental faisons-nous pour retrouver les déplacements ? Prenons par exemple le problème artificiel présenté à la figure 1.1, où une forme verte, initialement dans la position de gauche, se déforme jusqu'à devenir la forme de droite.

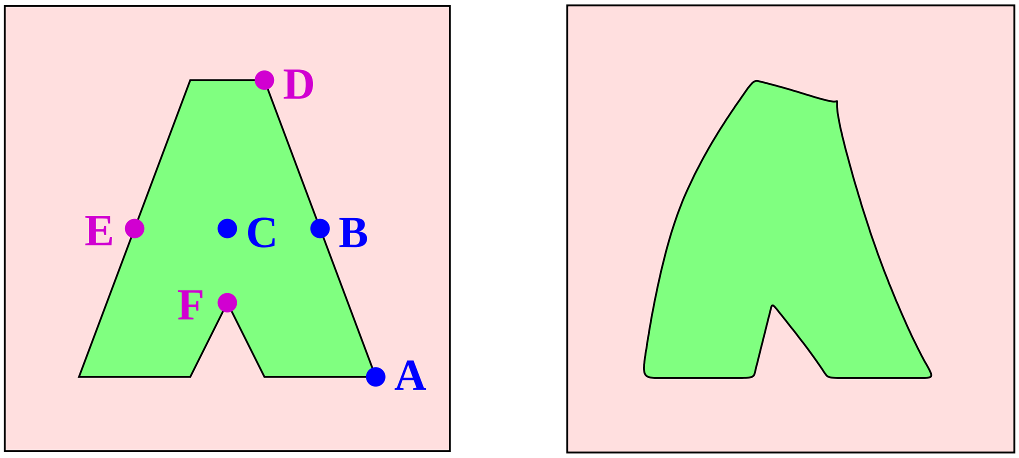


FIG. 1.1 – *Un problème de recalage artificiel. Comment retrouver le mouvement des points* ***A****,* ***B*** *et* ***C****?*

Le point **A** est un des coins de l'objet. Pour le retrouver dans la figure de droite, nous regardons d'abord tous les coins de cette forme, avant de sélectionner parmi ceux-ci lequel lui correspond le mieux.

Le point **B**, lui, est situé sur le bord de la forme. Pour retrouver sa position, nous regardons où se sont déplacés les coins qui l'encadrent, ici **A** et **D** ; puis nous interpolons ces déplacements à **B**, avec la contrainte que **B** reste bien sur le bord de l'objet.

Quant au point **C**, qui est en plein cœur de la forme, notre œil regarde d'abord quels sont les coins ou les points des bords les plus proches, par exemple les points **B**, **E** et **F**, et tente d'interpoler ces déplacements à **C**.

Mentalement, nous avons donc tendance à préalablement extraire des *amers géométriques* (coins, courbes, etc.) et à les apparier ensuite en fonction de leur attributs géométriques. Nous n'accordons que peu d'importance à la couleur, qui n'est pas porteuse d'une information suffisante, et surtout qui ne permet pas de distinguer les points informatifs et fiables des points difficiles, comme le point **C**. Au mieux, l'intensité peut nous aider à détecter si un appariement est mauvais ; mais des intensités qui se correspondent n'est pas le gage d'un bon appariement.

Pourtant, les critères portant sur les intensités des points sont actuellement très populaires en recalage d'images médicales. Bien plus que par une relative facilité conceptuelle, c'est avant tout par leur redoutable efficacité que ces méthodes, dites iconiques, ont su s'imposer. Ce petit miracle est dû à la *corrélation spatiale du mouvement* : il s'avère que si l'intensité d'un point n'est effectivement pas suffisamment informative, en revanche, le profil d'intensité d'un ensemble de points est une signature qui permet une récupération précise du mouvement.

Détaillons maintenant les trois grands types de primitives utilisées actuellement en recalage non rigide : les amers géométriques (section 1.1.1), les intensités (section 1.1.2) et les amers iconiques (section 1.1.3). Les amers iconiques, et la division des algorithmes iconiques en ceux utilisant les intensités et ceux utilisant ces amers iconiques, sont des concepts que nous avons introduits dans (Cachier et Ayache, 2001a).

1.1.1 Recalage d'amers géométriques

Comme nous venons de le voir, l'approche géométrique est celle qui semble la plus naturelle. Elle consiste à extraire des images un sous-ensemble de points caractérisés par une configuration géométrique remarquable les distinguant des autres points. C'est cette *décimation* qui est porteuse de l'information. D'une manière générale, plus le critère géométrique de décimation est restrictif, plus l'appariement des amers géométriques avec leurs homologues pourront être considérés comme sûr — mais moins ces amers sont nombreux. Or, la qualité du recalage des points qui ne sont pas situés sur les amers, et dont les positions sont interpolées à partir de celles des amers voisins, est clairement fonction de la densité des amers dans l'image. Toute la subtilité de l'approche géométrique consiste donc à sélectionner les bons amers, afin que ceux-ci soit suffisamment informatifs pour être recalés fiablement, et de manière contradictoire, suffisamment nombreux pour que l'interpolation du mouvement aux autres points soit également fiable. Cette subtile alchimie n'a bien entendue aucune solution absolue et dépend largement du problème — en particulier de la corrélation spatiale du mouvement.

Mais quelle est l'information extraite par les amers? Dans le domaine du recalage médical, il y a deux points de vue possibles, reposant tous les deux sur le concept d'*invariance* :

- **Le point de vue mathématique** : l'information d'un point est principalement caractérisée par la dimension de la variété dans laquelle il se trouve, et donc par le nombre de degrés de liberté dont on dispose pour trouver son homologue. Ainsi, les coins sont plus informatifs que les courbes, elles-mêmes plus informatives que les surfaces, etc. L'invariance recherchée ici est une invariance mathématique de ces amers par rapport au groupe de transformations choisi pour le recalage — voir par exemple (Florack, 1993; Olver, 1999) pour l'étude des invariants mathématiques, et (Mundy et Zisserman, 1992; Schmid et Mohr, 1995; Yang et Cohen, 1999) pour une application au recalage d'images.
- **Le point de vue médical** : l'information d'un amer est sa pertinence médicale, fortement liée à son invariance d'un individu à un autre. Citons par exemple le fameux repère de (Talairach et Tournoux, 1988) formé des points CA-CP et du plan médian sagittal, utilisé en neuroanatomie.

Notons que ces deux concepts se complètent la plupart du temps, l'application médicale focalisant souvent la mathématique sur un endroit précis de l'anatomie plus apte à l'invariance pour tel type de problème : par exemple, les lignes de crêtes localisées notamment sur les mandibules sont utilisées en chirurgie cranio-faciale réparatrice (Subsol, 1995).

En plus de l'information géométrique extraite par cette décimation, d'autres informations peuvent être attachées à l'ensemble ainsi segmenté, comme des informations d'orientation (Rohr et al., 1999), de courbures (Cohen et al., 1992; Manceaux-Demiau et al., 1997; Benayoun et Ayache, 1998; Pademetris et al., 1999; Vaillant et Davatzikos, 1999) ou même des étiquettes anatomiques (Rivière et al., 2000) — autant d'occasions pour combiner un peu plus invariants mathématiques et anatomiques.

Passons en revue les trois types d'amers géométriques principaux : les points, les courbes, et les surfaces.

Points

Pour les images du cerveau, dont il est grandement question dans cette thèse, le repère anatomique proposé par (Talairach et Tournoux, 1988) est historiquement l'une des premières tentatives d'utilisation de tels repères pour normaliser spatialement [1] les cerveaux, et reste encore aujourd'hui largement utilisé. Ce repère est constitué de points particuliers, les points CA (pour « Commissure Antérieure ») et CP (pour « Commissure Postérieure »). Ces deux points, remarquablement stables anatomiquement, sont sélectionnés à la main dans les images et permettent, avec le plan médian sagittal, de normaliser les cerveaux de manière dite « proportionnelle », faisant appel à une mosaïque de transformations affines.

Cette normalisation donne de bons résultats pour les structures profondes du cerveau, proches des points CA-CP, mais n'est pas aussi précise, on le comprend, pour les structures plus éloignées comme le cortex. Il est possible d'obtenir plus de points en en sélectionnant d'autres à la main ; mais cette procédure est fastidieuse et imprécise, surtout dans les images tridimensionnelles ; de plus, les résultats dépendent fortement de l'opérateur qui sélectionne ces points.

De nombreuses méthodes pour extraire automatiquement des points de repère des images volumiques ont été inventées pour contourner ce problème. Certaines calculent une mesure différentielle, et prennent comme amers les extrema locaux de cette mesure. De manière un peu surprenante, il existe plusieurs façons de définir mathématiquement un coin : leur définition peut reposer sur la courbure moyenne (Kitchen et Rosenfeld, 1982; Fidrich et Thirion, 1998) ou gaussienne (Thirion, 1994), sur le tenseur de structure (Förnster, 1986), le hessien (Beaudet, 1978), etc. Ces amers sont préférablement invariants par le groupe de transformations envisagé ; cependant, les violations de cette règle ne pénalisent pas forcément les performances du recalage, notamment en non rigide lorsque les transformations possèdent peu de degrés de liberté (Rohr, 1998).

L'efficacité de ces méthodes d'extraction automatiques d'amers ponctuels est comparée par exemple dans (Hartkens et al., 1999), qui constate que les méthodes basées sur les dérivées premières sont plus performantes que celles basées sur des dérivées d'ordre supérieur, pour des images volumiques IRM ou scanner.

Courbes

Tandis que les amers ponctuels correspondent aux coins d'un objet, les amers unidimensionnels correspondent aux arêtes et autres lignes saillantes.

D'un point de vue médical, il existe des courbes stables d'un individu à l'autre, comme le fond de certains sillons corticaux (Welker, 1989). Cependant, la segmentation manuelle de courbes est une tâche assez complexe : non seulement, il y a beaucoup plus de points à extraire que dans le cas des amers ponctuels, mais surtout, il est difficile de suivre ces lignes dans une série de coupes 2D. Les approches basées sur des segmentations manuelles ou semi-manuelles sont donc plutôt rares (Thompson et Toga, 1996; Chui et al., 1999), par rapport aux approches automatisées. Parmi ces dernières, celles reposant sur les lignes de crêtes sont probablement les plus utilisées (Guéziec, 1993; Selmaoui et al., 1993; Monga et al., 1997; Subsol, 1998) ; voir (Belyaev et al., 1995) pour une revue des différentes définitions possibles des lignes de crêtes.

1. La « normalisation spatiale » est le terme dédié dans ce cas pour désigner le recalage de tous les cerveaux dans une géométrie standard.

Surfaces et hypersurfaces

Les surfaces des organes présents dans les images représentent, d'une manière générale, de bon amers, car il est souhaitable de superposer surfaces externes des organes, afin de respecter la correspondance anatomique des tissus.

Si le contraste est suffisant, il est facile, quoique laborieux, de segmenter les surfaces à la main. Mais si les surfaces sont devenues les amers les plus utilisés en recalage, c'est parce qu'en tant que variétés de codimension 1, elles disposent de méthodes automatiques puissantes d'extraction qui ne s'appliquent pas aux amers de codimension supérieure, que sont les modèles déformables et les ensembles de niveaux (*level sets*). Ces méthodes sont tellement performantes qu'elles ne laissent d'ailleurs aucune place aux méthodes reposant sur les invariants différentiels, pourtant si utiles pour les coins et les arêtes. Elles ont pour ainsi dire le monopole dans cette catégorie, même si on retrouve occasionnellement d'autres techniques, comme par exemple celle basée sur la technique de « partage des eaux » (Beucher et Meyer, 1993) utilisée par (Gauch et Pizer, 1993).

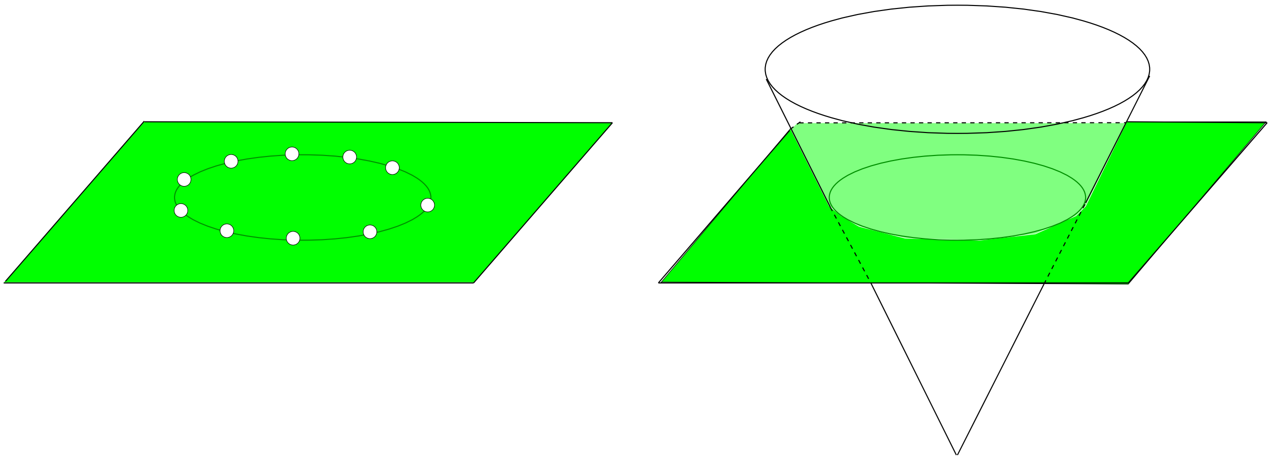


FIG. 1.2 – *Deux paramétrisations différentes : à gauche, paramétrisation explicite d'une courbe par la position de quelques uns de ses points (ronds blancs), du type « modèle déformable » ; à droite, paramétrisation implicite par une hypersurface de dimension supérieure, du type « ensemble de niveaux ».*

La force de ces approches est qu'elles sont beaucoup plus spécifiques que les méthodes précédentes, et peuvent intégrer assez facilement des connaissances médicales. Contrairement aux invariants différentiels, ces approches font évoluer des modèles dans l'espace image qui, à force d'itérations, vont progressivement se coller vers une surface dans l'image. Or, si la surface est modélisée et son évolution guidée par des concepts purement mathématiques, le modèle sous-jacent est généralement guidé par la médecine, afin que parmi toutes les surfaces présentes dans l'image, cette surface mathématique vienne contourer l'organe visé et lui seul.

Les modèles déformables modélisent une hypersurface qui, partant d'une certaine position initiale, va progressivement se coller au contour de l'organe visé sous l'influence conjuguée de forces externes, issues de l'environnement dans lequel est plongé le modèle, et de contraintes internes, qui forcent la surface à rester lisse.

Les ensembles de niveaux procèdent de même, mais la surface n'est pas définie par une paramétrisation ou par la position de ses points, mais comme étant le passage par zéro d'une fonction définie partout dans l'image (on parle alors de paramétrisation *implicite*). Cette approche, plus lourde que la précédente, permet cependant à la surface ainsi modélisée de changer de topologie (se diviser en deux, faire apparaître un trou), ce qui peut être utile si la géométrie de l'objet est complexe ou inconnue.

Une caractéristique de ces approches est qu'il est possible de leur donner encore plus de spécificité médicale à travers l'emploi de modèles *a priori*. Cela est possible en employant un modèle moyen et une base de déformations propres (Cootes et al., 1995; Nikou et al., 1998; Fleute et Lavallée, 1999), ou bien en considérant une énergie de rappel à partir d'une forme de base (Montagnat et Delingette, 1997). Ainsi, pour segmenter la surface du cœur, ces méthodes font évoluer une surface qui ressemblera à un cœur à chaque stade de son évolution, au lieu de faire évoluer une surface de forme quelconque devant se coller sur le cœur. Cela permet notamment une plus grande robustesse de la segmentation.

Il est à noter que les degrés de libertés accordés au modèle (approches paramétriques ou de forme libre) ne présagent pas de ceux utilisés ensuite pour le recalage des hypersurfaces ainsi extraites (rigide, affine, paramétrique ou de forme libre).

Le recalage d'IRM marquées est un cas à part (Declerck et al., 1998; Amini et al., 1999; Suter et Chen, 2000). Cette modalité permet l'obtention d'amers de manière physique, *via* une magnétisation initiale de plans dans les tissus qui apparaissent en noir dans les IRM suivantes. Les hypersurfaces ainsi marquées sont de véritables amers physiques et sont à ce titre comparables aux marqueurs externes utilisés comme amers en recalage rigide, comme les cadres stéréotaxiques.

1.1.2 Recalage iconique standard (SIB)

Les approches iconiques se fondent sur la comparaison des intensités des images. Contrairement à l'approche géométrique, il n'y a pas d'étape préalable de compréhension de la géométrie de l'objet ; celle-ci est remplacée par une compréhension du lien qui existe entre les intensités des images, c'est-à-dire entre les grandeurs physiques mesurées par leur modalité respective. Les approches iconiques sont anciennes en recalage d'images médicales (Broit, 1981), et leur popularité est toujours d'actualité, notamment grâce aux succès obtenus en recalage multimodal.

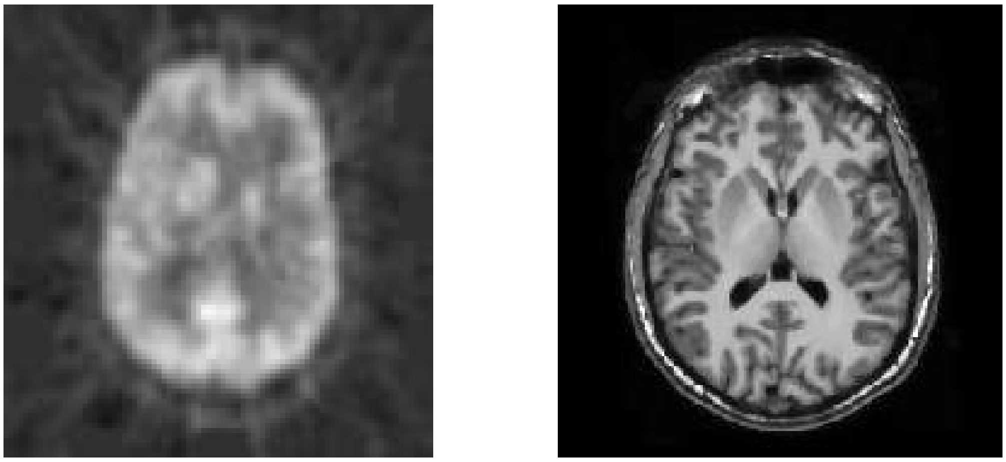
Il existe en réalité deux grandes catégories d'algorithmes iconiques : les algorithmes utilisant des *amers iconiques* (*Iconic Feature Based*, ou IFB), que nous verrons dans la prochaine section, et les autres, que nous avons qualifiés, faute de mieux, de standard (*Standard Intensity Based*, ou SIB), et que nous présentons ici.

Les algorithmes iconiques standard utilisent l'intensité comme primitive, et se distinguent par l'utilisation d'une seule transformation à laquelle nous donnons deux objectifs de natures différentes. D'une part, un objectif iconique : cette transformation doit recaler les images afin que leur intensités s'expliquent mutuellement le mieux possible. D'autre part, un objectif géométrique : la transformation estimée doit être lisse, afin de contraindre l'appariement et de traduire dans une certaine mesure la réalité physique de la continuité du milieu.

Parfois, les images subissent des prétraitements ; l'intensité utilisée pour le recalage n'est alors plus celle des images originales. Cependant, même lorsque les valeurs recalées ont une consonance géométrique, comme le gradient des images (Roche et al., 2000b; Butz et Thiran, 2001), les algorithmes sont encore iconiques, puisqu'il ne comportent pas d'étape de segmentation, et que les valeurs comparées se rapportent à la mesure initiale de la modalité de l'image, et non à une distance dans l'espace.

Succès de l'iconique en recalage multimodal fortement contraint

Les méthodes iconiques standard ont permis des avancées considérables dans le domaine du recalage multimodal, pour lequel les approches géométriques présentent des difficultés. Nous présentons figure 1.3 l'exemple du recalage IRM/TEP. Ces deux modalités mesurent des grandeurs physiques totalement différentes : l'IRM est une image anatomique, tandis que la tomographie par émission de positons (TEP) fournit une image fonctionnelle du cerveau.



(a) Image TEP (b) Image RM

FIG. 1.3 – *Un problème de recalage multimodal compliqué : deux images TEP et RM du cerveau.*

Pour les approches géométriques, la difficulté de ce recalage provient de l'image TEP : celle-ci a une résolution particulièrement faible, surtout dans la direction axiale, et les contours sont difficiles à localiser. Extraire des amers géométriques, comme la surface du crâne ou du cerveau, n'est pas un exercice trivial dans ces conditions.

Du point de vue de l'approche iconique, la difficulté ne vient pas tant de la faible résolution de l'image TEP que de la différence de nature entre les signaux mesurés. En effet, comment comparer une mesure anatomique à une mesure fonctionnelle ? Existe-t-il un lien biunivoque entre les deux ? Formellement, la réponse est négative, et le recalage n'est donc pas possible point à point. Cependant, le fait de traiter des ensembles de points permet de rendre ces comparaisons globalement significatives : il est facile de recaler grossièrement ces images ne serait-ce qu'en distinguant simplement les intensités élevées du cerveau des faibles intensités du fond. En utilisant des critères plus complexes sur les intensités (voir plus loin, p. 22), et un ensemble de transformations très petit comme le groupe des transformations rigides, on peut venir à bout du recalage multimodal assez précisément. Ce succès de l'approche iconique sur l'approche géométrique en recalage multimodal est par exemple étudié dans (West et al., 1999).

1.1.3 Recalage d'amers iconiques (IFB et P&S)

Parmi les approches iconiques, il existe une catégorie particulière d'algorithmes qui procèdent généralement en succession de deux étapes. La première consiste à trouver des correspondants, à l'aide d'une mesure de similarité des intensités — par exemple, dans le cas le plus simple, le correspondant sera le point de même intensité le plus proche. La seconde étape ajuster une transformation à cet ensemble de correspondances, typiquement par lissage. Nous les avons baptisés en conséquence algorithmes « apparie-et-lisse » (*pair-and-smooth*, ou P&S).

En réalité, il existe une différence fondamentale qui sépare ces algorithmes des algorithmes iconiques standard (SIB), qui va au-delà de cet aspect de succession de deux étapes : c'est le concept d'amers iconiques. Dans tous ces algorithmes, le milieu se déforme non plus sous l'influence d'une mesure iconique, mais grâce à l'attraction d'amers correspondants, que nous notons C, et qui sont généralement (mais non exclusivement) des points. Ces algorithmes sont ainsi très similaires aux algorithmes géométriques, à ceci près qu'ils utilisent un nombre beaucoup plus élevé d'amers (jusqu'à un par pixel), et surtout, que ces amers ne sont pas extraits indépendamment dans les images préalablement au recalage, mais simultanément, puisque leur extraction repose sur une mesure de similarité entre les intensités des deux images. Les algorithmes reposant sur des amers iconiques (*Iconic Feature Based*, ou IFB) se distinguent donc des algorithmes SIB.

La majorité des algorithmes IFB actuellement publiés sont P&S, parce qu'ils sont non rigides. Toutefois, ce n'est pas toujours le cas : il existe des algorithmes IFB rigides ou affines. Nous rediscuterons de cela lorsque nous aborderons la régularisation, p. 32.

Parmi ces algorithmes P&S, nous trouvons les techniques de recalage par blocs, de recalage reposant sur la contrainte du flux optique, ainsi que l'ICP généralisé.

Le recalage par blocs (*Block-Matching*)

En recalage par blocs, les amers iconiques correspondants C sont trouvées en déplaçant un bloc de la première image dans la seconde, et en gardant la position du bloc qui minimise une certaine énergie de similarité. Les amers iconiques sont ici des points que l'on apparie au centre de chacun des blocs. La technique du recalage par blocs est assez populaire en recalage non rigide (Collins et Evans, 1997; Strintzis et Kokkinidis, 1997; Gaens et al., 1998; Maintz et al., 1998; Lau et al., 1999), notamment parce qu'elle permet d'importer sans trop d'efforts des mesures utilisées en recalage rigide, mais également en recalage rigide (Althof et al., 1997; Ourselin et al., 2001), où elle atteint une robustesse géométrique exceptionnelle. Signalons qu'en recalage par blocs, les amers iconiques correspondants ne sont cherchés que pour un petit nombre de pixels, contrairement aux autres approches qui cherchent généralement un amer iconique par pixel — C est un champ de vecteurs défini en quelques pixels de l'image seulement.

Le flux optique

Les méthodes de flux optique sont un exemple où les amers iconiques ne sont pas des points, mais des hyperplans.

En flux optique classique (Horn et Schunk, 1981), un point est obligatoirement déplacé sur un certain hyperplan déterminé par la *contrainte du flux optique*, obtenue par linéarisation de l'hypothèse de conservation de l'intensité :

$$\nabla I(\mathbf{p}).(T(\mathbf{p}) - \mathbf{p}) = J(\mathbf{p}) - I(\mathbf{p})$$

où I et J sont les deux images à recaler, $\mathbf{p}$ un point de l'image I, et T l'estimation de la transformation.

Récrivons cette contrainte dans notre formalisme. Soit $C(\mathbf{p})$ l'hyperplan d'équation $\mathbf{x} : \nabla I(\mathbf{p}).(\mathbf{x} - \mathbf{p}) = J(\mathbf{p}) - I(\mathbf{p})$. $C(\mathbf{p})$ est l'amer iconique correspondant au point $\mathbf{p}$. L'équation précédente s'écrit simplement $T(\mathbf{p}) \in C(\mathbf{p})$; comme ces amers ne sont pas des points mais des hyperplans, nous disposons d'un certain nombre de degrés de liberté pour choisir T.

La contrainte du flux optique peut être relâchée en étant transformée en énergie de rappel :

$$E(T) = \int [\nabla I(\mathbf{p}).(T(\mathbf{p}) - \mathbf{p}) - [J(\mathbf{p}) - I(\mathbf{p})]]^2$$

Cette énergie n'est en fait rien d'autre que la distance entre le point $\mathbf{p}$ et l'hyperplan servant d'amer, pondérée par le facteur $||\nabla I(\mathbf{p})||$: en reprenant notre formalisme, nous récrivons cette équation en

$$E(T) = \int ||\nabla I(\mathbf{p})||.d\,(T(\mathbf{p}),C(\mathbf{p}))^2$$

où d est la distance euclidienne d'un point à un hyperplan. Ce facteur $||\nabla I(\mathbf{p})||$ permet d'éviter de donner trop d'importance aux correspondances trouvées dans des zones de faible contraste, plus facilement corrompues par du bruit. Cependant, il tend vers l'infini pour de forts gradients, ce qui peut gâter la régularité de la transformation. Pour les mêmes raisons que celles que nous évoquerons dans le chapitre 3, il serait intéressant de remplacer l'énergie précédente par

$$E(T) = \int \rho(||\nabla I(\mathbf{p})||).d\,(T(\mathbf{p}),C(\mathbf{p}))^2$$

où $\rho(x)$ est une fonction croissante telle que $\rho(0) = 0$ et $\rho(x) \to 1$ lorsque $x \to +\infty$.

Partant de la contrainte du flux optique, qui n'est valable que pour de faibles déplacements, des algorithmes de recalage procèdent en recentrant cette contrainte à chaque itération à l'endroit où le point est déplacé. Cette idée est à l'origine de l'algorithme dit des « démons » (Thirion, 1998) et de ses extensions (Bricault et al., 1998; Cachier et Pennec, 2000; Guimond et al., 2001), ainsi que d'autre algorithmes (Simoncelli et al., 1991; Hellier et al., 1999). D'autres algorithmes misent sur une approche multirésolution pour tomber sur un minimum global de l'énergie (Lefébure et Cohen, 2001).

ICP

La généralisation de l'algorithme du plus proche point itéré (*Iterative Closest Point*, ou ICP) au recalage iconique est la méthode qui rapproche le plus ces méthodes P&S des méthodes géométriques.

Cette approche a été introduite par (Feldmar et al., 1997). Elle consiste à transformer une image I de dimension n en une hypersurface $S(I)$ d'un espace de dimension $n + 1$, qui n'est rien d'autre que son profil d'intensité : cette hypersurface a pour équation

$$S(I) = \{(\mathbf{x},I(\mathbf{x})), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

Feldmar propose de voir le recalage de deux images I et J comme un recalage géométrique des deux hypersurfaces $S(I)$ et $S(J)$, pour lequel il utilise une technique proche de l'ICP classique. *Grosso modo*, son algorithme procède en itérant deux étapes :

1. Pour chaque point $\mathbf{p}$ de $S(I)$, recherche du point $C(\mathbf{p})$ le plus proche sur $S(J)$. $C(\mathbf{p})$ est l'amer iconique correspondant à $\mathbf{p}$; c'est de nouveau un point, comme en recalage par blocs.
2. Déplacement de l'une des hypersurfaces par une transformation affine ou localement affine afin de rapprocher les couples de points appariés.

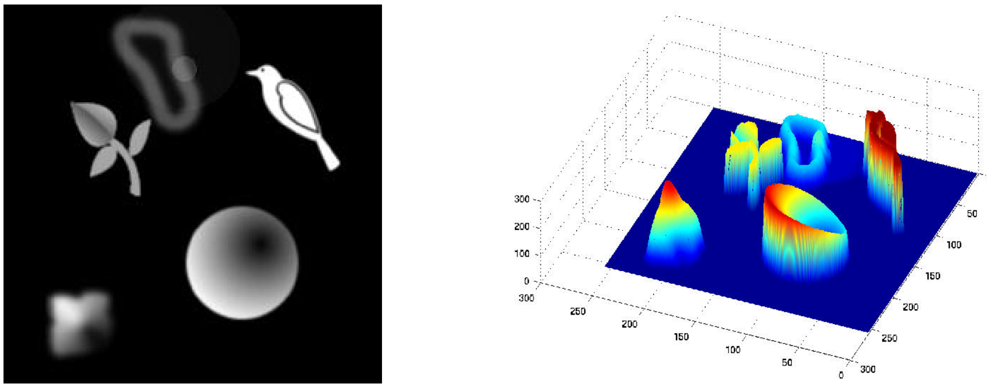


FIG. 1.4 – *Une image scalaire bidimensionnelle, et son hypersurface associée.*

1.1.4 Combinaisons possibles

Nous avons passé en revue les trois principaux types de primitives utilisées en recalage non rigide : les amers géométriques, les amers iconiques, et les intensités. Il est parfaitement possible de les combiner dans un même algorithme ; ces combinaisons sont d'ailleurs à l'origine de nombreux algorithmes très prometteurs.

Les intensités et les amers iconiques n'ont jamais été utilisés conjointement, car la distinction entre ces deux catégories d'algorithmes iconiques est encore récente. De plus, l'intérêt d'une telle combinaison semble limitée.

En revanche, l'introduction d'amers géométriques dans les algorithmes de recalage iconique est actuellement en plein essor (Collins et al., 1998; Wang et Staib, 1998; Hellier et Barillot, 2000a; Cachier et al., 2001) et fournit des pistes prometteuses pour introduire plus de connaissance *a priori* dans les algorithmes de recalage. Nous présenterons notre propre approche au chapitre 8.

1.2 Le critère de similarité

La section précédente présentait les différentes primitives utilisées en recalage, c'est-à-dire l'information extraite des images. If faut maintenant *comparer* ces informations, afin d'évaluer quantitativement une transformation.

1.2.1 Comparaison globale ou locale

A priori, une mesure de correspondance entre deux ensembles de primitives est *globale* : elle compare le premier ensemble dans sa totalité avec le second ensemble. Un exemple de comparaison globale est la méthode des moments qui recale deux ensembles de primitives en alignant leurs barycentres et leurs directions propres (cette technique peut par ailleurs être utilisée pour des amers géométriques comme pour les intensités).

Cette comparaison se réduit cependant le plus souvent à une comparaison *locale* : une primitive de la première image est comparée aux primitives de la seconde qui lui sont proches. La notion de comparaison locale passe par une notion d'*appariement*, qui est le plus souvent binaire (on ne compare qu'avec la ou les primitives les plus proches) mais peut être également continue (la mesure de similarité est par exemple pondérée par une fonction décroissante avec la distance à la primitive).

Dans l'ensemble, les mesures globales sont plutôt utilisées en recalage de primitives géométriques (moments (Yang et Cohen, 1999), coefficients de Fourier (Richard et Hemami, 1974), surface de

Chen (Thompson et Toga, 1996), etc.). En recalage iconique, l'utilisation de descripteurs globaux est plutôt anecdotique.

1.2.2 Appariements simples ou multiples

L'étape d'appariement consiste à dresser la liste des primitives qui sont comparées entre elles. Comme nous l'avons souligné précédemment, c'est la notion de localité de la comparaison qui amène à dresser cette liste : l'étape d'appariement passe donc par la recherche des primitives les plus proches.

Dans le cas des amers géométriques ou iconiques, cette étape est explicitement mise en œuvre par une méthode de recherche des plus proches voisins. Cette notion de proximité mène naturellement à une notion d'échelle : par exemple, pour recaler deux ensembles de points, (Chui et Rangarajan, 2000) utilise des voisinages d'appariements d'abord très larges qui rétrécissent au fil des itérations, pour ne garder finalement que les quelques points voisins. Le plus souvent, cependant, la comparaison se fait avec la primitive géométrique la plus proche, comme dans le célèbre algorithme du plus proche point itéré (*Iterative Closest Point*, ou ICP), ce qui permet de s'affranchir de cette notion d'échelle de comparaison.

En recalage iconique standard (SIB), la densité de l'information d'intensité permet de passer complètement sous silence l'appariement, la comparaison des intensités se faisant généralement entre les points des deux images ayant la même position. Les appariements multiples et la notion de voisinage de comparaison peuvent cependant être aussi introduits en recalage iconique standard, et être utilisés pour une mise en œuvre multiéchelle de l'algorithme de recalage autre que les mise en œuvre classiques (Lester et Arridge, 1999).

1.2.3 Comparer des mesures physiques différentes

Lorsque les dimensions physiques des primitives à comparer sont homogènes, leur comparaison est un problème relativement simple : la mesure de similarité peut être une simple distance entre les primitives. C'est le cas par exemple en le recalage d'amers géométriques, puisque l'information est la position de l'amer dans l'espace.

Cela n'est plus toujours vrai lorsque l'information utilisée est l'intensité. Lorsque les images à recaler proviennent de deux systèmes d'acquisition différents, les intensités n'ont plus rien en commun (revoir figure 1.3). Même pour des images provenant de la même modalité, l'hypothèse de conservation de l'intensité est souvent violée, à cause de différences de calibration ou de conditions expérimentales ; aussi, l'utilisation d'une métrique entre les intensités reste rare (Hajnal et al., 1995).

Actuellement, il existe principalement deux écoles pour comparer deux mesures physiques différentes. La première tente d'établir un modèle relationnel entre les mesures. La seconde, plus abstraite, s'inspire de la théorie de l'information et quantifie l'information commune aux deux images.

Modèles relationnels entre les intensités des images

La première classe de méthodes repose sur une modélisation du lien qui relie les quantités mesurées par les modalités des deux images. Partant d'un modèle *a priori* de relation entre les signaux, la mesure de similarité procède en deux étapes (souvent implicites).

1. On trouve les paramètres du modèle qui explique le mieux la relation entre les deux signaux.

2. La mesure de similarité proprement dite est alors une mesure de cet écart entre le modèle et la réalité.

Le modèle relationnel le plus simple est la relation fonctionnelle : on suppose qu'une fois recalées, les intensités des images I et J sont idéalement liées par une fonction f telle que

$$I = f \circ J$$

Il a déjà été remarqué par (Roche et al., 2000a) que ce type de modèle relationnel fonctionnel explique un bon nombre de mesures de similarité classiques. La corrélation linéaire correspond ainsi à un modèle relationnel affine, et le rapport de corrélation correspond à un modèle fonctionnel quelconque (ou constant par morceaux, selon que le point de vue soit discret ou continu).

La relation fonctionnelle est un modèle simple et commode, mais qui peut être trop irréaliste dans certaines situations. On peut donc lui préférer des modèles plus complexes comme des modèles bifonctionnels (Guimond et al., 2001). Une autre possibilité est d'utiliser des modèles locaux, l'idée étant que localement on ne peut être en présence que de quelques tissus seulement : le modèle relationnel est donc localement simple, et on peut sans trop de craintes utiliser des modèles fonctionnels même si globalement la situation est plus complexe — voir notre contribution sur ce sujet au chapitre 4.

Remarquons que les paramètres des modèles relationnels sont le plus souvent estimés à l'aide des images uniquement. Des modèles plus réalistes ont vu cependant récemment le jour. (Arbel et al., 2001) simule une échographie à partir d'une IRM en prenant une combinaison de la composante de son gradient sur l'axe de vue de l'ultrason et d'une segmentation de l'IRM. (Grova et al., 2001) propose un modèle plus poussé pour le recalage IRM/SPECT ; ce modèle ne sert encore qu'à la simulation. Ces travaux vont dans le sens d'une réduction des paramètres estimés, ce qui est loin d'être trivial étant donné la complexité du problème. Cependant, nous pensons qu'une importante base de données ciblée sur un type d'image et un problème bien spécifique pourrait fournir un histogramme conjoint moyen expérimental qui pourrait servir de modèle relationnel probabiliste, sous forme d'une probabilité conjointe *a priori*. L'intérêt d'une telle méthode est qu'elle s'affranchit du modèle limité de relation fonctionnelle. Bien sûr, cette méthode demande beaucoup d'investissement; elle apparaîtra peut-être le jour où les méthodes classiques ne seront plus satisfaisantes pour une certaine application, par exemple en recalage fortement non rigide.

Information mutuelle

La deuxième classe de méthodes provient de la théorie de l'information. Ces méthodes ne tentent pas d'expliquer comment sont liées les intensités des images, et s'affranchissent donc d'une connaissance *a priori*. De ce point de vue, elles sont plus générales, voire plus attrayantes, que les modèles relationnels, et de fait, les mesures d'information mutuelle connaissent actuellement un réel succès.

L'information mutuelle passe d'abord par la définition de l'entropie. L'entropie d'un signal s est une mesure de la dispersion de sa distribution, qui reflète si cette distribution est plutôt uniforme ou au contraire est concentrée autour de quelques valeurs seulement. Si $p(i)$ est la probabilité d'apparition de la valeur i dans le signal s, l'entropie est définie par

$$H(s) = \sum_i f(p_i)$$

la fonction f possédant un certain nombre de propriétés, comme celle de sous-additivité généralisée (Buzug et Weese, 1998). L'entropie d'un signal est une mesure de son caractère aléatoire : un signal qui prend toutes les valeurs possibles sans en privilégier aucune possède une entropie maximale. Au contraire, un signal déterministe qui prend toujours la même valeur a une entropie minimale.

L'information conjointe (encore appelée redondance) est alors définie comme étant la réduction d'entropie des deux signaux apportée par la connaissance de leurs apparitions communes :

$$I(s_1,s_2) = H(s_1) + H(s_2) - H(s_1,s_2) = H(s_1 \otimes s_2) - H(s1,s2)$$

Parmi les diverses définitions possibles de l'entropie, la plus populaire est l'entropie de Shannon (Shannon et Weaver, 1949), définie par

$$H(s) = -\sum_i p(i) \log p(i)$$

L'information mutuelle déduite de cette entropie s'écrit

$$I(s_1,s_2) = -\sum_{i_1,i_2} p(i_1,i_2) \log \frac{p(i_1,i_2)}{p(i_1)p(i_2)}$$

Par rapport aux autres définitions, celle de Shannon possède quelques propriétés théoriques supplémentaires, comme l'invariance par subdivision des processus aléatoires.

L'un des problèmes de l'information mutuelle souvent soulevé est qu'elle ne traite les valeurs des signaux que comme des étiquettes, et non comme des nombres ; en particulier elle ne possède aucune notion de distance entre ces nombres. Pourtant cette notion est essentielle en imagerie, où les images à traiter sont corrompues par du bruit. Cela peut mener à des aberrations, dont certaines sont joliment illustrées dans le chapitre 3 de (Roche, 2001). Il existe néanmoins des adaptations de l'entropie de Shannon à l'imagerie qui permettent de contourner ce problème, comme le fenêtrage de Parzen ou l'entropie multiéchelle (Starck et Gastaud, 2000).

En fait, le principal problème de l'information mutuelle est paradoxalement sa généralité excessive, qui se traduit par un nombre important de maxima locaux. En conséquence, c'est une mesure de similarité plus difficile à minimiser que des mesures plus contraintes (Pluim et al., 2000a; Roche et al., 2000a; Janke et al., 2001).

Problèmes de biais

Une autre difficulté dans la comparaison des primitives vient d'une possible dérive de la calibration des outils de mesures dans l'espace ou le temps.

Les dérives spatiales apparaissent comme des distorsions artificielles. Elles sont fréquentes en imagerie échographique, où la distorsion dépend de l'homogénéité de la célérité du train d'onde acoustique dans le tissu ; et en imagerie par résonance magnétique, où elles sont particulièrement importantes pour des acquisitions échoplanaires (*Echo Planar Image*, ou EPI) utilisées notamment pour obtenir des images fonctionnelles (figure 1.5). Au niveau du recalage des images, les dérives spatiales ne posent pas particulièrement de problème puisqu'elles ne forment qu'une déformation supplémentaire, retrouvée en même temps que les mouvements réels. Cependant, si le but du recalage est le suivi de mouvement, il faut différencier la part de la transformation due aux distorsions et la part due au mouvement ; dans ce cas, il faut pouvoir disposer de modèles spécifiques de distorsion (Studholme et al., 2000).

Le biais en intensité est en revanche plus ennuyeux. C'est un cas théoriquement plus compliqué que la comparaison de deux images de modalités différentes, puisqu'ici la grandeur de la mesure change au sein même de l'image. La situation n'est cependant pas inextricable lorsque le biais ne présente qu'une variation très globale et régulière, ce qui est pratiquement toujours le cas.

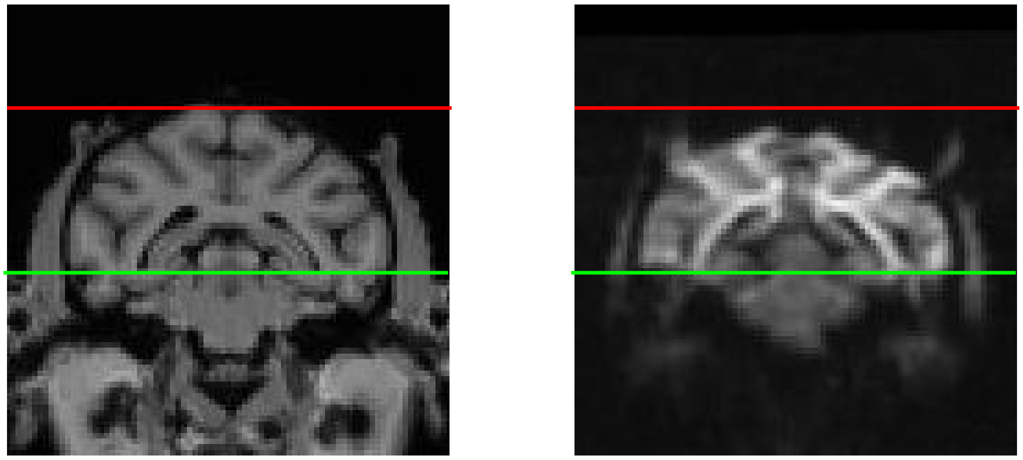


FIG. 1.5 – *Un exemple de biais spatial en modalité RM : à gauche, une image T1 anatomique non biaisée de la tête d'un singe ; à droite, une image T2 acquise en échoplanaire. Alors que le bas des ventricules (ligne verte) se correspondent, le haut du cortex (ligne rouge) a été sensiblement aplati en échoplanaire.*

D'un point de vue de la mesure de similarité, deux approches sont possibles pour s'affranchir du biais :

- **Modéliser le biais** en introduisant une dépendance spatiale dans les modèles relationnels (Friston et al., 1995). Par exemple, pour un modèle fonctionnel, la fonction de relation f dépend de la position :

$$I = f(\mathbf{x}) \circ J$$

  Il est intéressant de remarquer qu'aucune solution de ce type n'est encore apparue pour les techniques reposant sur l'information mutuelle.
- **Utiliser des mesures locales**, afin de travailler dans des régions dans lesquelles le biais ne varie quasiment pas.

Une troisième solution consiste bien entendu à supprimer le biais en intensités préalablement au recalage (Sled, 1998; Van Leemput et al., 1999; Mangin, 2000; Prima, 2001).

1.2.4 Robustesse

Nous avons vu que la plupart des mesures de similarité sont des écarts par rapport à un modèle. Le recalage d'amers géométriques prend simplement l'un des ensembles de primitives comme modèle, et mesure la distance de l'autre ensemble par rapport au premier. Les mesures de similarité des intensités font également appel à des modèles relationnels entre les mesures physiques, si l'on excepte les mesures statistiques comme l'information mutuelle.

Or, dans bien des situations, ce modèle ne peut refléter la réalité. En recalage géométrique, l'extraction automatique donne bien souvent des ensembles de primitives différents, dont une partie seulement se correspondent. En fusion d'images de modalités différentes, l'intérêt du recalage réside précisément en ce que les signaux apportent des informations différentes, par exemple anatomiques d'une part et fonctionnelles d'autre part. Ces facteurs, ainsi que d'autres, tels que les occultations, l'apparition d'un nouveau tissu (tumeur) ou sa disparition (opération chirurgicale), des artefacts de mouvement (figure 1.7) ou tout simplement la complexité du problème, faussent d'entrée la partie en assurant que le modèle se trompera grossièrement en certains endroits.

Fig. 1.6 – *Une IRM du pelvis dont les mesures sont fortement biaisées (hypersignaux en haut et en bas de l'image).*

Pour contourner ce problème, il faut alors mesurer l'écart des données au modèle avec une distance dite *robuste* (Huber, 1981). Ces mesures permettent de détecter les correspondances aberrantes (*outliers*), et dont l'influence est alors réduite. Parmi les distances robustes, les M-estimateurs sont les plus populaires pour le recalage tant iconique (Nikou et al., 1999; Hellier et al., 1999) que géométrique (Ma et al., 1998; Chui et al., 2001).

Notons que si la notion d'appariement aberrant repose sur l'écart existant entre les valeurs des deux primitives (écart dans l'espace pour des primitives géométriques, écart des intensités pour des primitives iconiques), elle repose également sur la comparaison de cet écart par rapport à ceux d'une population, et surtout sur le prix qu'il en coûte pour le réduire. Or ce coût dépend de la *rigidité* de la transformation; la population de référence est intuitivement de l'ordre de grandeur du voisinage qu'entraîne ce point dans son mouvement. Ainsi, plus la transformation est déformable, plus il est difficile de faire comprendre à l'algorithme que l'artefact de mouvement de l'image 1.7 est une zone aberrante non recalable, et non un simple mouvement.

1.3 Le critère de régularité

Un problème *mal posé*

Se donner une liste de primitives dans chacune des images (section 1.1) et une mesure de distance entre celles-ci (section 1.2) n'est hélas pas suffisant pour espérer retrouver la véritable transformation. Apparier chaque primitive d'une image à la primitive la plus proche dans la seconde image est une pratique suicidaire dès que les mouvements atteignent l'ordre de grandeur de la distance séparant deux amers (Granger et al., 2001). Mais surtout, deux primitives homologues ne doivent pas nécessairement être parfaitement recalées, à cause de certains facteurs comme par exemple le bruit qui corrompt les mesures, un résidu de biais non corrigé en recalage iconique, ou des échantillonnages différents du même objet en recalage géométrique.

Tous ces facteurs font du problème du recalage un *problème inverse mal posé* au sens d'Hada-

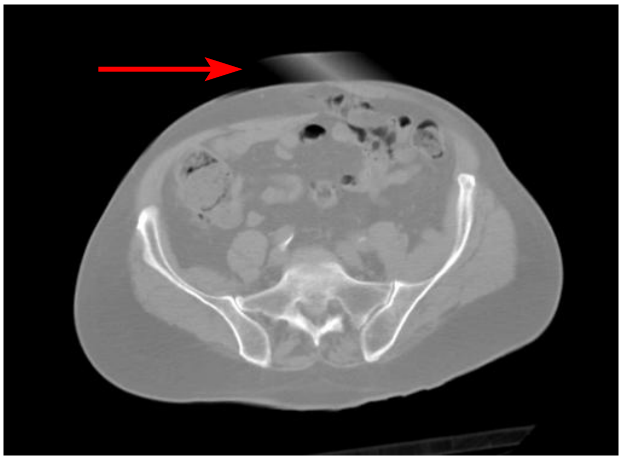


FIG. 1.7 – *Un exemple d'artefact de mouvement (l'excroissance pointée par la flèche rouge) dans une image scanner du bassin pouvant justifier l'utilisation d'une métrique robuste.*

mard (Hadamard, 1923). L'estimation du mouvement nécessite donc une régularisation de l'estimation (Neumaier, 1998), c'est-à-dire une contrainte sur la forme de la solution par une connaissance *a priori* sur celle-ci. De manière générale, cette régularisation force la continuité locale de la solution, afin que deux points proches aient des mouvements similaires. Nous donne à la figure 1.8 un exemple montrant l'importance de la régularisation face aux seules contraintes de ressemblance des intensités, et exacerbant le besoin de visualiser la transformation en plus de l'image déformée.

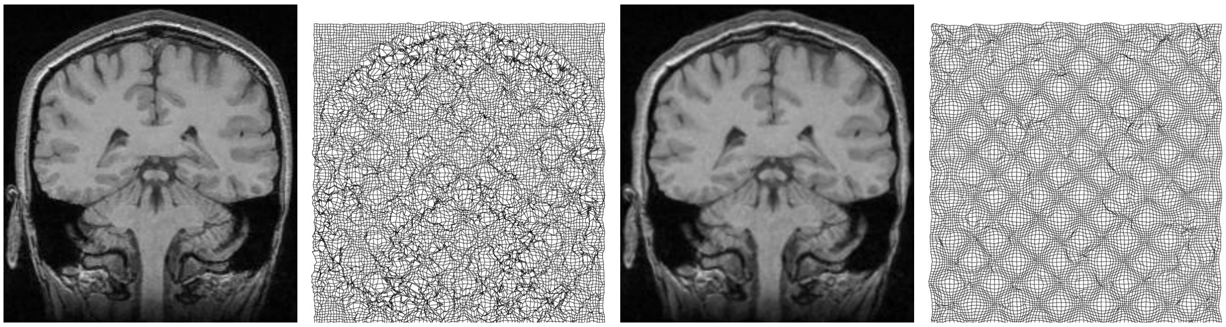


FIG. 1.8 – *Deux images de gauche : image déformée et transformation sous-jacente avec un algorithme 1. Deux images de droite : idem avec une algorithme 2. Malgré la très vive ressemblance entre les images déformée, les déformations retrouvées par les deux algorithmes sont complètement différentes ; en particulier, la régularisation du premier algorithme est très mal adaptée au problème. Cet exemple est tiré du chapitre 3.*

Régularisation et modèles physiques du mouvement

La régularisation ayant un lien avec les contraintes physiques qui régissent le mouvement des matériaux, il est tentant de vouloir prendre une énergie de régularisation provenant de la mécanique des milieux continus qui colle de près au comportement réel des tissus présents dans les images.

La régularisation est une possibilité de contraindre la solution par nos connaissances *a priori* sur la solution, et plus ces connaissances sont importantes, meilleure sera l'estimation. Mais ces connaissances *a priori* sur la solution du recalage n'ont pas forcément de lien avec la physique. Par exemple, lorsque l'on sait que la transformation à retrouver est rigide ou affine, il serait absurde d'utiliser un modèle physique déformable pour retrouver le mouvement, parce que cette connaissance *a priori* contraint la solution de manière optimale et donne donc de meilleurs résultats, et ce, même si les tissus appariés sont mous.

De plus, le recalage n'est pas forcément le suivi de déformation physique. Par exemple, on peut être amené à recaler les cerveaux de plusieurs patients différents, comme nous le ferons au chapitre 8 ; ou bien de corriger une dérive spatiale lié à la modalité, comme à la figure 1.5. Il n'est pas désirable d'utiliser un modèle physique réaliste dans ces situations : par exemple, il serait impossible de recaler des crânes différents si ceux-ci sont considérés comme rigides.

Mais même pour le suivi de déformations, une modélisation physique précise n'est pas forcément adaptée. La force de la régularisation ne doit pas être la même si l'on a affaire à un mouvement global très contraint (par exemple, l'affaissement du cerveau lié à la perte de liquide céphalo-rachidien) ou à des déformations très locales (causées par exemple par l'introduction d'instruments chirurgicaux) — même si le milieu concerné, le cerveau, possède évidemment les mêmes propriétés physiques dans les deux situations. Ce constat est lié au fait que le recalage n'est pas une simulation mécanique : les forces appliquées ne reflètent en rien les forces réelles car elles dérivent de mesures abstraites de similarité ; cela est particulièrement vrai pour les approches iconiques, pour lesquelles les forces sont calculées à partir du profil local de l'intensité.

En conclusion, l'introduction de plus de réalisme, comme dans (Hagemann et al., 1999), est profitable au recalage — en particulier l'introduction de discontinuités aux limites des organes, ainsi que l'utilisation de forces de régularisation différente selon les milieux et notamment des contraintes de rigidités pour des structures comme les os (Little et al., 1996) — mais, nous semble-t-il, il n'est pas nécessaire dans l'état actuel des techniques de pousser excessivement le réalisme tant que l'évolution du matériau modélisé n'est pas elle-même modélisée par un processus physique réaliste. De plus, l'utilisation de telles connaissances nécessite un surcroît de calcul non négligeable, comme la segmentation des images et le recalage avec un atlas, et rendent l'algorithme dépendant de l'application.

Nous allons maintenant passer en revue les trois techniques les plus populaires pour régulariser l'estimée de la transformation : les approches paramétriques, compétitives, et fluides.

1.3.1 Approches paramétriques

Les approches paramétriques contraignent l'estimée T à appartenir à un espace de transformations $\mathcal{T}$ de faible dimension. Mathématiquement, si E_{sim} est l'énergie de similarité (géométrique, SIB, ou IFB) retenue pour le recalage des primitives des images I et J, une approche paramétrique va résoudre le problème d'optimisation contrainte suivant :

$$\min_{T \in \mathcal{T}} E_{sim}(I,J,T)$$

Détaillons les choix de l'ensemble $\mathcal{T}$ les plus populaires.

Transformations rigides et affines

L'espace paramétrique courant le plus contraint est le groupe des transformations rigides, composées d'une rotation et d'une translation. Il correspond à un *a priori* très fort sur la solution, qui arrive cependant fréquemment en recalage monosujet. Le faible nombre de degrés de liberté (DDL) d'une transformation rigide (3 DDL en deux dimensions, 6 DDL en 3 dimensions) simplifie énormément la recherche de la solution optimale, ce qui a permis aux chercheurs d'attaquer assez tôt des problèmes complexes comme le recalage multimodal. C'est pourquoi ces algorithmes sont considérés comme étant différents des autres, et une classification des algorithmes de recalage encore d'actualité aujourd'hui divise ceux-ci en algorithmes « rigides » d'une part, et « non rigides » (ou encore « déformables », « élastiques ») d'autre part.

Le recalage rigide est utilisé avec tous les types de primitives :

- en recalage géométrique (Van Herk et al., 1997; Pennec et al., 1998; Rangarajan et al., 1999; Hsu et Loew, 2001), où des formules explicites existent dans le cas d'amers ponctuels (Faugeras et Herbert, 1986; Arun et al., 1987)
- en recalage iconique standard, où il a permis des avancées rapides en recalage multimodal (Viola, 1995; Collignon et al., 1995; Wells et al., 1996; Maes et al., 1997; Kotsas et al., 1998; Roche et al., 1998; West et al., 1999)
- en recalage d'amers iconiques, en utilisant le recalage par blocs (Althof et al., 1997), qui permet notamment une robustesse géométrique exceptionnelle de l'estimation de la rotation (Ourselin et al., 2001).

Le groupe des transformations affines, composées d'une transformation linéaire et d'une translation, possède également un nombre relativement faible de DDL (6 DDL en deux dimensions, 12 DDL en trois dimensions) et est principalement utilisé en recalage comme initialisation préalable à un recalage non rigide. Des techniques spécifiques à ce groupe peuvent être trouvées dans (Thévenaz et al., 1998) pour de l'iconique standard, dans (Feldmar et al., 1997) pour du recalage d'amers iconiques, et dans (Yang et Cohen, 1999) pour du recalage géométrique.

Les transformations affines sont parfois utilisées localement, afin d'approximer une transformation non rigide, tout en gardant un problème de minimisation possédant peu de DDL. Cette technique a été utilisée en recalage d'amers géométriques (Chui et al., 1999) et iconiques (Feldmar et al., 1997).

Fonctions radiales et autres noyaux

Les noyaux d'interpolation ou d'approximation sont un moyen populaire de pratiquer du recalage non rigide paramétrique tout en contrôlant à sa guise le nombre de DDL. Ces noyaux sont des fonctions généralement lisses, centrées en des points appelés points de contrôle. La paramétrisation d'une fonctionnelle f par des noyaux revient à se donner un ensemble de points de contrôle $\mathcal{X}$ et à définir f comme une somme linéaire de noyaux s_i centrés en ces points, parfois portée par une fonction globale R (typiquement une fonction affine voire polynomiale) :

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{x}_i \in \mathcal{X}} \alpha_i . s_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) + R(\mathbf{x})$$

Les noyaux sont généralement identiques ($s_i = s$), mais ils peuvent être différents par exemple pour introduire des contraintes de rigidité dans certains objets présents dans l'image (Little et al., 1996).

Il existe un choix illimité quant à la forme du noyau lui-même. Parfois, pour justifier l'utilisation de tel ou tel noyau, on exhibe une énergie de régularité qu'elle minimise — cependant, tout noyau à symétrie sphérique (*Radial Basis Function*, ou RBF) minimise une telle énergie (Arad, 1995), ce qui relativise quelque peu la pertinence de cet argument.

Les noyaux les plus utilisés sont les splines laplaciennes et les B-splines.

- **Les splines laplaciennes** (Ahlberg et al., 1967; Wahba, 1990) sont des RBF, voire des fonctions matricielles isotropes (chapitre 5), associées aux énergies de régularisation du type $||\nabla^n f||^2$, $n \in \mathbb{N}^*$ (n est même pris réel dans les travaux de (Kybic, 2001)). La plus populaire d'entre elles est sans doute la spline de plaque mince (*Thin-Plate Spline*, ou TPS), introduite en imagerie médicale par (Bookstein, 1989), et qui connaît actuellement un fort regain d'intérêt en recalage iconique. Avec des amers ponctuels, la paramétrisation par spline correspond à la solution explicite de la minimisation d'une énergie quadratique, ce qui explique qu'elles soient apparues dans ce contexte (Duchon, 1976) et qu'elles continuent à être utilisées activement (Davis et al., 1997; Fornefett et al., 1999; Gabrani et Tretiak, 1999; Peckar et al., 1999; Rangarajan et al., 1999; Rohr et al., 1999; Chui et Rangarajan, 2000; Suter et Chen, 2000). La théorie suggère de prendre les points de contrôle aux mêmes endroits que les amers ponctuels, mais les points de contrôles sont parfois simplement agencés en grille régulière lorsque le nombre d'amers ponctuels est important (Chui et al., 2001). En recalage iconique, les points de contrôles sont généralement choisis selon une grille régulière (Rueckert et al., 1998; Meyer et al., 1999; Likar et Pernuš, 2001). Nous reviendrons longuement sur ces splines au chapitre 5.

- **Les produits tensoriels de B-splines.** Ces noyaux ne bénéficient pas de justification théorique en dimension 2 ou supérieure, sauf peut-être du point de vue de la théorie multiéchelle (Unser, 1999), mais possèdent des avantages algorithmiques non négligeables, notamment parce qu'ils sont compacts et séparables. Les points de contrôle de ces splines sont nécessairement placés selon une grille régulière. Des exemples d'utilisation de produits de B-splines cubiques, de loin les plus populaires, peuvent être trouvés dans (Declerck et al., 1998; Subsol et al., 1998) pour du recalage géométrique, et dans (Szeliski et Coughlan, 1997; Vemuri et al., 1998; Musse et al., 1999; Schnabel et al., 2001a) [2] pour du recalage iconique standard.

Moins populaires mais également intéressantes d'un point de vue algorithmique sont les splines compactes définies positives (Hales et Levesley, 2000), parmi lesquelles les splines polynomiales de Wendland (Wendland, 1995) ont été utilisées pour le recalage dans (Fornefett et al., 2001). Signalons également les « sphères de déformations » de (Lotjonen et Mäkelä, 2001) — en fait, des gaussiennes tronquées.

Autres approches paramétriques

Les espaces de transformation de faible dimension sont en nombre virtuellement infini, ce qui pourrait prolonger de beaucoup notre état de l'art. Citons quand même les paramétrisations importantes omises jusqu'ici, que sont les premières composantes de Fourier (Christensen, 1999; Ashburner et Friston, 1999; Lefébure et Cohen, 2001), les ondelettes (Wu et al., 2000), et les premiers vecteurs propres de l'opérateur de l'élasticité linéaire (Christensen, 1994; Bro-Nielsen, 1996).

1.3.2 Approches compétitives

Les approches compétitives ne contraignent pas la transformation à être dans un espace de faible dimension : celle-ci est donc libre (*Free-Form Deformation*, ou FFD). En pratique, ces transformations sont représentées par un champ de vecteurs comportant un vecteur par pixel.

La régularisation du problème de l'estimation se fait par l'addition d'une énergie de régularisation E_{reg}, encore appelée stabilisateur. Cette somme est ensuite minimisée : le problème de recalage se formalise ici par

$$\min_{\forall T} E_{sim}(I,J,T) + E_{reg}(T)$$

2. L'algorithme SIB paramétrique de D. Rueckert et J. Schnabel utilisant l'information mutuelle est mis à disposition sur Internet par l'équipe de T. Hartkens à l'adresse `http://www.imageregistration.com/`

Lors de cette minimisation, l'énergie de régularisation est mise en compétition avec l'énergie de similarité, la similarité des images et la régularité de la transformation étant antagonistes, d'où le nom de ces méthodes.

Tandis que l'approche paramétrique est une pénalisation binaire — aucune des fonctions en dehors de l'espace de transformations envisagé n'est permise, et toutes les fonctions à l'intérieur de cet espace sont équiprobables — l'approche compétitive pénalise plus continuement les transformations en fonction de leur régularité. L'énergie de régularisation peut d'ailleurs être vue comme étant reliée à une densité de probabilité *a priori* sur l'ensemble des champs de vecteurs (Szeliski, 1990). Selon cette interprétation, en utilisant une énergie quadratique classique, nous faisons implicitement l'hypothèse que la solution suit la loi de probabilité d'un certain bruit gaussien corrélé. Par exemple, l'énergie de membrane d'une fonctionnelle f, $E_{mbr}(f) = \int ||df||^2$, très utilisée en recalage, est la (log) densité de probabilité associée aux bruits gaussiens corrélés de distribution spectrale $S(w) = |2\pi w|^{-2}$. Un élément représentatif tiré aléatoirement de cette distribution est représenté figure 1.9.

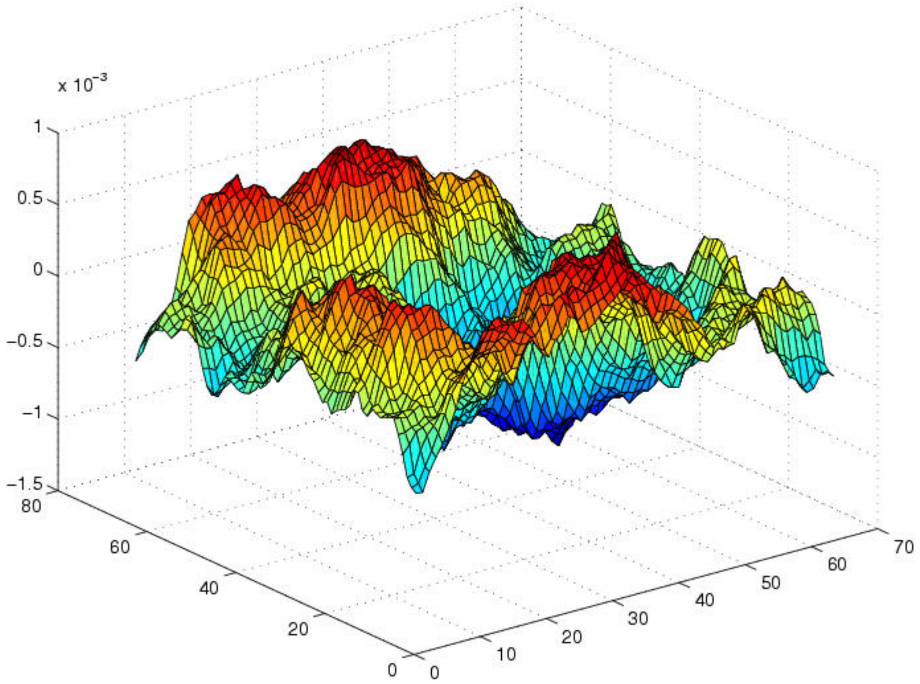


FIG. 1.9 – *Un élément représentatif de la distribution induite par l'énergie de régularisation quadratique dite de membrane en dimension 2.*

Algorithmes géométriques compétitifs

L'approche compétitive du recalage d'amers ponctuels possède une solution explicite sous forme de splines (section 1.3.1) pour certaines énergies quadratiques et certaines dimensions de l'espace, ce qui a motivé leur utilisation même pour des énergies non quadratiques (robustes, par exemple). L'énergie la plus utilisée, et sa spline associée, est celle des plaques minces.

Dans le cas d'amers de dimension supérieure, on retrouve les méthodes de minimisation classiques, et notamment les éléments finis (Kyriacou et Davatzikos, 1998; Dawant et al., 1999; Ferrant et al., 2000). Les énergies les plus utilisées sont celles de l'élasticité linéaire $\frac{\lambda}{2}[div(f)]^2 + \mu||df||^2 - \frac{\mu}{2}||rot(f)||$ et l'énergie de membrane $||df||^2$, fortement liées.

Algorithmes SIB compétitifs

L'approche compétitive pour les algorithmes iconiques standard tend à être assez populaire car elle a été justifiée par des arguments probabilistes à plusieurs reprises (Miller et al., 1993; Gee, 1999). L'élasticité linéaire isotrope a été utilisée dès 1981 par (Broit, 1981) et est naturellement très représentée dans les travaux (Schormann et al., 1996; Hata et al., 1998; Fischer et Modersitzki, 1999), mais nous trouvons aussi de l'élasticité linéaire anisotrope (Alvarez et al., 2000), ainsi que des énergies diverses et variées (Amit, 1994; Benayoun et Ayache, 1998; Cachier et Rey, 2000).

Algorithmes IFB compétitifs (algorithmes P&S)

Recalage par blocs, flux optique, algorithme des « démons » : les algorithmes de recalage d'amers iconiques font le plus souvent appel à l'approche compétitive. La résolution se fait alors en deux étapes : appariement des amers correspondants, et minimisation de l'énergie de régularisation. Ce schéma a donné naissance à la terminologie d'algorithmes « apparie-et-lisse » (*Pair-and-Smooth*, ou P&S) [3].

Les régularisations sont bien plus variées en recalage P&S, car toutes les techniques traditionnelles de lissage et de filtrage peuvent être utilisées (Mitra et Kaiser, 1993). En particulier, le lissage gaussien trouve ici sa place du fait de ses avantages algorithmiques (Simoncelli et al., 1991; Thirion, 1998; Cachier et Pennec, 2000; Guimond et al., 2001).

En recalage P&S, la régularité de la transformation non rigide est en compétition avec une distance géométrique (celle entre amers correspondants), et non une distance iconique : cette différence a une influence fondamentale sur le comportement de la solution, comme nous le verrons au chapitre 3.

Force de régularisation

La force de la régularisation λ peut être contrôlée par le poids que l'on donne à l'énergie de régularisation par rapport à l'énergie de similarité. Classiquement, le facteur de régularisation est choisi comme étant un facteur multiplicatif de l'énergie de régularisation :

$$E(T) = E_{sim}(I,J,T) + \lambda E_{reg}(T)$$

mais nous verrons au chapitre 5 qu'il peut être préférable de le choisir autrement.

1.3.3 Approches fluides

Les approches fluides ne contraignent pas la solution à proprement parler. Comme pour les approches compétitives, la solution est de forme libre et représentée par un champ de vecteurs ; mais contrairement à celle-ci, la régularisation porte sur l'*évolution* de l'estimation. Une vue discrète, ou itérative, de l'évolution de la transformation peut être formulée comme suit : si T_n est la solution à l'itération n, alors T_n est cherchée comme solution du problème suivant :

$$T_n = \arg\min_{\forall T} E_{sim}(I,J,T_n) + E_{reg}(T_n - T_{n-1})$$

Cette approche a aussi été qualifiée de « sans mémoire », car elle correspond à une approche compétitive dont la forme de référence serait à chaque itération la solution trouvée à l'itération précédente, et non sa position de repos initiale.

3. Nous remarquerons au chapitre 3 qu'il serait possible d'implémenter un recalage IFB compétitif qui ne procède pas en deux étapes. A notre connaissance, aucun algorithme de ce type n'a été encore implémenté.

L'approche fluide est la seule qui fasse intervenir la notion d'évolution de l'estimation vers la solution. En particulier, l'approche fluide possède une dépendance intrinsèque vis-à-vis de la position initiale.

C'est en recalage SIB que l'approche fluide a vu le jour en imagerie médicale, introduite par (Christensen et al., 1997) pour résoudre les problèmes de l'élasticité linéaire en grands déplacements : la « perte de mémoire » de l'approche fluide y est présentée comme pouvant s'accommoder de forts déplacements tout en préservant la topologie de la solution. Cette approche a été reprise par (Bro-Nielsen et Gramkow, 1996; Lester et al., 1999), mais semble actuellement souffrir d'une baisse de popularité, probablement dû au fait que si les solutions fournies par les approches fluides autorisent effectivement des déplacements importants, elles sont cependant sujettes à de très fréquents problèmes de topologie, dûs à la linéarisation du modèle fluide en pratique.

A notre connaissance, la seule utilisation du recalage fluide en recalage P&S est notre propre implémentation (Cachier et al., 1999; Pennec et al., 1999).

En recalage géométrique, l'algorithme de « diffusion géométrique » proposé par (Andresen et al., 2000; Andresen et Nielsen, 2001), très proche d'un travail antérieur de (Burr, 1981), tombe sous cette formulation, et peut être considéré comme l'un des rares algorithmes de recalage géométrique fluide.

Distances géodésiques : une extension de l'approche fluide

Une énergie de déformation peut être construite à partir de l'approche précédente. Si nous sommons toutes les énergies de régularisation entre une solution et la solution précédente :

$$E^*_{reg}((T_n)_{n=0..N}) = \sum_{n=1}^{N} E_{reg}(T_n - T_{n-1})$$

nous obtenons l'énergie de la suite $(T_n)_{n=0..N}$. La distance entre deux transformations T et T' est alors définie comme une distance géodésique, c'est-à-dire l'énergie minimale que l'on peut obtenir en considérant toutes les suites $(t_n)_{n=0..N}$ partant de T et allant vers T' :

$$d(T,T') = \min_{(t_n)_{n=0..N} | t_0=T, t_N=T'} E^*_{reg}((t_n)_{n=0..N})$$

Cette distance peut alors être utilisée comme énergie de régularisation dans une approche compétitive :

$$\min_{\forall T} E_{sim}(I,J,T) + d(T,T_0)$$

où T_0 est une estimée initiale. Cette approche géodésique permet à l'algorithme fluide de savoir quand s'arrêter, contrairement aux algorithmes fluides classiques. En contrepartie, la recherche de la géodésique est une approche lourde, qui est approximée en pratique.

Une vue continue et rigoureuse de ces distances, ainsi que de plus amples détails, sont présentés dans les articles de (Trouvé, 1998; Miller et Younes, 1999).

1.3.4 Combinaisons possibles

Comme pour les primitives, différents types de régularisation peuvent être combinés dans le même algorithme.

La paramétrisation est parfois couplée avec une régularisation compétitive, ce qui permet de contraindre la transformation à l'intérieur de zones homogènes (Ashburner et Friston, 1999; Rueckert et al., 1999). Les articles de (Szeliski et Coughlan, 1997; Rohlfing et Maurer, 2001; Schnabel et al., 2001a), comparant le comportement de leurs algorithmes avec et sans cette énergie supplémentaire, laissent même penser que l'approche paramétrique devrait généralement comporter un terme de régularisation compétitif.

L'approche fluide est également parfois utilisée dans une approche compétitive, afin de baisser la contrainte de régularité et de permettre ainsi de plus grands déplacements tout en évitant les problèmes de topologie que l'on aurait avec une approche fluide pure (Cachier et al., 1999; Pennec et al., 2001) ; voir également chapitre 2, p. 55.

Nous récapitulons cette section au tableau 1.1 en listant quelques algorithmes de recalage en fonction du type de régularisation utilisé et de primitives utilisées.

1.4 Une surcouche possible : l'estimation bayésienne

Plutôt que de minimiser l'énergie de recalage choisie à travers les considérations des sections précédentes, certains algorithmes font parfois appel à une surcouche qui construit un nouveau critère sur la base du précédent, en faisant appel à des notions statistiques.

Supposons en effet que l'énergie de recalage à minimiser $E(T)$ ne soit plus simplement le fruit de notre réflexion mais corresponde à une *log-vraisemblance*, c'est-à-dire à [l'opposé du logarithme de] la probabilité que la solution T soit effectivement la bonne solution.

L'approche classique consistant à minimiser cette énergie s'interprète alors comme une estimation dite par maximum de vraisemblance (*Maximum Likelihood*, ou ML). En théorie de l'estimation (Borovkov, 1984), cette méthode est associée à une fonction de coût binaire : le résultat est considéré comme bon s'il correspond exactement à la solution, et mauvais sinon, même s'il ne diffère qu'un peu.

Ainsi revisitée, la minimisation de $E(T)$ ne semble pas être la meilleure technique d'estimation de la transformation. Une approche théoriquement préférable est l'estimation bayésienne, ou estimation par minimum de l'écart quadratique moyen, dont la fonction de coût est quadratiquement liée à la distance du résultat par rapport à la bonne solution ; autrement dit, on cherche le barycentre des transformations pondérées par leur probabilité (figure 1.10). Le nouveau critère à minimiser est

$$\mathcal{E}(\overline{T}) = \int_T e^{-E(T)}.||\overline{T} - T||^2$$

A titre de remarque, notons qu'il est inutile de continuer à surcharger cette énergie par une autre estimation bayésienne : celle-ci étant quadratique, cette nouvelle surcharge donnerait exactement le même résultat.

Malgré ses avantages théoriques, l'estimation bayésienne est beaucoup plus lourde que l'estimation par maximum de vraisemblance, car l'estimation du barycentre n'est pas triviale lorsque la distribution de probabilité est complexe et sans symétrie, ce qui est typiquement le cas en recalage iconique. Les tentatives d'utilisation de cette estimateur en recalage non rigide sont déjà anciennes (Miller et al., 1993; Gee et al., 1995a), mais ne semblent pas se généraliser.

Le recalage P&S : une approximation d'un recalage bayésien standard ?

Un critique formulée contre le recalage d'amers iconiques, et plus particulièrement contre l'approche P&S, est qu'elle ne correspond pas à la formulation classique de la minimisation d'une somme pondérée de deux énergies, et donc qu'elle ne rentre pas dans un cadre probabiliste comme les algorithmes iconiques standard (Miller et al., 1993; Gee, 1999).

Nous voudrions d'abord rappeler que le recalage P&S *peut* s'écrire comme une somme de deux énergies, comme nous le verrons plus en détail au chapitre 3. De plus, le choix des probabilités *a*

<table>
<tr><th></th><th>Algorithmes SIB</th><th>Algorithmes géométriques</th><th>Algorithmes IFB</th></tr>
<tr><td>Rigide/Affine</td><td>(Collignon et al., 1995)
(Wells et al., 1996)</td><td>(Van Herk et al., 1997)
(Rangarajan et al., 1999)</td><td>(Althof et al., 1997)
(Ourselin et al., 2001)</td></tr>
<tr><td>Splines</td><td>(Meyer et al., 1999)
(Rueckert et al., 1998)</td><td>(Bookstein, 1989)
(Rohr et al., 1999)</td><td></td></tr>
<tr><td>B-splines</td><td>(Szeliski et Coughlan, 1997)
(Musse et al., 1999)</td><td>(Declerck et al., 1998)
(Subsol et al., 1998)</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">Compétitifs</td><td rowspan="2">(Miller et al., 1993)
(Hata et al., 1998)</td><td>(Kyriacou et Davatzikos, 1998)
(Dawant et al., 1999)</td><td>(Thirion, 1998)
(Guimond et al., 2001)</td></tr>
<tr><td colspan="2">(Collins et al., 1998)
(Cachier et al., 2001)</td></tr>
<tr><td colspan="2">(Wang et Staib, 1998)</td><td></td></tr>
<tr><td>Fluides</td><td>(Christensen et al., 1997)
(Lester et al., 1999)</td><td>(Andresen et al., 2000)</td><td>(Cachier et al., 1999)
(Pennec et al., 1999)</td></tr>
</table>

Tab. 1.1 – *La matrice méthodologique primitive/régularisation et quelques algorithmes de recalage en fonction du type de régularisation utilisée.*

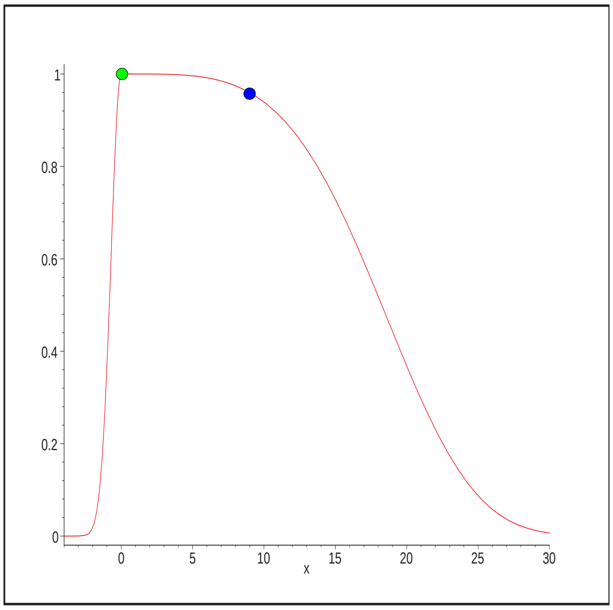


FIG. 1.10 – *Pour une certaine distribution (ligne rouge), l'estimation ML maximise la probabilité du résultat (point vert), tandis que l'estimation bayésienne prend la moyenne de la distribution (point bleu).*

priori est le plus souvent très arbitraire.

Mais surtout, l'approche SIB consiste à minimiser cette énergie, et donc à utiliser un estimateur du type MAP qui n'est pas optimal. Nous pensons que l'approche P&S pourrait être une approximation d'une surcouche bayésienne sur une énergie du type SIB, ce qui pourrait expliquer leur différence de comportement.

1.5 Méthodes de résolution

Les sections précédentes donnent des éléments théoriques pour modéliser un problème de recalage, afin d'obtenir une énergie à minimiser.

Parfois, l'énergie est particulièrement simple, et les mathématiques peuvent nous amener jusqu'au bout du problème en nous fournissant une formule explicite de la solution minimale. Les tracas de l'optimisation peuvent alors nous être épargnés. Ce cas arrive lorsque les énergies sont quadratiques et que le problème est purement géométrique.

Dans tous les autres cas, les mathématiques s'arrêtent à la modélisation du problème, en nous précisant parfois si sa solution existe et est unique (Peckar et al., 1999; Hermosillo et al., 2001; Lefébure et Cohen, 2001; Miller et Younes, 2001). Pour rechercher cette solution, nous devons faire appel à l'analyse numérique. Les méthodes d'optimisation sont nombreuses (Gill et al., 1981; Dennis et Schnabel, 1983; Lemaréchal, 1989), mais souvent, les particularités du problème guident notre choix.

1.5.1 Solutions explicites

Ce sont exclusivement les problèmes géométriques mettant en jeu des énergies quadratiques qui possèdent des solutions explicites. Citons par exemple :

- L'interpolation ou l'approximation du mouvement d'amers ponctuels. La solution de ce problème est une combinaison linéaire de splines, dont les coefficients multiplicatifs sont solutions d'un système d'équations linéaires.

- L'approximation d'un champ de vecteurs dense. La solution de ce problème s'obtient par convolution.

Dans ces deux cas, la formule explicite laisse cependant une certaine liberté dans le choix de la résolution. Dans le premier, le système linéaire peut être résolu de différentes façons selon la taille du problème et la structure de la matrice (Hackbusch, 1994; Saad, 1996; Brezinski, 1997). Dans le second, le filtrage peut se faire dans le domaine réel par différents types de filtres (filtres directs, récursifs (Deriche, 1992), en cascade (Wells et al., 1996), FIR ou IIR (Mitra et Kaiser, 1993)) ou dans le domaine de Fourier.

1.5.2 Méthodes d'ordre 0

Les méthodes de minimisation d'ordre 0 ne nécessitent que l'évaluation de l'énergie à minimiser en certains points, et n'utilisent pas d'information d'ordre supérieur comme son gradient ou son hessien.

Recherche « exhaustive »

La plus simple des méthodes de minimisation d'ordre 0, mais aussi la plus coûteuse, est la recherche dite « exhaustive », qui consiste à parcourir à intervalles réguliers l'espace de recherche, et à garder parmi toutes les valeurs évaluées celle qui donne le meilleur résultat. Cette méthode est très souvent utilisée en recalage par blocs, car l'espace de recherche de l'appariement d'un bloc est généralement réduit (typiquement, quelques translations d'un nombre entier de pixels). Elle est parfois également utilisée pour des espaces de transformations paramétriques de très faible dimension, comme les transformations rigides (Weese et al., 1997).

Méthodes probabilistes

Les approches probabilistes ont une grande importance théorique, car ce sont les seules méthodes pour lesquelles il existe des résultats de convergence vers le minimum global de la solution. Ce résultat puissant est possible parce que les solutions sont tirées et gardées au hasard, ce qui permet de s'affranchir des minima locaux.

Le recuit simulé (Kirkpatrick et al., 1983) consiste à comparer les solutions de manière probabiliste. A chaque valeur de l'énergie est associée une densité de probabilité. Pour deux solutions possibles, un nombre est tiré selon la densité de probabilité associée respectivement à chacune de ces solutions. La solution dont le nombre est le plus grand l'emporte. Bien entendu, une solution ayant une énergie plus petite aura plus de chance de gagner ce duel. Cette chance dépend d'une variable appelée la *température*. Plus la température est importante, plus les solutions sont équiprobables ; au contraire, lorsque la température est nulle, le critère de comparaison redevient déterministe.

Le principe du recuit simulé est de baisser progressivement la température, jusqu'à ce que la solution se stabilise autour du minimum. Malheureusement, la décroissance théorique qui assure la convergence statistique de la méthode est extrêmement lente (proportionnelle à $1/\log(t)$). En pratique, dans les papiers utilisant le recuit simulé, la décroissance est accélérée (Nikou et al., 1999).

Les algorithmes génétiques — fort bien expliqués dans (Lutton et al., 1996) — consistent à faire évoluer une population de solutions dans l'espace de recherche. Ces solutions se multiplient et évoluent sous des contraintes de survies copiant le processus darwinien de l'évolution des espèces.

Cette approche a été utilisée en recalage géométrique rigide par (Rouet et al., 2000) et en recalage iconique rigide ou affine par (Studholme et al., 1995; Butz et Thiran, 2001).

Si les méthodes statistiques sont importantes en théorie, leurs adaptations au recalage n'ont pas connu de francs succès, notamment en iconique non rigide où leur application semble délicate. (Kumar et Desai, 1995) suggère, dans le contexte des approches multirésolution du flot optique, d'utiliser ces algorithmes statistiques aux niveaux les plus élevés de la pyramide seulement, lorsque la transformation n'est encore que faiblement non rigide, puis de les abandonner au profit d'algorithmes déterministes aux niveaux inférieurs.

Méthodes classiques

Le principe des autres méthodes d'ordre 0 consiste à construire un modèle du profil de l'énergie à partir des échantillons déjà évaluées, et d'en prendre le minimum. Parmi ces méthodes, la méthode de Powell est la plus populaire — sa présence dans les célèbres *Numerical Recipies* de (Press et al., 1992) n'étant probablement pas étrangère à ce succès. Une autre méthode classique est la méthode du simplexe, utilisée par exemple dans (Collins et Evans, 1997; Van Herk et al., 1997; Maes et al., 1999).

1.5.3 Méthodes d'ordre supérieur

Comme les méthodes classiques d'ordre 0, les méthodes d'ordre supérieur tentent de modéliser le profil de l'énergie à minimiser à partir de la connaissance de quelques points. Cependant, en plus de la valeur de l'énergie, ces méthodes utilisent les dérivées de l'énergie en ces points.

Citons les types de méthodes les plus utilisées en recalage.

- La méthode de plus profonde descente consiste à minimiser l'énergie le long du gradient de l'énergie. Cette méthode est la plus simple des méthodes de première ordre, et également la plus lente.
- D'autres méthodes de premier ordre plus intelligentes utilisent une direction autre que celle donnée par le gradient (méthode du gradient conjugué par exemple).
- Les méthodes du second ordre utilisent les dérivées secondes de l'énergie afin de l'approximer localement par une forme quadratique. La convergence des méthodes du second ordre est meilleure que celles du premier ordre, mais elles sont moins fiables loin de la solution.
- La méthode de Levenberg-Marquardt est une descente de gradient hybride entre la méthode de plus profonde descente et les méthodes du second ordre, afin de combiner leurs avantages.

D'une manière générale, les méthodes d'ordre supérieur permettent une convergence plus rapide que les méthodes d'ordre 0, mais également plus locale. Ces algorithmes de minimisation sont donc presque toujours utilisés hiérarchiquement.

1.5.4 Approches hiérarchiques

Les approches hiérarchiques consistent, à partir d'un problème complexe de minimisation, à construire un ensemble de problèmes de complexité progressive menant d'un problème très simple au problème complexe initial. L'approche hiérarchique permet d'améliorer la convergence des méthodes numériques d'optimisation vers le minimum global de l'énergie, notamment pour les méthodes déterministes (non statistiques) qui ont tendance à trouver le minimum local le plus proche de la position initiale. Cela permet donc en pratique de retrouver de plus grands déplacements, et d'améliorer ainsi la robustesse des algorithmes.

Les approches hiérarchiques sont très nombreuses (approches multiéchelle, multirésolution, pyramidales, *continuation methods*, *graduated non-convexity*, etc.) , et dépendent en fait beaucoup de la manière dont est conçu l'algorithme de recalage. Un état de l'art de ces méthodes est présenté dans (Lester et Arridge, 1999).

En restant cohérent avec cet état de l'art, nous sommes tenté de dire que la simplification du problème peut porter sur les trois composantes du recalages presentées aux trois premières sections de ce chapitre :

- Les primitives. Par exemple, dans le cas du recalage iconique, les images peuvent être lissées pour obtenir un problème plus régulier (techniques multiéchelles classiques, voir (Krissian, 2000) pour une bonne synthèse en français des approches).
- Les mesures de similarité. Les approches globales (méthodes des moments, coefficients de Fourier...) peuvent être simplifiées en réduisant le nombre de descripteurs utilisés. Les approches locales peuvent être régularisées en augmentant le nombre des appariements, ce qui est très courant en recalage géométriques de points (Chui et al., 2001; Granger et al., 2001). Enfin les approches iconiques peuvent également être régularisées en augmentant la taille de la fenêtre de Parzen utilisée pour construite l'histogramme conjoint.
- La régularisation. L'approche hiérarchique classique en recalage paramétrique consiste à augmenter progressivement la dimension de l'espace des transformations, et en recalage compétitif ou fluide, de manière similaire, à diminuer progressivement la contrainte de régularisation. Cette dernière approche hiérarchique ne concerne bien entendu que les algorithmes de recalage non rigide.

Cependant ces approches ne sont pas équivalentes, et le problème se pose alors de savoir laquelle choisir. Plus délicat est de savoir comment *combiner* ces approches hiérarchiques. Certains, en recalage SIB non rigide paramétrique notamment, ont opté pour un produit tensoriel des approches : la transformation est progressivement raffinée, et pour chaque degré de raffinage, une approche multirésolution est utilisée sur l'image (Rueckert et al., 1999). D'autres font varier simultanément les simplifications, notamment en recalage non rigide compétitif, en utilisant une pyramide multirésolution sur les images, et un champ de vecteur possédant un vecteur par pixel.

1.6 Travaux en cours et à venir sur le recalage

Malgré la masse énorme des travaux déjà réalisés sur le sujet, à laquelle cette thèse ajoute ses quelques grammes, il reste encore beaucoup à faire pour défricher l'horizon des méthodes disponibles, voire établir un consensus sur un petit nombre de méthodes dont on connaîtrait les avantages et inconvénients respectifs. Parallèlement, beaucoup d'améliorations techniques nouvelles émergent ou sont sur le point d'émerger, dont l'utilité pratique reste à établir.

1.6.1 Comparaison et validation des algorithmes

De notre point de vue, le *problème majeur actuel* du recalage non rigide est l'absence de méthode claire et reconnue de tous pour la validation et la comparaison des algorithmes de recalage non rigide. Cette absence de consensus n'a pas permis de donner une légitimité à une méthode particulière qui pourrait être considérée comme méthode de référence et aiderait à la comparaison des résultats sur des données réelles.

Cet effort n'est pourtant pas impossible : il est surprenant de constater que cela a été réalisé dans le domaine du flux optique, un cousin proche du recalage, pour lequel un certain nombre de séquences vidéos réelles ou simulées et de mesures d'erreurs sont devenues des standards de travail, et ce depuis déjà de nombreuses années (Barron et al., 1994). Ces comparaisons n'ont pas été vaines puisqu'elles ont permis de mettre en avant les méthodes basées sur la phase locale (Fleet et Jepson, 1990).

Le travail de validation a certes déjà commencé en recalage rigide. En fixant quelques marqueurs externes ou un cadre stéréotaxique sur le corps d'un sujet — généralement, ces marqueurs sont vissés sur les os — il est possible de retrouver précisément la vraie correspondance rigide entre deux images. Cette technique est d'ailleurs considérée par les médecins comme la mesure étalon (*gold standard*) des techniques de recalage rigide. Dès lors, il est possible de comparer les résultats des méthodes de recalage basées sur l'image à celle basées sur les marqueurs externes. C'est ce qui a été fait grâce à la base de donnée de l'université Vanderbilt [4], qui comprend un grand nombre de couples d'images de modalités différentes ainsi que la transformation rigide réelle associée. Cette base de données a permis de consacrer les méthodes iconiques par rapport aux méthodes géométriques en recalage multimodal (West et al., 1999).

Le problème est plus complexe en recalage non rigide. Il n'existe pour l'instant aucune méthode d'acquisition permettant de retrouver les déplacements de manière dense. Les IRM marquées permettent le marquage physique de plans (Amini et al., 1998). Malheureusement, ce marquage ne dure qu'environ une seconde, ce qui le confine à des utilisations très particulières (cardiologie principalement) et à des résolutions d'image médiocres ; de plus il n'est pas possible d'acquérir simultanément des IRM non marquées sur lesquelles les algorithmes de recalage non rigide classiques pourraient s'appliquer et dont les résultats pourraient être comparés aux mouvements donnés par la séquence marquée.

Des fantômes dont certains points sont localisés précisément commencent à apparaître, notamment ceux de (King et al., 2000) et du Biorobotics Lab de Harvard [5]. Ces fantômes permettent de connaître la précision du recalage non rigide en quelques points dont on peut changer la position grâce à des vis ou des poids.

D'un autre coté, la simulation de mouvements est une tâche complexe, et demande un déploiement d'efforts considérable. L'image doit être segmentée et plongée dans un modèle physique réaliste provenant par exemple d'un atlas. Cette approche a été appliquée aux IRM du sein par (Schnabel et al., 2001b), en utilisant un modèle d'élasticité linéaire uniforme. Un côté décourageant de cette approche est qu'un modèle doit être créé pour chaque nouvel organe étudié. De plus, comme nous l'avons mentionné section 1.3, les mouvements apparents dans l'image ne sont pas forcément modélisables par une approche physique, comme par exemple pour les mammographies, où le volume du sein déformé est projeté sur un plan, ou pour le recalage interpatient.

La plupart du temps, la validation se résume donc à une comparaison avec une transformation non rigide synthétique pas nécessairement réaliste, ou bien à une comparaison quantitative ou parfois qualitative basée sur les intensités, comme la localisation de structures anatomiques ou la différence des images.

1.6.2 Nouvelles primitives

De nouvelles primitives voient actuellement le jour en recalage, et de nouvelles primitives devraient également apparaître dans les années à venir.

Récemment, l'IRM de diffusion a été le moteur d'une nouvelle effervescence (Alexander et Gee, 2000; Ruiz-Alzola et al., 2000). L'IRM de diffusion est une modalité nouvelle d'imagerie, qui permet de mesurer les coefficients de diffusion de l'eau, dans le cerveau notamment. Cette nouvelle modalité

4. `http://www.vuse.vanderbilt.edu/~jayw/`
5. `http://hrl.harvard.edu/hrsl/truthcube/index.htm`

a mis les chercheurs devant un problème nouveau, puisqu'elle fournit des images de matrices (les mesures des tenseurs de diffusion de l'eau), et non de scalaires.

D'autres primitives devraient également voir le jour, et notamment celles dont les utilisations antérieures en flux optique ont été couronnées de succès. Les techniques iconiques basées sur la phase locale (Fleet et Jepson, 1990; Kovesi, 1996) ont déjà montré leur supériorité sur les techniques basées sur le gradient, dont font partie les approches iconiques SIB et P&S. L'introduction de contraintes d'orientation, déjà initiées par (Rohr et al., 1999) en recalage géométrique, devraient également être introduite en recalage iconique, comme cela a été fait en flux optique (Farnebäck, 1998).

1.6.3 Symétrie

Sans information supplémentaire, le recalage de deux images est un problème *a priori* symétrique : il n'y a pas de raison de privilégier une image par rapport à une autre. C'est pourtant ce qui est fait dans la quasi-totalité des algorithmes : l'une des images est considérée comme étant une « image de référence », et l'autre image est alors déformée vers cette première image. Le problème de cette procédure est qu'elle n'est pas symétrique : si les images sont échangées, la transformation trouvée n'est généralement plus la même. En symétrisant le recalage, on cherche à se donner un algorithme qui n'ait pas ce défaut, et qui soit donc indépendant du choix de l'image de référence. Nous en reparlerons en détail au chapitre 6 consacré à notre contribution sur ce sujet.

1.6.4 Bijectivité

Il est en général souhaitable d'avoir une correspondance biunivoque entre les images, afin de préserver la topologie de l'objet. Or, les énergies de régularisation utilisées en recalage garantissent rarement que la transformation trouvée soit effectivement bijective. Quelques travaux vont cependant dans ce sens, tant en recalage géométrique (Trouvé et Younes, 2000; Camion et Younes, 2001) qu'iconique (Miller et Younes, 2001; Musse et al., 2001; Rohlfing et Maurer, 2001) ; notons également que les énergies invariantes par inversion résolvent le problème de la bijectivité en plus de celui de la symétrie (voir chapitre 6).

1.6.5 Fusion des approches iconiques et géométriques

La fusion des approches iconique et géométrique a déjà été amorcée et se révèle être prometteuse. Pour l'instant, ces algorithmes hybrides sont la plupart du temps d'anciens algorithmes iconiques auxquels des contraintes géométriques ont été ajoutées. Il est possible de procéder en sens inverse, c'est-à-dire introduire des contraintes iconiques dans des modèles géométriques (Montagnat et al., 1999). La similarité entre modèles déformables et recalage s'est encore accrue avec l'émergence de ces techniques. Nous verrons peut-être un jour une fusion profonde entre les deux approches.

1.6.6 Recalage simultané de n images

Le recalage de trois images ou plus recoupe en fait trois problèmes différents :

- **Reconstruction.** Les images sont des sous parties d'un même objet. Elles ne présentent que peu de recoupements, et aucune d'entre elles ne peut être prise comme image de référence. Le recalage simultané permet à chaque image d'être recalée par rapport à plusieurs de ses voisines et donc de contraindre beaucoup mieux la solution. Ce problème se pose essentiellement en recalage d'amers géométriques (Bergevin et al., 1996; Benjemaa et Schmitt, 1998).

- **Suivi.** Les images forment une séquence temporelle au cours de laquelle un objet se déforme. Effectuer un recalage par paire est risqué à cause des dérives temporelles de l'image et du cumul des erreurs ; de plus, des contraintes de continuité de mouvement peuvent être utilisées pour contraindre la solution si les images sont suffisamment rapprochées dans le temps, comme cela est fait en flux optique. Nous reparlerons de ce problème du suivi dans le chapitre 7.
- **Fusion.** Les images représentent le même objet dans des modalités différentes. L'intérêt du recalage multiple réside ici en ce que la classification des tissus, et donc la mesure de similarité, est plus fiable avec trois mesures physiques différentes (Boes et Meyer, 1999).

Le recalage multiple n'a pour l'instant pas connu de développement majeur. Les problèmes de reconstruction et de fusion de n images sont rares sur le plan clinique. Quant au suivi, il est d'un grand intérêt mais nécessite des moyens informatiques lourds (stockage d'une séquence d'images et de déplacements tridimensionnels).

1.6.7 Automatisation complète : algorithmes sans paramètre

La dépendance des résultats de recalage non rigide à un choix manuel de la force de régularisation est un de ses problèmes majeurs. Ce paramètre complique d'ailleurs beaucoup la comparaison et la validation des algorithmes, puisqu'il faut prendre en compte pour chacun d'entre eux l'ensemble des résultats obtenus pour tous les paramètres de régularisation possibles, comme cela sera fait au chapitre 3. La comparaison de deux résultats particuliers n'a en effet aucun sens, puisqu'il suffit peut-être de changer la force de régularisation de l'un des algorithmes pour faire pencher la balance dans l'autre sens.

Une possibilité consiste à estimer la valeur du paramètre de régularisation par validation croisée (*cross-validation*). Cette technique est employée avec succès dans les problèmes d'approximation géométrique (Wahba, 1990), et a été utilisée en recalage d'amers ponctuels (Suter et Chen, 2000) ; cependant, aucune tentative en iconique n'a été sujette à publication.

En recalage paramétrique, la force de lissage est déterminée par le nombre de points de contrôle. (Meyer et al., 1998) a étudié la précision de la solution en fonction du nombre de points de contrôle choisi. Son bilan est mitigé puisqu'il parvient à relier le nombre optimal de points de contrôle à la courbure du critère de similarité autour de la solution, en précisant cependant que cette courbure ne peut pas être connue avant l'évaluation de cette solution par recalage.

Il reste donc encore beaucoup de chemin à faire pour obtenir des algorithmes sans paramètre, notamment en recalage non rigide iconique.

1.6.8 Problèmes aux bords et normalisation des mesures de similarité

Les images étant de taille limitée, un pixel de l'image d'étude peut être amené à être apparié avec un point en dehors de l'image cible. Ce point n'ayant *a priori* pas d'intensité, il faut avoir recours à un traitement spécifique.

Recalage rigide et affine

En recalage rigide ou affine, ces points sont généralement exclus du calcul de la mesure de similarité. Cela fait alors apparaître le problème de *normalisation* de la mesure de similarité : peut-elle servir à comparer deux appariements différents si ceux-ci ne comportent pas le même nombre de points ? La réponse est généralement négative si aucune précaution n'est prise. Par exemple la somme des différences aux carrés est toujours moindre si on retire des éléments de la somme.

La normalisation de l'information mutuelle a été étudiée par (Studholme et al., 1999). Le travail le plus prometteur dans le domaine de la normalisation a été réalisé au chapitre 5 de (Roche, 2001) : en plongeant le problème du recalage dans un cadre rigoureux d'estimation, Roche normalise les intensités naturellement et résout également le problème de l'optimalité du non recouvrement, i.e. le fait qu'une énergie de similarité puisse être minimale lorsque les images ne se recouvrent pas.

Recalage non rigide

En recalage non rigide, le problème de l'appariement à des points extérieurs est généralement moindre. Les algorithmes ayant beaucoup de difficulté à retrouver les composantes globales du mouvement, ils sont le plus souvent précédés d'un recalage rigide ou affine. Les débordements hors de l'image cible se cantonnent alors à quelques pixels aux bords.

Lorsque l'algorithme impose des conditions aux limites à la solution, comme des contraintes de glissement ou même de déplacement nul, ces problèmes sont encore réduits.

Le problème de la normalisation des mesures de similarité se posera plus nettement en recalage non rigide lorsque ces algorithmes incluront en leur sein l'estimation des composantes globales du mouvement. Un travail similaire à celui de (Roche, 2001) pourrait donner une solution élégante à ce problème.

1.6.9 Aspects discrets

Interpolation

Non seulement les images ne sont définies que sur un domaine limité, mais en plus elles ne sont pas définies partout dans ce domaine mais uniquement sur un nombre fini de points formant une grille régulière. Or, un point n'est pas nécessairement déplacé sur un point de la grille, mais tombe la plupart du temps en plein milieu, là où il n'y pas d'intensité. En recalage iconique, il faut alors trouver un moyen de calculer la mesure de similarité. Il en existe actuellement deux :

- La première méthode consiste à interpoler les intensités de l'image. Il existe un certain nombre de méthodes d'interpolation (Ramponi, 1999; Thévenaz et al., 2000; Meijering et al., 2001), dont les plus utilisées en recalage sont les interpolations bi-/trilinéaire et bi-/tricubiques, la seconde étant plus efficace que la première mais également nettement plus coûteuse, surtout en trois dimensions. Comme nous le montrons en annexe A, le profil idéal du critère de similarité est obtenu pour une interpolation sinc ; malheureusement, cette interpolation est très coûteuse, et les méthodes d'interpolation les plus couramment utilisées introduisent de nombreux minima locaux dans les mesures de similarité (figure 1.11).Les problèmes de minima locaux induits par les méthodes d'interpolation d'image linéaire ou cubique n'apparaissent que lorsque les grilles rentrent en résonance, c'est-à-dire sans composante de rotation. Ces phénomènes disparaissent en effet pour des angles de rotation même faibles (figure 1.11). De plus, il ne sont pas spécifiques aux méthodes d'interpolation d'image en général mais seulement aux méthodes d'interpolation de faible complexité : ces minima locaux disparaissent lorsque le noyaux d'interpolation se rapproche d'un sinus cardinal, et sont totalement inexistants avec un sinus cardinal (voir annexe A).
- La seconde consiste à interpoler en chaque point la mesure de similarité elle-même, et est connue dans le domaine sous le nom peu parlant d'« interpolation par volume partiel ». L'interpolation par volume partiel est attrayante car, à complexité égale, elle donne des profils d'énergie plus lisses qu'en utilisant l'interpolation de l'intensité. Cependant, il n'est pas prouvé

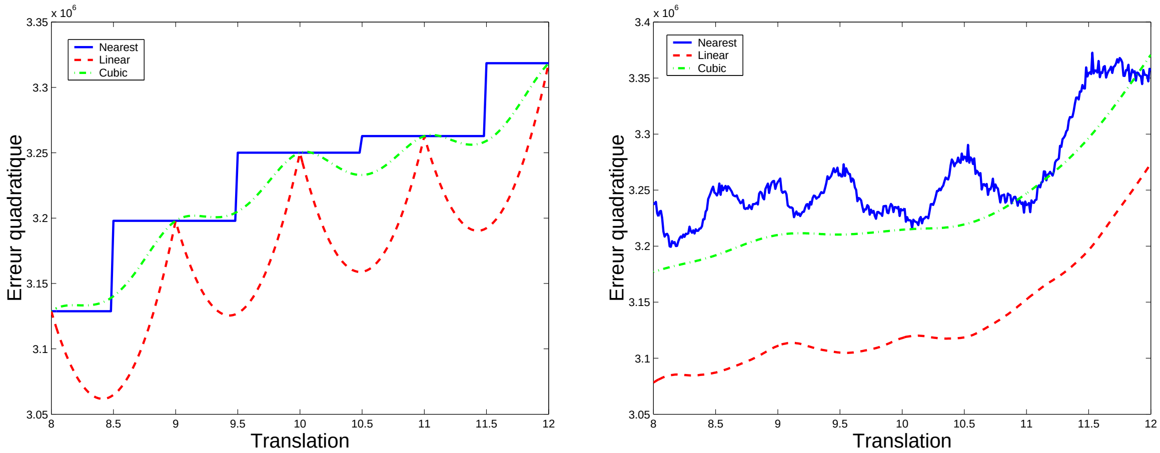


FIG. 1.11 – *Valeur de l'écart quadratique entre deux images en fonction de la translation, pour différents type d'interpolation de l'image. A gauche, pour un angle de rotation nul, les minima locaux quadratiques typiques de l'interpolation linéaire apparaissent entre chaque valeur entière de translation, et de retrouvent dans une moindre mesure en interpolation bicubique. A droite, pour un angle de rotation faible (2.8 degrés pour une image de taille* 50×50 *seulement), les grilles ne rentrent plus en résonance et ce phénomène disparaît.*

que cette interpolation se rapproche du « vrai » profil de l'énergie que l'on trouve par interpolation sinc sur l'image. De plus, l'interpolation par volume partiel se limite généralement à une interpolation linéaire de l'énergie, car les méthodes plus complexes sont nettement plus coûteuse qu'en interpolation d'image. Enfin, l'interpolation par volume partiel ne permet d'interpoler que les mesures métriques, et non les mesures informationnelles se basant sur l'entropie et provenant de la théorie de l'information (voir section 1.2.3), ce qui explique les difficultés rencontrées par (Pluim et al., 2000b).

Signalons enfin qu'une grande qualité d'interpolation n'implique pas l'utilisation de noyaux réguliers ; il a été montré par (Thévenaz et al., 2000; Blu et al., 2001) que les splines optimales contiennent en fait des discontinuités. Cela dit, cette optimalité se fait au sens de l'écart quadratique entre les signaux réel et interpolé ; le critère de minimisation portant sur ces interpolations n'est pas nécessairement plus facile à minimiser avec ces interpolants discontinus.

« Passage au discret »

Le problème du recalage est généralement formulé avec un modèle continu, et non discret, notamment parce que les énergies de régularisation proviennent la plupart du temps de la mécanique des milieux continus (mais il arrive aussi que les mesures de similarité fassent appel explicitement à un modèle continu, comme dans le cas des mesures symétriques, chapitre 6). Nous sommes alors confrontés au problème du « passage au discret » (ou « passage au continu », selon le point de vue) : résoudre un problème continu avec un ordinateur ne pouvant réaliser qu'un nombre fini d'opérations et stocker un nombre fini de nombres. Les deux méthodes classiques pour effectuer ce passage sont les méthodes des différences finies et des éléments finis (Silvester et Ferrari, 1996). Les différences finies approximent le problème continu par un problème discret, ce qui est une bonne façon de faire la plupart du temps, mais peut être gênant lorsque la fidélité au modèle continu doit être aussi parfaite que possible, comme pour la symétrie. Les éléments finis cherchent une solution au problème continu dans un espace paramétrique.

1.6.10 Dépendance de l'application

Les algorithmes de recalage sont encore très largement généralistes et indépendant de l'application. Ce constat est assez étonnant dans la mesure où la plupart des domaines connexes, comme les modèles déformables ou la classification des tissus, proposent maintenant des solutions sur mesure en fonction du problème visé *via* l'utilisation d'atlas ou d'outils statistiques comme l'analyse en composante principale (ACP). En recalage, ces outils existent, mais servent généralement au diagnostic et non pour contraindre le recalage, bien que des intentions allant dans ce sens se prononcent (Rueckert et al., 2001).

Pourtant, les modèles utilisés par les algorithmes sont quelquefois conçus pour une application bien précise. (Studholme et al., 2000) développe un modèle de transformations spécifique aux IRMf. (Roche et al., 2000b) conçoit un modèle relationnel spécifique au recalage IRM/échographie.

Récemment, l'utilisation de contraintes géométriques dans les algorithmes iconiques (section 1.1.4) a permis une avancée dans la spécification des algorithmes de recalage. Les résultats sont extrêmement encourageants, et il est probable que ces approches hybrides sont le futur d'un grand nombre d'applications.

Pour le suivi de déformations, le futur du recalage passera peut être par l'utilisation de modèles volumiques réalistes des organes présents dans les images — ces approches relèvent en fait plus du domaine des modèles déformables que du recalage, mais leur fonctionnalité peut être la même. Ces approches ont déjà été utilisées pour le suivi de l'affaissement du cerveau dans une séquence d'IRM peropératoires (Škrinjar et Duncan, 1999), ainsi que celui du cœur dans une séquence d'échographies 3D (Sermesant et al., 2001). Ces approches auront à faire leur preuve numériquement, mais sont généralement mieux accueillies par la communauté médicale que les méthodes de recalage non rigide traditionnelles.

Chapitre 2

L'algorithme `MAMAN`

« J'allai vers elle avec désinvolture, roulant un peu les épaules, la casquette sur l'œil, les mains dans les poches de cette veste de cuir qui avait tant fait pour le recrutement de jeunes gens dans l'aviation, irrité et embarrassé par cette irruption inadmissible d'une mère dans l'univers viril où je jouissais d'une réputation péniblement acquise de « dur », de « vrai » et de « tatoué ».
— Guynemer ! Tu seras un second Guynemer ! Tu verras, ta mère a toujours raison !
Je sentis le sang me brûler la figure, j'entendis les rires derrière mon dos (...). Mais, alors que j'essayais de lui expliquer dans un murmure rageur qu'elle me compromettait irrémédiablement aux yeux de l'Armée de l'Air, j'entendis une fois de plus la formule intolérable, devenue depuis longtemps classique dans nos rapports :
— Alors, tu as honte de ta vielle mère ? »

Romain Gary, *La promesse de l'aube*, 1960.

Ce chapitre présente nos travaux initiaux sur l'algorithme P&S dit des « démons », et le développement consécutif de notre algorithme `MAMAN`, publiés dans (Cachier et al., 1999) et point de départ historique de cette thèse. La problématique de départ est la suivante : l'algorithme des « démons » est à la fois rapide et efficace ; cependant, il n'existe pas vraiment d'outil de compréhension autre que la provenance de la théorie du flux optique présentée par J.-P. Thirion (Thirion, 1998), et qui pourrait servir à affranchir cet algorithme de l'hypothèse de conservation des intensités.

Nous présentons d'abord l'algorithme des « démons » tel qu'il a été conçu par J.-P. Thirion. Puis nous montrons que cet algorithme peut être vu comme une minimisation alternée de deux énergies, une énergie de similarité et une énergie de régularisation, par une approximation d'une descente de gradient. Partant de ce principe, nous développons l'algorithme de recalage `MAMAN`[1], en améliorant, par rapport aux « démons », d'une part les méthodes de descente de gradient utilisées pour minimiser l'énergie de similarité, et d'autre part les énergies de régularisation, en introduisant les notions de *régularisation mixte* compétitive/fluide et de *reparamétrisation* des champs de vecteurs, utile en grands déplacements. Enfin, nous relèverons les questions encore posées par cet algorithme, que nous résoudrons au chapitre prochain.

2.1 Formalisation et notations

2.1.1 Notations générales

Dans ce chapitre, ainsi que dans le reste de cette thèse, deux images à recaler sont notées I et J. Ces images sont définies comme étant des fonctions de $[0;1]^d$ dans $\mathbb{R}$, où d est la dimension de l'image (typiquement 2 ou 3). Pour un certain point $\mathbf{p} \in [0;1]^d$, $I(\mathbf{p})$ est la valeur de l'intensité de l'image I au point $\mathbf{p}$. Ce nombre correspond à la valeur de la mesure physique mesurée par la modalité de l'image autour du point $\mathbf{p}$, comme l'atténuation des rayons X ou la densité d'émission de positons.

En pratique, on ne peut pas connaître la valeur de cette mesure pour tous les points du volume, pour des raisons physiques comme informatiques. I et J sont donc construites par interpolation des valeurs dont on dispose. Le choix de la méthode d'interpolation a une grande influence sur le recalage ; nous pouvons dire, d'une manière générale, que plus l'interpolation est soignée, plus le recalage est robuste à la position initiale (Maes et al., 1997; Meijering et al., 2001). Nous ne développerons pas ce point, qui est indépendant de l'algorithme de recalage proprement dit ; signalons juste que l'interpolation utilisée dans nos algorithmes est (bi-/tri-)linéaire, sauf mention explicite contraire.

La transformation utilisée pour recaler ces images est notée T. Dans notre système de notation, T part du système de coordonnées de I vers celui de J. T contient les nouvelles coordonnées des points de I. Cependant, T s'applique non pas à l'image I mais à l'image J : la mesure de similarité se calcule entre I et $J \circ T$, et non entre $I \circ T$ et J. Si l'on désire voir I dans sa nouvelle configuration, il faut préalablement inverser T, et appliquer cette inverse à I. Assez contre-intuitivement, T contient le mouvement des points de I et cependant c'est bien J qui est déformée au fil des itérations. Dans ces conditions, plutôt que d'utiliser la terminologie ambiguë d'image de référence et d'image cible, nous préférerons par la suite nous référer à nos notations d'images I et J, T partant toujours du repère de I vers celui de J.

1. `MAMAN` : acronyme de *Matching Algorithm for Medical Acquisitions in Neurology*, son application initiale étant le suivi des déformations du cerveau dans des séquences échographiques (voir chapitre 7)

2.1.2 Notations pour le recalage P&S non paramétrique

Ce paragraphe est important pour comprendre la suite de ce chapitre, ainsi que le prochain, car nous introduisons un vocabulaire et des notations qui seront utilisés en permanence par la suite, et qui contiennent par leur définition même la philosophie des algorithmes P&S non paramétriques.

Les algorithmes développés dans cette thèse utilisent tous des transformations non paramétriques. Une transformation T est donc représentée par un champ de vecteurs $\mathbf{U} = T - \mathrm{Id}$, défini sur la grille discrète de l'image, avec un vecteur par pixel. $T(\mathbf{p})$ contient les nouvelles coordonnées de $\mathbf{p}$ après transformation ; $\mathbf{U}(\mathbf{p})$ représente son déplacement. La notation $\mathbf{U}$ fera toujours référence à un champ de déplacements, lié à une transformation T.

Nos algorithmes sont également tous itératifs. Nous notons $T_n = \mathrm{Id} + \mathbf{U}_n$ l'estimation de la transformation à l'itération n. Pour passer de T_n à T_{n+1}, les algorithmes P&S non paramétriques auxquels nous nous intéressons suivent une procédure générale composée de deux étapes.

1. **Recherche des correspondances.** A l'itération n, pour chaque pixel $\mathbf{p}$ de l'image I, un point [2] correspondant $C_n(\mathbf{p})$ est cherché dans l'image J. Nous appellerons le champ de vecteurs $\mathbf{u}_n = C_n(\mathbf{p}) - T_{n-1}(\mathbf{p})$ le champ de corrections résiduelles.
2. **Approximation par la transformation.** Les points correspondants donnés par C_n attirent vers eux une transformation T_n contrainte à être lisse. La transformation T_n est obtenue en résolvant un problème d'approximation — typiquement, par convolution de C_n avec un noyau gaussien.

La notation C fera toujours référence à un ensemble de correspondances entre les points $\mathbf{p}$ de I et leurs amers ponctuels associés $C(\mathbf{p})$ dans l'image J. La notation $\mathbf{u}$ fera toujours référence à un champ de corrections, qui défini C non pas à partir de l'identité, comme $\mathbf{U}$ pour T, mais à partir de l'estimation de la transformation à l'itération précédente.

2.1.3 Initialisation des algorithmes

L'initialisation est primordiale pour ce type d'algorithme. Dans ce qui suit, nous prendrons toujours, par convention, l'identité comme transformation initiale ($T_0 = \mathrm{Id}$). Cela cache pourtant le recalage rigide ou affine qui est presque toujours fait préalablement au recalage non rigide : souvent, l'une des images n'est pas l'image originale mais a été rééchantillonnée après un recalage rigide ou affine (le type de ce prérecalage étant fonction par exemple du caractère mono- ou intersujet du problème).

2.2 L'algorithme des « démons »

L'algorithme des « démons » est une méthode de recalage P&S introduite par J.-P. Thirion (Thirion, 1998), rentrant dans le cadre de la procédure de recalage présenté section 2.1.2.

Dans cet algorithme, le champ de corrections $\mathbf{u}_n$ est donné explicitement par la formule

$$\mathbf{u}_n = \frac{I - J \circ T_{n-1}}{||\nabla I||^2 + (I - J \circ T_{n-1})^2} \nabla I \tag{2.1}$$

T_n est ensuite déduit de $C_n = T_{n-1} + \mathbf{u}_n$ par convolution avec un noyau gaussien dont la taille est fixée par l'utilisateur en fonction du problème. L'algorithme est résumé au tableau 2.1.

2. Les algorithmes P&S auxquels nous nous intéressons par la suite utilisent donc des amers iconiques ponctuels, contrairement par exemple aux algorithmes de flux optique classique — voir état de l'art p. 19.

La formule (2.1) utilisée par l'algorithme des « démons » pour calculer le champ de corrections s'inspire de la contrainte du flux optique (Horn et Schunk, 1981) ; nous allons brièvement expliquer son mécanisme.

---

1. Initialisation $n := 0$ et $T_0 :=$ Id
2. Trouver les correspondances C_{n+1} par la formule $C_{n+1} = T_n + \mathbf{u}_{n+1}$, où $\mathbf{u}_{n+1}$ est donné par l'équation (2.1)
3. Trouver T_{n+1} en lissant C_{n+1} par une gaussienne
4. Poser $n := n + 1$
5. Allez en 2 tant que $n < N_{ITER}$

TAB. 2.1 – *Boucle principale de l'algorithme des « démons ».*

2.2.1 La contrainte du flux optique

Supposons que nous ayons une suite continue d'images I_t en fonction du temps. Faisons l'hypothèse de *conservation de l'intensité* d'un point physique au cours du temps : quels que soient sa position et son mouvement, ce point apparaîtra avec la même intensité dans toutes les images où il est présent. En formalisant un peu, si $\mathbf{p}(t)$ est la position de ce point à l'instant t,

$$I_t(\mathbf{p}(t)) = constante$$

Dérivons cette équation par rapport à t :

$$\nabla I_t^T . \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \frac{dI_t}{dt} = \nabla I_t^T . \mathbf{v} + \frac{dI_t}{dt} = 0$$

où $\mathbf{v}$ est la vélocité apparente du point $\mathbf{p}$. Cette dernière équation détermine la composante normale de la vitesse et contraint ce vecteur à se situer sur un certain hyperplan.

Maintenant, si nous disposons de deux images I et J suffisamment proches l'une de l'autre dans le temps, nous pouvons utiliser une approximation au premier ordre pour le calcul des déplacements résiduels $\mathbf{u}$ et intégrer l'équation précédente en :

$$\nabla I^T . \mathbf{u} = I - J$$

avec $I = I_t$, $J = I_{t+dt}$, et $\mathbf{u} = d\mathbf{p}$. Les corrections $\mathbf{u}$ ne sont que partiellement déterminées ; chaque vecteur possède encore $d - 1$ degrés de liberté.

2.2.2 De la contrainte du flux optique aux « démons »

L'algorithme des « démons » se déduit de la contrainte du flux optique par trois principales modifications.

Suppression des degrés de liberté des corrections.

Dans l'algorithme de Thirion, le champ de corrections $\mathbf{u}$ est dans un premier temps choisi de norme minimale ; ses composantes tangentielles sont annulées et les corrections sont alors parallèles au gradient de l'image :

$$\mathbf{u} = \frac{I - J}{||\nabla I||^2} \nabla I(\mathbf{p}) \tag{2.2}$$

Les points correspondants donnés par cette formule sont les points les plus proches permettant de recaler J sur une approximation linéaire de I (figure 2.1).

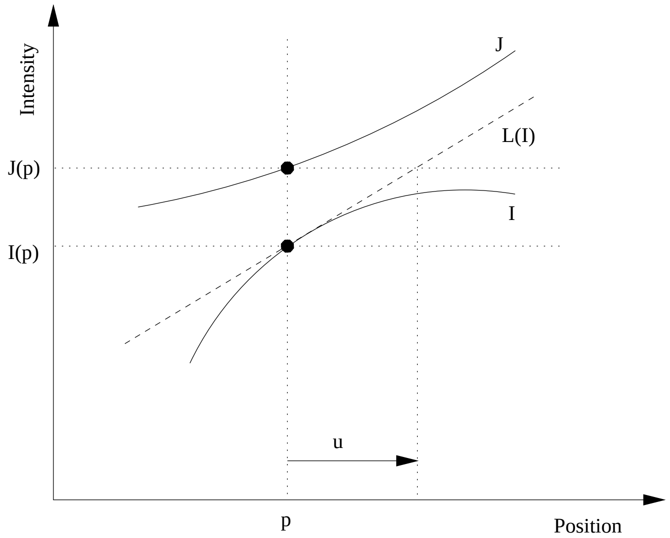


FIG. 2.1 – *Choix du point correspondant dans le cas d'images unidimensionnelles. $L(I)$ représente l'approximation linéaire de I, et $\mathbf{u}$ la correction donnée par la formule (2.2).*

Renormalisation

La formule (2.2) est cependant instable pour de faibles gradients : la norme des corrections $\mathbf{u}$ tend vers l'infini. Pour pallier ce problème, ce champ de vecteurs est renormalisé en :

$$\mathbf{u} = \frac{I - J}{||\nabla I||^2 + (I - J)^2} \nabla I$$

Réinitialisation en T_n

Enfin, la grande différence entre l'algorithme de recalage des « démons » et les algorithmes de flux optique, est que ce schéma est réinitialisé, à chaque itération, à l'endroit où le point est déplacé : l'image J est remplacée à chaque itération par l'image $J \circ T_n$. A l'itération n, le champ de corrections calculé est en fait

$$\mathbf{u}_n = \frac{I - J \circ T_{n-1}}{||\nabla I||^2 + (I - J \circ T_{n-1})^2} \nabla I \tag{2.3}$$

Cette astuce permet à l'algorithme de trouver de grands déplacements, au lieu de rester purement local — en flux optique en effet, les déplacements se calculent entre deux images successives d'une séquence vidéo pour lesquelles l'hypothèse des faibles déplacements est valide.

2.2.3 A propos de la renormalisation utilisée par les « démons »

Dans ses publications, Thirion semble ne pas avoir remarqué que son terme correctif lui permet d'obtenir des vecteurs de norme bornée. En effet,

$$\left[(I - J) - ||\nabla I||\right]^2 = (I - J)^2 + ||\nabla I||^2 - 2(I - J).||\nabla I||$$

D'autre part, $[(I-J)-||\nabla I||]^2 \geq 0$. Les corrections données par la formule (2.3) sont donc bornées par 1/2.[3]. Cette norme maximale peut être changée en introduisant un paramètre α dans la formule (2.3) :

$$\mathbf{u}_n = \frac{I - J \circ T_{n-1}}{||\nabla I||^2 + \alpha^2 (I - J \circ T_{n-1})^2} \nabla I$$

Les corrections sont alors bornées par $1/2\alpha$. Il est en général souhaitable de prendre des valeurs non unitaire pour α, car des corrections de norme 1/2 sont très petites et la convergence de l'algorithme est alors lente. Des normes de l'ordre de trois à cinq pixels semblent donner les meilleurs résultats.

2.3 L'algorithme MAMAN

2.3.1 Problèmes soulevés par l'algorithme des « démons »

L'algorithme des « démons » décrit à la section précédente est un algorithme de recalage non rigide efficace et rapide, utilisé par de nombreux chercheurs (Bricault et al., 1998; Webb et al., 1999; Prima et al., 1998; Thirion, 1998; Dawant et al., 1999; Guimond et al., 2001). Cependant, trois points restent à clarifier :

1. L'algorithme part de la contrainte du flux optique, qui suppose que les intensités sont conservées au cours du mouvement. Cette hypothèse est très handicapante en pratique. Comment généraliser les formules des « démons » afin de rendre l'algorithme moins sensible au biais? Plus généralement, comment retrouver le concept de mesure de similarité dans l'algorithme des « démons »?
2. Par rapport aux algorithmes de flux optique traditionnels, l'algorithme des « démons » comporte une étape de lissage supplémentaire. Que signifie cette étape de lissage?
3. Enfin, l'algorithme des « démons » minimise-t-il une énergie globale?

Dans le reste de cette section, nous allons répondre à quelques unes de ces questions ; nous discuterons des autres en fin de chapitre. Nous allons d'abord montrer que nous pouvons relier la formule des « démons » (2.3) à une descente de gradient sur le critère de l'écart quadratique entre les images, et le lissage à une minimisation d'énergie (section 2.3.2). Partant de ce constat, nous généralisons l'algorithme des « démons » en l'algorithme MAMAN, qui utilise des méthodes explicites de descente de gradient plutôt que l'utilisation de la formule (2.3) pour calculer le champ de corrections $\mathbf{u}$ (section 2.3.3).

2.3.2 Les « démons » comme une minimisation alternée

Nous allons d'abord montrer que l'étape 2 de l'algorithme des « démons », tableau 2.1, peut être vue comme une approximation d'une descente de gradient du second ordre sur le critère de l'écart quadratique entre les images. Puis, nous montrons que l'étape 3 de lissage est une minimisation d'une énergie d'approximation des correspondances.

Formule des « démons » et écart quadratique entre les images

Soit $EQ(I,J \circ T)$ l'écart quadratique entre les deux images I et J recalées par une transformation T :

$$EQ(I,J \circ T) = \int [I(\mathbf{p}) - J \circ T(\mathbf{p})]^2$$

3. L'unité dans laquelle est exprimée cette norme dépend de l'unité utilisée pour calculer le gradient de l'image. En général, il s'agit de pixels.

où T est une transformation non paramétrique, i.e. un champ de vecteurs, avec un vecteur par pixel. Nous voulons trouver un champ de corrections $\mathbf{u}$ qui, ajouté à T, minimiserait l'écart quadratique. Pour cela, nous dérivons $EQ(I,J \circ [T+\mathbf{u}])$ par rapport aux corrections $\mathbf{u}(\mathbf{p})$ pour tous les pixels $\mathbf{p}$, près de $\mathbf{u}(\mathbf{p}) = 0$. Au premier et au second ordre, nous obtenons les dérivées suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}.\frac{\partial EQ}{\partial \mathbf{u}(\mathbf{p})} &= [J \circ T(\mathbf{p}) - I(\mathbf{p})]\, \nabla J \circ T(\mathbf{p}) \\ \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 EQ}{\partial \mathbf{u}(\mathbf{p})^2} &= \nabla J \circ T(\mathbf{p}).\nabla J \circ T^T(\mathbf{p}) + (J \circ T(\mathbf{p}) - I(\mathbf{p}))\, \mathcal{H}J \circ T(\mathbf{p}) \end{aligned}$$

où $\mathcal{H}J \circ T(\mathbf{p})$ est la matrice hessienne de l'image J au point $T(\mathbf{p})$, composée de ses dérivées secondes en ce point.

Une méthode simple pour minimiser $EQ(I,J \circ [T+\mathbf{u}])$ consiste à l'approximer par sa forme quadratique tangente en $\mathbf{u} = 0$, en utilisant ses dérivées premières et secondes :

$$EQ(I,J \circ [T+\mathbf{u}]) \simeq EQ(I,J \circ T) + \int \left(\frac{\partial EQ}{\partial \mathbf{u}(\mathbf{p})}\right)^T .\mathbf{u}(\mathbf{p}) + \frac{1}{2}\int \mathbf{u}(\mathbf{p})^T.\frac{\partial^2 EQ}{\partial \mathbf{u}(\mathbf{p})^2}.\mathbf{u}(\mathbf{p})$$

L'annulation des dérivées par rapport à $\mathbf{u}(\mathbf{p})$ donne la formule classique

$$\mathbf{u}(\mathbf{p}) = -\left(\frac{\partial^2 EQ}{\partial \mathbf{u}(\mathbf{p})^2}\right)^{-1} .\frac{\partial EQ}{\partial \mathbf{u}(\mathbf{p})}$$

c'est-à-dire, en reprenant les termes,

$$\mathbf{u} = \left[\nabla J(T).\nabla J(T)^T + (J(T) - I)\mathcal{H}J(T)\right]^{-1} (I - J(T))\nabla J(T)$$

Cette formule nécessite une inversion de matrice $d \times d$ à chaque pixel, où $d \in \{2,3\}$ est la dimension de l'image. Une approximation du schéma précédent consiste à approximer cette matrice par une matrice facile à inverser, en l'occurrence une matrice scalaire. La matrice scalaire la plus proche d'une matrice A, au sens de la norme quadratique, étant $(\mathrm{tr}(A)/d).\mathrm{Id}$, la formule précédente se transforme en

$$\mathbf{u} = \frac{3(I - J(\bar{T}))}{||\nabla J(\bar{T})||^2 + (J(\bar{T}) - I)\Delta J(\bar{T})} \nabla J(\bar{T}) \tag{2.4}$$

Cette formule est analogue à celle des « démons », equ. (2.3). Les « démons » peuvent donc être vu comme une approximation d'une descente de gradient sur le critère de l'écart quadratique. Une des différences provient de la renormalisation des « démons », au dénominateur, qui permet à la fois d'avoir un champ de corrections $\mathbf{u}(\mathbf{p})$ bornées, et au dénominateur d'être toujours positif, ce qui n'est pas le cas avec la formule (2.4) — problème bien connu des méthodes du second ordre. L'autre différence provient de l'utilisation du gradient de $\nabla J \circ T$ plutôt que celui de I. En fait, il serait possible d'utiliser ce premier gradient dans l'algorithme des « démons » ; Thirion a cependant préférer garder ∇I pour ne pas rééchantilloner ∇J à chaque itération (la même astuce est utilisée d'ailleurs par (Thévenaz et al., 1998) en recalage SIB affine). Cette astuce permet en effet de réduire beaucoup les temps de calcul, cependant les déformations retrouvées sont moins bonnes car la correction $\mathbf{u}(\mathbf{p})$ du point $\mathbf{p}$ est toujours parallèle à $\nabla I(\mathbf{p})$, pour toutes les itérations, sans possibilité de prendre une autre direction.

Lissage

Dans l'algorithme des « démons », la transformation se déduit de l'ensemble des correspondances par lissage avec une gaussienne d'écart type σ choisi manuellement par l'utilisateur :

$$T_n = G_\sigma * C_n$$

Cette convolution revient en fait à minimiser l'énergie quadratique d'approximation suivante (Nielsen et al., 1994)

$$\int ||T_n - C_n||^2 + \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^*} \frac{\sigma^{2|\boldsymbol{\alpha}|}}{2^{|\boldsymbol{\alpha}|}\alpha_1! \cdots \alpha_d!} (\partial_{\boldsymbol{\alpha}} T)^2 \tag{2.5}$$

où $d \in \mathbb{N}^*$ est la dimension de l'image, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$, $|\boldsymbol{\alpha}| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$ et $\partial_{\boldsymbol{\alpha}} = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_d^{\alpha_d}$

2.3.3 Recalage par descente de gradient sur l'écart quadratique

Les étapes 2 et 3 de l'algorithme des « démons » correspondent donc à deux minimisations d'énergie. L'étape 2 est une approximation d'une (et *une seule*) itération d'une descente de gradient sur l'écart quadratique entre les images, pour trouver les correspondances C. L'étape 3 est la minimisation d'une énergie d'approximation de C par T.

L'idée qui nous a poussé à développer `MAMAN` était donc de remplacer la formule des « démons » par une descente de gradient explicite sur l'écart quadratique. La boucle principale de l'algorithme `MAMAN`, sous réserve des développements à venir dans les sections suivantes de ce chapitre, est donnée au tableau 2.2 pour comparaison avec l'algorithme des « démons », tableau 2.1. Notons que nous gardons l'aspect « infinitésimal » de l'étape 2 des « démons » pour trouver les correspondances : l'étape 2 de `MAMAN` ne comporte qu'une seule itération d'une descente de gradient, nous ne poussons pas la minimisation de E_{sim} plus loin, par exemple jusqu'à convergence de la descente de gradient. Ce caractère infinitésimal est en effet essentiel pour le succès de l'algorithme ; pousser plus loin la minimisation de l'écart quadratique donne des résultats très inférieurs. Nous aurons l'occasion d'en reparler plus loin.

1. Initialisation $n := 0$ et $T_0 :=$ Id
2. Trouver C_{n+1} par une seule itération de descente de gradient sur E_{sim}, en partant de T_n
3. Trouver T_{n+1} en lissant C_{n+1} par une gaussienne
4. Poser $n := n + 1$
5. Allez en 2 tant que $n < N_{ITER}$

TAB. 2.2 – *Boucle principale de* `MAMAN`.

Plusieurs techniques de descente de gradient ont été mises en œuvre dans `MAMAN`. Il existe plusieurs axes de classification des méthodes de descente de gradient ; celui qui nous est apparu le plus important en pratique sépare les méthodes reposant sur une recherche linéaire de ceux reposant sur une région de confiance.

Méthodes reposant sur une recherche linéaire (*line search*)

Les premières méthodes utilisent une descente de gradient avec recherche linéaire pour minimiser la vraie énergie. Elles nécessitent que l'on se fixe une direction de descente, c'est-à-dire une demi-ligne dans l'espace des transformations sur laquelle le critère décroît au voisinage de son origine. La minimisation ne dépend plus alors que d'un paramètre qui représente la coordonnée de la transformation sur cette demi-ligne. Cette minimisation unidimensionnelle est effectuée, dans notre algorithme, par la méthode de l'approximation polynomiale successive (Press et al., 1992).

La méthode la plus simple utilise l'opposé du gradient de l'énergie à minimiser ; c'est aussi la plus lente à converger. `MAMAN` peut utiliser le gradient, ainsi que des gradients reconditionnés par des formules de type Gauss-Newton, qui s'avèrent beaucoup plus efficaces.

Les méthodes reposant sur une recherche linéaire sont cependant assez lentes, car elles nécessitent plusieurs estimations de l'écart quadratique des images à chaque itération. Nous préférons donc généralement utiliser les méthodes de la catégorie suivante.

Méthodes reposant sur une région de confiance (*trust region*)

La seconde classe de méthodes ne minimisent pas le vrai profil de l'énergie, mais son approximation quadratique. Cependant, l'approximation quadratique n'est valable que sur une petite région autour de l'estimation courante : c'est donc sur cette région de confiance, que l'on doit estimer parallèlement, que l'on minimise cette forme quadratique tangente. La seconde classe de méthodes n'utilise donc pas de recherche linéaire, mais tente à chaque itération de trouver directement la bonne estimation du mouvement. Nous avons implémenté une minimisation de type Levenberg-Marquardt (Gill et al., 1981), où un facteur d'échelle est choisi dynamiquement en fonction du succès ou de l'échec de la valeur précédente. Nous avons également utilisé une adaptation de la technique de Gauss-Newton, que nous utilisons par défaut dans `MAMAN`, car rapide et relativement performante. Nous exposerons plus en détail les schémas de minimisation au chapitre 4 portant sur nos mesures de similarité.

2.3.4 S'affranchir de l'écart quadratique

En plus de l'utilisation de méthodes de minimisation plus performantes que celles employées dans l'algorithme des « démons », un des avantages de cette formulation est bien sûr l'emploi de mesures de similarité plus efficaces que l'écart quadratique ; en effet, même en recalage monomodal, l'écart quadratique est une mesure très peu fiable, car extrêmement sensible aux écarts de l'hypothèse de conservation de l'intensité, violée pourtant fréquemment par de nombreuses modalités. Nous présenterons au chapitre 4 nos travaux sur le sujet.

2.3.5 Régularisation

Dans l'algorithme des « démons », la régularisation est faite en lissant les correspondances par une gaussienne. Nous avons vu p. 54 que cette convolution correspond à la minimisation d'une énergie d'approximation de C par T. Cette régularisation est du type compétitive, puisque l'énergie de régularisation dans la formule (2.5) porte sur la transformation.

Dans `MAMAN`, nous avons généralisé cette régularisation aux combinaisons de régularisations compétitive (ou élastique) et fluide (voir notre classification à la section 1.3 p. 26). La régularisation de `MAMAN` est donc plus souple que celle de la plupart des autres algorithmes de recalage non paramétrique, qui utilisent soit une régularisation compétitive, soit une régularisation fluide. Bien que l'utilisation d'une régularisation fluide seule nous soit apparue, au fil de nos expériences, peu recommandable lorsque l'on désire préserver la topologie, son utilisation conjointe avec une régularisation compétitive permet en pratique de baisser la force de cette dernière, et de retrouver ainsi de plus grands déplacements. Nous montrerons sur un exemple l'intérêt de cette régularisation mixte.

Régularisation quadratique classique (compétitive)

Dans cette section, nous notons $\hat{T}$ la transformée de Fourier de T. Nous partons d'une énergie de régularisation quadratique s'écrivant dans le domaine de Fourier :

$$E_{reg}(T_n) = \int |G.\hat{T}_n|^2$$

Cette formulation reste assez générale et recouvre la plupart des énergies de régularisation quadratiques courantes, telles que l'énergie de l'élasticité linéaire, ou celle menant au noyau gaussien. Maintenant, nous approximons un ensemble de correspondances C_n par une transformation T_n en minimisant par rapport à T_n l'énergie d'approximation quadratique suivante :

$$\int ||\hat{C}_n - \hat{T}_n||^2 + \int |G.\hat{T}_n|^2$$

En annulant la dérivée par rapport à $\hat{T}_n$ de cette énergie, nous obtenons

$$\hat{T}_n = \hat{K}.\hat{C}_n$$

en ayant posé $\hat{K} = (\mathrm{Id} + G)^{-1}$. L'approximation quadratique de C_n par T_n se fait donc simplement par convolution de C_n avec le noyau K. Ce noyau K est une gaussienne dans le cas de l'algorithme des « démons ».

Régularisation quadratique fluide

En reprenant la définition donnée dans notre état de l'art p. 32, la régularisation fluide se différencie de la régularisation compétitive classique en ce que l'énergie de régularisation s'applique à la différence entre les transformations de deux itérations successives. Notre énergie d'approximation est maintenant changée en

$$\int ||\hat{C}_n - \hat{T}_n||^2 + \int \left|G.(\hat{T}_n - \hat{T}_{n-1})\right|^2$$

où C_n et T_n sont les correspondances et la transformation à l'itération n. En annulant la dérivée par rapport à $\hat{T}_n$ de cette énergie, nous obtenons

$$\hat{T}_n - \hat{T}_{n-1} = \hat{K}.(\hat{C}_n - \hat{T}_{n-1}) = \hat{K}.\hat{\mathbf{u}}_n$$

Autrement dit, pour utiliser une régularisation fluide dans MAMAN, il faut construire T_n en lissant dans un premier temps le champ de corrections $\mathbf{u_n}$ avec le même noyau K que précédemment, puis en ajoutant ce champ lissé à T_{n-1}.

Mélange des deux types de régularisation

Que se passe-t-il si nous utilisons simultanément ces deux types de régularisation? L'énergie utilisée pour estimer T_n s'écrit maintenant

$$\int ||\hat{C}_n - \hat{T}_n||^2 + \omega.\int \left|G.(\hat{T}_n - \hat{T}_{n-1})\right|^2 + (1-\omega).\int |G.\hat{T}_n|^2$$

où $\omega \in [0;1]$ est un paramètre réglant la part relative incombant aux régularisations fluide et compétitive. En annulant la dérivée par rapport à $\hat{T}_n$ de cette énergie, nous obtenons

$$\hat{T}_n = (1-\omega)\left[\hat{K}.\hat{C}\right] + \omega\left[\hat{T}_{n-1} + \hat{K}.(\hat{C} - \hat{T}_{n-1})\right]$$

Donc, en utilisant cette régularisation mixte, T_n est une combinaison linéaire des deux solutions trouvées précédemment : pour une part ω, T_n provient de T_{n-1} auquel on aura ajouté le champ de corrections $\mathbf{u_n}$ lissé par K, et pour une part $1-\omega$, T_n provient des correspondances C_n lissées par K. Par conséquent, nous remplaçons l'étape 3 du tableau 2.2 par celles du tableau 2.3.

3a. Lisser C_{n+1} par un noyau K ; soit A le résultat.
3b. Lisser $C_{n+1} - T_n$ par un noyau K ; soit B le résultat.
3c. Prendre $T_{n+1} := (1-\omega).A + \omega.(T_n + B)$

TAB. 2.3 – *Lissage mixte compétitif/fluide de MAMAN: l'étape de lissage 3 du tableau 2.2 est remplacé par ces trois nouvelles étapes.*

Choix du noyau K

Dans l'algorithme des « démons », la régularisation est purement compétitive et ne comporte aucune part fluide. De plus, le noyau K est limité au noyau gaussien.

Dans MAMAN, le noyau K peut également être gaussien. Mais nous avons de plus intégré d'autres noyaux isotropes, correspondant par exemple à l'énergie de l'élasticité linéaire ou à l'énergie de plaque mince, et également une version généralisée de la gaussienne autorisant les effets croisés entre les composantes. L'établissement de ces noyaux est l'une des contributions de cette thèse ; leur développement se fera au chapitre 5 consacré aux énergies de régularisation isotropes.

Exemple

Pour illustrer les avantages de cette régularisation mixte, nous présentons figure 2.2 un problème de recalage sur des images assez bruitées.

Pour une certaine force de régularisation globale, nous avons recalé ces images avec une régularisation fluide pure ($\omega = 0$), une régularisation compétitive pure ($\omega = 1$), et une régularisation mixte ($\omega = 0.2$), le noyau utilisé dans ces trois cas étant un noyau gaussien. La régularisation fluide autorise de grands déplacements, et recale bien les intensités ; cependant la transformation possède de nombreuses aberrations et ne présente pas la forme attendue. La régularisation compétitive donne un champ bien plus lisse, mais ne recale pas assez les intensités. Avec une régularisation mixte, nous pouvons baisser dramatiquement la part de la régularisation compétitive, sans toutefois l'annuler : la transformation trouvée est raisonnablement lisse et recale bien les images. Nous montrons de plus

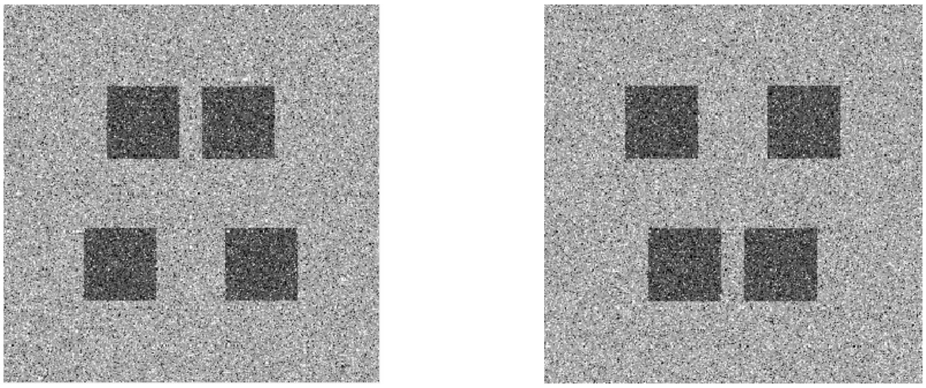


FIG. 2.2 – *Deux images bruitées à recaler.*

que nous ne pouvons obtenir le même résultat en prenant une force de régularisation compétitive plus faible : en baissant la force de celle-ci, nous obtenons des transformations plus irrégulières et à la fois de moins bons recalages qu'avec notre régularisation mixte (figure 2.3)[4].

2.3.6 Critères d'arrêt

Les minimisations alternées (étapes 2 et 3) de la similarité et de la régularité (étapes 2 et 3 du tableau 2.2) sont itérées jusqu'à convergence. Un critère d'arrêt consiste souvent à calculer la distance entre T_n et T_{n-1} pour une certaine norme, puis à comparer cette distance à un certain seuil. Pour notre part, nous n'avons pas réussi à déterminer un tel couple absolu qui permettrait un arrêt optimal de `MAMAN` pour chaque problème de recalage. Il nous est apparu que le choix de l'arrêt dépend beaucoup du problème, et en particulier du caractère mono- ou intersujet et de la contrainte de régularité sur la transformation — les problèmes très contraints ayant des vitesses d'évolution beaucoup plus lentes, il est nécessaire de les laisser converger plus longtemps. Le critère d'arrêt de `MAMAN` est donc largement manuel, typiquement un nombre fixé d'itérations[5].

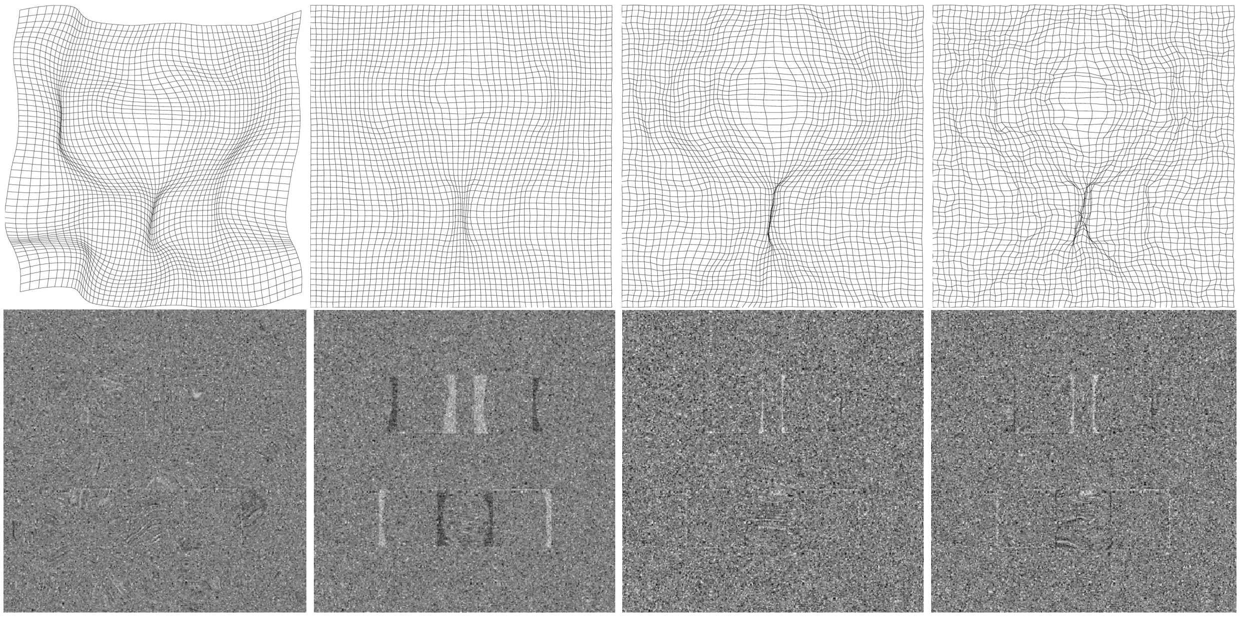
2.3.7 Reparamétrisation

La recherche point à point des appariements est parfois insuffisant pour obtenir un ensemble de correspondances de qualité, notamment si l'image est très fortement bruitée ou si les déplacements sont importants. Dans `MAMAN`, nous avons laissé à l'utilisateur la possibilité d'utiliser une reparamétrisation du champ de corrections qui permet de rechercher les appariements non plus point à point, mais par ensemble de points, sans changer fondamentalement le principe de l'algorithme. Cette reparamétrisation s'est révélée extrêmement performante en recalage d'échographies tridimensionnelles, chapitre 7, où les images sont à la fois bruitées par un bruit autocorrélé très difficile à enlever, et les déplacements importants. Cependant, la convergence de l'algorithme est plus lente en utilisant cette reparamétrisation.

Dans notre première formulation, l'ensemble des correspondances C est trouvé en minimisant l'écart quadratique par rapport à chaque vecteur de correction $\mathbf{u}(\mathbf{p})$, indépendamment les uns des autres : nous paramétrons implicitement $\mathbf{u}$ par l'ensemble de ses valeurs. Nous l'avons vu, la

4. Remarquons au passage que les erreurs sont plus importantes là où le milieu est étiré (jacobien de la transformation > 1) que là ou le milieu est compressé (jacobien < 1). Ces résultats illustrent le problème de la symétrie du recalage dont nous parlerons au chapitre 6.

5. Nous disposons également d'une version graphique de l'algorithme, où l'utilisateur peut décider visuellement de la convergence et arrêter le traitement de l'algorithme au niveau de multirésolution courant.



Rég. fluide	Rég. compétitive	Rég. mixte	Rég. compétitive faible

FIG. 2.3 – ***De gauche à droite :*** *Résultat du recalage des images de la figure 2.2 en utilisant respectivement, pour une certaine force de régularisation globale, une régularisation fluide pure ($\omega = 0$), compétitive pure ($\omega = 1$), et mixte ($\omega = 0.2$), ainsi qu'une régularisation compétitive pure moins forte que celle de la deuxième colonne.* ***Ligne du haut :*** *Champ de déformation retrouvé.* ***Ligne du bas :*** *Différence entre les images après recalage. La régularisation fluide recale les intensités mais donne un champ de déformation aberrant. La régularisation compétitive donne un champ lisse mais peu précis puisque les images ne sont pas recalées. La régularisation mixte permet de garder un champ raisonnablement lisse tout en recalant précisément les images. Enfin, en prenant une régularisation compétitive pure moins contrainte, nous ne pouvons égaler les résultats de la régularisation mixte : la transformation est à la fois moins lisse et moins précise.*

dérivation de l'écart quadratique $EQ(I,J \circ [T + \mathbf{u}])$ par rapport à $\mathbf{u}(\mathbf{p})$, près de $\mathbf{u}(\mathbf{p}) = 0$, aboutit à la formule classique du gradient :

$$\frac{\partial EQ}{\partial \mathbf{u}(\mathbf{p})} = 2[J \circ T(\mathbf{p}) - I(\mathbf{p})]\nabla J \circ T(\mathbf{p})$$

Notre reparamétrisation consiste à récrire $\mathbf{u}$ non plus comme la somme de ses valeurs, mais une somme de noyaux gaussiens G_σ :

$$\mathbf{u}(\mathbf{p}) = \int u_{\mathbf{q}}.G_\sigma(\mathbf{p} - \mathbf{q})\, d\mathbf{q}$$

Nous avons choisi des noyaux gaussiens pour leurs propriétés d'isotropie et de rapidité de convolution. Cette reparamétrisation ne nuit théoriquement pas à la généralité de la forme de $\mathbf{u}$, puisque le noyau gaussien est défini positif (Arad, 1995). En pratique, bien entendu, une certaine instance de $\mathbf{u}$ est d'autant plus improbable qu'elle est irrégulière.

La dérivée de l'écart quadratique par rapport à nos paramètres $u_{\mathbf{p}}$ devient alors

$$\frac{\partial EQ}{\partial u_{\mathbf{p}}} = 2\Big(G_\sigma * [(J \circ T - I).\nabla J \circ T]\Big)(\mathbf{p})$$

La reparamétrisation revient donc à lisser la dérivée de l'écart quadratique. Cela conditionne beaucoup mieux la minimisation ; cependant, l'énergie elle-même est inchangée. Notons que lorsque $\sigma \to 0$, nous reparamétrisons $\mathbf{u}$ par des diracs, i.e. par ses valeurs, et nous retombons logiquement sur notre formule précédente.

Lien avec la régularisation fluide

Notre reparamétrisation tend à fournir des champs de corrections $\mathbf{u}_n$ plus lisses, mais sans contraindre aucunement la régularité de l'estimation de la transformation, puisque l'énergie de recalage est inchangée par cette transformation. En ce sens, son fonctionnement est très proche de la régularisation fluide, qui lisse $\mathbf{u}_n$ par un noyau de convolution (voir p. 56)

La grande différence, cependant, est qu'ici nous adaptons notre descente de gradient pour trouver directement des corrections lisses. Cela permet d'avoir des correspondances lointaines beaucoup plus fiables, de manière similaire à la technique du recalage par blocs (qui peut être vue comme une reparamétrisation par des fenêtres carrées au lieu de gaussiennes). La régularisation fluide, quant à elle, n'intervient qu'après la recherche des corrections. Si la contrainte fluide est importante, ces corrections sont fortement lissées ; en pratique, cela diminue dramatiquement leur taille. Ce n'est pas le cas en utilisant la reparamétrisation, même si les tailles des gaussiennes sont grandes : au contraire, l'énergie et le gradient ainsi lissés permettent de trouver des correspondants fiables plus éloignés.

La reparamétrisation peut donc apparaître comme une version améliorée, mais bien sûr plus coûteuse, de la régularisation fluide. Dans tous les cas, il nous apparaît inutile de cumuler l'utilisation de la reparamétrisation avec celle du lissage fluide.

2.3.8 Approche pyramidale

Un aspect fondamental de `MAMAN`, comme pour la quasi-totalité des algorithmes de recalage non rigide, est l'approche multiéchelle de l'estimation de la transformation. Sans cette composante, `MAMAN` ne pourrait retrouver de grands déplacements.

Les méthodes de descente de gradient, utilisées ici pour trouver les appariements C_n, sont connues pour être sensibles aux minima locaux ; leur utilisation présuppose que les déplacements sont petits. D'autres méthodes existent permettant de s'affranchir de ce problème en convergeant vers le minimum global, ou au moins pouvant éviter de tomber dans le minimum local le plus proche (voir p. 36) ; ces techniques semblent cependant peu adaptées au recalage iconique non rigide et non paramétrique, dont l'espace de recherche est de très grande dimension. De plus, en traitement de l'image, les méthodes multiéchelles au sens large ont montré leur efficacité à nettement améliorer les résultats des approches locales, comme les descentes de gradients.

`MAMAN` utilise une approche pyramidale du recalage. Cette approche consiste à construire pour chaque image I, une série d'images $(I_k)_{k=0..N}$ de plus en plus petites, avec $I_0 = I$ (figure 2.4).

Le recalage commence au niveau le plus haut, là où les images sont très petites ; à cette échelle tous les déplacements sont locaux, et la descente de gradient a donc de plus grandes chances de trouver le minimum global, ou au moins un minimum local proche. En passant au niveau inférieur, les images gagnent en complexité : les déformations trouvées au niveau supérieur ne sont donc plus tout à fait exactes. Cependant, les différences résiduelles restent suffisamment faibles pour que l'hypothèse des petits déplacements reste valide.

Pour créer notre pyramide multirésolution, nous procédons comme suit :

- Si la dimension de l'image originale dans l'une des directions n'est pas une puissance de 2, l'image suivante est obtenue en sous-échantillonnant l'image initiale aux dimensions puis-

FIG. 2.4 – *Une pyramide multirésolution de quatre images construite par* `MAMAN` *à partir de l'image d'origine, à gauche.*

sances de deux inférieures ou égales les plus proches. Plus mathématiquement, si l'image I_0 est de dimension $n \times m \times p$, alors I_1 est de dimension $f(n) \times f(m) \times f(p)$, avec

$$f(i) = 2^{\lfloor \log_2(i) \rfloor} \qquad \forall i \in \mathbb{N}^*$$

Le rééchantillonnage se fait en utilisant une interpolation (bi-/tri-)linéaire.

- Si les dimensions de l'image sont des puissances de deux dans toutes les directions, nous les diminuons afin de rapprocher les voxels vers des cubes dans l'espace physique, afin de rendre l'image plus isotrope (par exemple selon le critère d'isotropie de (Westin et al., 1999), défini comme le rapport du plus petit côté sur le plus grand) :
  - si le carré de l'un des cotés du voxel est inférieur à la moitié du carré des autres, la dimension de l'image est divisée par deux dans cette directions, et les autres dimensions sont inchangées ;
  - si le carré de l'un des côtés du voxel est supérieur au double du carré des autres, la dimension de l'image est inchangée dans cette direction, et les autres tailles sont divisées par deux ;
  - sinon, toutes les dimensions sont divisées par deux.

  La première situation arrive très rarement ; la seconde est par contre assez fréquente avec les images RM ou scanner, où les résolutions axiales sont parfois beaucoup plus faibles que dans les autres directions. Dans tous les cas, la valeur d'un voxel de la nouvelle image est la moyenne des (2, 4 ou 8) voxels qu'il recouvre dans l'image précédente.

La construction de la pyramide s'arrête lorsque les images sont de faibles dimensions (côtés de longueur égale ou inférieur à un certain seuil, par défaut 32). Après recalage des images I_k et J_k, le champ de vecteurs T_k est à son tour sur-échantillonné en T_{k-1} par interpolation linéaire, et multiplié par les facteurs appropriés, pour servir de configuration initiale au recalage des images du niveau inférieur.

Notons qu'il existe des méthodes multiéchelles plus sophistiquées (*graduated non-convexity, continuation methods*), pour lesquelles l'échelle évolue continuement avec la transformation (Witkin et al., 1987). Ces méthodes ne présentent cependant pas l'avantage de réduire le volume des données en fonction de l'échelle, comme la pyramide multirésolution. Celle-ci permet donc à la fois d'être plus robuste aux conditions initiales, et plus rapide que les techniques multiéchelles plus générales.

Exemple

Pour illustrer cette approche pyramidale, nous présentons figure 2.5 un exemple synthétique de recalage avec `MAMAN`. Une coupe d'une IRM a été déformée par une transformation synthétique

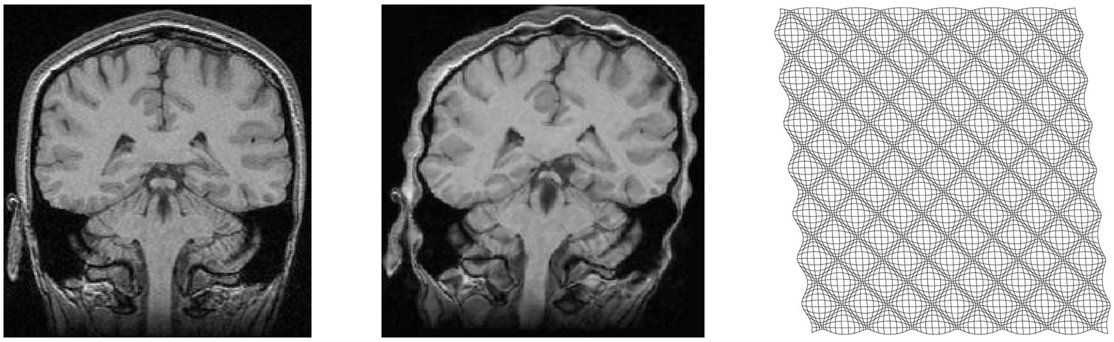


FIG. 2.5 – *Image originale (à gauche) et déformée (au milieu) par la transformation synthétique représentée à droite.*

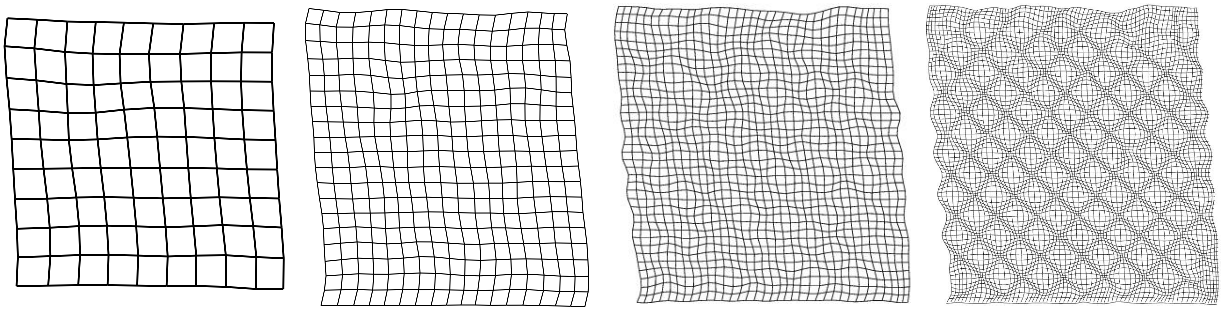


FIG. 2.6 – *Déformations retrouvées à la fin de plusieurs niveaux de pyramide successifs.*

présentant à la fois un mouvement global, sous la forme d'un cisaillement selon l'axe horizontal, et des déformations locales sinusoïdales.

Les transformations retrouvées par MAMAN à la fin de son traitement à différents niveaux de la pyramide multirésolution sont tracées à la figure 2.6. L'observation de ces transformations montre que la composante globale du mouvement est retrouvée aux niveaux les plus élevés de la pyramide multirésolution ; les déformations locales, quant à elles, ne s'esquissent qu'aux deux niveaux de la pyramide les plus bas.

2.4 Conclusion et ouverture vers PASHA

Dans ce chapitre, nous avons expliqué l'algorithme des « démons » comme une minimisation alternée de deux énergies : une énergie de similarité, et une énergie de régularisation. Cela nous a permis de généraliser cet algorithme dans deux directions.

1. D'une part, pour trouver les correspondances, en utilisant des méthodes de descente de gradient plus efficaces et surtout des mesures de similarité plus générales que l'écart quadratique.
2. D'autre part, pour la régularisation, en utilisant des schémas mixtes compétitif/fluide.

L'algorithme MAMAN est donc un algorithme efficace, rapide et modulable, que nous utiliserons pour certaines applications présentées dans la deuxième partie de cette thèse.

Cependant, nous n'avons répondu qu'à une partie seulement des questions soulevées par l'algorithme des « démons ». Nous minimisons alternativement deux énergies, mais quelle est donc l'énergie globale minimisée, s'il y en a une? Et quand bien même il y en aurait une, pourquoi ces algorithmes apparie-et-lisse, tels les « démons » et MAMAN, mais aussi les algorithmes de recalage par blocs, marchent-t-il tous si bien alors même qu'ils ne semblent pas suivre un schéma de minimisation rigoureux ? De plus, pourquoi faut-il impérativement trouver les correspondances avec une seule itération de descente de gradient et non plusieurs ; pourquoi minimiser plus à fond voire complètement l'énergie de similarité avant d'alterner donne de mauvais résultats ?

Ce sont toutes ces questions fondamentales pour comprendre les algorithmes de recalage P&S, que nous proposons d'élucider au chapitre prochain.

Chapitre 3

Une minimisation d'énergie pour le recalage P&S : l'algorithme PASHA

Daniel Goossens, *Le Messie est revenu*, 1989

Dans ce chapitre, publié initialement dans (Cachier et Ayache, 2001a), nous donnons un cadre général de minimisation d'énergie pour les algorithmes de recalage P&S. Ce cadre englobe et explique notre algorithme `MAMAN` du chapitre précédent, ainsi que l'algorithme des « démons » de (Thirion, 1998) et l'« ICP généralisé » de (Feldmar et al., 1997), et aboutit à la création de l'algorithme `PASHA`, qui minimise une énergie globale générale pour le recalage P&S.

Avant d'en arriver là, nous montrons d'abord dans une première partie que les algorithmes P&S, tels que les algorithmes de recalage par blocs ou `MAMAN`, se comportent différemment des autres algorithmes iconiques, et ne sont pas simplement des minimisations exotiques ou peu rigoureuses d'énergies classiques du genre $E_{sim} + \lambda.E_{reg}$. Ils forment bien une classe à part, la classe des algorithmes P&S (*Pair-and-Smooth*), distinct des autres, les algorithmes SIB (*Standard Intensity Based*). Autrement dit, nous justifions la classification présentée en introduction et dans notre état de l'art.

Nous montrons de surcroît que les résultats obtenus avec les algorithmes P&S sont supérieurs à ceux obtenus avec les algorithmes SIB compétitifs, parce que leur régularité est plus uniforme. Nous expliquons ce phénomène par *l'inhomogénéité* des énergies de similarité (portant sur les intensités) et de régularité (portant sur la géométrie).

Partant du fait que peu d'algorithmes P&S minimisent une énergie globale, nous proposons une nouvelle énergie de recalage, dont la minimisation mène à un algorithme P&S. Cette énergie reste générale et peut utiliser n'importe quelle énergie de similarité ou de régularisation déjà existante. Son comportement est également comparé aux algorithmes SIB et P&S précédents. Ce nouvel algorithme fournit des solutions d'une régularité uniforme, comme avec `MAMAN`, tout en étant robuste vis-à-vis des violations de l'hypothèse de conservation des intensités, comme pour les algorithmes SIB.

3.1 Comparison of competitive SIB and P&S methods

3.1.1 Presentation of the problem and theoretical comparison

In this section, we focus on competitive SIB and pair-and-smooth non-rigid registration algorithms. These algorithms use two energies to drive the registration of two images I and J: a similarity energy noted $E_{sim}(I,J,T)$ [1], and a regularization energy noted $E_{reg}(T)$.

Competitive SIB algorithms, as defined in chapter 1, balance directly the values of E_{sim} and E_{reg} by minimizing the energy

$$E(T) = E_{sim}(I,J,T) + \lambda E_{reg}(T) \tag{3.1}$$

λ being the regularization parameter [2]. This seems to be a natural way to combine these two energies, and indeed, this formulation has proven to be successful in the field of data fitting and approximation (see for example the work of (Wahba, 1990)).

However, this formulation may raise some problems in the context of registration. Unlike data fitting, the trade-off here is made between two energies that do not have the same physical dimension: E_{reg} is a geometric measure, and E_{sim} is an intensity similarity measure. The intensity similarity energy gives an "intensity distance", i.e. an idea of the *amount of intensity* necessary to

1. In the context of non-rigid registration, the similarity energy cannot always be written $E_{sim}(I,J \circ T)$ — see chapter 6.

2. Although this formulation is convenient, the regularization strength λ is sometimes preferably not chosen as a multiplicative factor but included inside the regularization energy: $E_{reg}(T,\lambda)$. This point is discussed in chapter 5 p. 124.

change one image into the other, which is not uniformly proportional to the *amount of motion* that warps one image into the other.

We illustrate this idea in figure 3.1, where a 1-D image $I(x)$ is registered with a translated version of itself: $J(x) = I(x - t)$. The amount of motion necessary to register one image to the other is constant and equal to $|t|$. This misregistration is not uniformly reported on the similarity measure, and leads to small or large values depending on the local variation of the image.

This may explains why a direct trade-off between transformation smoothness and intensity similarity makes the smoothness of the transformation depend locally on the images, and more precisely on their local contrast: the higher the local variation in the difference of intensity between the images, the less smooth the transformation. In particular, the transformation is oversmoothed in low-contrast regions compared to edge regions.

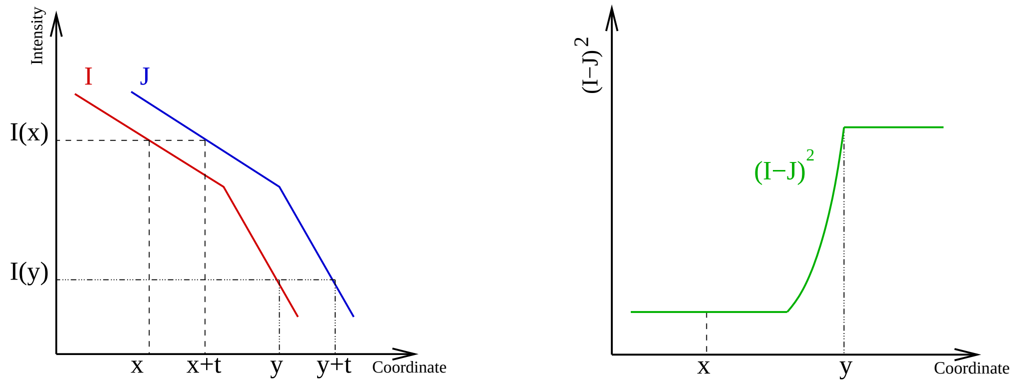


FIG. 3.1 – *A uniform error of misalignment between images I and J (left) may lead to very different intensity similarity (right): x and y have been translated by the same amount t, but* $(J(x)-I(x))^2 \ll (J(y) - I(y))^2$.

The second class of algorithm is the pair-and-smooth methods, which alternate between finding correspondences C between points using the intensity similarity energy $E_{sim}(I,J,C)$ and sometimes additional energies, and finding a transformation T that approximates these correspondences, e.g. by minimizing $\int ||C - T||^2 + E_{reg}(T)$ w.r.t. T. Here, the trade-off between fitting and smoothness occurs during the second step, balancing the distance between corresponding points and the regularization energy of the transformation. This is the classical trade-off of data fitting between geometric quantities. We expect the estimated transformation to be uniformly smooth, because the distribution of the pairings is more likely to be uniform than intensity changes – and furthermore this distribution can be controlled, for example by forcing pairings to have a length below some threshold, as it is frequently done for example in block matching algorithms, or in the "demons" algorithm (see section 2.2.3 p. 51).

3.1.2 Sinusoidal deformation experiment

We illustrate the previous discussion with an example. We compare the results of two non-rigid registration algorithms, respectively competitive SIB and P&S, on a 2D synthetic experiment where we know the ground-truth transformation. These two algorithms use the same similarity and registration energies; the only difference is the way the trade-off is done between these energies.

The intensity-based algorithm register two images I and J by using the following energy :

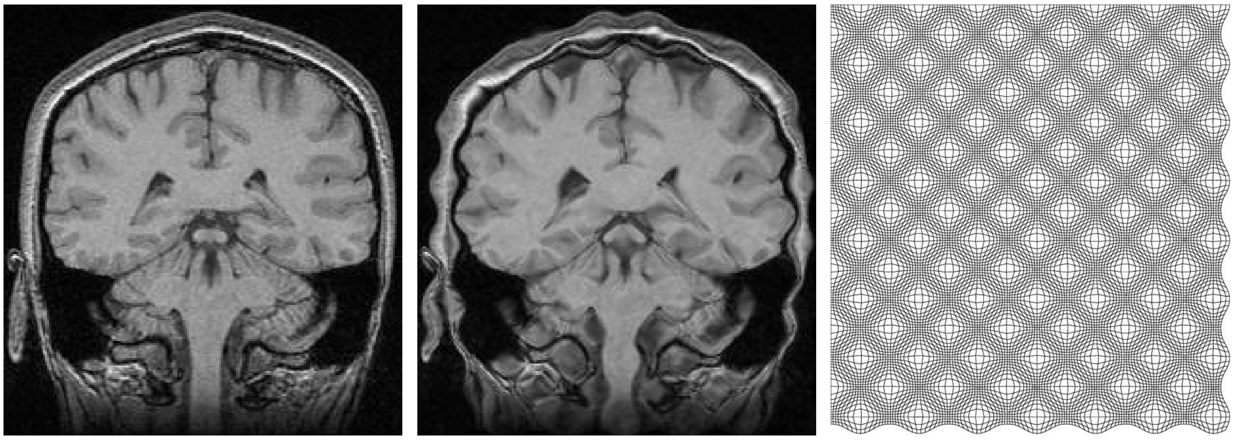
$$E(T) = \int (I - J \circ T)^2 + \lambda \int ||dT||^2 \tag{3.2}$$

This energy is minimized using a Levenberg Marquardt gradient descent. This algorithm is called `Asym`; it will also be used in chapter 6.

The pair-and-smooth algorithm is `MAMAN`, presented in chapter 2. As for `Asym`, it uses in the following experiments the sum of squared differences (SSD) similarity measure, and the membrane energy for regularization: the transformation T is found from the set of correspondences C by a convolution that minimizes

$$E(T) = \int ||T - C||^2 + \lambda \int ||dT||^2$$

In this experiment, we took the image 3.2(a) and deformed it into 3.2(b) with the transformation depicted in 3.2(c). The goal of the registration is to recover a transformation as close as possible to the original one. The advantage of using the sinusoidal transformation 3.2(c) is that the same pattern of deformation is repeated in the image. Therefore, we can see how this pattern is recovered depending on the local characteristics of the images.



(a) Original (b) Deformed (c) Transformation

FIG. 3.2 – *A synthetic registration problem: the image on the left has been deformed into the image in the middle with the transformation depicted on the right.*

Non-rigid registration is always dependent on a regularization factor λ. We cannot compare the results of two algorithms for a single regularization factor, especially here: since the regularization is not handled the same way in both algorithms, the same value of λ leads to completely different regularization strengths depending on the algorithm.

The solution is to to compare a whole set of results for a wide range of regularization factors. In this example, we have estimated that to cover approximately the same wide regularization range, λ should range from 1 to 5 for `MAMAN`, and from 0.3 to 3000 for `Asym`. We have registered images 3.2(a) and 3.2(b) with `Asym` (figures 3.3 and 3.5) and `MAMAN` (figures 3.4 and 3.6) with these different regularization factors. We present both the estimated transformations (figures 3.3 and 3.4) and the deformed images (figures 3.5 and 3.6).

From these sets of results, we can draw several remarks.

Influence of the regularization parameter. As expected, the higher the regularization strength, the smoother the transformation but the worst the image correspondence.

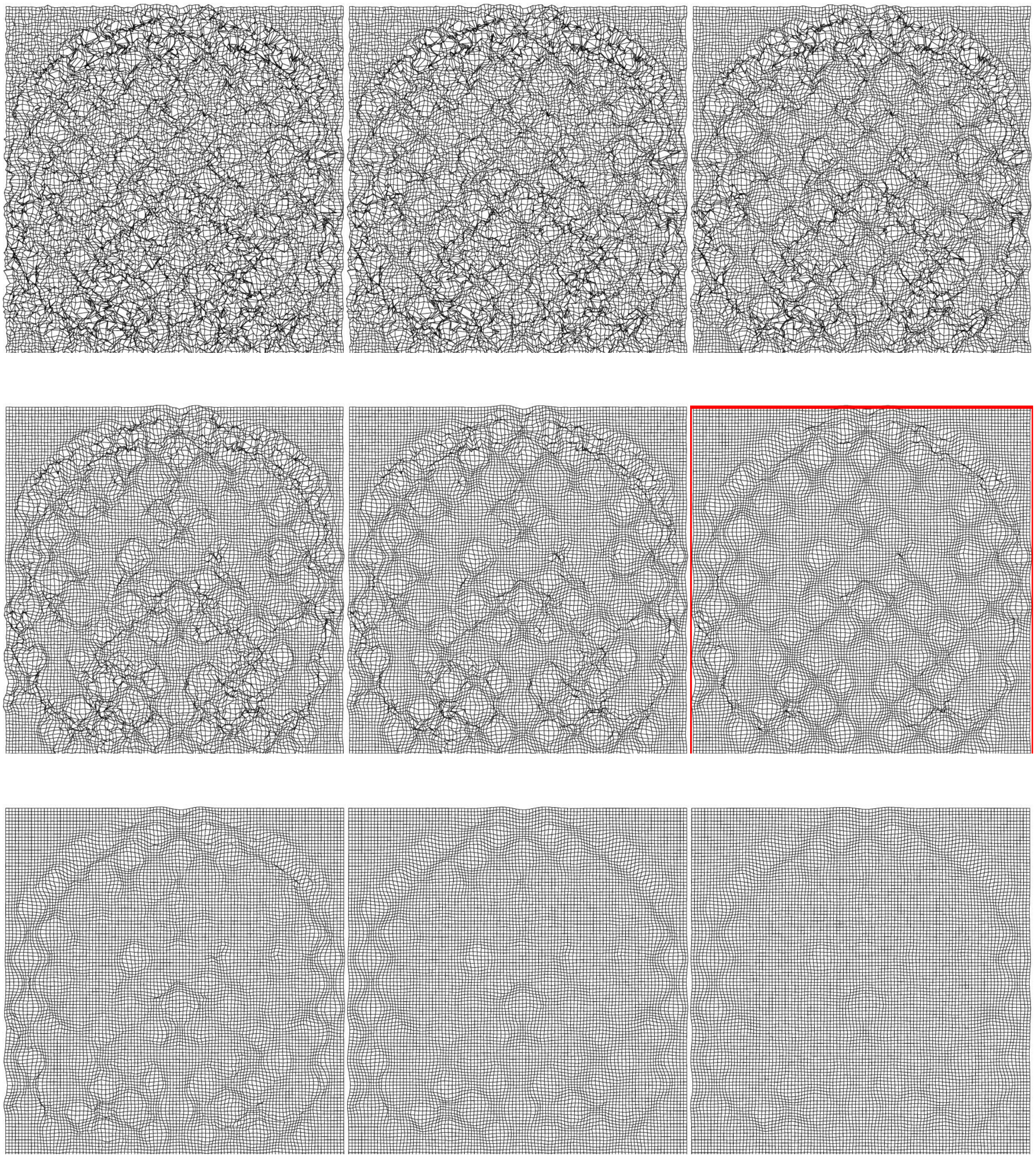


Fig. 3.3 – *Results of registration using the variational formulation (3.2) for regularization strengths ranging from 0.3 to 3000: as it increases, the transformation becomes quickly smooth and underestimated in plain regions, while remaining irregular near the borders of the image. The solution bordered in red is the closest to the ground truth 3.2(c), with an average error of 1.27 pixel.*

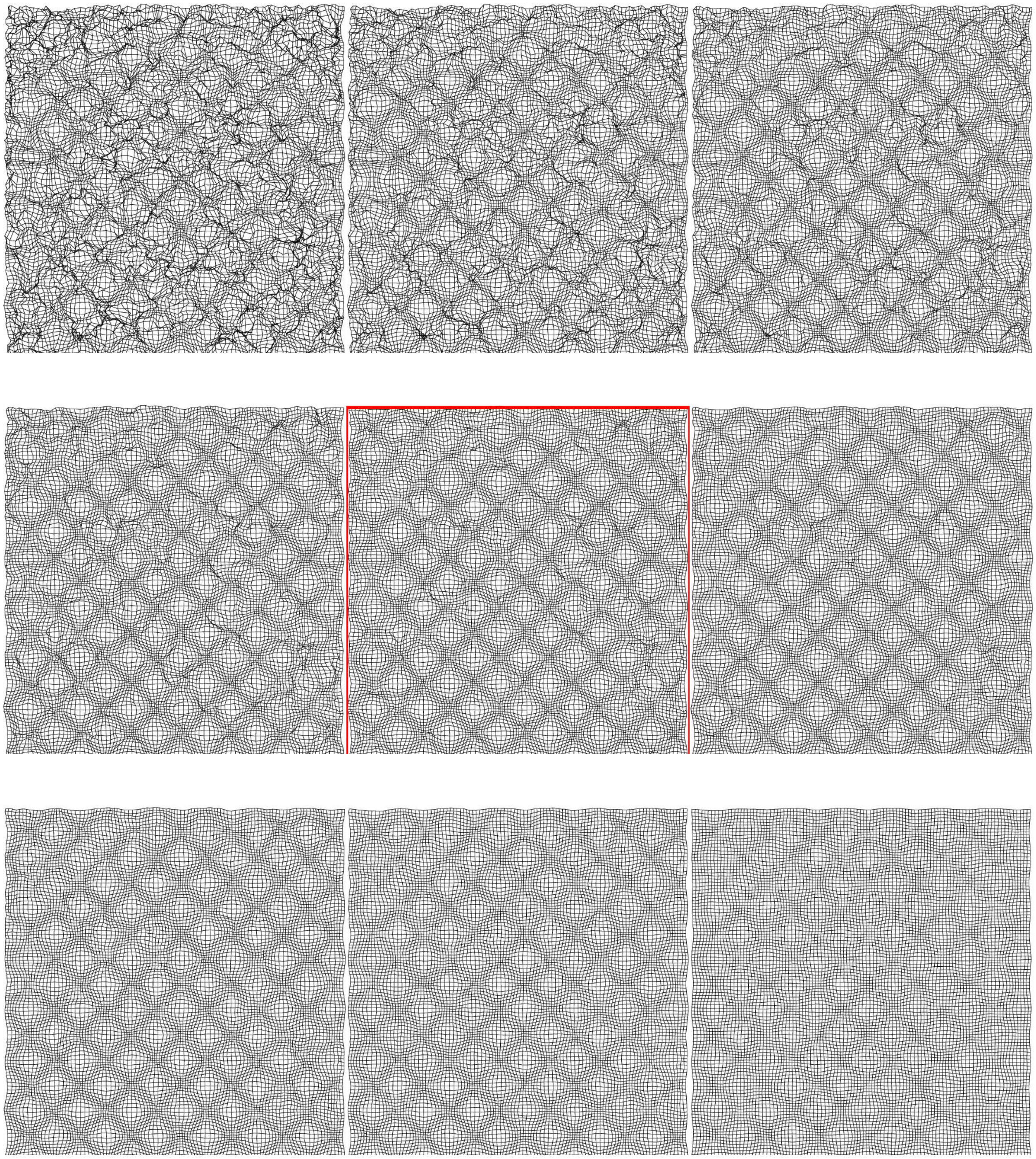


Fig. 3.4 – *Results of registration using* `MAMAN` *for regularization strengths ranging from 1.0 to 5.0. The smoothness of the transformation, as well as its closeness to the original transformation, is much more uniform across the image than for* `Asym` *(figure 3.3). The solution bordered in red is the closest to the ground truth 3.2(c), with an average error of 0.83 pixel.*

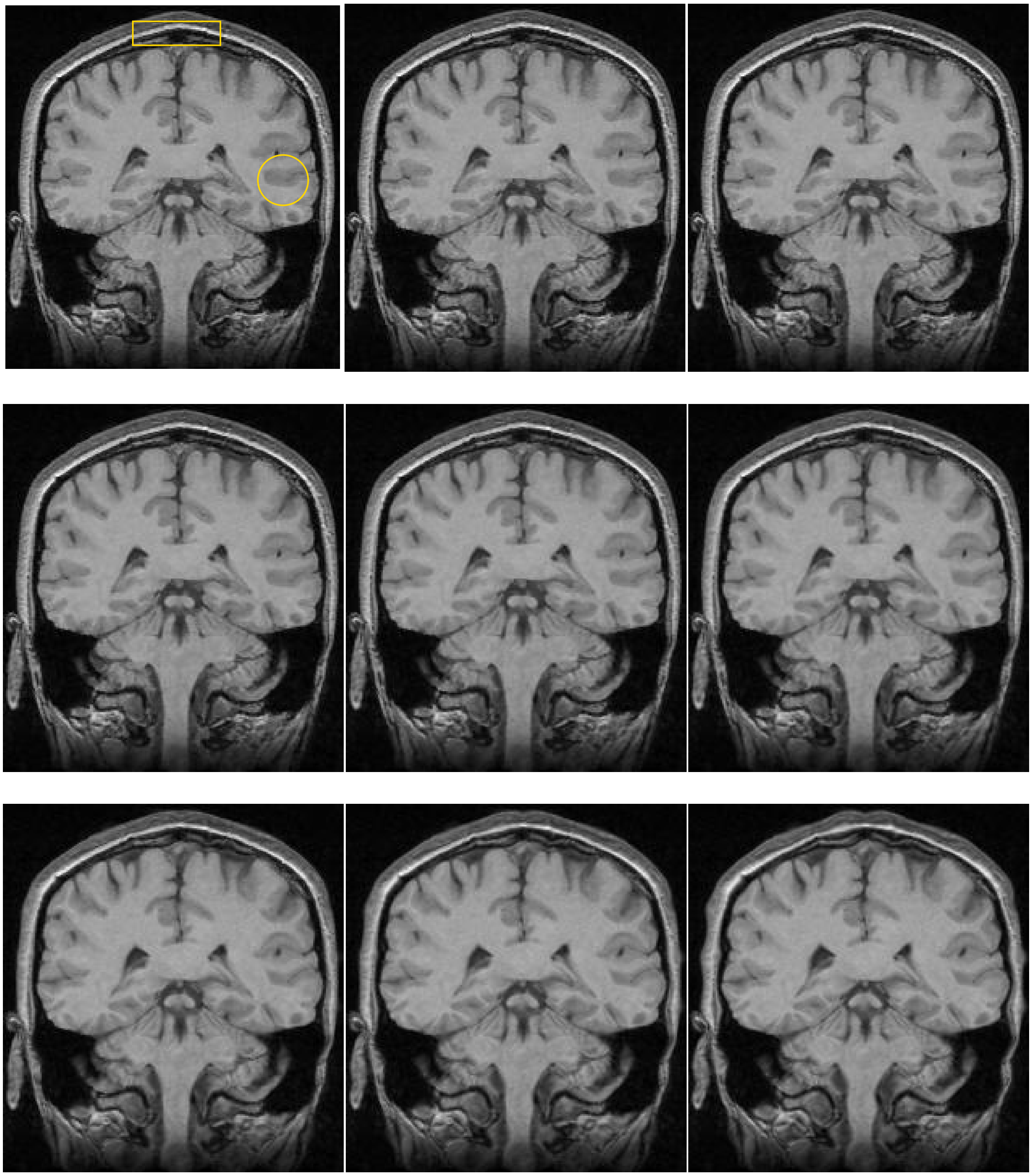


FIG. 3.5 – *Results of registration using the variational formulation (3.2) for increasing regularization strengths. The quality of the registration depends on the local contrast between the images, especially for moderate and high regularization strengths.*

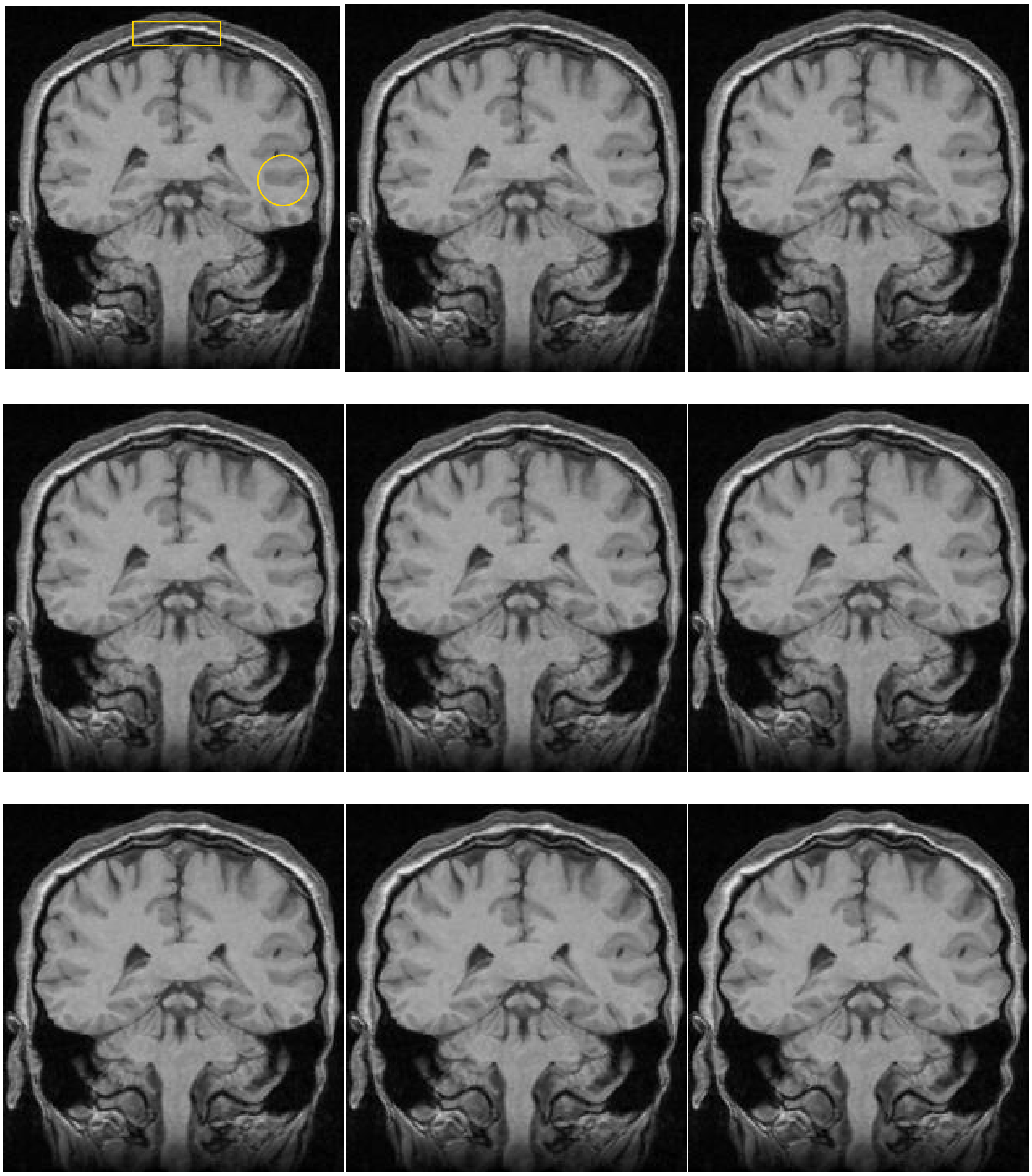


Fig. 3.6 – *Results of registration using* **MAMAN** *for increasing regularization strengths. The quality of the registration is uniformly degraded as the regularization strength increases.*

Best value of the regularization parameter. For both algorithms, best results are obtained for moderate regularization strengths, while the absence of noise could suggest that the optimal value should be zero, or at least very small. An explanation of this fact is proposed in the next section.

Evolution of the solution with the SIB algorithm. In the case of competitive SIB registration (figure 3.3), the transformation is very irregular almost everywhere in the image for low regularization strengths. As the regularization strength increases, the transformation becomes more regular only in places where the local contrast is low. At some point, the transformation has a discontinuous derivative only on the edges with very high contrast, e.g. on the boundary of the skull. Eventually, to smooth the transformation even on these edges we have to increase further the regularization strength, but then, the transformation is correctly estimated only where the contrast is high, as it is oversmoothed everywhere else.

Evolution of the solution with the P&S algorithm. In the case of the pair-and-smooth registration (figure 3.4), we also start from a transformation that is irregular almost everywhere. However, as the regularization strength increases, the smoothness of the transformation is increased in the same way everywhere in the image, independently of the local contrast of the image, and the quality of the estimation is more or less uniform and decreases as the strength of the regularization increases. This is not only an aesthetic consideration: it leads to better registration results, as it could be expected from the observation of the recovered transformations (figures 3.3 and 3.4). The best registration obtained with `MAMAN` has an average error of 0.83 pixel, whereas `Asym` can only come as close as 1.27 pixel on average (i.e. an increase of more than 50%).

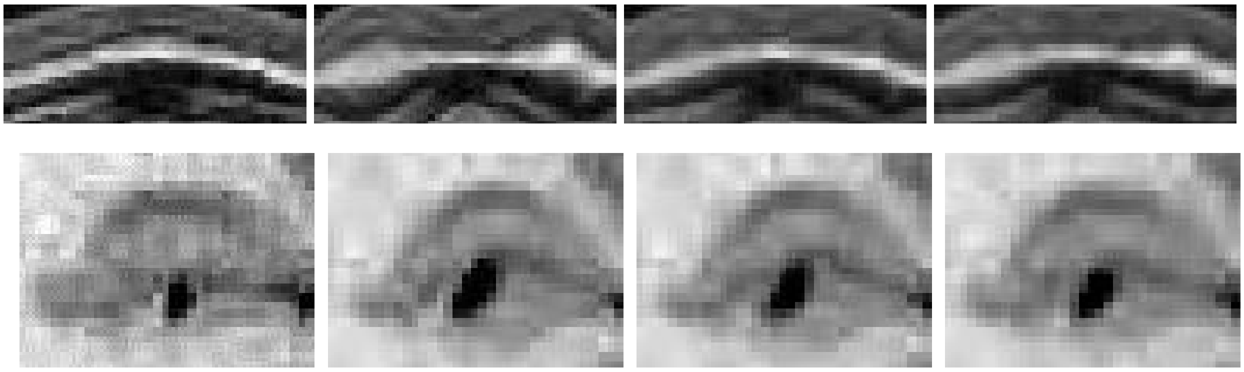
Difficulty to analyze differences with deformed images. The results are very difficult to compare when we look at the deformed images only. Especially, for low regularization strengths, all the images look the same and match rather well the target image 3.2(a), even if the smoothness of the transformation, and therefore the quality of the result, varies a lot. Therefore, comparison of non-rigid registration results based on the deformed image only is not really meaningful.

We can nonetheless retrieve some of these differences in the deformed images. Let us compare how the gray matter in the designated circle, and the skin in the designated box, are registered as a function of the regularization strength. Using `Asym`, the gray matter is starting to be mismatched very early, for relatively low regularization strengths. On the opposite, the piece of fat is almost perfectly registered even for the highest regularization values. This is due to the fact that the borders between the gray matter and the white matter (dark gray on light gray) have much less contrast than the borders between fat and bone (white on black) in T1 MR images. On the opposite, with `MAMAN`, the mismatch of these regions progress simultaneously with the regularization strength. See also figure 3.7 for a close-up on these areas.

3.2 PASHA: A new P&S algorithm based on a global hybrid energy

3.2.1 One or two priors for non-rigid registration?

Although there are a lot of different algorithms that we classified as "pair-and-smooth" (chapter 1 p. 18), only a few of them minimize a global energy. The goal of this section is to propose a registration energy whose minimization leads naturally to a P&S algorithm.



(a) Target image (b) Source image (c) Result of Asym (d) Result of MAMAN

FIG. 3.7 – *Zoom on a piece of skin (top) and gray matter (bottom, with enhanced contrast) in the image to be registered and for two results obtained respectively with Asym and MAMAN. With Asym, the same regularization strength can lead to a perfect match of the skin, while the grey matter is virtually not moved. With MAMAN, the regularization strength has a uniform impact on the registration result, and when the skin is partially matched, so is the grey matter.*

Within MAMAN, we are searching for correspondences between points by minimizing for instance the SSD. By doing so, small intensity changes may lead to very large displacements. This strategy is appropriate if the images are not corrupted by noise. Unfortunately, real medical images are always noisy. Thus, we do not want to pair points that are very distant from each other if their intensity difference is of the order of noise.

From this point of view, the behavior of Asym seems more interesting, because for low intensity differences, points are almost not registered. The parameter λ of the competitive SIB energy (3.1) could then be seen as being linked to the level of noise in the image.

In practice, however, this is not exactly true. In the experiment reported in figures 3.3 to 3.6, for both Asym and MAMAN, best results are obtained for moderate regularization strengths, while the absence of noise could suggest to set it to zero, or at least to a very small value. Therefore, the smoothness parameter λ seems to be more related to a prior we have on the smoothness of the transformation than on the noise level in the image. Note that in parametric SIB matching, the prior, which is the space of parametric transformation, is also linked to the smoothness of the transformation, rather than to the level of noise in the image.

Despite its good property described above, the energy (3.1) leads to unsatisfactory results because of the inhomogeneity of the trade-off: it leads to very non-uniform smoothness that keeps decreasing with the local contrast, as reported in section 3.1.2. Ideally, we want an algorithm that estimates a transformation with a uniform smoothness in areas where the level of information is significant, like MAMAN, and that does not use the intensity information to estimate the motion in areas where the intensity differences are about the level of noise, like for Asym. This means that we have to add another parameter to MAMAN which corresponds to some kind of threshold on the intensity similarity measure. More conceptually, we have to take into consideration *two* prior knowledges for non-rigid registration: the level of noise in the image, and the smoothness of the transformation.

3.2.2 A new hybrid energy for IFB registration

Given a similarity energy $E_{sim}(I,J,T)$ and a regularization energy $E_{reg}(T)$, we propose to register the images I and J by introducing two non-rigid transformations C and T and minimizing

$$E(C,T) = E_{sim}(I,J,C) + \sigma \int ||C - T||^2 + \sigma\lambda E_{reg}(T) \tag{3.3}$$

with respect to C and T. C gives the correspondences between points of I and J, and should minimize the similarity measure while keeping close to T. T is the motion estimate, and should be both smooth and close to the set of correspondences given by C. The parameter σ is related to the level of noise in the image, and avoids correspondences C too far from T. The parameter λ is related to the prior smoothness of the transformation.

The alternate minimization of (3.3) w.r.t. C and T leads naturally to a P&S algorithm: in a first step, we search for pairings C between points by minimizing (3.3) w.r.t. C. During the second step we find the transformation estimate by minimizing (3.3) w.r.t. T.

One could minimize the energy (3.3) w.r.t. C and T simultaneously. In this case, we would obtain a non-rigid IFB algorithm that is *not* P&S, since it would not be split into two steps. However, when the regularization energy E_{reg} is quadratic, the alternate approach is appealing, because the partial minimizations w.r.t. C and T are both very fast: the first step is a minimization done for each pixel separately, with only 2 or 3 degrees of freedom depending on the dimension of the image; then the second step is easily resolved by linear convolution. Even if the alternate minimization is known to take more iterations to converge, the overall process of minimization is relatively faster.

Based on this hybrid energy, we thus have designed a new pair-and-smooth algorithm called `PASHA`[3]. Its main steps are briefly summarized in table 3.1. This rough summary do not detail extra features, already presented for `MAMAN` in chapter 2, such as the pyramidal approach, the reparameterization, etc.

1. Set $n := 0$ and $T_0 :=$ Id
2. Find C_{n+1} by minimizing $E_{sim}(I,J,C_{n+1}) + \sigma||C_{n+1} - T_n||^2$ by gradient descent
3. Find T_{n+1} by minimizing $||C_{n+1} - T_{n+1}||^2 + \lambda E_{reg}(T_{n+1})$ using convolution
4. Set $n := n + 1$
5. Go to step 2 until convergence

TAB. 3.1 – *Main steps of the* `PASHA` *non-rigid matching algorithm.*

3.2.3 IFB registration as a similarity measure transform

The minimization of (3.3) can be rewritten as

$$\min_T [E^*_{sim}(I,J,T) + \sigma\lambda E_{reg}(T)] \tag{3.4}$$

with

$$E^*_{sim}(I,J,T) = \min_C \left[E_{sim}(I,J,C) + \sigma \int ||C - T||^2\right] \tag{3.5}$$

3. `PASHA`: Pair-And-Smooth, Hybrid-energy based Algorithm.

Therefore, the minimization of the hybrid energy (3.3) can also be seen as the minimization of a weighted sum of two energies, a similarity energy and a regularization energy, with E^*_{sim} deduced from E_{sim} by the equation (3.5).

From this point of view, the concept of IFB algorithms is a mathematical transformation of standard intensity similarity measures E_{sim} into hybrid similarity measures E^*_{sim}. The regularization of these transformed similarity measures E^*_{sim} in a weighted sum, in a competitive fashion, give birth to most of P&S algorithms (i.e. most competitive IFB algorithms are P&S).

However, IFB registration is not restricted to competitive registration; one could parametric or fluid regularization. We have already presented a fluid regularization for IFB registration in the previous chapter, p. 56; but one could do rigid IFB registration with this energy. This is very appealing, since recent results based on block-matching tend to prove that IFB registration can also be superior to SIB registration in the rigid case (Ourselin, 2002).

3.2.4 Link with auxiliary variables

The formulation of the hybrid energy (3.3) is very similar to the one proposed in (Cohen, 1996). There is one major difference, though. In his article, Cohen aims at minimizing the energy:

$$E_{fit}(v) + E_{reg}(v) \tag{3.6}$$

For computational reasons, he introduces the auxiliary variable w and minimizes the energy

$$E^*_{fit}(w) + \frac{1}{2}||v - w||^2 + E_{reg}(v) \tag{3.7}$$

where E^*_{fit} is deduced from $E_{fit}(T)$ so that the energy (3.7) has the same global minimum as the energy (3.6). In our case, the hybrid energy (3.3) has certainly not the same solution as the competitive SIB energy (3.1). Note that most of the applications proposed in (Cohen, 1996) are purely geometric problems, and therefore the energy (3.6) is an homogeneous trade-off, standard in the field of data approximation.

3.2.5 Link with `MAMAN`

`MAMAN` as a limit case for noiseless images. `MAMAN` can be seen as being a limit case when σ tends toward 0. If $\sigma \to 0$, the weight of the similarity measure tends to infinity relatively to the closeness constraint $\int ||C - T||$; therefore, the correspondences C are found by minimizing the similarity energy $E_{sim}(I,J,C)$ alone. Then, the transformation T is found by minimizing $\int ||C - T||^2 + \lambda.E_{reg}(T)$. With this algorithm, we assume that the transformation is smooth but that there is no noise in the image, since corresponding points $\mathbf{x}$ and $C(\mathbf{x})$ have no constraint but having an intensity as similar as possible.

To illustrate this point, let us remark that in the experiment reported in figure 3.6 and 3.4, `MAMAN` recovers the motion even in areas outside of the skull, where there is no apparent information, which can seem strange. This is due to the fact that the image has been deformed without adding any noise to it, and so the assumption of noiseless images is true. Here, the algorithm relies on very subtle intensity changes to recover the motion. When there is noise in the image, this lack of robustness will prevent from an accurate recovery of the transformation, as we show in section 3.3.

Importance of the closeness constraint between C and T. Unfortunately, the global minimum of (3.3) when $\sigma \to 0$ gives poor registration results. Minimizing $E_{sim}(I,J,C)$ w.r.t. C gives a very irregular C with very large displacements, and T is a very bad estimate of the motion. Also, when $\sigma \to 0$, it is not necessary to alternate registration and regularization steps: since C does not depend on T, it can be found once and for all at the beginning of the algorithm.

The constraint that C should be close to T is essential. In most P&S algorithms, this constraint is actually more or less enforced by the minimization algorithm, which generally seeks for a local, close optimum rather than a global, remote optimum. They iterate between finding correspondences C and estimating the smooth transformation T, instead of finding the optimal correspondence C once and for all, and then deducing T. Therefore, these methods give good results, even if the global optimum of the energy is a very bad estimate of the motion.

For example, in block matching algorithms, the blocks are always translated into a few number of positions around the current estimate. In the "demons" algorithm (Thirion, 1998), the pairing is bounded by some threshold (see section 2.2.3 p. 51)). In MAMAN, the SSD is minimized using a gradient descent with the starting guess being T, and so C is located at the local minima of the similarity energy closest to T.

However, all these implicit closeness techniques do not sufficiently constrain the solution because they are not part of the minimized energy, as we will see in the experiments of section 3.3.3.

3.2.6 Link with ICP-based image registration

(Feldmar et al., 1997) transform a n-D image $I(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ into an hypersurface $S : (\mathbf{x}, I(\mathbf{x}))$ of an extended space of dimension $n+1$. He proposes to see the registration of two images as a geometric matching of the two hypersurfaces deduced from the images. Roughly, his ICP-like algorithm proceeds in alternating two steps: finding corresponding points between the hypersurfaces by minimizing some distance, and finding a smooth approximation of these pairings. In this $(n+1)$-D extended space, the distance between two points lying on the surfaces generated by the image I and J is given by

$$d((\mathbf{x}_1, I(\mathbf{x}_1)), (\mathbf{x}_2, J(\mathbf{x}_2))) = [I(\mathbf{x}_1) - J(\mathbf{x}_2)]^2 + \sigma ||\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2||^2 \tag{3.8}$$

with σ being a normalization constant, and $||.||$ the ordinary Euclidean norm.

It appears that minimizing this distance for all the image points is exactly minimizing our hybrid energy w.r.t. C (first step) when the the similarity measure is the SSD ; thus, in this particular case, the formulation of Feldmar and ours are equivalent (see figure 3.8).

Note however that our hybrid energy (3.3) is more general, as it is not restricted to the SSD but can be used with more complex similarity measures, for example mutual information (Collignon et al., 1995; Wells et al., 1996), in the context of multimodal registration.

3.2.7 Mixing intensity- and feature-based registration

As a last evidence of the uniform smoothness given by the hybrid formulation (3.3), we want to mention here the natural extension of this energy to the problem of mixing intensity and geometric feature in non-rigid registration of images.

The problem is now the following: in addition to the images I and J we furthermore have a discrete set of homologous points $\{(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1), ..., (\mathbf{x}_p, \mathbf{y}_p)\}$, for example anatomical landmark points extracted manually in both images. We describe these pairings by a new correspondence function C_2, defined on the set $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_p\}$ so that $C_2(\mathbf{x}_i) = \mathbf{y}_i$.

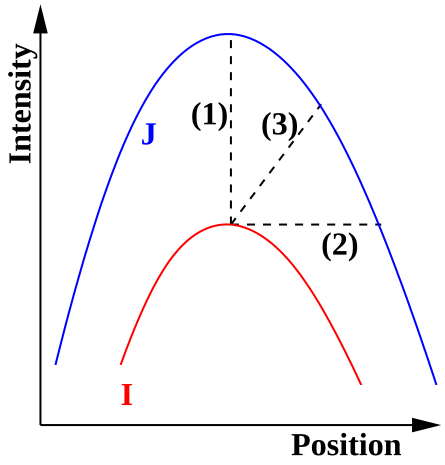


FIG. 3.8 – *Interpretation of some similarity measures in the extended space: (1) The SSD assumes image noise but no motion and uses only the distance on the intensity axis. The corresponding point used to compute the similarity has therefore the same geometric coordinates. (2) MAMAN, as well as some other P&S algorithms, assumes motion but no intensity noise, and uses only the distance on the geometric axes. The corresponding point has therefore the same intensity. (3) The ICP algorithm of (Feldmar et al., 1997), as well as our new formulation, assumes both noise and motion. The corresponding point has not necessarily the same position or intensity, but minimizes a weighted sum of intensity and geometric distances.*

A natural extension of the registration energy (3.3) to take into consideration these new pairings is:

$$E(C,T) = E_{sim}(I,J,C) + \sigma \int ||C - T||^2 + \sigma\alpha \sum_{i=1}^{p} ||C_2(\mathbf{x}_i) - T(\mathbf{x}_i)||^2 + \sigma\lambda E_{reg}(T) \qquad (3.9)$$

In this case, the second step of the alternate minimization is modified, and it is proved in chapter 5 that T has the following closed-form:

$$T(\mathbf{x}) = a.K * C(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{p} \mathbf{a}_i K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \qquad (3.10)$$

where K is a kernel depending only on the energy E_{reg} (as previously), and the coefficients a and $\mathbf{a}_i$ are found by resolving a set of linear equations.

This formula mixes both smoothing (on the dense set of pairings C, found by the intensity similarity) and radial basis functions (centered on the points where a pairing has been explicitly given) ; furthermore, the smoothing kernel and the radial basis function are the same. The transformation thus obtained is intuitively uniformly smooth, and its smoothness depends only on the shape and size of the kernel K.

In the case where the homologous points of the $\mathbf{x}_i$ are not explicitly given, but are known to be in a certain set of points $\mathbf{y}_j$, for example after segmentation of a part of the anatomy, the correspondences C_2 have to be estimated too. The alternate minimization of (3.9) w.r.t. C, C_2 and T then leads to a three-step algorithm, while T remains of the form (3.10). An application in the case of brain matching with cortical folds segmentation is given in (Cachier et al., 2001).

3.3 Experiments with the PASHA algorithm

3.3.1 Sinusoidal deformation experiment

We have run the experiment of the section 3.1.2 with this new PASHA algorithm to compare it to Asym and MAMAN. The energy minimized here also uses the SSD as the intensity similarity measure, and the membrane energy for regularization:

$$E(C,T) = \int (I - J \circ C)^2 + \sigma \int ||C - T||^2 + \sigma\lambda \int ||dT||^2$$

The results are reported in figures 3.9 and 3.10, showing respectively the deformation grid and the deformed images w.r.t the regularization strength. The minimization of the hybrid energy (3.11) behaves exactly as we wanted: the estimated transformation is uniformly smooth, as with MAMAN, except in areas containing no information but noise, where the transformation is not recovered, as for Asym.

We want to emphasize the fundamental difference between PASHA and Asym. With PASHA, the transformation is only extrapolated at the points where motion leads to a small intensity similarity gain; on the other points, the transformation uses the intensity information, and is uniformly smooth, as with MAMAN. With Asym, and more generally with competitive SIB algorithms, there is not really this kind of threshold in the behavior: the transformation still becomes less and less regular as the local contrast between the images increases.

3.3.2 Quantification of errors with Gaussian random fields

We quantified the differences between PASHA and MAMAN on a set of non-rigid transformations. Following (Ruiz-Alzola et al., 2000), we chose a (non-parametric) set of isotropic Gaussian random vector fields (Adler, 1980). An example of a Gaussian random transformation is depicted in figure 3.11.

In this experiment, we first performed anisotropic diffusion of image 3.2(a) with the algorithm of (Krissian et al., 1997) in order to suppress the noise. We generate a Gaussian random transform with Gaussian noise of standard deviation $k * s$ smoothed with a Gaussian kernel of size s pixel, k being a constant, so that the "expected smoothness" of such a transformation is controlled by s and the amplitude of the deformation remains constant for all smoothness strength s.

Given a Gaussian random transformation, we deformed the image 3.2(a), and added white Gaussian noise of standard deviation n. We also added the same level of Gaussian noise to the original image, and matched it to the deformed image. The error of registration is then the mean distance between this estimation and the real transformation in the entire image.

We have run this experiment with MAMAN and PASHA, with three set of parameters for the deformation simulation: a reference set with standard noise and smoothness (n=10 and s=10), a set with smoother transformations (n=10 and s=20), and a set with noisier images ($n = 15$ and $s = 10$). For each of these experiments, we used three different regularization strengths in our algorithm. Also, for PASHA, for each regularization strength, we choose different values of σ.

For all these different deformation, noise and registration parameters, we ran 20 experiments, and averaged the deformation errors. These mean errors are plotted in figure 3.12.

According to the results, if the parameters are chosen carefully, the hybrid energy gives better results than MAMAN. This shows that relying on very subtle intensity changes can prevent us from retrieving the correct motion when dealing with noisy images.

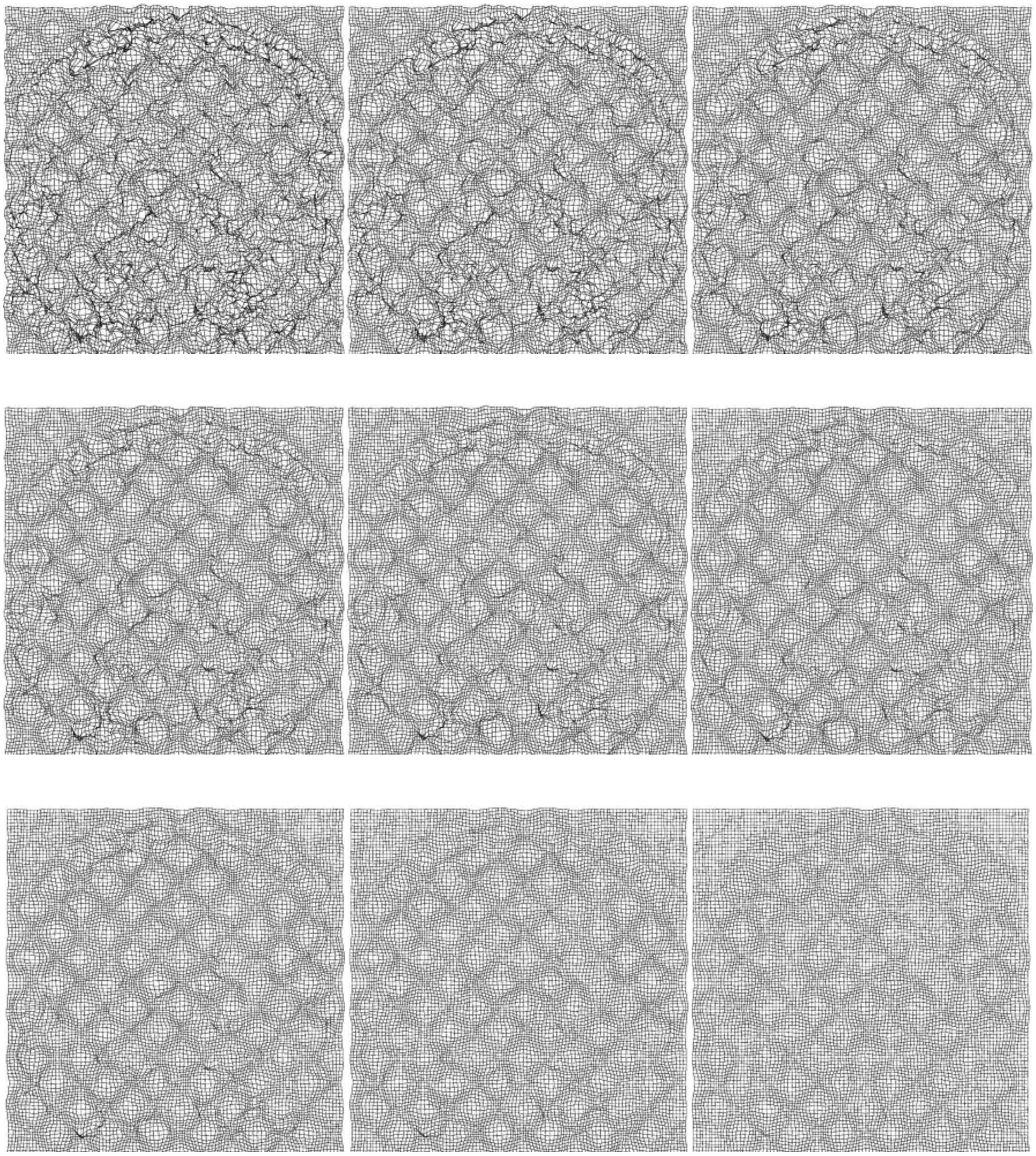


FIG. 3.9 – *Results of registration using our new hybrid energy (3.11) for regularization strengths ranging from 1.0 to 5.0, with* $\sigma = 5$.

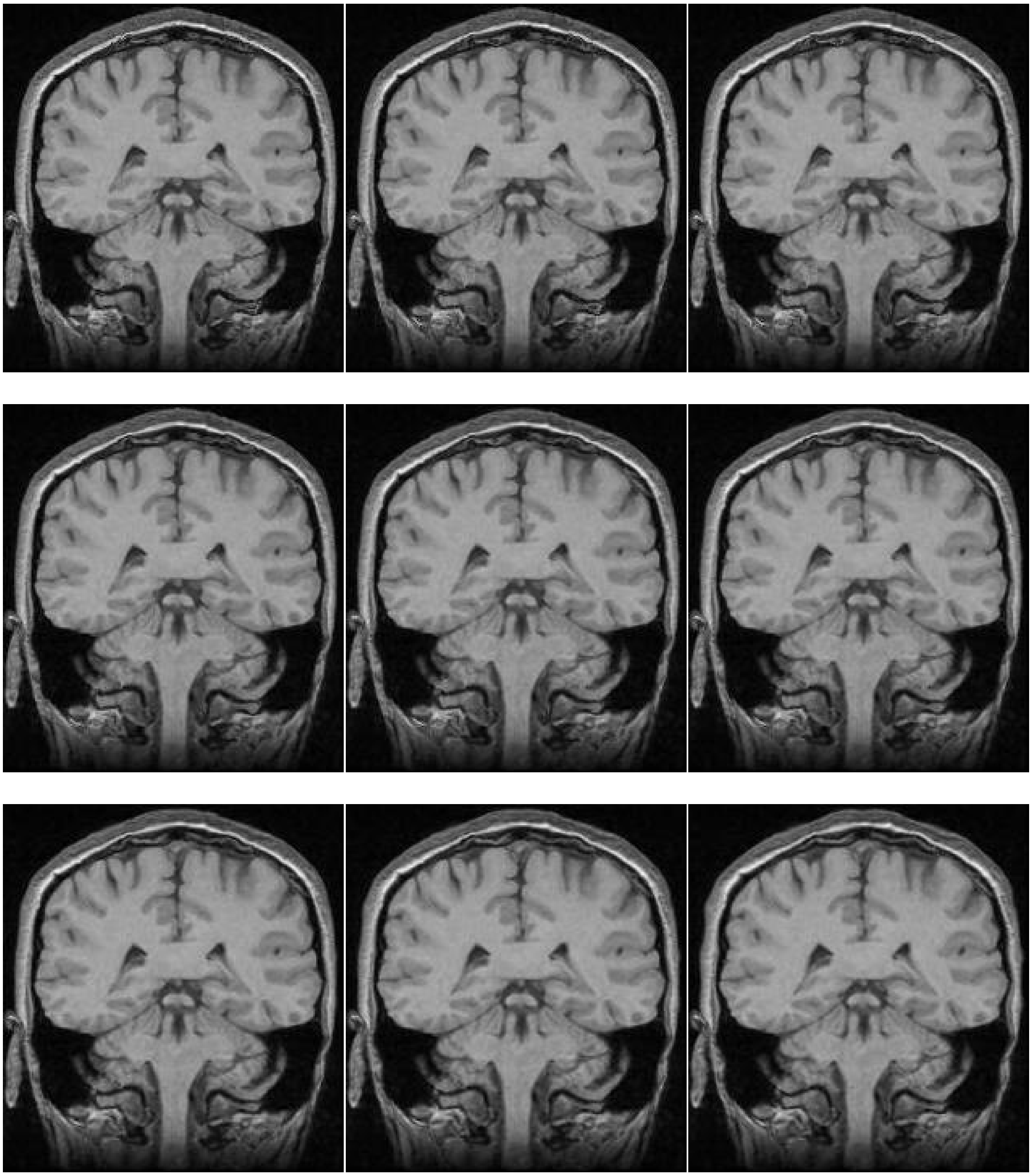


FIG. 3.10 – *Results of registration using our new hybrid energy (3.11) for increasing regularization strengths.*

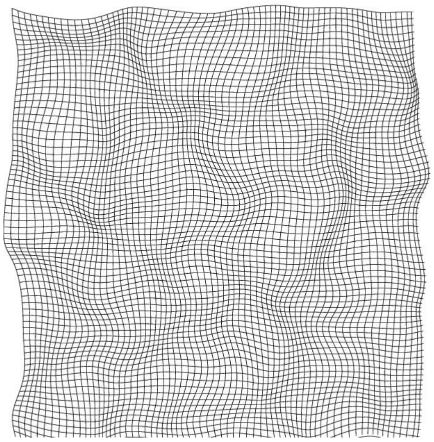


FIG. 3.11 – *An example of a Gaussian random transformation.*

When the transformation is smoother, for each value of λ, the optimal value of σ stay relatively stable. On the contrary, the relative score of the different regularization strength λ is changing, and high values of λ give better results than with less smooth Gaussian transforms.

When the images are noisier ($n = 15$), the relative score of the different value of λ do not vary very much. However, for each value of λ, the optimal value of σ is translated to higher values.

When the real transformations are smoother ($s = 20$), the relative score of the different values of λ is dramatically changed: high values are much more efficient than when $s = 10$.

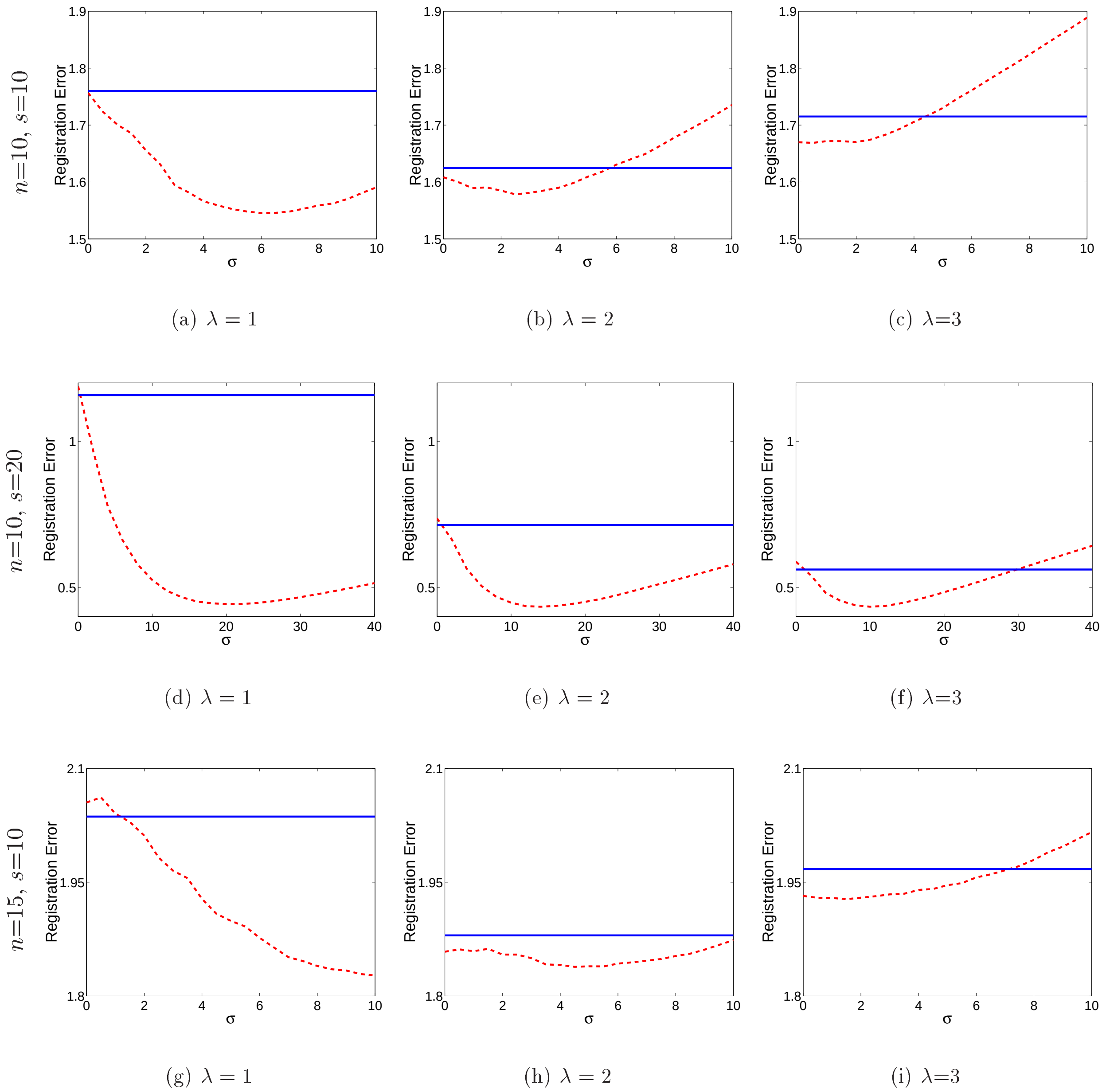
This tends to confirm that λ is more related to the prior smoothness of the transformation, and σ to the level of noise in the image. However, the choice of σ and λ is less simple than expected, because both variables are still quite coupled: when s is increased, for a fixed λ, optimal values of σ are also increased. Also, the best couple of registration parameters (σ,λ) for `PASHA` has not the same optimal regularization strength λ than `MAMAN` — here, the optimal λ of `PASHA` seems to be always lower than the one of `MAMAN`, as if σ still explains a part of the smoothness. Further work has to be done to understand the link between the parameters.

It is more difficult to compare `Asym` with `MAMAN` and `PASHA` since the regularization strength has not the same range for both algorithms. We have run `Asym` with the standard set $n = 10$ and $s = 10$, for a large number of regularization parameters. The best results were obtained for a regularization strength of $\lambda = 1000$; for this optimal value, the average error is 1.81, which is above what can achieve the two P&S algorithms (1.62 for `MAMAN` with $\lambda = 2$, 1.55 for `PASHA` with $\lambda = 1$ and $\sigma = 6$). As in section 3.1.2, the lack of uniform smoothness of `Asym` leads to greater errors in the motion estimation.

3.3.3 Three-dimensional experiment with real images

We registered two $256 \times 256 \times 128$ MR images of two different patients, with `MAMAN` and `PASHA`, using the SSD as the similarity measure and a Gaussian kernel for regularization (figure 3.13). The registration took around 16 minutes for both algorithms, on a Pentium II 500MHz. Prior to non-rigid registration, these images have been anisotropically diffused (Krissian et al., 1997), their intrinsic as well as relative bias have been removed (Mangin, 2000), and they have been linearly registered with the algorithm of (Roche et al., 2000a). The level of noise in these images is thus negligible.

However, there still remains some small violation of the intensity conservation assumption in



(a) $\lambda = 1$ (b) $\lambda = 2$ (c) λ=3

(d) $\lambda = 1$ (e) $\lambda = 2$ (f) λ=3

(g) $\lambda = 1$ (h) $\lambda = 2$ (i) λ=3

FIG. 3.12 – *Error of registration for different set of parameters.* ***Dashed Line:*** *Errors with* `PASHA`*. For each value of λ, the quality of the registration depends on the assumed level of noise σ.* ***Plain Line:*** *Error with* `MAMAN`*. Since there is no parameter σ in this algorithm the results do not depend on σ.* ***First Row:*** *Reference experiment: $s = 10$, $n = 10$.* ***Second Row:*** *Smoother deformations: $s = 20$, $n = 10$.* ***Third Row:*** *Noisier images: $s = 10$, $n = 15$.* ***Column, left to right:*** *Registration parameter λ= 1, 2, 3.*

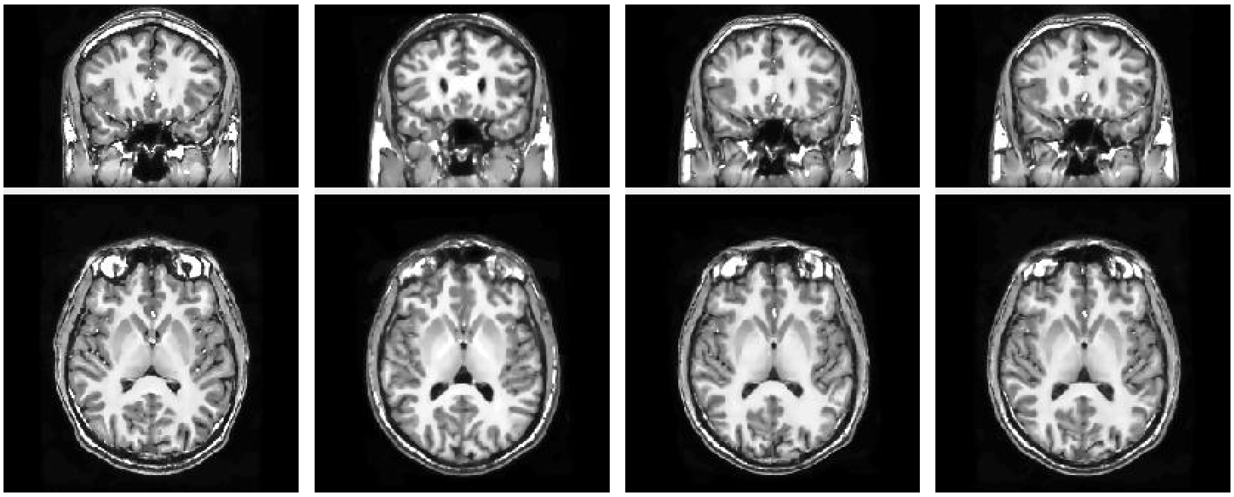
the images. The first violation is that the average intensity level of the background is slightly higher in the target image than in the source image. The second violation is that the average intensity level of the white matter is slightly lower in the target image than in the source image.

These slight intensity differences lead to some problems with `MAMAN`, as it can be seen in figure 3.14. The background in the target image is stretched to the border of the source image to minimize the SSD. Also, at some places, the white matter is artificially dilated (figure 3.15). The `PASHA` algorithm is much more robust towards these slight violations of the intensity conservation assumption: the points in the background are not moved despite the intensity differences, and the inside of the white matter is not inflated. Note that these differences typically appear for points with very slight intensity differences; therefore, their impact on the deformed image and the final intensity difference with the target image is very small, as it can be seen in figure 3.16.

3.4 Conclusion

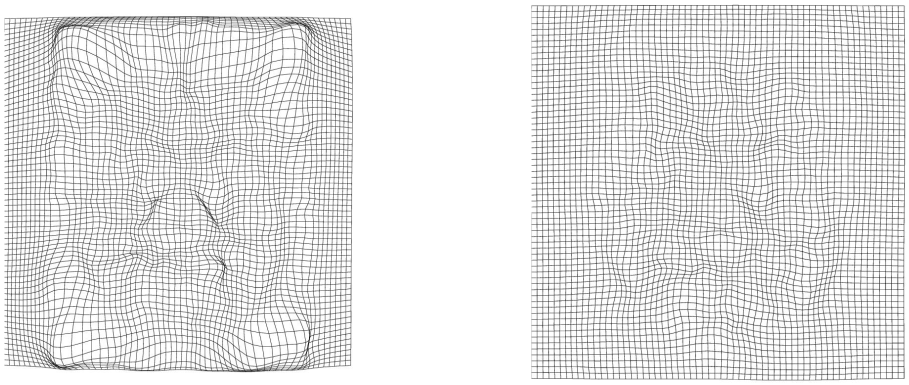
In this chapter, we have first comparatively studied the competitive SIB and P&S approaches, which both use two energies to register images: a similarity energy, and a regularization energy. We have shown that the regularization parameter of the competitive SIB algorithms is not directly related to the smoothness of the transformation, which tends to be very non-uniform: the higher the local contrast between the images, the more irregular the transformation. With P&S algorithms, the regularization strength has a uniform influence on the smoothness of the estimated transformation. We have shown on a synthetic experiment this fundamental difference between both approaches, with two instances of competitive SIB and P&S algorithms called respectively `Asym` and `MAMAN`. We have also shown that these consideration is not only aesthetic but leads in practice to less accurate results.

Then, we have introduced a hybrid energy for IFB non rigid registration, whose minimization can lead naturally to a P&S algorithm. This energy does not use a single parameter, but two, which are linked to two prior knowledges: the supposed levels of image noise and transformation



(a) Source Image (b) Target Image (c) Result of `MAMAN` (d) Result of `PASHA`

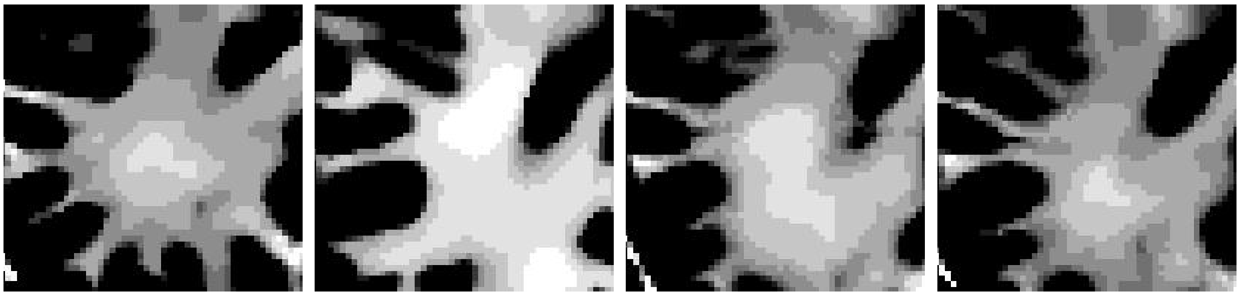
FIG. 3.13 – *A real 3D registration experiment: original and deformed images.*



(a) Result of `MAMAN` (b) Result of `PASHA`

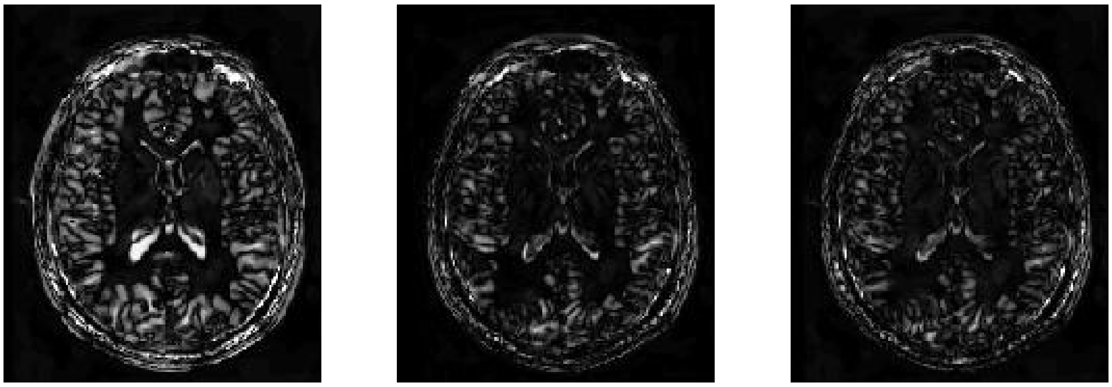
FIG. 3.14 – *Transformations found by `MAMAN` and `PASHA`. The differences between the two algorithms are made obvious here, and are mainly due to slightly different levels of intensity in the white matter (see also figure 3.15) and in the background between the source and target images. These strong differences in the recovered transformations lead nonetheless to very small intensity differences, as can be seen in figure 3.16. This illustrates again that looking only at the similarity of voxel intensities can be misleading.*

smoothness. This energy allows to better understand `MAMAN` (and other P&S algorithms as well) as an algorithm that does not assume any image noise. Our new algorithm `PASHA`, based on this energy, can therefore be seen as a generalization of `MAMAN`. Like competitive SIB algorithms, the motion with `PASHA` is not recovered if it leads to a small intensity similarity gain. However, the fundamental difference is that for high intensity similarity gain, the smoothness is uniform for `PASHA`, while the transformation still becomes less regular as the local contrast increases with SIB algorithms.



(a) Original (b) Target (c) Result of `MAMAN` (d) Result of `PASHA`

FIG. 3.15 – *Close-up on a part of the white matter, with intensities saturated in the range [45;53]. The white matter intensity is slightly higher in the target image than in the original image. Therefore, while the boundary of the deformed white matter is almost the same in images 3.15(c) and 3.15(d), `MAMAN` attempts to dilate the areas of the white matter with the higher intensities to minimize the intensity differences, visualized here by the expansion of the light gray region in 3.15(c) compared to its original position in 3.15(a). With `PASHA`, the closeness constraints forbids such deformations : the light gray region inside the white matter is not expended.*



(a) Before matching (b) After, using MAMAN (c) After, using PASHA

FIG. 3.16 – *Intensity difference between target image and deformed original image, with MAMAN and PASHA. From this point of view, both methods give very similar results, although PASHA seems slightly better (perfect registration is not possible as it is an intersubject experiment).*

We have shown on a set of noisy images deformed by Gaussian random transformations the advantages of PASHA compared to our two other algorithms. These experiments also showed that the parameters of the hybrid energy are not as easy to pick as expected, as they do not totally independently correspond to the level of image noise and transformation smoothness. A deeper understanding of these parameters will be necessary to fully operate, and perhaps automate, this algorithm.

On a real 3D experiment, we have shown that the hybrid energy significantly increases the robustness of our P&S algorithm towards the hypothesis made by the similarity measure (here, intensity conservation, since we used the SSD criterion). These differences are easy to see on the recovered transformation. However, since they typically appear on areas with small intensity differences, the deformed image looks almost identical: let us conclude then by recalling once more than looking at deformed images only for non rigid result comparison is a very biased way to proceed, even if it is unfortunately still a widespread method.

Chapitre 4

Modèles relationnels non stationnaires : approches globales et locales

« *Now consider the tortoise and the eagle.*

The tortoise is a ground-living creature. It is impossible to live nearer the ground without being under it. Its horizons are a few inches away. It has about as good a turn of speed as you need to hunt down a lettuce. It has survived while the rest of evolution flowed past it by being, on the whole, no threat to anyone and too much trouble to eat.

And then there is the eagle. A creature of the air and high places, whose horizons go all the way to the edge of the world. Eyesight keen enough to spot the rustle of some small and squeaky creature half a mile away. All power, all control. Lightning death on wings. Talons and claws enough to make a meal of anything smaller than it is and at least take a hurried snack out of anything bigger.»

Terry Pratchett, *Small Gods*, 1992

Ce chapitre est consacré à nos efforts pour s'arracher de l'hypothèse de conservation de l'intensité dans nos algorithmes `MAMAN` et `PASHA`. Nous développons des mesures de similarité reposant sur une hypothèse affine, et non uniforme, sur le lien existant entre les deux images à recaler, dont la plus représentative est le *rapport de corrélation local*. Une des contributions majeures de ce chapitre est l'introduction d'un calcul rapide des mesures locales ainsi que de leur dérivées par convolution. Enfin, bien que nos motivations de départ soit modestes — s'affranchir des problèmes de biais en recalage monomodal — nous montrerons que ces mesures de similarité à si modeste allure peuvent aussi s'attaquer à des problèmes de recalage multimodal.

4.1 Introduction

La plupart des mesures de similarité des intensités reposent sur des hypothèses portant sur le bruit qui corrompt les images et surtout sur les liens existant entre leurs intensités. Ces hypothèses sont explicites dans le cas des mesures de similarité utilisant un modèle relationnel entre les intensités (voir p. 22), dont le plus simple et le plus répandu est le modèle fonctionnel, qui explique un grand nombre de mesures de similarité classiques (écart quadratique, coefficient de corrélation, et rapport de corrélation entre autres). Bien que cela soit moins évident, c'est également vrai pour les mesures statistiques, qui font l'hypothèse minimale de stationnarité du bruit sur les isovaleurs des images (voir (Roche et al., 2000a)).

Toutes ces mesures classiques reposent sur des modèles *stationnaires* ; autrement dit, on suppose qu'une même classe de tissu aura en moyenne la même intensité partout dans l'image. Malheureusement, cette hypothèse est parfois irréaliste. En particulier, les IRM sont souvent corrompues par un biais multiplicatif non uniforme, dû aux variations du champ magnétique de base B_0 (voir (Sled et Pike, 1998) pour une étude approfondie du problème).

Quelle robustesse de recalage peut-on avoir envers cette violation de nos hypothèses? Comme nous l'avons souligné p. 25, cela dépend du nombre de degrés de liberté de notre transformation. En recalage rigide, l'intégration spatiale des données est énorme car elle recouvre la totalité de l'image ; le mouvement d'un point est influencé par l'ensemble des autres points. De ce fait, peu d'algorithmes rigides ou affines rectifient la non-stationnarité de leurs hypothèses.

En recalage non rigide, la situation est différente. Il est difficile de recaler correctement des images biaisées non rigidement parce que le biais possède une très forte corrélation spatiale. Il est apparu assez tôt qu'il est nécessaire de prendre en compte explicitement la non-stationnarité des liens qui relient les intensités des deux images (Broit, 1981; Bajcsy et Kovačič, 1989).

Pour contourner ce problème, une première possibilité consiste à corriger le biais des images préalablement au recalage, en utilisant les techniques développées par exemple par (Sled, 1998; Van Leemput et al., 1999; Mangin, 2000; Prima, 2001). Cette méthode est efficace dans certains cas, mais peut poser quelques problèmes liés au fait que le biais est corrigé séparément sur chacune des images. Une correction de l'uniformité des images ne peut pas garantir que l'on puisse faire l'hypothèse de conservation de l'intensité après correction, car la correction du biais est relative à un facteur multiplicatif. Même après recentrage des histogrammes, des écarts peuvent subsister, notamment à cause d'un changement de contraste ou du mouvement des tissus, comme nous le verrons plus tard sur un exemple représentatif. De plus, certains changement d'intensités peuvent être dus à des facteurs difficilement modélisables, comme par exemple l'utilisation de machines IRM ou échographiques différentes.

Ainsi, bien qu'une correction préalable du biais est envisageable, il est souhaitable de s'affranchir d'une mesure de similarité faisant l'hypothèse de conservation de l'intensité, et d'introduire un niveau de référence relatif local entre les deux images. Les algorithmes sont ainsi moins sensibles aux changements de contraste liés à des phénomènes divers et non nécessairement modélisables.

Dans ce chapitre, nous proposons deux stratégies pour s'affranchir de l'hypothèse de conservation de l'intensité et introduire une non-stationnarité dans les hypothèses.

La première, section 4.2, utilise des mesures globales incluant spécifiquement un modèle de biais non stationnaire. La non-stationnarité des paramètres du modèle est traduite par l'utilisation de polynômes dans l'espace de l'image.

La seconde, section 4.3, publiée dans (Cachier et Pennec, 2000), s'oriente vers les mesures locales de similarité entre des petites portions d'images. Sur ces portions, des modèles stationnaires sont utilisés ; l'hypothèse implicitement faite est que le biais est localement uniforme sur ces petites portions d'images. Les mesures locales sont une idée assez ancienne à l'origine des algorithmes de recalage par blocs. Cependant, l'approche développée ici est originale à plusieurs égards, et en particulier en ce que ces mesures locales sont calculées toutes en même temps, par convolution : l'algorithme est donc rapide, et permet de s'affranchir de l'utilisation de blocs limitant généralement l'algorithme de minimisation. Ce type d'approche s'avèrera plus efficace que les méthodes globales. Nous verrons qu'il est même possible de s'attaquer au recalage multimodal avec ces mesures.

4.2 Modèles relationnels globaux à non-stationnarité polynomiale

La première approche que nous explorons ici pour introduire de la non-stationnarité dans nos hypothèses repose sur l'utilisation de polynômes pour capturer l'évolution du biais entre nos images.

Nous partons d'un modèle relationnel affine entre les images :

$$a.I + b = J \circ T \qquad (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

Ce modèle permet de prendre en compte un décalage des valeurs du signal, grâce à la constante additive b, ainsi qu'un changement de contraste multiplicatif a.

Dans le domaine de la correction du biais (Sled, 1998; Van Leemput et al., 1999; Mangin, 2000; Prima, 2001), il est généralement convenu que le biais frappant la modalité d'imagerie par résonance magnétique est purement multiplicatif. Notre but ici n'est cependant pas de modéliser précisément ce biais ; au contraire, comme nous l'avons souligné en introduction, nous voulons être plus flexible face à ces hypothèses. Le modèle affine permet ainsi de prendre en compte un panel de situations plus larges.

Ce modèle affine précédent est stationnaire : le décalage et le changement de contraste existant entre les deux images est supposé être constant partout dans l'image. Nous pouvons permettre à ce modèle de varier continûment dans l'espace en remplaçant ces constantes par des polynômes :

$$a.I + b = J \circ T \qquad (a,b) \in (\mathbb{R}_n[X_d])^2$$

où d est la dimension de notre image, typiquement 2 ou 3. Cette idée de transformer les constantes des modèles en variables de l'espace est déjà présente dans l'article de (Friston et al., 1995), et (Lai, 2000) en a réalisé une implémentation pour du recalage affine 2D avec un modèle de biais polynomial de degré un.

Le calcul de notre mesure de similarité comporte deux étapes :

- Dans un premier temps, nous recherchons les polynômes a et b expliquant au mieux les différences existants entre I et J.
- La mesure de similarité proprement dite est alors l'erreur de ce modèle par rapport aux données.

Dans ce qui suit, nous avons choisi de prendre une mesure d'erreur quadratique entre les intensités des images, car des formules explicites commodes existent dans ce cas. Notre mesure de similarité de l'écart quadratique au modèle affine polynomial (EQAP) s'écrit formellement :

$$\mathrm{EQAP}(I,J,T) = \min_{(a,b)\in(\mathbb{R}_n[X_d])^2} \int [a(\mathbf{p}).I(\mathbf{p}) + b(\mathbf{p}) - J \circ T(\mathbf{p})]^2 \, d\mathbf{p} \tag{4.1}$$

4.2.1 Ajustement des polynômes

Décomposons nos polynômes a et b sur une base de polynôme $(P_i)_{i=1..N}$ de $(\mathbb{R}_n[X_d])^2$:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{p}) &= \sum_i a_i P_i(\mathbf{p}) \\ b(\mathbf{p}) &= \sum_i b_i P_i(\mathbf{p}) \end{aligned}$$

Dans un premier temps, nous minimisons

$$\mathcal{E} = \int \left[\left(\sum_i a_i P_i(\mathbf{p}) \right) .I(\mathbf{p}) + \left(\sum b_i P_i(\mathbf{p}) \right) - J \circ T(\mathbf{p}) \right]^2 d\mathbf{p}$$

par rapport aux coefficients a_i et b_i. La dérivation par rapport à ces coefficients fourni :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}.\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_k} &= \sum_i a_i \int P_i.P_k.I^2 + \sum_i b_i \int P_i.P_k.I - \int P_k.I.J \circ T \\ \frac{1}{2}.\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial b_k} &= \sum_i a_i \int P_i.P_k.I + \sum_i b_i \int P_i.P_k - \int P_k.J \circ T \end{aligned}$$

L'annulation de toutes ces dérivées mène à la résolution du système linéaire

$$M.X = N$$

avec le vecteur des inconnues

$$X = (a_0,\ldots,a_N,b_0,\ldots,b_N)^T \in \mathbb{R}^{2N}$$

composé de tous les coefficients a_i et b_i, la matrice des moments

$$M = \left(\begin{array}{c|c} \int P_i.P_k.I^2 & \int P_i.P_k I \\ \hline \int P_i.P_k.I & \int P_i.P_k \end{array} \right) \in \mathcal{M}(2N) \tag{4.2}$$

qui est une matrice symétrique, et le vecteur des comoments

$$N = \left(\int P_0.I.J \circ T,\ldots, \int P_N.I.J \circ T, \int P_0.J \circ T,\ldots. \int P_N.J \circ T \right)^T \in \mathbb{R}^{2N} \tag{4.3}$$

4.2.2 Polynômes de Legendre

Le choix de la base P_i n'a en théorie aucune importance pour le calcul de a et de b, car il est entendu que ces polynômes se recombinent de toute façon en la solution optimale du problème (4.1) dans $\mathbb{R}_n[X_d]$.

En pratique, le choix de la base est dictée par le conditionnement de la matrice M qui doit être la meilleure possible, ainsi que le calcul des intégrales formant ses éléments. L'utilisation de la base canonique x^n est peu recommandée car la précision peut devenir catastrophique lorsque le degré du polynôme est important. Cela se comprend en regardant les graphes de ces fonctions (figure 4.1) : lorsque le degré du polynôme est élevé, celui-ci est quasiment nul sur une grande partie de l'image. Dès lors, les points au centre de l'image, en plein coeur de cette zone, ont des difficultés à s'exprimer numériquement.

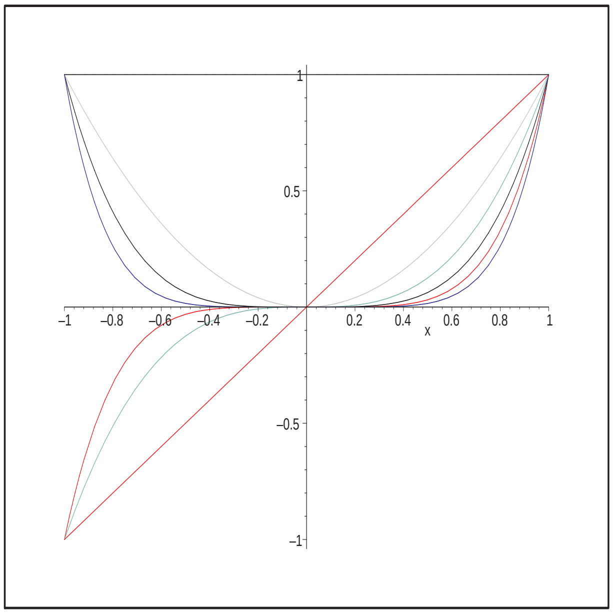


FIG. 4.1 – *Tracé des graphes des sept premiers éléments de la base canonique de* $\mathbb{R}[X]$.

Pour palier à cet inconvénient, la solution classique consiste à utiliser les polynômes de Legendre P_n, $n \in \mathbb{N}$ (Guilpin, 1999). Les polynômes de Legendre, dont les premiers éléments sont reportés au tableau 4.1, possèdent de nombreuses propriétés qui leur doivent leur utilisation dans de nombreux domaines, allant de l'électrostatique au calcul numérique en passant par la chimie. Des détails sur ces propriétés peuvent être trouvés dans (Guilpin, 1999).

La propriété des polynômes de Legendre qui nous intéresse ici est la minimalité de leur norme. En effet, les erreurs numériques obtenues avec la base canonique x^n sont liées au fait que les valeurs que prennent ces fonctions sur $[-1{,}1]$ sont mal réparties : la plupart sont presque nulles, sauf près des bords où les valeurs montent soudainement. Nous recherchons au contraire des polynômes dont l'écart par rapport à zéro soit plus uniforme, mieux réparti. Pour cela, nous pouvons chercher à réduire l'écart quadratique moyen entre cette fonction et la fonction nulle : ces polynômes se répartissent ainsi optimalement autour de zéro. Ces polynômes optimaux sont les polynômes de Legendre :

Théorème 1 *Parmi les polynômes unitaires de degrés* n *de* $\mathbb{R}[X]$, *celui dont la norme quadratique évaluée sur l'intervalle* $[-1;1]$ *est la plus petite est, à un facteur multiplicatif près, le polynôme de*

Polynôme	Expression
P_0	1
P_1	x
P_2	$\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$
P_3	$\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
P_4	$\frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$
P_5	$\frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$
P_6	$\frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$

TAB. 4.1 – *Formules des sept premiers polynômes de Legendre.*

Legendre P_n.

Ce théorème se démontre facilement à partir de la propriété d'orthogonalité des polynômes de Legendre. Voir par exemple (Guilpin, 1999) pour une démonstration.

Cette propriété se visualise bien à la figure 4.2 : les polynômes de Legendre ont tendance à osciller autour de zéro avec une amplitude constante, donnant ainsi à toutes les régions à peu près le même poids sous les intégrales. De plus les zéros de ces polynômes ne sont pas toujours aux même endroits ; ainsi aucune région n'est numériquement lésée.

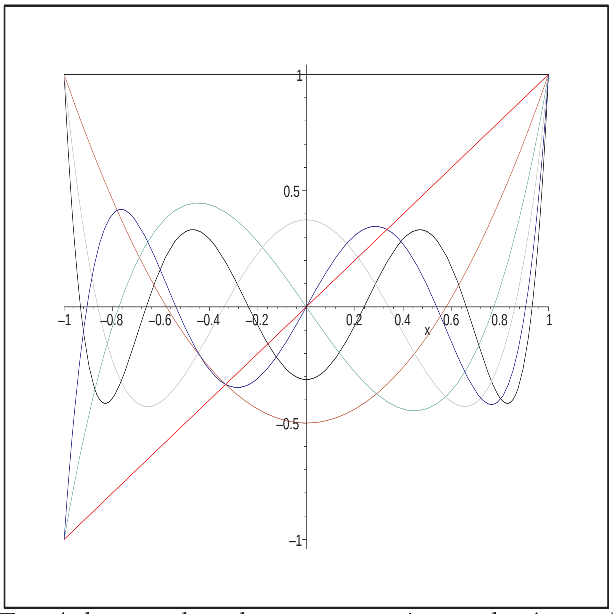


FIG. 4.2 – *Tracé des graphes des sept premiers polynômes de Legendre.*

Il est généralement admis qu'avec les polynômes de Legendre, on peut monter sans difficulté jusqu'à des polynômes de degré 12 ou 13.

Polynômes de Legendre en dimension supérieure

En dimension supérieure, les polynômes de norme quadratique minimale sont des produits tensoriels de polynômes de Legendre

Théorème 2 *Parmi les polynômes de degrés n de $\mathbb{R}[X_d]$ unitaire en le terme $x_1^{\alpha_1}...x_d^{\alpha_d}$, $\alpha_1 + \cdots + \alpha_d \leq n$, celui dont la norme quadratique évaluée sur l'intervalle $[-1;1]^d$ est la plus petite est, à un facteur multiplicatif près, le produit tensoriel des polynômes de Legendre $P_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes P_{\alpha_d}$.*

La preuve est en fait identique à celle du théorème précédent et découle de l'orthogonalité de la base de polynômes ainsi formée. Nous prenons donc comme base de l'espace des polynômes de degrés n en dimension supérieure à deux la famille des produits tensoriels de polynômes de Legendre :

$$P_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes P_{\alpha_d} \qquad \alpha_1 + \cdots + \alpha_d \leq n$$

4.2.3 Choix de l'image corrigée par le biais

Au début de cette section, nous avons choisi d'applique le modèle relationnel affine à l'image I, pour calculer

$$\int (a.I + b - J \circ T)^2$$

Ce choix est arbitraire, et nous aurions très bien pu choisir au contraire de corriger J, en calculant plutôt

$$\int (a.J \circ T + b - I)^2$$

Notre choix initial se justifie en fait par la procédure numérique exposée ci-dessus. Pour calculer les coefficients de a et b dans la base de Legendre, il faut calculer la matrice de moments M donnée par (4.2), ainsi qu'un vecteur de comoments N donné par (4.3). Ces calculs doivent être menés à chaque itération de recalage, c'est-à-dire à chaque fois que l'image $J \circ T$ change. En choisissant d'appliquer la correction d'intensité à I, nous pouvons calculer la matrice M et l'inverser une fois pour toutes préalablement au recalage. Si nous avions choisi de l'appliquer à $J \circ T$, il aurait fallu recalculer et inverser la matrice des moments de $J \circ T$ à chaque itération.

4.2.4 Résultats

Nous reportons les résultats obtenus avec cette méthode à la section 4.4, afin de comparer les modèles développés dans cette section, et les modèles locaux développés à la section suivante.

En anticipant les chiffres fournis par ces expériences, nous pouvons dire que les résultats obtenus avec les modèles relationnels paramétriques sont assez décevants. Notamment, ces méthodes sont très sensibles à l'adéquation entre le modèle polynomial et le biais réel. Une possibilité pourrait être l'utilisation d'une métrique robuste pour ajuster le modèle, ou d'un modèle de biais non paramétrique. L'approche que nous allons maintenant développer, basée sur des mesures locales, est une solution alternative s'acquittant de ce problème.

4.3 Modèles relationnels locaux

La deuxième approche explorée dans ce chapitre pour s'affranchir des problèmes de biais entre les images consiste à utiliser des mesures locales. Les mesures locales permettent de s'affranchir des problèmes de non-stationnarité si les variations spatiales des hypothèses relationnelles de ces mesures sont négligeables à l'intérieur des portions d'images qu'elles traitent. L'avantage, par rapport à l'approche précédente, est que l'ajustement du modèle relationnel en est grandement simplifié ; de ce fait, il est possible de complexifier le modèle relationnel, en préférant par exemple des modèles polynomiaux aux fonctions affines, de manière tout à fait similaire à (Guimond et al., 2001).

L'inconvénient de ces méthodes, outre qu'elles puissent paraître un brin bâtarde et peu rigoureuse puisqu'elles contournent le problème de la modélisation du biais, est qu'elles sont nettement plus lourdes numériquement : en effet, pour chaque point autour duquel le calcul est mené, il convient de considérer l'ensemble de son voisinage. Les méthodes numériques d'optimisation sont donc généralement très allégées ; en recalage par blocs, le calcul est fait en translation et pour quelques points seulement.

Nous proposons ici une méthode permettant de calculer ces mesures locales sans avoir à traiter chaque fenêtre séparément ; cela se fait de manière transparente en utilisant une technique originale à base de convolutions. En utilisant cette technique, l'algorithme `MAMAN` s'affranchit des biais non uniformes en ne prenant même pas le double du temps qu'il prend en utilisant l'écart quadratique comme mesure de similarité. Nous détaillons les mesures locales et leur fenêtrage en section 4.3.1, puis leur calcul par convolution en section 4.3.2.

4.3.1 Les mesures locales

Les mesures locales ont été introduites assez tôt en recalage non rigide, car les problèmes de robustesse face aux hypothèses de stationnarité sont beaucoup plus apparents lorsque la contrainte de rigidité de la transformation est relâchée. Le succès, voire la mode, de l'information mutuelle a pourtant peu à peu poussé ces mesures hors de l'actualité. Nous restons cependant convaincu avec (Roche et al., 2000a) que des hypothèses trop générales nuisent à la mise en correspondance : il n'y a pas de mesure universelle, et à chaque type de recalage des hypothèses minimales doivent être trouvées. En ce sens, ces mesures sont fort bien adaptée au problème du recalage monomodal d'IRM, voire au recalage multimodal (Weese et al., 1999) ; de plus, plusieurs articles récents tendent à relativiser l'efficacité de l'information mutuelle par rapport aux mesures plus contraintes reposant sur un modèle relationnel pour certaines applications (Holden et al., 2000; Grova et al., 2001; Janke et al., 2001).

Les mesures locales ont été utilisées quasiment exclusivement sous la forme d'algorithme de recalage par blocs (Lau et al., 1999; Maintz et al., 1998; Collins et Evans, 1997; Strintzis et Kokkinidis, 1997; Gee et al., 1995b) ; des exceptions connues existent en recalage de signaux (Witkin et al., 1987). En recalage par blocs, l'image est découpée en un certain nombre de fenêtres rectangulaires, qui peuvent éventuellement se chevaucher. Dans sa version la plus courante, le recalage par blocs consiste à déplacer ces fenêtres dans l'image cible, à calculer une énergie de similarité entre la fenêtre et son correspondant, et à retenir la position de la fenêtre qui minimise cette énergie de similarité. Malheureusement, il est coûteux de calculer cette mesure de similarité, surtout si la fenêtre est large. De ce fait, les algorithmes de minimisation sont souvent bridés. Il n'y a que quelques fenêtres dans l'image, et non une par pixel. De plus, les déplacements des fenêtres sont limités en translation afin de limiter le nombre d'estimations, qui serait considérablement plus élevé si l'on autorisait également les rotations, surtout en 3D.

(Bajcsy et Kovačič, 1989) ont opté pour une approche légèrement différente pour focaliser la mesure de similarité — en l'occurrence, la corrélation — autour d'un point. Dans leur article, la mesure de similarité n'est pas fenêtrée, mais les images sont décomposées sur les premiers éléments de la base de Hermite, produits de polynômes et d'un noyau gaussien. Les images sont simplifiées en étant projetées sur les premiers éléments de cette base ; puis la corrélation est faite entre ces projections (figure 4.3). Notons que la mesure de la corrélation est moins précise à cause de la simplification des images ; de plus, le caractère local est lié à la forme spécifique de la base de Hermite et au fait que ce développement soit tronqué.

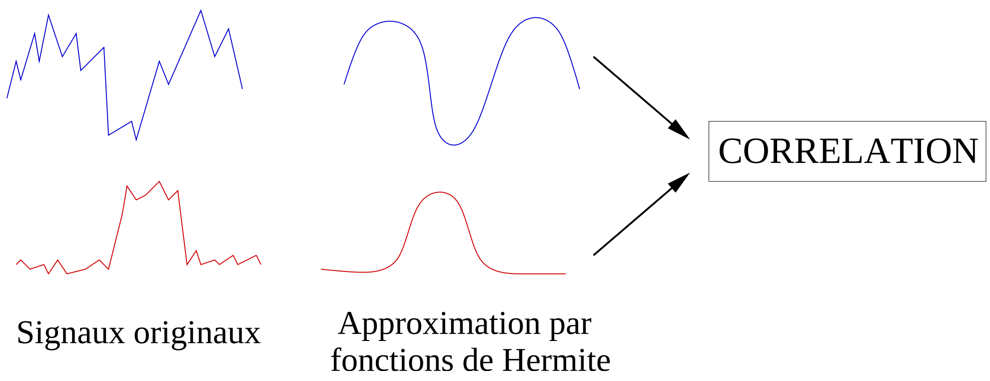


FIG. 4.3 – *Principe de la localisation d'une mesure de similarité de (Bajcsy et Kovačič, 1989) : les images sont simplifiées en étant projetées sur les premiers éléments d'une base de fonction à décroissance rapide. La corrélation est ensuite calculée sur ces images simplifiées.*

4.3.1.1 Définitions

Soit $G(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^d \in \mathbb{R}$ un noyau ayant les propriétés requises pour servir de fenêtre aux mesures de similarité : normalisé ($\int G = 1$), symétrique ($G(\mathbf{x}) = G(-\mathbf{x})$), positive, et décroissante vers zéro en l'infini. Notons $G_\mathbf{p}$ la translation du noyau G au pixel $\mathbf{p}$:

$$G_\mathbf{p}(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x} - \mathbf{p})$$

Soit I et J deux images à recaler avec une transformation T. Comme dans la section précédente, nous allons introduire dans notre mesure de similarité un changement de contraste a et un décalage b entre nos deux images. Cette fois ci, ce modèle affine est stationnaire, mais la mesure de similarité devient locale grâce à l'introduction du noyau $G_\mathbf{p}$: nous définissons une mesure de similarité locale $E_\mathbf{p}$ centrée autour du pixel $\mathbf{p}$ par

$$E_\mathbf{p}(I,J \circ T) = \min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int G_\mathbf{p}.(a.I + b - J \circ T)^2 \tag{4.4}$$

L'optimisation par rapport aux réels a et b possède une solution explicite. Nous allons donc utiliser cette formule, et faire disparaître de notre mesure de similarité finale toute trace de ce modèle et des variables a et b. Pour cela, nous devons procéder à quelques définitions supplémentaires.

Nous définissons la moyenne locale d'une image I, la corrélation locale entre une image I et une image $J \circ T$, et la variance locale de I (toutes ces mesures étant centrées autour du pixel $\mathbf{p}$) respectivement par :

$$\begin{aligned}
\overline{I}_\mathbf{p} &= \int G_\mathbf{p}.I \\
< I,J \circ T >_\mathbf{p} &= \int G_\mathbf{p}.(I - \overline{I}_\mathbf{p}).(J \circ T - \overline{J \circ T}_\mathbf{p}) \\
\sigma^2_\mathbf{p}(I) &= < I,I >_\mathbf{p}
\end{aligned}$$

Avec ces définitions, la mesure de similarité locale (4.4) s'écrit :

$$E_{\mathbf{p}}(I,J\circ T) = \sigma^2_{\mathbf{p}}(J\circ T) - \frac{< I,J\circ T >^2_{\mathbf{p}}}{\sigma^2_{\mathbf{p}}(I)} \tag{4.5}$$

Voir l'annexe de ce chapitre pour l'établissement de cette formule. Nous définissons aussi le coefficient de corrélation local, mesure très populaire en recalage par blocs :

$$CCL_{\mathbf{p}}(I,J\circ T) = \frac{< I,J\circ T >_p}{\sigma_{\mathbf{p}}(I)\sigma_{\mathbf{p}}(J\circ T)}$$

Le coefficient de corrélation local et notre mesure quadratique précédente reposant sur un modèle relationnel local affine sont fortement reliées : elles vérifient l'égalité

$$E_{\mathbf{p}} = \sigma^2_{\mathbf{p}}(J\circ T).(1 - CCL^2_{\mathbf{p}})$$

Les mesures de similarité proprement dites sont une somme de ces mesures de similarité locale sur tous les pixels $\mathbf{p}$ de l'image. Les mesures de similarité de l'écart quadratique au modèle local affine (EQLA) et du coefficient de corrélation local (CCL) s'écrivent :

$$\begin{aligned} EQLA(I,J\circ T) &= \int_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{p}}(I,J\circ T) \\ CCL(I,J\circ T) &= \int_{\mathbf{p}} CCL_{\mathbf{p}}(I,J\circ T) \end{aligned}$$

Signalons tout de même deux différences fondamentales entre le CCL et l'EQLA. D'une part, le CCL est une mesure normalisée : elle ne change pas si I et J sont multipliées par un même facteur. Mais surtout, le CCL est une mesure plus monomodale et plus restrictive que l'EQLA, puisque pour avoir une corrélation positive, les intensités de deux images doivent varier dans le même sens. De ce point de vue, l'EQLA est une mesure moins contrainte, puisque seul compte l'écart au modèle affine, que sa pente soit positive ou négative. Par exemple, L'EQLA entre une image I et son négatif $\max(I) - I$ indique un recalage excellent, contrairement au CCL. De ce point de vue, l'EQLA est bien mieux indiqué pour le recalage multimodal (en particulier d'IRM T1/T2) que le CCL. Nous l'utiliserons d'ailleurs dans cette optique à la section 4.4.3.

Choix du noyau de fenêtrage : aspects théoriques

Mathématiquement, le choix du noyau G est assez large, les seules contraintes étant celles que nous avons évoquées section 4.3.1.1. Le choix habituellement fait en recalage par blocs est un bloc rectangulaire, mais d'autres formes sont possibles, comme des cercles (Weese et al., 1999), des losanges (Zhu et Ma, 2000), etc. Ces noyaux sont le plus souvent binaires pour des raisons de temps de calcul, mais l'on rencontre également des noyaux gaussiens tronqués (Devernay, 1997).

Dans ce qui suit, nous avons opté pour un noyau gaussien, non tronqué. La taille de la gaussienne, ou son écart type, donne l'ordre de grandeur de la zone couverte par la mesure de similarité ainsi fenêtrée. A l'intérieur de cette zone, les hypothèses de stationnarité faites par notre modèle affine doivent être relativement bien respectées ; cependant, le biais est autorisé à varier globalement dans l'image. Ainsi, nous pouvons nous attaquer à des biais non stationnaires. Nous montrerons plus loin sur un exemple que ces mesures locales peuvent surmonter des biais dont l'amplitude dépasse celle de l'image original de 50%.

Le noyau gaussien satisfait deux besoins théoriques :

- La gaussienne est un noyau *isotrope*. L'isotropie est une hypothèse souhaitable par défaut, pour les énergies de régularisation (chapitre 5) comme pour les mesures de similarité. A noter que le noyau gaussien doit être isotrope dans l'espace physique : si les pixels sont eux-mêmes anisotropes, alors le noyau gaussien doit suivre cette anisotropie dans l'espace image.
- La gaussienne est strictement décroissante de façon continue vers zéro en l'infini. Les points ont graduellement de moins en moins d'influence lorsque l'on s'éloigne du centre $\mathbf{p}$. Les profils du critère de similarité sont donc plus lisses que si la pondération est binaire.

Enfin, nous calculons une mesure de similarité autour de chaque pixel, et non autour de quelques points seulement, afin de ne privilégier aucune région de notre image envers notre mesure de similarité.

4.3.2 Calcul des mesures locales par convolution

A priori, le calcul de toutes ces similarités locales peut sembler lourd. Fort heureusement, nous avons développé une méthode originale à base de convolutions, qui permet de mener ces calculs rapidement.

En effet, les statistiques locales énumérées p. 95 peuvent être calculées simultanément autour de tous les pixels, en utilisant des convolutions (notées ici $*$) :

$$\begin{aligned}
\overline{I}_{\mathbf{p}} &= (G * I)(\mathbf{p}) \\
\sigma^2_{\mathbf{p}}(I) &= \overline{I^2}_{\mathbf{p}} - \overline{I}^2_{\mathbf{p}} \\
&= G * (I^2)(\mathbf{p}) - (G * I)^2(\mathbf{p}) \\
< I, J \circ T >_{\mathbf{p}} &= \overline{I.J \circ T}_{\mathbf{p}} - \overline{I}_{\mathbf{p}}.\overline{J \circ T}_{\mathbf{p}} \\
&= G * (I.J \circ T)(\mathbf{p}) - (G * I)(\mathbf{p}).(G * J \circ T)(\mathbf{p})
\end{aligned}$$

Ainsi, toutes les moyennes locales se calculent en une convolution, toutes les variances locales en deux convolutions, et toutes les corrélations locales en trois convolutions.

Choix du noyau de fenêtrage : aspects pratiques

Le calcul à base de convolution peut être appliqué avec n'importe quel noyau G. Cependant, pour ce calcul, la gaussienne dispose d'autres atouts pratiques majeurs :

- La convolution avec une gaussienne est séparable ; autrement dit, lisser une image n-D peut se faire en lissant n fois l'image par un noyau gaussien 1-D, ce qui est en soit beaucoup plus rapide que de lisser l'image avec un noyau n-D. Les gaussiennes sont en fait les seuls noyaux isotropes possédant cette propriété (Kannappan et Sahoo, 1992).
- De plus, le lissage par une gaussienne 1-D peut être approximé par un filtre récursif, qui est une technique de filtrage rapide. Une de ses propriétés les plus intéressantes est que le temps d'exécution de ce filtre est indépendant de l'écart type de la gaussienne (Deriche, 1992).

4.3.3 Calcul des dérivées des mesures locales par convolution

Les dérivées des critères EQLA et CCL par rapport à T s'expriment également en fonction de statistiques locales, et sont donc calculables par la même méthode. Nous présentons en annexe la méthode utilisée pour aboutir aux résultats présentés au tableau 4.2

Nous utiliserons également une version simplifiée de ces dérivées, où les convolutions finales sont oubliées afin d'accélérer l'algorithme. Ces dérivées simplifiées sont reportées dans le tableau 4.3.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial EQLA}{\partial T[\mathbf{x}]} &= 2.\nabla J(T[\mathbf{x}]) \left[J \circ T[x] - I[\mathbf{x}].G * \frac{< I,J \circ T >_{\mathbf{p}}}{\sigma^2_{\mathbf{p}}(I)} + G * \left(\frac{< I,J \circ T >_{\mathbf{p}}}{\sigma^2_{\mathbf{p}}(I)} . \overline{J \circ T}_{\mathbf{p}} \right) \right] \\
\frac{\partial CCL}{\partial T[\mathbf{x}]} &= \Bigg[I[\mathbf{x}].G * \frac{1}{\sigma_{\mathbf{p}}(I).\sigma_{\mathbf{p}}(J \circ T)}[\mathbf{x}] - J \circ T[\mathbf{x}].G * \frac{< I,J \circ T >_{\mathbf{p}}}{\sigma_{\mathbf{p}}(I).\sigma^3_{\mathbf{p}}(J \circ T)}[\mathbf{x}] \\
&\quad + G * \left(\frac{< I,J \circ T >_{\mathbf{p}} \overline{J \circ T}_{\mathbf{p}}}{\sigma_{\mathbf{p}}(I).\sigma^3_{\mathbf{p}}(J \circ T)} - \frac{\overline{I}_{\mathbf{p}}}{\sigma_{\mathbf{p}}(I).\sigma_{\mathbf{p}}(J \circ T)} \right) [\mathbf{x}] \Bigg] \nabla J(T[\mathbf{x}])
\end{aligned}
$$

TAB. 4.2 – *Dérivées de deux mesures de similarité locale.*

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial EQLA}{\partial T[\mathbf{x}]} &\approx 2.\nabla J(T[\mathbf{x}]) \left[(J \circ T[x] - \overline{J \circ T}_{\mathbf{p}}) - I[\mathbf{x}].G * \frac{< I,J \circ T >_{\mathbf{p}}}{\sigma^2_{\mathbf{p}}(I)} (I[\mathbf{x}] - \overline{I}_{\mathbf{p}}) \right] \\
\frac{\partial CCL}{\partial T[\mathbf{x}]} &\approx \frac{\nabla J(T[\mathbf{x}])}{\sigma_{\mathbf{x}}(I).\sigma_{\mathbf{x}}(J \circ T)} \left[\left(I[\mathbf{x}] - \overline{I}_{\mathbf{x}}\right) - \left(J \circ T[\mathbf{x}] - \overline{J \circ T}_{\mathbf{x}}\right) \frac{< I,J \circ T >_{\mathbf{x}}}{\sigma^2_{\mathbf{x}}(J \circ T)}[\mathbf{x}] \right]
\end{aligned}
$$

TAB. 4.3 – *Dérivées simplifiées : les convolutions finales ont été supprimées.*

Une justification des dérivées simplifiées

La simplification des dérivées peut être expliquée autrement que par un simple soucis d'économie de calcul, telle que cela avait été présenté initialement dans notre article (Cachier et Pennec, 2000).

Étudions par exemple le cas de l'EQLA. Notons $C(T,a,b) = \int G_{\mathbf{p}}.(a.I + b - J \circ T)^2$. Dans notre première formulation, a et b sont des variables auxiliaires qui n'apparaissent pas comme paramètres de l'énergie locale $E_{\mathbf{p}}$:

$$E_{\mathbf{p}}(T) = C(T,a(T),b(T))$$

où $a(T)$ et $b(T)$ sont les coefficients optimaux minimisant l'écart quadratique. La dérivée de ce critère implique les dérivées de C par rapport à ses trois variables, et aboutit à la forme complexe des dérivées.

Si les coefficients du modèle affine a et b ne sont plus considérés comme des variables auxiliaires, mais comme des variables à part entière indépendantes de T, alors le problème de minimisation par rapport à T revient à un problème simple d'écart quadratique entre J et I corrigée affinement. Étant donné les formules de $a(T)$ et $b(T)$, le gradient de cette énergie est exactement ce gradient simplifié. Utiliser cette méthode revient donc à une minimisation alternée : minimiser C par rapport à a et b pour trouver le modèle, puis minimiser par rapport à T.

Ainsi, ces simplifications ne sont pas incohérentes, mais proviennent d'une formulation différente des énergies et de leur minimisation. Cela explique en partie les très bons résultats obtenus avec ces gradients.

4.3.4 Problèmes de précision numérique

Dans les formules que nous avons utilisées pour calculer les statistiques locales, des problèmes numériques peuvent survenir et ruiner certaines égalités mathématiques. Considérons l'égalité suivante pour la variance locale :

$$\overline{(I - \overline{I}_{\mathbf{p}})^2}_{\mathbf{p}} = \overline{I^2}_{\mathbf{p}} - \overline{I}^2_{\mathbf{p}}$$

Le terme de gauche est une somme de petits nombres. Le terme de droite, lui, soustrait deux grands nombres ; un algorithme basé sur cette seconde formule peut perdre plusieurs bits de précision par rapport à la première.

Nous avons quantifié cette perte de précision sur l'image 4.4 où la variance locale a été calculée avec le membre de gauche (méthode 1, servant de référence) et le membre de droite (méthode 2, que l'on utilise dans notre algorithme de recalage). Nous avons utilisé un codage des nombres réels sur 4 octets, et nous avons préalablement décalés les intensités de l'image pour qu'elle ait une moyenne nulle, afin de minimiser les erreurs de précision (technique utilisée dans notre algorithme de recalage). Les erreurs de la seconde méthode par rapport à la première sont de $0.14\% \pm 0.83\%$ en moyenne, et ont une médiane de 0.00033%. Cela signifie que nous avons une très bonne précision à peu près partout dans l'image, sauf pour une faible proportion de pixels. Ces erreurs se trouvent au bord de l'image (figure 4.4), et sont dûs aux méfaits conjugués des effets de bords du filtre de convolution et de la faible variance de l'image en ces régions. Elles sont principalement de l'ordre du pourcent, mais atteignent jusqu'à 40% aux pixels des coins.

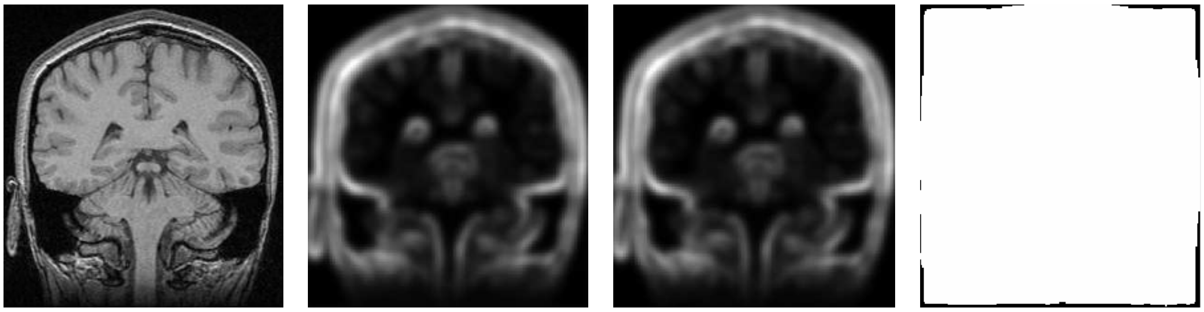


FIG. 4.4 – *De gauche à droite : l'image, la variance locale calculée avec la méthode 1, la variance locale calculée avec la méthode 2, et les pixels (en noir) où l'erreur de la seconde méthode par rapport à la première dépasse 1%. Ces erreurs sont localisées sur les bords de l'image.*

Dans nos expériences, ces erreurs de précision numérique n'ont jamais eu une incidence significative sur les résultats ; cependant, nous devons être conscient qu'elles peuvent potentiellement induire des distorsions dans les déformations retrouvées aux bords de l'image.

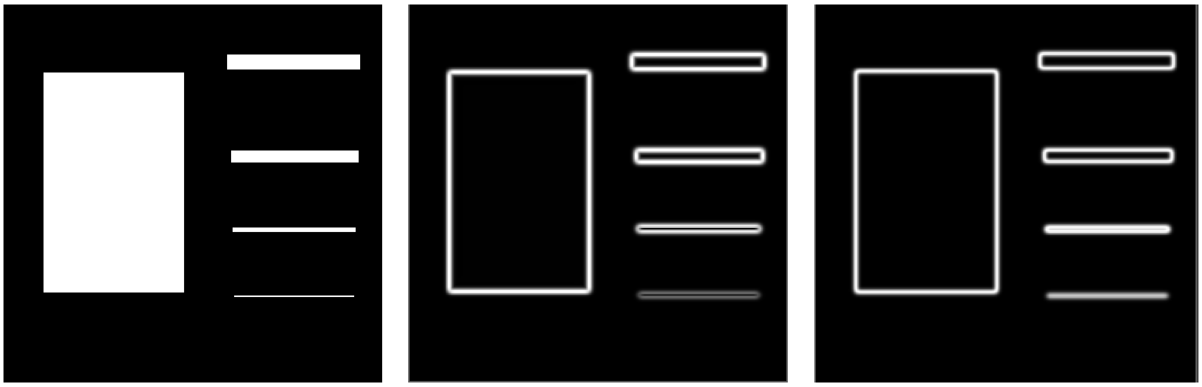
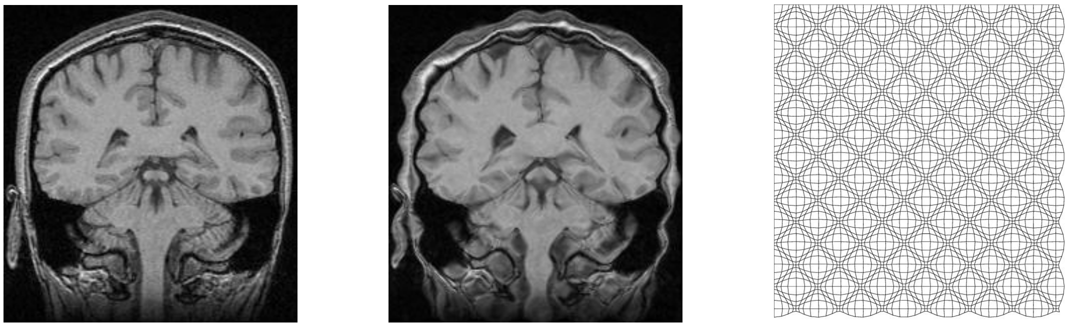


FIG. 4.5 – *De gauche à droite : une image, l'amplitude de son gradient, et sa variance locale. Contrairement au gradient, la variance locale ne s'annule pas sur une forme filiforme : c'est donc un bon "feature detector", comme la congruence de phase (Kovesi, 1999), mais à un coût similaire à celui du gradient.*

4.4 Expériences

4.4.1 Expérience synthétique bidimensionnelle

Dans cette première expérience, nous avons pris une IRM de taille 211×228. Nous l'avons déformé avec une transformation sinusoïdale, puis nous avons ajouté un bruit blanc gaussien ($\sigma = 6$), indépendamment à l'image déformée et non déformée.



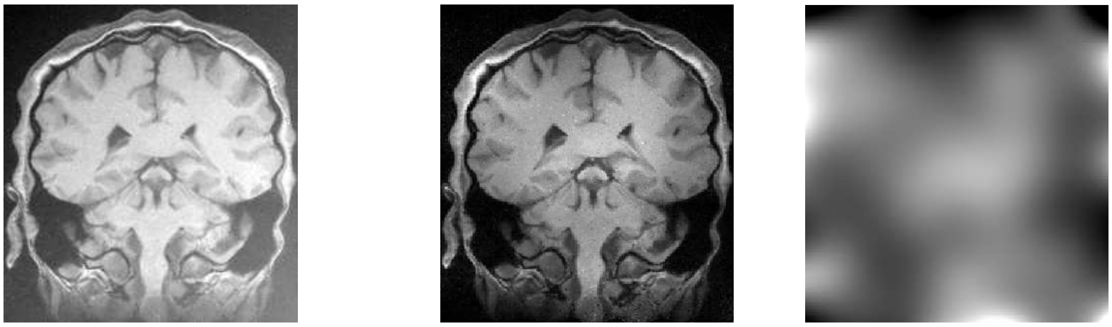
(a) IRM 1 (b) IRM 2 (c) T^*

FIG. 4.6 – *De gauche à droite : l'image non déformée, l'image déformée, et la transformation.*

A partir de l'image déformée, nous avons créé deux images biaisées. Pour la première (image 4.7(a)), nous avons ajouté un biais linéaire, allant de 0 au coin en haut à gauche, à 130 au coin en bas à droite. Pour la seconde image, nous avons utilisé une instance d'un champ aléatoire gaussien, dont nous avons pris l'exponentielle afin que les valeurs restent positives (image 4.7(c)). Nous avons ensuite multiplié cette image à l'image originale pour obtenir l'image 4.7(b).

Nous avons recalé les trois couples d'images suivants :

- l'image non déformée 4.6(a) avec l'image déformée sans biais 4.6(b) ;
- l'image 4.6(a) avec l'image déformée présentant un biais additif 4.7(a) ;
- l'image 4.6(a) avec l'image déformée présentant un biais multiplicatif 4.7(b).



(a) IRM 3 (b) IRM 4 (c) Biais multiplicatif

FIG. 4.7 – *De gauche à droite : l'image présentant le biais additif linéaire, l'image présentant le biais multiplicatif aléatoire, et le champ de biais multiplicatif (saturé entre 0.5 et 1.5).*

Nous avons recalé ces trois couples d'images avec `MAMAN` (chapitre 2) en utilisant quatre mesures de similarité différentes :

- L'écart quadratique (EQ) entre les images ;
- Le coefficient de corrélation local (CCL) ;
- L'écart quadratique au modèle local affine (EQLA) ;
- L'écart quadratique au modèle relationnel affine global polynomial de degré 1, 3 et 7 (resp. EQA1, EQA3 et EQA7) ;

Le but de cette expérience est multiple. Nous voulons comparer :

- les performances de ces nouvelles mesures de similarité par rapport à l'EQ sur les images non biaisées, afin d'évaluer la perte de précision que nous apporte ces degrés de liberté supplémentaires ;
- les performances de ces mesures de similarité en présence de biais additif ou multiplicatif par rapport au cas sans biais, afin d'évaluer leur robustesse par rapport aux biais ;
- dans le cas des mesures utilisant un modèle global polynomial, nous voulons comparer le cas où le biais est presque parfaitement modélisé par un polynôme (biais additif linéaire, qui présente néanmoins quelques zones de saturation à 255), au cas où le biais n'est pas un polynôme (biais multiplicatif aléatoire gaussien).

Optimisation

Pour minimiser la mesure de similarité, nous avons testé deux stratégies de descente de gradient. La première est une adaptation du schéma de Gauss-Newton, que nous allons détailler. La seconde est une recherche linéaire classique, à laquelle est comparée Gauss-Newton.

Gauss-Newton L'algorithme de Gauss-Newton est utilisée pour la minimisation de problèmes quadratiques non linéaires, du type $\mathbf{z}(\mathbf{x})^T.\mathbf{z}(\mathbf{x}) = \sum_i (z_i(\mathbf{x}))^2$, en approximant le hessien de la fonction au premier ordre (Dennis et Schnabel, 1983). L'équation d'évolution s'écrit :

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{x}_t - (J(\mathbf{x}_t)^T J(\mathbf{x}_t) + \lambda.Id)^{-1} J(\mathbf{x}_t)^T \mathbf{z}(\mathbf{x}_t)$$

où $J = (\partial z_i / \partial x_j)$ est la matrice Jacobienne de $\mathbf{z}$. Dans le cas du recalage de deux images I et J avec l'EQ, cette méthode revient à ajouter à chaque itération le vecteur suivant à l'estimation du déplacement :

$$\mathbf{u}[\mathbf{p}] = \frac{(I[\mathbf{p}] - J \circ T[\mathbf{p}])}{\|\nabla J \circ T[\mathbf{p}]\|^2 + \lambda} \nabla J \circ T[\mathbf{p}]$$

Nous pouvons reformuler cette dernière équation en fonction de l'énergie de similarité :

$$\mathbf{u}[\mathbf{p}] = -\frac{2E[\mathbf{p}]}{\|\nabla E[\mathbf{p}]\|^2 + 4\lambda E[\mathbf{p}]} \nabla E[\mathbf{p}] \tag{4.6}$$

où $E[\mathbf{p}] = (I[\mathbf{p}] - J \circ T[\mathbf{p}])^2$ est notre mesure de similarité locale, et $\nabla E[\mathbf{p}] = 2(J \circ T[\mathbf{p}] - I[\mathbf{p}]) \nabla J \circ T[\mathbf{p}]$ sa dérivée partielle par rapport à $T[\mathbf{p}]$. Pour étendre le schéma de Gauss-Newton à une mesure de similarité n'étant pas une mesure quadratique non linéaire, comme le CCL, nous utilisons la formule (4.6) en remplaçant E par notre mesure de similarité locale.

Pour les mesures locales (CCL et EQLA), nous avons également testé les dérivées simplifiées des critères du tableau 4.3 ; le suffixe "-S" est alors ajouté au nom du critère. Même si le schéma de Gauss-Newton a été développé pour des problème de moindres carrés non linéaires, nous verrons que cette adaptation marche également très bien pour le CCL.

Recherche linéaire Nous avons également implémenté une recherche linéaire à laquelle comparer notre adaptation de Gauss-Newton. La recherche linéaire est faite le long de la direction de descente donnée par (4.6), ce qui peut être vu comme un préconditionnement du gradient — les gradients sont en effet très mal conditionnés sans cette renormalisation.

Résultats

Pour chaque recalage effectué, nous mesurons l'écart moyen (EM) entre la transformation synthétique T^* et la transformation retrouvée par `MAMAN`, et reporté cette valeur dans le tableau 4.4

$$EM = \frac{1}{\#I} \sum_{\mathbf{p} \in I} \|T[\mathbf{p}] - T^*[\mathbf{p}]\|$$

où $\#I$ est le nombre de pixels dans l'image I. Nous avons également reporté l'écart moyen à l'intérieur du sujet (EMI) pour avoir une idée plus juste de la précision de l'algorithme, puisqu'on ne peut pas exiger de l'algorithme de retrouver la transformation sur le fond de l'image.

		Sans Biais		**Biais Add.**		**Biais Mul.**	
Critère	**Min.**	**EM**	**EMI**	**EM**	**EMI**	**EM**	**EMI**
Initial		2,04	2,04	2,04	2,04	2,04	2,04
EQ	Gauss-Newton	1,25	0,89	***	***	***	***
CCL	Gauss-Newton	1,27	0,89	1,33	0,91	1,32	0,94
CCL-S	Gauss-Newton	1,27	0,90	1,38	0,94	1,30	0,93
EQLA	Gauss-Newton	1,38	0,97	1,56	1,01	1,45	1,04
EQLA-S	Gauss-Newton	1,33	0,93	1,55	1,01	1,42	1,03
EQA1	Gauss-Newton	1,41	0,98	1,39	0,96	***	***
EQA3	Gauss-Newton	1,42	0,98	1,40	0,96	***	***
EQA7	Gauss-Newton	1,56	1,06	1,51	1,05	1,66	1,17
CCL	Rech. Lin.	1,43	1,04	1,46	1,06	1,44	1,06

TAB. 4.4 – *Résumé des résultats obtenus avec les expériences synthétiques. Les étoiles (***) indiquent un échec de l'algorithme.*

De ces résultats, nous pouvons tirer les conclusions suivantes :

- Les mesures locales (CCL, EQLA) et, dans une moindre mesure, les mesures globales (EQAn) ont des performances assez proches de l'EQ sur le couple d'images non biaisées, ce qui est très satisfaisant.
- Les performances des mesures locales (CCL, EQLA) sont quasiment inchangées en présence de biais. En revanche, celles des mesures globales dépendent énormément de la correspondance entre le modèle polynomial et le biais : avec le biais linéaire, les mesures donnent des résultats satisfaisant dès le degré 1. Avec le biais aléatoire, il faut monter jusqu'au degré 7 pour avoir des résultats corrects.
- Les gradients simplifiés donnent des résultats équivalents aux gradients non simplifiés.
- La précision du recalage se dégrade lorsque l'on augmente le degré du polynôme des EQLn. La généralité de ces mesures se fait donc au prix de la précision.
- La recherche linéaire semble donner des résultats moins bons que Gauss-Newton sur le critère du CCL.

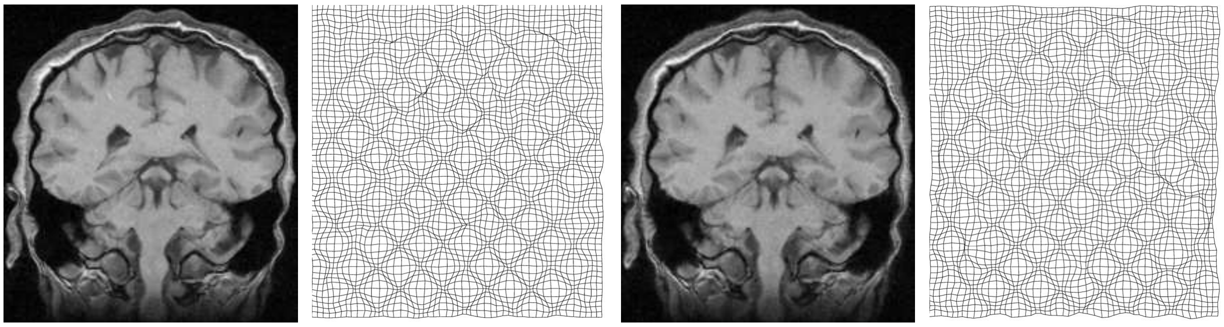


Fig. 4.8 – *Résultats de recalage trouvés par* `MAMAN` *sur le couple d'image présentant un biais additif : les images doivent être comparée à l'image cible 4.7(a), et les transformations à la transformation synthétique 4.6(c).* ***A gauche*** *: résultats trouvés avec le CCL.* ***A droite*** *: résultats trouvés avec l'EQLA. Les deux critères recalent fort bien les images. L'EQLA semble avoir plus de difficulté que le CCL lorsque les variations d'intensités sont faibles.*

Le grand vainqueur de ces expériences est le coefficient de corrélation local, et plus généralement les mesures locales, par rapport aux modèles globaux paramétriques. Sur notre exemple, il faut monter jusqu'au degré 7 pour obtenir des résultats corrects avec le biais aléatoire, ce qui est déjà énorme (72 coefficients polynomiaux et 2070 moments à calculer en 2D, 240 coefficients polynomiaux et 22020 moments à calculer en 3D). Les modèles globaux semblent donc dépendre assez sensiblement de la qualité de leur modélisation. Peut-être qu'un modèle relationnel non paramétrique, similaire à ce qu'utilisent (Sled, 1998; Mangin, 2000) pour corriger le biais, permettrait d'avoir de meilleures performances que ces modèles polynomiaux. Cependant les performances de la corrélation locale sont déjà quasi optimales, car très proches de ce qui est obtenu avec l'EQ sur le couple d'images non biaisées.

Il est assez délicat de comprendre pourquoi le CCL s'en sort un peu mieux que l'EQLA, puisque ces mesures reposent sur des hypothèses communes. Nous avions remarqué p. 96 que les différences entre ces mesures sont d'une part la normalisation, et d'autre part le caractère moins contraint de l'EQLA. Sur cet exemple de recalage monomodal, il est probable que ces deux facteurs jouent en défaveur de l'EQLA ; cependant, en regardant la transformation figure 4.8, il semble que ce soit la normalisation qui soit la cause principale.

La robustesse des mesures locales par rapport à la taille de la fenêtre est relativement grande, tant que la fenêtre est choisie suffisamment large (écart type de la gaussienne supérieur a trois). La qualité du recalage reste sensiblement la même lorsque la fenêtre augmente de taille, bien qu'elle ait tendance à se détériorer légèrement, ce qui est surprenant dans le cas des images non biaisées. Cela est peut-être du aux effets de bord des filtres de convolutions (figure 4.9).

Des erreurs de recalage 0.8 pixels en moyenne peuvent paraître importantes en comparaison à ce que l'on peut obtenir en recalage rigide. Remarquons donc que ces erreurs de recalage sont dues principalement à la difficulté de retrouver le mouvement dans des zones homogènes, ainsi qu'à la composante du mouvement orthogonal au gradient de l'image. Ces composantes du mouvement ne peuvent être retrouvées que par extrapolation du mouvement des points voisins. Les erreurs de cette extrapolation augmentent naturellement avec le nombre de degrés de liberté de la transformation (figure 4.10).

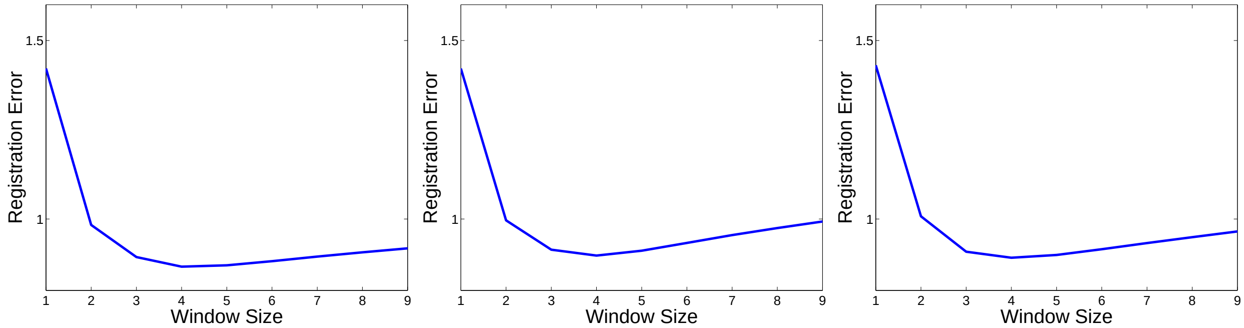


FIG. 4.9 – *De gauche à droite : Tracé de l'erreur moyenne de recalage à l'intérieur de l'anatomie (EMI) en fonction de la taille de la fenêtre (en pixels) pour* `MAMAN` *utilisant le CCL, respectivement pour le couple d'images non biaisées, pour le biais additif linéaire, et pour le biais multiplicatif gaussien. Des fenêtres trop petites ne permettent pas d'estimer correctement le lien entre les images. L'optimum est atteint pour une fenêtre gaussienne de 4 pixels. Au delà de 3 pixels, l'EMI reste relativement stable.*

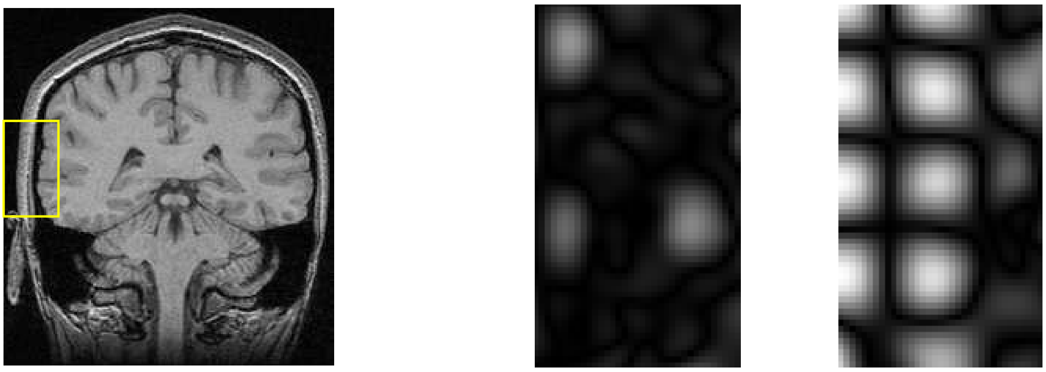


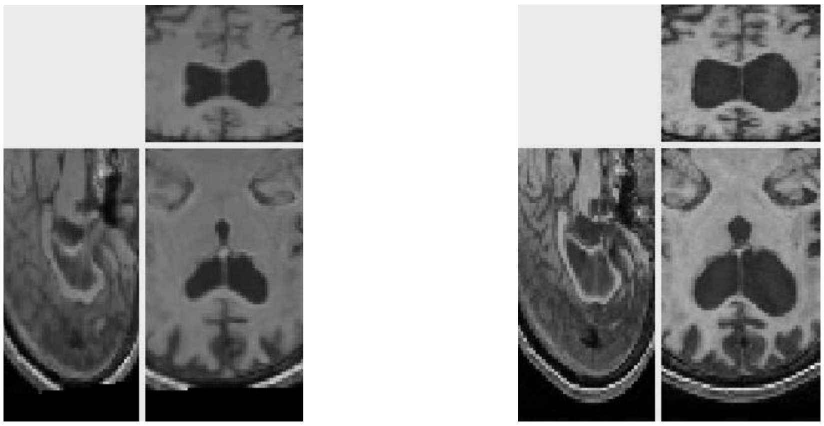
FIG. 4.10 – *Erreurs commises sur le champ de déplacements estime dans la région délimitée en jaune dans l'image de gauche.* ***Image du milieu*** *: erreurs pour la composante horizontale du champ, qui s'avère être le long du gradient dans cet endroit précis de l'image. Les erreurs sont donc faibles et de l'ordre de 0,1 pixel.* ***Image de droite*** *: erreurs pour la composante verticale, orthogonale au gradient. Cette composante n'est quasiment pas retrouvée. Les maxima locaux sont compris entre 2,6 et 3 pixels (l'amplitude du champ original est de 3 pixels). L'erreur orthogonale au gradient est la principale source d'erreur du recalage.*

4.4.2 Expérience réelle tridimensionnelle sur des IRM T1

Dans cette expérience, nous avons recalé deux IRM T1 $52 \times 89 \times 45$ centrées sur les ventricules d'un patient dont le cerveau est comprimé par un excédent de liquide céphalo-rachidien. Nous pouvons observer sur ce couple d'image un grossissement dramatique des ventricules entre la première IRM 4.11(a) et la seconde 4.11(b) prise un an plus tard. Ces deux images présentent un biais relatif, mais aussi un changement de contraste non linéaire.

Les images originales ont été recalées rigidement avec l'algorithme robuste de (Ourselin et al., 1999) préalablement à l'expérience. Le haut du crâne du patient était hors du champ de vue dans l'une de ces images, ce qui explique pourquoi une partie du crâne est occultée dans l'image 4.11(a) après recalage rigide.

Nous avons utilisé `MAMAN` et le CCL-S pour recaler ces images. La taille de la fenêtre gaussienne est de 4 pixels, et la force de la régularisation a été prise à 1,8. Les résultats sont présentés à la



(a) IRM 3D 1 (b) IRM 3D 2

Fig. 4.11 – *Deux IRM du cerveau d'un patient recalées rigidement présentant un biais relatif ainsi qu'une augmentation du volume occupée par le liquide céphalo-rachidien.*

figure 4.12 ; ils ont été obtenus en 103 secondes sur un Pentium II 450MHz. Les structures sont bien recalées, et les déformations sont localisées près des ventricules ainsi que près de l'occultation, notre algorithme ne traitant pas spécifiquement ce genre de problème. Les résultats sont identiques en utilisant le CCL non simplifié, mais l'algorithme prend 127 secondes.

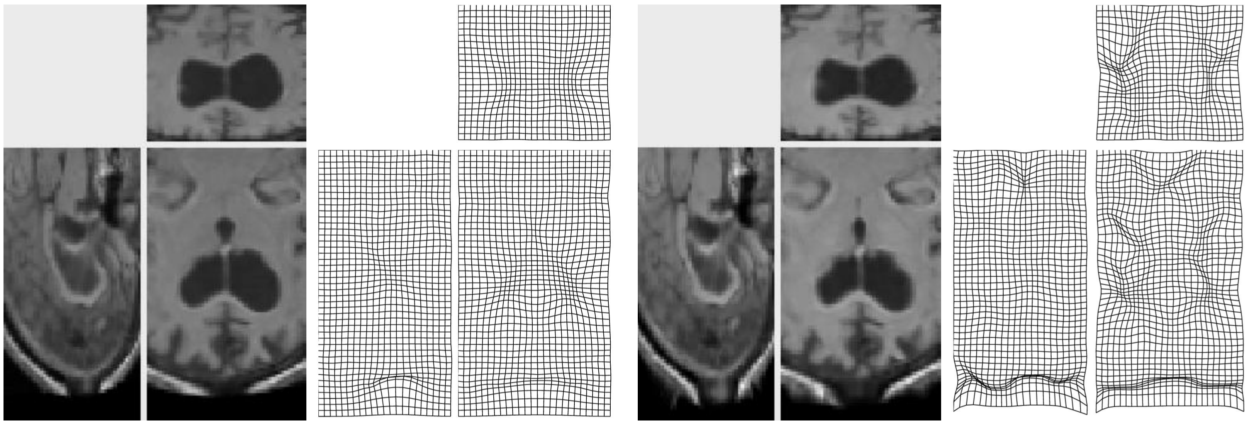


Fig. 4.12 – *Résultat du recalage, (images de gauche) en utilisant le CCL-S et (images de droite) en utilisant l'EQ après correction linéaire du biais. En utilisant le CCL-S, le cerveau est globalement bien recalé ; seule l'occultation de la partie supérieure du crâne, due au recalage rigide, pose problème. Le mouvement retrouvé est lisse, et les plus fortes déformations se situent à l'intérieur des ventricules, et également à l'endroit de l'occultation. En utilisant l'EQ, le recalage échoue ; mais c'est moins en regardant l'image déformée que la transformation estimée, qui présente des déformations aberrantes, que l'on se rend compte de l'échec.*

Un fait remarquable est qu'une isovaleur du jacobien de la transformation estimée segmente presque parfaitement les ventricules (figure 4.13). Le coefficient de dilatation retrouvé est le même pour les petites comme pour les grosses structures. Ce résultat tend à prouver que les techniques de segmentation par isovaleur du jacobien mises en œuvre par exemple par D. Rey (Rey et al., 1999) marchent également sur des objets non ellipsoïdaux.

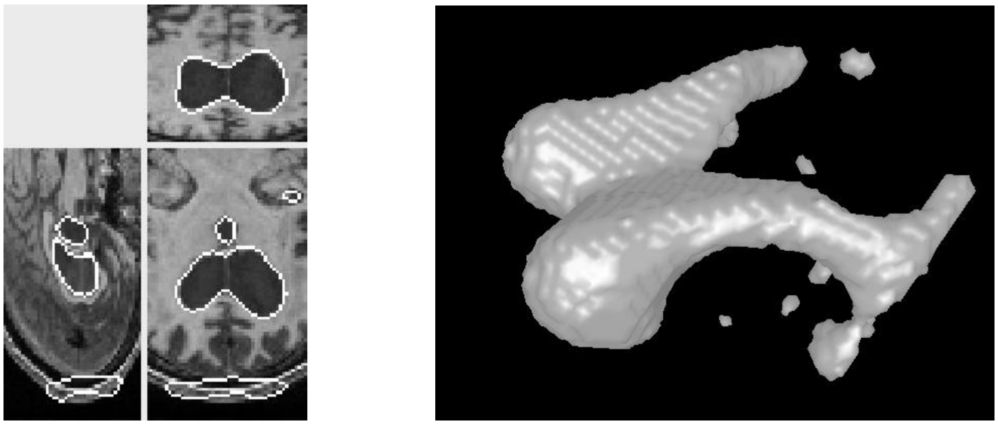


FIG. 4.13 – *Une isovaleur du jacobien de la transformation estimée avec le CCL segmente les structures en évolution.*

Nous avons également recalé ces images en utilisant l'écart quadratique comme mesure de similarité, après avoir aligné les histogrammes des deux images par la formule $I' = (I - \overline{I}_{\mathbf{p}}) * \sigma(J)/\sigma(I) + \overline{J}_{\mathbf{p}}$ afin de corriger le biais linéaire relatif entre elles. Le recalage tourne en 64 secondes. Comme cela est montré figure 4.12, les résultats sont mauvais : la transformation estimée présente des déformations aberrantes à des endroits n'ayant aucune raison de se déformer. En fait, la correction uniforme du biais ne marche pas ici, car l'histogramme des images est grandement affecté par le grossissement des ventricules. Ainsi la correction des intensités sous-estime légèrement les intensités dans l'une des images (la matière blanche a une valeur moyenne de 100 dans la première et de 120 dans la seconde). Cela suffit à fourvoyer l'écart quadratique.

4.4.3 Expérience réelle tridimensionnelle multimodale IRM T1/T2

Cette expérience est tirée du projet européen MAPAWAMO[1]. L'un des problèmes techniques soulevés par ce projet est le recalage d'IRM anatomiques (IRMa) avec des IRM fonctionnelles (IRMf), ces dernières étant corrompues par un biais spatial déformant leur système de coordonnées par rapport aux IRMa.

Pour corriger ce biais, des images IRM T1 supplémentaires prises en échoplanaires sont également acquises. Ces IRM sont supposées être corrompues par le même biais spatial que les IRM fonctionnelles ; cependant, leur définition (pixels de $1 \times 1 \times 1mm^3$) est bien supérieure à celle des séquences d'IRMf (pixels de $3 \times 3 \times 3mm^3$). La transformation de ces IRM sur les IRMa, qui devrait être plus précis, pourra ensuite être appliquée aux IRMf.

Les deux images à recaler, figure 4.14, sont toutes les deux de taille $81 \times 81 \times 81$. Elles ont été préalablement recalées affinement grâce à l'algorithme de (Roche et al., 2000a). Nous avons affaire à un recalage que nous sommes tenté de qualifier de « faiblement multimodal », présentant des biais non stationnaires assez importants. La déformation semble se présenter sous la forme d'un léger écrasement des structures localisées au sommet du crâne.

Nous avons lancé `PASHA` en utilisant comme critère de similarité l'EQLA ; en effet, comme nous l'avons argumenté section 4.3.1.1, l'EQLA se prête mieux au recalage multimodal que le CCL. L'écart type de la fenêtre est de 4 pixels ; la force de régularisation a été fixée a 5, ce qui est assez élevé, et correspond bien au type de déformation recherché : très globale et seulement légèrement

1. MAPAWAMO : Mapping visual cortical regions in awake, behaving monkey using functional MRI. `http://www-sop.inria.fr/epidaure/Collaborations/MAPAWAMO/mapawamo.html`

non affine. Le recalage a pris 7 min 48 s sur un Pentium III à 935MHz.

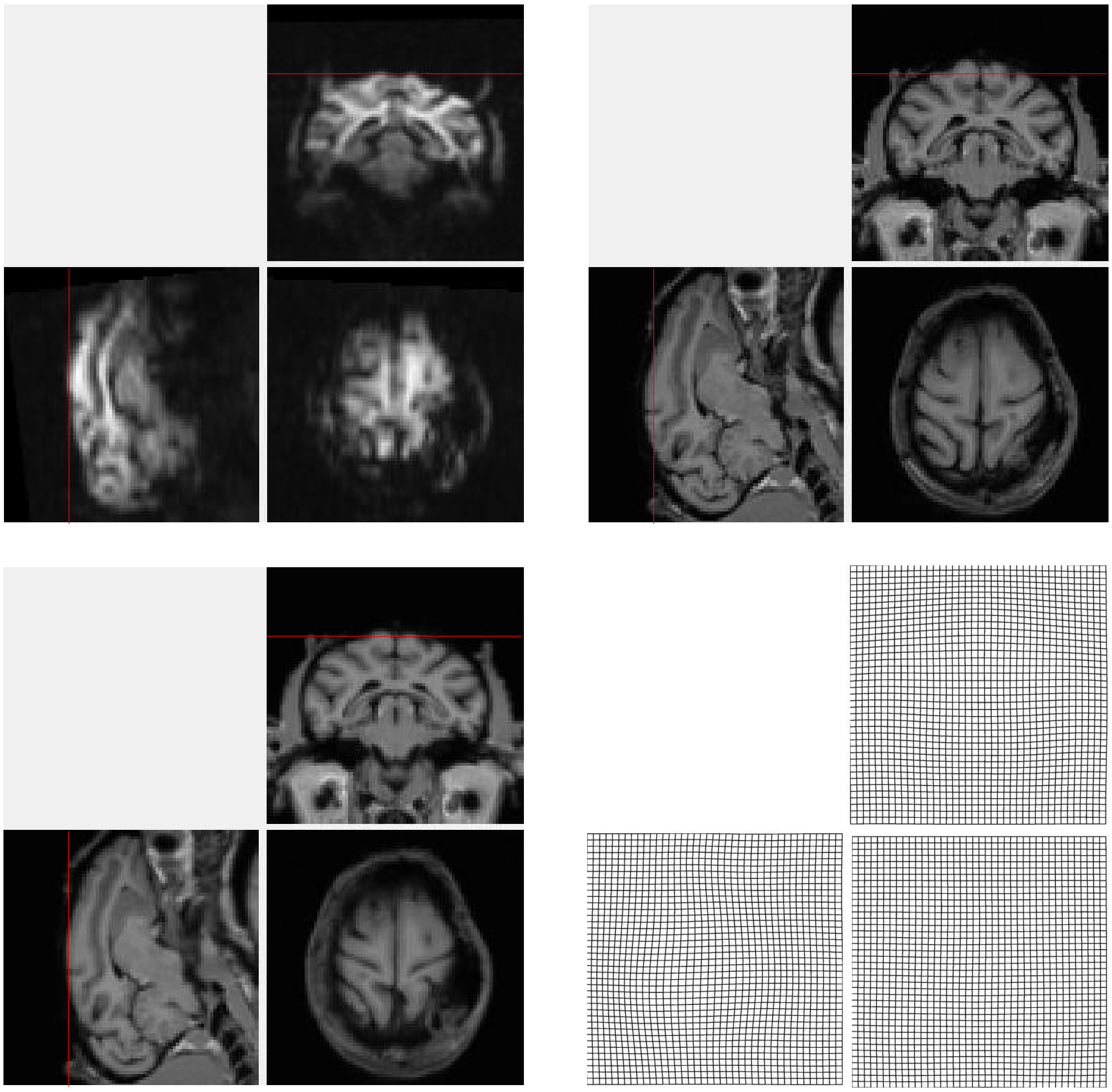


FIG. 4.14 – ***En haut***, *les deux images à recaler : une IRM acquise en échoplanaire et une IRMa. A cause des distorsions d'acquisitions, certaines structures ne se correspondent pas même après recalage affine, notamment celles au sommet du crâne.* ***En bas***, *résultat du recalage par* ***PASHA*** *en utilisant l'EQLA et une contrainte de régularité élevée. Les structures des deux images sont mises en correspondance, tandis que la transformation reste très lisse, globale, et faiblement non rigide.*

Le résultat est présenté figure 4.14. Après recalage, on constate que les structures situés au somment du crâne du singe ont été tassées afin de correspondre à celles de l'autre image. Grâce à la contrainte de régularité élevée, cette déformation est réalisée par une transformation extrêmement globale et lisse.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons exploré quelques pistes permettant de s'échapper de la contrainte de conservation de l'intensité et d'introduire de la non-stationnarité dans nos mesures de similarité.

La première consiste à modéliser explicitement la non-stationnarité *via* l'utilisation de polynômes. La seconde ne modélise pas la non-stationnarité mais compare localement les images, pour des tailles de fenêtre à l'intérieur desquelles les hypothèses de stationnarité sont raisonnables.

D'une manière générale, les mesures de similarité globale semblent assez sensibles à l'adéquation entre leur modèle et le biais réel. La performance de ces algorithmes dépend donc de la complexité du biais présent dans les images. Les mesures de similarité locale ne présentent pas ces inconvénients, et se comportent de manière assez constante pour des natures de biais différentes. De plus, ces degrés de liberté supplémentaires apportés à la mesure de similarité ne dégradent pas la précision du recalage, notamment en utilisant le coefficient de corrélation local (CCL).

Dans la lignée des travaux de (Weese et al., 1999), nous avons montré qu'il est même possible de s'attaquer au recalage multimodal avec les mesures locales. Notre opinion, et notre expérience, reste cependant que de tels recalages sont possibles qu'avec des transformations assez contraintes. Le recalage multimodal fortement non rigide reste un problème très compliqué, que ce soit d'ailleurs avec des mesures locales ou avec des mesures multimodales classiques comme l'information mutuelle ou le rapport de corrélation.

4.A Établissement de la formule (4.5)

Partons de la définition (4.4) :

$$E_{\mathbf{p}}(I,J \circ T) = \min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int G_{\mathbf{p}}.(a.I + b - J \circ T)^2 = \min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} C(a,b)$$

Dérivons l'intégrale $C(a,b)$ par rapport à a et b :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}.\frac{\partial C}{\partial a} &= a.\int G_{\mathbf{p}}.I^2 + b\int G_{\mathbf{p}}I - \int G_{\mathbf{p}}.IJ \circ T \\
\frac{1}{2}.\frac{\partial C}{\partial b} &= a.\int G_{\mathbf{p}}.I + b - \int G_{\mathbf{p}}.J \circ T
\end{aligned}$$

L'annulation de la deuxième dérivée partielle donne

$$b = \overline{J \circ T}_{\mathbf{p}} - a.\overline{I}_{\mathbf{p}}$$

En reportant dans la première, on trouve

$$a = \frac{< I,J \circ T >_p}{\sigma^2_{\mathbf{p}}(I)}$$

En reportant les formules précédentes pour b puis pour a dans l'expression de C, puis en développant le carré sous l'intégrale, nous obtenons la formule voulue :

$$\begin{aligned}
E_{\mathbf{p}}(I,J \circ T) &= \int G_{\mathbf{p}}.\left[\frac{< I,J \circ T >_p}{\sigma^2_{\mathbf{p}}(I)}.(I - \overline{I}_{\mathbf{p}}) + (J \circ T - \overline{J \circ T}_{\mathbf{p}})\right]^2 \\
&= \left(\frac{< I,J \circ T >_p}{\sigma^2_{\mathbf{p}}(I)}\right)^2.\sigma^2_{\mathbf{p}}(I) + \sigma^2_{\mathbf{p}}(J \circ T) - 2.\frac{< I,J \circ T >_p}{\sigma^2_{\mathbf{p}}(I)}. < I,J \circ T >_{\mathbf{p}} \\
&= \sigma^2_{\mathbf{p}}(J \circ T) - \frac{< I,J \circ T >^2_{\mathbf{p}}}{\sigma^2_{\mathbf{p}}(I)}
\end{aligned}$$

4.B Dérivation des mesures locales

La dérivation de la moyenne locale est facile :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{J \circ T}_{\mathbf{p}}}{\partial T[\mathbf{x}]} &= \frac{\partial}{\partial T[\mathbf{x}]}\left(\int_{\mathbf{q}} G_{\mathbf{p}}[\mathbf{q}]J \circ T[\mathbf{q}]\right) \\
&= G_{\mathbf{p}}[\mathbf{x}]\nabla J \circ T[\mathbf{x}]
\end{aligned}$$

Appliquons cette formule à la variance locale :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma^2_{\mathbf{p}}(J \circ T)}{\partial T[\mathbf{x}]} &= \frac{\partial}{\partial T[\mathbf{x}]}\left(\overline{J \circ T^2}_{\mathbf{p}} - \overline{J \circ T}^2_{\mathbf{p}}\right) \\
&= 2G_{\mathbf{p}}[\mathbf{x}]J \circ T[\mathbf{x}].\nabla J \circ T[\mathbf{x}] - 2\overline{J \circ T}_{\mathbf{p}}.\nabla J \circ T[\mathbf{x}] \\
&= 2G_{\mathbf{p}}[\mathbf{x}]\nabla J \circ T[\mathbf{x}].(J \circ T[\mathbf{x}] - \overline{J \circ T}_{\mathbf{p}})
\end{aligned}$$

et à la corrélation locale :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial < I,J \circ T >_{\mathbf{p}})}{\partial T[\mathbf{x}]} &= \frac{\partial}{\partial T[\mathbf{x}]}\left(\overline{I.J \circ T}_{\mathbf{p}} - \overline{I}_{\mathbf{p}}.\overline{J \circ T}_{\mathbf{p}}\right) \\
&= G_{\mathbf{p}}[\mathbf{x}].I[\mathbf{x}].\nabla J \circ T[\mathbf{x}] - \overline{I}_{\mathbf{p}}.G_{\mathbf{p}}[\mathbf{x}]\nabla J \circ T[\mathbf{x}] \\
&= G_{\mathbf{p}}[\mathbf{x}]\nabla J \circ T[\mathbf{x}].(I[\mathbf{x}] - \overline{I}_{\mathbf{p}})
\end{aligned}$$

Nous avons ainsi tous les éléments en main pour dériver les mesures plus complexes.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}.\frac{\partial E_{\mathbf{p}}}{\partial T[\mathbf{x}]} &= \frac{1}{2}.\frac{\partial}{\partial T[\mathbf{x}]}\left(\sigma^2_{\mathbf{p}}(J \circ T) - \frac{< I,J \circ T >^2_{\mathbf{p}}}{\sigma^2_{\mathbf{p}}(I)}\right) \\
&= G_{\mathbf{p}}[\mathbf{x}]\nabla J \circ T[\mathbf{x}].(J \circ T[\mathbf{x}] - \overline{J \circ T}_{\mathbf{p}}) - \frac{< I,J \circ T >_{\mathbf{p}}}{\sigma^2_{\mathbf{p}}(I)}.G_{\mathbf{p}}[\mathbf{x}]\nabla J \circ T[\mathbf{x}].(I[\mathbf{x}] - \overline{I}_{\mathbf{p}}) \\
&= G_{\mathbf{p}}[\mathbf{x}]\nabla J \circ T[\mathbf{x}].\left[(J \circ T[\mathbf{x}] - \overline{J \circ T}_{\mathbf{p}}) - \frac{< I,J \circ T >_{\mathbf{p}}}{\sigma^2_{\mathbf{p}}(I)}(I[\mathbf{x}] - \overline{I}_{\mathbf{p}})\right]
\end{aligned}$$

Finalement, et puisque $G_{\mathbf{p}}[\mathbf{x}] = G_{\mathbf{x}}[\mathbf{p}]$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}.\frac{\partial EQLA}{\partial T[\mathbf{x}]} &= \frac{1}{2}.\frac{\partial}{\partial T[\mathbf{x}]}\int_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{p}} \\
&= \nabla J \circ T[\mathbf{x}]\left[J \circ T[x] - I[\mathbf{x}].G * \frac{< I,J \circ T >_{\mathbf{p}}}{\sigma^2_{\mathbf{p}}(I)} + G * \left(\frac{< I,J \circ T >_{\mathbf{p}}}{\sigma^2_{\mathbf{p}}(I)}.\overline{J \circ T}_{\mathbf{p}}\right)\right]
\end{aligned}$$

Chapitre 5

Énergies, filtres et splines isotropes

LE PROFESSEUR
Bon. Arithmétisons donc un peu.

L'ÉLÈVE
Oui, très volontiers, Monsieur.

LE PROFESSEUR
Cela ne vous ennuierait pas de me dire...

L'ÉLÈVE
Du tout, Monsieur, allez-y.

LE PROFESSEUR
Combien font un et un ?

L'ÉLÈVE
Un et un font deux.

LE PROFESSEUR, *émerveillé par le savoir de l'élève.*
Oh, mais c'est très bien. Vous me paraissez très avancée dans vos études. Vous aurez facilement votre doctorat total, Mademoiselle.

Ionesco, *La leçon*, 1950.

Le but de ce chapitre est de proposer de nouvelles techniques de régularisation et de lissage spécifiques aux champs de vecteurs denses ou épars. Bien que la finalité de ce chapitre soit l'application au recalage P&S, sa portée est plus générale, puisqu'il porte véritablement sur les énergies de régularisation vectorielle, indépendamment de leur application.

La plupart des énergies de régularisation vectorielle utilisées en recalage iconique ou géométrique sont en fait des énergies scalaires portant indépendamment sur chacune des coordonnées de la transformation. La seule exception fréquente est l'énergie de l'élasticité linéaire, qui autorise des effets croisés entre les composantes du champ de déplacements. Or, les effets croisés sont absolument indispensables pour rendre compte de déformations réalistes là où le déplacement est extrapolé — que ce soit en recalage iconique ou géométrique.

Dans ce chapitre, nous proposons de trouver toutes les formes quadratiques différentielles isotropes portant sur un champ de vecteurs en utilisant un théorème déjà connu sur les tenseurs isotropes, et nous donnons les résultats dans le cas des différentielles d'ordres 1 et 2. L'approximation quadratique induite par ces énergies donne naissance à une nouvelle classe de filtres vectoriels, que nous appliquons numériquement dans le domaine de Fourier. Nous proposons également une famille de filtres isotropes séparables qui généralise le lissage gaussien aux champs de vecteurs, et qui permet un lissage isotrope rapide sans utiliser de transformée de Fourier, en utilisant des filtres récursifs dans le domaine réel.

Nous étudions également les splines associées à ces énergies dans le contexte de l'interpolation ou de l'approximation du mouvement de points épars. Ces splines sont une généralisation aux vecteurs des splines laplaciennes scalaires, comme les splines des plaques minces.

Nous proposons enfin de réunir les problèmes d'approximations dense et éparse. La solution explicite à ce problème s'avère être un mélange de lissage et de splines. Cette formulation permet d'introduire de manière élégante des contraintes géométriques dans des algorithmes de recalage non rigide iconiques, et sera utilisée dans notre chapitre 8 pour recaler des cerveaux de sujets différents.

5.1 Introduction

This chapter focuses on smoothness energies of vectors fields based on their partial derivatives, such as the linear elastic or thin-plate energies.

In intensity-based non-rigid registration, the similarity energy alone is not sufficient to obtain a good estimate of the underlying transformation between two images, because it does not ensure any spatial coherence between the motion of two close points. The estimate of the motion has to be regularized, even if occasional discontinuities may be allowed in the deformation field (Hellier et al., 1999; Alvarez et al., 2000). Competitive algorithms (Cachier et Ayache, 2001a) ensure this smoothness using a regularization energy that is minimized together with the similarity energy.

On one hand, many similarity measures have been studied. Let us just mention the recently introduced mutual information (Collignon et al., 1995; Wells et al., 1996), normalized mutual information (Studholme et al., 1999) and correlation ratio (Roche et al., 1998). Also, they have been compared in the case of rigid registration in many articles (Studholme et al., 1995; Roche et al., 1998; Nikou et al., 1999; Weese et al., 1999; Holden et al., 2000).

On the other hand, regularization energies of vector fields have been less focused on, and comparisons are quite rare. The only commonly used vectorial regularization used in non-rigid registration enabling cross-effects between the components of the vector field is the linear elastic energy (Miller et al., 1993; Gee et al., 1995b; Ferrant et al., 1999). The other standard energies, such as the thin-plate (or bending) energy (Rueckert et al., 1999; Amini et al., 1999), are in fact regularization of scalar fields, applied independently on each component of the vector field.

In this chapter, we propose to study truly vectorial regularization energies, and more particularly differential quadratic forms (DQF). DQF are very often used as is for regularization (e.g., linear elasticity, thin plate energy, Gaussian filtering), but it is worth noting that even complex regularization energies are generally based on the same small set of DQF. The elastic or thin-plate DQF can be symmetrized (Cachier et Pennec, 2000), rewritten in an anisotropic way (Alvarez et al., 2000), inserted in a Mumford-Shah formulation (Tsai et al., 2000), non-uniformly weighted (Terzopoulos, 1986) or rewritten with M-estimators (Hellier et al., 1999), to obtain discontinuities — but all these energies starts from the same classical set of DQF.

This set of suitable DQF is restricted, because they should remain invariant by rotation and symmetry; in other words, they should be isotropic. In this chapter, we aim at finding the elements of this set, and the convolution filter and spline associated to these energies.

In section 5.2, we propose a technique to find all possible isotropic differential quadratic forms (IDQF) of vector fields, and apply it to IDQF of order 1 and 2.

In section 5.3, we deduce vector convolution filters from the previous IDQF. Contrary to conventional scalar filters which are applied independently on each component of the vector field, these vector filters allow cross-effects between its components, yielding more realistic motion.

In section 5.4, we deduce the splines associated with these IDQF, which are used for landmark point based registration. Again, contrary to conventional scalar splines (or radial basis functions) that are applied independently to each component, these vectorial splines allow cross-effects between the components; also, they are no more radial.

Finally, we merge dense and sparse vector approximation problems into the same energy, yielding a solution that is a linear combination of convolution and splines. This last formulation is very useful to introduce landmark point constraints in an intensity-based registration algorithm.

5.2 Isotropic differential quadratic forms

The goal of this section is to find all differential quadratic forms remaining invariant by rotation and symmetry. We show that a general theorem on isotropic tensors gives an explicit set of generators of isotropic DQF. Because DQF are tensors with specific symmetries, this set can be reduced, which is done in the case of isotropic DQF of order 1 and 2.

5.2.1 Some mathematical definitions

We note $\mathcal{M}(d)$ the group of linear functions of $\mathbb{R}^d$ in itself, and $O(d) \in \mathcal{M}(d)$ the orthogonal group composed of orthogonal linear functions R, such that $R^T.R = R.R^T = \mathrm{Id}_d$. Also, to avoid long mathematical expressions, we use in the following a (simplified version of)[1] Einstein summation convention, for which every index repeated twice in a product is implicitly summed all over its range. For example, if $\partial_i f, i \in \{x,y\}$ are the partial derivatives of a two-dimensional function f, then using Einstein convention,

$$\partial_i f \partial_i f \triangleq \sum_{i\in\{x,y\}} \partial_i f \partial_i f = (\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2$$

Définition 1 (Tensor) *A tensor T of order $n \geq 1$ in a space of dimension $d \geq 1$ is represented by d^n numbers, noted $T_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, $i_j \in [\![1;d]\!]$, $\forall j \in [\![1;n]\!]$, which transform under the action of $A =$*

1. Here, we do not need to distinguish between covariant and contravariant coordinates.

$(a_{ij}) \in \mathcal{M}(d)$ in the following way: if $A \star T$ is the resulting tensor, then

$$A \star T_{i_1 \dots i_n} = a_{i_1 j_1} \dots a_{i_n j_n} T_{j_1 \dots j_n}$$

We note $\mathcal{T}(n,d)$ the set of these tensors.

Définition 2 (Differential Tensor) *The partial derivatives $\partial_{i_1 \dots i_n} f_{i_{n+1}}$ of a vector field $\mathbf{f}$ of dimension d form a tensor of $\mathcal{T}(n+1,d)$ called the n-th order differential tensor of $\mathbf{f}$.*

Définition 3 (Quadratic forms of tensors) *We note $\mathcal{Q}(n,d)$ the set of quadratic form of tensors $T \in \mathcal{T}(n,d)$, which can be represented by d^{2n} numbers $q_{i_1 \dots i_n j_1 \dots j_n}$, $(i_k,j_k) \in [\![1;d]\!]^2$, $\forall k \in [\![1;n]\!]$, so that*

$$q(T) = q_{i_1 \dots i_n j_1 \dots j_n} T_{i_1 \dots i_n} T_{j_1 \dots j_n}$$

with $q_{i_1 \dots i_n j_1 \dots j_n} = q_{j_1 \dots j_n i_1 \dots i_n}$.

Propriété 1 *If $q \in \mathcal{Q}(n,d)$, $T \in \mathcal{T}(n,d)$ and $A \in \mathcal{M}(d)$,*

$$A^T \star q(T) \triangleq q(A \star T) = q_{i_1 \dots i_n j_1 \dots j_n} a_{i_1 k_1} \dots a_{i_n k_n} a_{j_1 l_1} \dots a_{j_n l_n} a_{i_1 \dots i_n j_1 \dots j_n} T_{k_1 \dots k_n} T_{l_1 \dots l_n}$$

This last formula shows that the $q_{i_1 \dots i_n j_1 \dots j_n}$ form a tensor of order $2n$.

5.2.2 Isotropy

Définition 4 (Isotropic tensors) *A tensor $T \in \mathcal{T}(n,d)$ is isotropic if it is invariant by an orthogonal change of the tensor, i.e. if for any orthogonal function $R = (R_{ij}) \in O(d)$,*

$$R \star T = T$$

or, using prop. 1,

$$T_{i_1 \dots i_n} = r_{i_1 j_1} \dots r_{i_n j_n} T_{j_1 \dots j_n} \quad \forall (i_1 \dots i_n) \in [\![1;d]\!]^n$$

Définition 5 *Isotropic quadratic forms of the n-th order differential tensor of a vector field are called isotropic differential quadratic forms (IDQF). Its coefficients form an isotropic tensor of order $2n+2$.*

Théorème 3 *An isotropic tensor of order n, n even, can be written as a linear combination of the $n!/(2^{n/2}(n/2)!)$ products of Kronecker tensors $\delta_{i_r i_s}$. The only isotropic tensor of order n, n odd, is the null tensor.*

The demonstration of this result can be found in (Weyl, 1966; Jeffreys, 1973). This result can be applied to quadratic forms to give us a set of generators of IDQF. In the following we study the case of IDQF of order 1 and 2.

5.2.3 First-order IDQF

According to Theorem 3, an isotropic tensor of order 4 is a linear combination of the three following tensors:

$$\delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} \quad \delta_{i_1 i_3} \delta_{i_2 i_4} \quad \delta_{i_1 i_4} \delta_{i_2 i_3}$$

Therefore, a first-order IDQF q, which can be regarded as a tensor of order 4 (Prop. 1), is a linear combination of the tensors $\partial_i f_i \partial_j f_j$, $\partial_i f_j \partial_i f_j$ and $\partial_i f_j \partial_j f_i$.

For any IDQF q of the first derivative of a vector field $\mathbf{f}$, we can find three coefficients a_1,a_2,a_3 so that

$$q(\mathbf{f}) = a_1.\mathrm{tr}(\nabla\mathbf{f}^T\nabla\mathbf{f}) + a_2.\mathrm{tr}(\nabla\mathbf{f}\nabla\mathbf{f}) + a_3.\mathrm{tr}(\nabla\mathbf{f})^2 \tag{5.1}$$

with

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(\nabla\mathbf{f}^T\nabla\mathbf{f}) &= \partial_i f_j \partial_i f_j \\ \mathrm{tr}(\nabla\mathbf{f}\nabla\mathbf{f}) &= \partial_i f_j \partial_j f_i \\ \mathrm{tr}(\nabla\mathbf{f})^2 &= \partial_i f_i \partial_j f_j \end{aligned} \tag{5.2}$$

5.2.4 Positive first-order IDQF

A quadratic differential regularization energy should always be positive, in order to penalize high values of partial derivatives. Therefore, we should study the conditions on a_1, a_2 and a_3 for which the IDQF remains positive for every vector field $\mathbf{f}$.

To find out if a first-order IDQF is positive, we must find its eigenvalues. If all of them are positive, then the quadratic form is positive.

The linear function $Q : \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n$ associated to q given by Eq. (5.1) is defined by:

$$Q(M) = a_1.M_{i,j}.E^{(i,j)} + a_2.M_{i,j}.E^{(j,i)} + a_3.M_{i,i}.E^{(j,j)}$$

where $E^{(i,j)}$ is the matrix of $\mathcal{M}_n$ whose only non-zero element is $E^{(i,j)}_{i,j} = 1$. It can be verified that the following matrices are eigenmatrices of Q:

Eigenmatrix	Eigenvalue
Id	$a_1 + a_2 + d.a_3$
$E^{(i,j)} + E^{(j,i)}, (i,j) \in [\![1;d]\!]^2, i \neq j$	$a_1 + a_2$
$E^{(i,j)} - E^{(j,i)}, (i,j) \in [\![1;d]\!]^2, i \neq j$	$a_1 - a_2$
$F_i, i \in [\![2;d]\!]$	$a_1 + a_2$

where $F_1 = \mathrm{Id}$ and $(F_1,...,F_d)$ is an orthogonal basis of the space generated by the set $\{E^{(i,i)}, i \in [\![1;d]\!]\}$. Furthermore, all these eigenmatrices are orthogonal, and we have exactly $1 + d(d-1)/2 + d(d-1)/2 + (d-1) = d^2$ of them, so there does not exist any other eigenvalue than the three listed above.

Therefore, a first-order IDQF q is positive if we simultaneously have

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &\geq 0 \\ a_1 - a_2 &\geq 0 \\ a_1 + a_2 + d.a_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

5.2.5 Second-order IDQF

According to Theorem 3, an isotropic tensor of order 6 is a linear combination of products of Kronecker tensors of the form $\delta_{i_r i_s}\delta_{i_t i_u}\delta_{i_v i_w}$. There are 15 such tensors.

However, in the case of second-order IDQF, this set of generators can be reduced. First, it is known that the isotropic tensors given by Theorem 3 are not independent of each other. A minimal, independent set of isotropic tensors that generates all isotropic tensors by linear combination can be found for example in (Smith, 1968). Second, the quadratic forms we are interested in are tensors with specific symmetries, due to the commutation of multiplication and differentiation assumed here: this also reduces the number of functions necessary to generate second-order isotropic quadratic energies.

We can therefore eliminate some of the tensors given by theorem 3, based on the commutation of the multiplication and the differentiation. This is done in the appendix of this chapter, and leads to the following result:

For any second-order IDQF of a vector field $\mathbf{f}$, we can find five coefficients a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 so that

$$q(\mathbf{f}) = a_1.Q_1(\mathbf{f}) + a_2.Q_2(\mathbf{f}) + a_3.Q_3(\mathbf{f}) + a_4.Q_4(\mathbf{f}) + a_5.Q_5(\mathbf{f})$$

with

$$\begin{aligned}
Q_1(\mathbf{f}) &= \partial_{ij} f_k \partial_{ij} f_k \\
Q_2(\mathbf{f}) &= \partial_{ij} f_j \partial_{ik} f_k \\
Q_3(\mathbf{f}) &= \partial_{ii} f_j \partial_{kk} f_j \\
Q_4(\mathbf{f}) &= \partial_{ij} f_k \partial_{kj} f_i \\
Q_5(\mathbf{f}) &= \partial_{ii} f_j \partial_{kj} f_k
\end{aligned}$$

5.3 Isotropic convolution filters for vector fields

This section focuses on convolution filters for vector fields. We first start from the problem of quadratic approximation using the IDQF developed in the previous section. The quadratic approximation problem consists in finding a smooth vector field $\mathbf{f}$ as close as possible to a noisy vector field $\mathbf{g}$, by minimizing the quadratic energy

$$E(\mathbf{f}) = \int ||\mathbf{f} - \mathbf{g}||^2 + E_{reg}(\mathbf{f}) \tag{5.3}$$

where $E_{reg}(\mathbf{f})$ is an IDQF. This regularization corresponds precisely to the second step of competitive P&S non-rigid registration algorithms (Cachier et Ayache, 2001a).

To find $\mathbf{f}$, we formally differentiate the approximation energy (5.3), and solve it in the Fourier space. Then, we deduce a vectorial convolution filter which gives the solution of (5.3) when applied to $\mathbf{g}$.

5.3.1 First-order isotropic filters

5.3.1.1 Derivatives of first-order IDQF

The derivatives of the generating elements of first-order IDQF given by (5.2) are reported in the following array.

$$\begin{array}{ccl} \text{Quadratic form} & & \text{Derivative} \\ \partial_i f_j \partial_i f_j & \longrightarrow & -2\Delta \mathbf{f} \\ \partial_i f_j \partial_j f_i & \longrightarrow & -2\nabla\nabla^T \mathbf{f} \\ \partial_i f_i \partial_j f_j & \longrightarrow & -2\nabla\nabla^T \mathbf{f} \end{array}$$

Then, the differentiation of the approximation energy $E(\mathbf{f})$ given by (5.3) w.r.t $\mathbf{f}$, when E_{reg} is a first-order IDQF given by (5.1), gives the following differential equation:

$$\alpha\Delta\mathbf{f} + \beta\nabla\nabla^T\mathbf{f} = \mathbf{g} - \mathbf{f} \tag{5.4}$$

with $\alpha = 2a_1$ and $\beta = 2a_2 + 2d.a_3$. This equation (5.4) corresponds to a linear elastic PDE, with external forces $\mathbf{g} - \mathbf{f}$ corresponding to linear springs attracting $\mathbf{f}$ towards $\mathbf{g}$.

The aim of this minimization is regularization, so the quadratic energy should be positive. According to section 5.2.4, we should choose a_1, a_2 and a_3 so that $a_1 + a_2 \geq 0$, $a_1 - a_2 \geq 0$ and $a_1 + a_2 + n.a_3 \geq 0$. Combining these inequalities, we find the following conditions on α and β:

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \geq & 0 \\ \beta & \geq & -\alpha \end{array}$$

5.3.1.2 Number of degrees of freedom of regularization

It appears that two out of the three generating IDQF have the same derivatives. Therefore, if the minimization of these energies uses exclusively their derivatives, there is only two degrees of freedom (parameters α and β) as for the choice of the parameters of the regularization.

This situation is similar to the scalar case. For any order of derivation, there exists several isotropic quadratic regularization energies, but all of them have the same derivatives (Nielsen et al., 1994).

For example, (Brady et Horn, 1983) showed that the squared Laplacian $(\partial_{xx}f + \partial_{yy}f)^2$ and the quadratic variation $\partial_{xx}^2 f + \partial_{xy}^2 f + \partial_{yy}^2 f$ of a two dimensional scalar function f have the same derivatives; however, they do not lead to the same regularization: there exists functions with a squared Laplacian equal to zero, and whose quadratic variation is non zero, such as $f(x,y) = x.y$. Brady highlighted the fact that differences between these energies emerge on their derivatives on the boundary of the domain. Thus, the boundary conditions appear critical to determine the actual number of degrees of freedom of the regularization.

When using Fourier transform, the implicit boundary conditions are periodicity, i.e. we consider that opposite image borders are connected. With these assumptions, there is no other degree of freedom that those given by the derivative of the energy (5.3), i.e. two in the vectorial case.

5.3.1.3 Resolution in the Fourier domain

The linear differential equation (5.4) can be solved in the Fourier space. We have the following equivalence between spatial and Fourier domains:

$$\begin{array}{rcl} \text{Spatial domain} & & \text{Fourier domain} \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}) & \longleftrightarrow & \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{w}) \\ \Delta\mathbf{f}(\mathbf{x}) & \longleftrightarrow & -(\mathbf{w}^T\mathbf{w})\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{w}) \\ (\nabla\nabla^T)\mathbf{f}(\mathbf{x}) & \longleftrightarrow & -(\mathbf{w}\mathbf{w}^T)\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{w}) \end{array}$$

where $\mathbf{x} = (x_1,...,x_d)$ is the canonical representation of the spatial domain, $\mathbf{w} = (w_1,...,w_d)$ is the canonical representation of the Fourier domain, and $\hat{\mathbf{f}}$ is the Fourier transform of $\mathbf{f}$. Equation (5.4) transforms in the Fourier domain as:

$$\left[\left(1 + \alpha(\mathbf{w}^T\mathbf{w})\right)\mathrm{Id} + \beta(\mathbf{w}\mathbf{w}^T)\right]\hat{\mathbf{f}} = \hat{\mathbf{g}}$$

where Id is the identity matrix.

For reasons which will be explained in section 5.3.3.3, we replace the parameters α and β by $\alpha = \lambda$ and $\beta = \lambda\kappa$, so that λ can be identified to a regularization strength and κ to a shear strength:

$$\underbrace{\left[\left(1 + \lambda.(\mathbf{w}^T\mathbf{w})\right)\mathrm{Id} + \lambda\kappa(\mathbf{w}\mathbf{w}^T)\right]}_{M_1}\hat{\mathbf{f}} = \hat{\mathbf{g}}$$

with $\lambda \geq 0$ and $\kappa \geq -1$. To solve this equation, we have to invert the matrix M_1:

$$M_1^{-1} = \frac{1}{(1 + \lambda.\mathbf{w}^T\mathbf{w})(1 + \lambda(1+\kappa).\mathbf{w}^T\mathbf{w})}\left[(1 + \lambda(1+\kappa).\mathbf{w}^T\mathbf{w})\mathrm{Id} - \lambda\kappa.(\mathbf{w}\mathbf{w}^T)\right] \tag{5.5}$$

Now, to fit $\mathbf{f}$ to $\mathbf{g}$ with the approximation energy (5.3), where E_{reg} is a first-order IDQF, we can proceed in three steps:

1. Compute the Fourier transform of $\mathbf{g}$;
2. Multiply this Fourier transform by the matrix function M_1^{-1} given by (5.5);
3. Compute the inverse Fourier transform of this product, which gives $\mathbf{f}$.

5.3.1.4 Impulse response

We now show three examples of first-order isotropic regularization, depending on the sign of the cross-effect parameter κ. Here, the vector field $\mathbf{g}$ to be smoothed is a simple impulse along the horizontal axis, i.e. it is null everywhere except for the point in the middle of the image, which is moved to the right (figure 5.1). The results shown in figure 5.2 can be considered as the impulse response of the filter.

The first filter, figure 5.2(a), does not present any cross-effect ($\kappa = 0$) and corresponds to a membrane model. Without cross effects, horizontal lines stay straight: there is no motion along the vertical axis because the input impulse itself has no vertical component.

The second filter, figure 5.2(b), present cross-effects and corresponds to a standard linear elastic model ($\kappa > 0$). With $\kappa > 0$, the tissue gets closer to an incompressible model and the material is less deformed: this can be interesting for registration purposes, for example if the organs to be registered are known to behave like incompressible materials (e.g. the brain).

The last filter, figure 5.2(c), also has cross-effects ($\kappa < 0$), but its behavior is somewhat counter-intuitive as the impulse tends to inflate the material behind it. Although some rare materials do

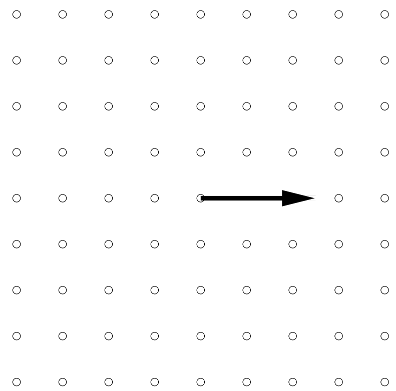
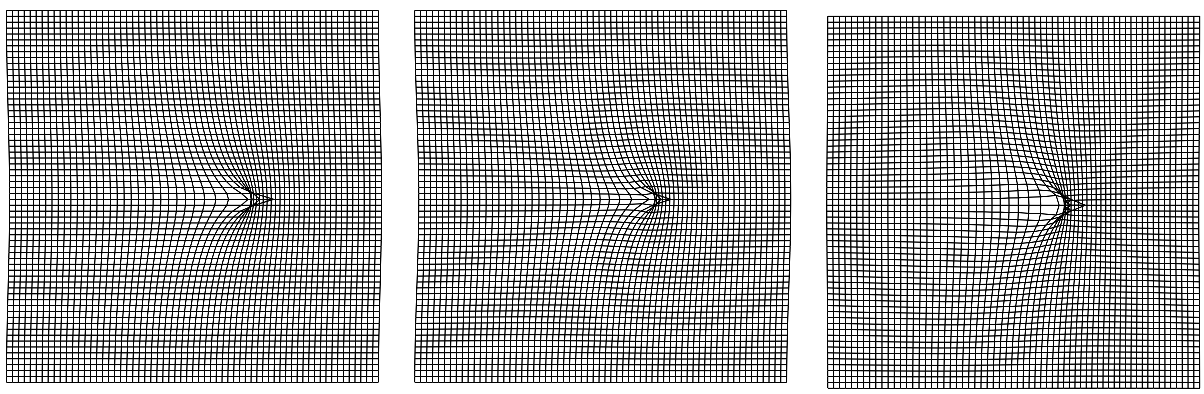


FIG. 5.1 – *In the remaining of this chapter, the impulse response of filters are a convolution of the filters with this vector field, which is null except for the central point which is moved to the right.*



(a) $\lambda = 5$, $\kappa = 0$ (b) $\lambda = 5$, $\kappa = 0.5$ (c) $\lambda = 5$, $\kappa = -0.5$

FIG. 5.2 – *Three examples of impulse response of first-order isotropic filters without and with cross-effects*

have this kind of behavior, e.g. foams with negative Poisson ratio (Lakes, 1987), the choice of a negative κ for registration has probably more to do with a prior knowledge on the motion.

Note that the topology problems in the examples presented here (i.e. the overlap of a part of the material with itself near the center) are due to an arbitrary multiplicative factor used to scale the impulse response for visualization purpose.

For any value of λ or κ, there exists a discontinuity in the derivative of the impulse response, which is responsible for the sharp peak just at the point where the external force applies. In non-rigid registration, and in particular in pair-and-smooth techniques, external forces are dense, and applied at every pixel of the image, therefore such peaks may appear very frequently in the image. This is particularly annoying if the registration result is used in a first-derivative-based analysis, e.g. Jacobian-based detection and segmentation (Rey et al., 1999). Therefore we will extend these vectorial filters to the second order in section 5.3.2

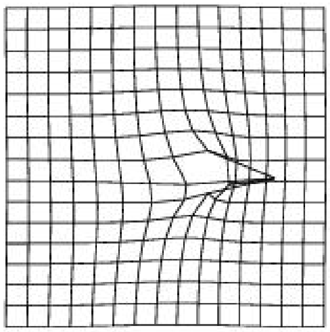


FIG. 5.3 – *Impulse response of a rotation-invariant but non-isotropic filter.*

5.3.1.5 Isotropy vs. rotation invariance

As a remark, let us highlight here that the symmetry invariance is essential, and that rotation invariance alone, which is sufficient in the scalar case (Brady et Horn, 1983; Nielsen et al., 1994), is not sufficient anymore in the vectorial case.

In figure 5.3, we give the impulse response of a first-order rotation invariant but non-isotropic filter. The rotation invariance ensures that if the initial impulse is rotated, then the impulse response is rotated of the same amount. The symmetry invariance would ensure a planar symmetry of the impulse response; without this constraint, the impulse response may bend on a side or another, as if the material would present an internal torsion. These kind of effects are generally not desirable.

5.3.2 Second-order isotropic filters

5.3.2.1 Derivatives of second-order IDQF

We follow the same strategy as for first-order IDQF, and begin by differentiating the basis of second-order IDQF:

Quadratic form		Derivative
$\partial_{ij}\mathbf{f}_k\partial_{ij}\mathbf{f}_k$	$\longrightarrow$	$2\Delta^2\mathbf{f}$
$\partial_{ij}\mathbf{f}_j\partial_{ik}\mathbf{f}_k$	$\longrightarrow$	$2\Delta\nabla\nabla^T\mathbf{f}$
$\partial_{ii}\mathbf{f}_j\partial_{kk}\mathbf{f}_j$	$\longrightarrow$	$2\Delta^2\mathbf{f}$
$\partial_{ij}\mathbf{f}_k\partial_{kj}\mathbf{f}_i$	$\longrightarrow$	$2\Delta\nabla\nabla^T\mathbf{f}$
$\partial_{ii}\mathbf{f}_j\partial_{kj}\mathbf{f}_k$	$\longrightarrow$	$2\Delta\nabla\nabla^T\mathbf{f}$

So the derivative of (5.3), where E_{reg} is a second-order IDQF, is

$$\alpha.\Delta^2\mathbf{f} + \beta.\Delta.\nabla\nabla^T\mathbf{f} = \mathbf{f} - \mathbf{g} \tag{5.6}$$

In section 5.2, we characterized positive first-order IDQF, but not positive second-order IDQF. Indeed, the conditions on coefficients a_1 through a_5 are very difficult to find in the general case. Instead, we will find a simple second-order IDQF whose derivative is the left member of (5.6). Conditions on this IDQF will be enough to ensure a proper regularization behavior and find acceptable ranges for α and β.

The left member of (5.6) is actually (proportional to) the derivative of the second-order IDQF $\alpha.\partial_{ij} f_k \partial_{ij} f_k + \beta.\partial_{ij} f_k \partial_{kj} f_i$. Its related linear function is

$$Q(T_{i,j,k}) = \alpha.T_{i,j,k}.E^{(i,j,k)} + \beta.T_{i,j,k}.E^{(i,j,k)}$$

where $E^{(i,j,k)}$ is the tensor whose only non-zero element is $E^{(i,j,k)}_{i,j,k} = 1$.

The eigentensors and eigenvalues of this linear function are

Eigentensor	Eigenvalue
$E^{(i,j,k)} - E^{(k,j,i)}, \forall (i,j,k) \in [\![1;d]\!]^3, i > k$	$\alpha - \beta$
$E^{(i,j,k)} + E^{(k,j,i)}, \forall (i,j,k) \in [\![1;d]\!]^3, i > k$	$\alpha + \beta$
$E^{(i,j,k)}, \forall (i,j) \in [\![1;d]\!]^2$	$\alpha + \beta$

There are $d^2(d-1)/2 + d^2 + d^2(d-1)/2 = d^3$ such eigenvectors, which are orthogonal, therefore there is no any other eigenvalue.

Thus, the quadratic form is positive if $\alpha + \beta \geq 0$ and $\alpha - \beta \geq 0$, i.e. if $\alpha \geq 0$ and $\beta \geq -\alpha$. There are exactly the same conditions as for the first-order case.

5.3.2.2 Resolution in the Fourier domain

We have the following correspondences between the Spatial Domain and the Fourier Domain:

Spatial domain		Fourier domain
$\mathbf{f}(\mathbf{x})$	$\longleftrightarrow$	$\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{w})$
$\Delta^2 \mathbf{f}(\mathbf{x})$	$\longleftrightarrow$	$(\mathbf{w}^T\mathbf{w})^2 \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{w})$
$\Delta.\nabla\nabla^T \mathbf{f}(\mathbf{x})$	$\longleftrightarrow$	$\mathbf{w}^T\mathbf{w}(\mathbf{w}\mathbf{w}^T)\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{w})$

Thus, in the Fourier domain, the differential equation (5.6) becomes:

$$\underbrace{\left[\left(1+\lambda(\mathbf{w}^T\mathbf{w})^2\right)\mathrm{Id} + \lambda\kappa(\mathbf{w}^T\mathbf{w})(\mathbf{w}\mathbf{w}^T)\right]}_{M_2}\hat{\mathbf{f}} = \hat{\mathbf{g}}$$

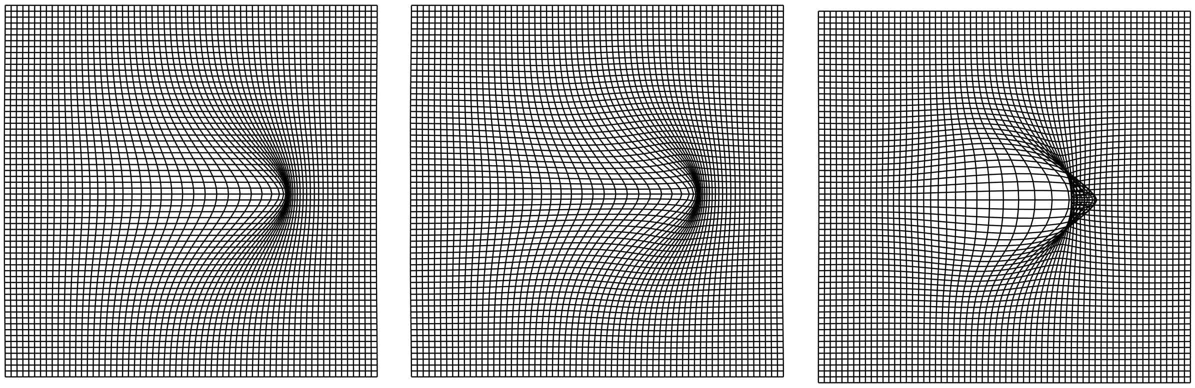
with $\lambda = \alpha \geq 0$ and $\kappa = \beta/\alpha \geq -1$. To solve this equation, we have to invert matrix M_2:

$$M_2^{-1} = \frac{1}{(1+\lambda.(\mathbf{w}^T\mathbf{w})^2)(1+\lambda(1+\kappa).(\mathbf{w}^T\mathbf{w})^2)}\left[(1+\lambda(1+\kappa)(\mathbf{w}^T\mathbf{w})^2)\mathrm{Id} - \lambda\kappa.(\mathbf{w}^T\mathbf{w}).\mathbf{w}\mathbf{w}^T\right]$$

This leads to an implementation identical to the scheme proposed in the first-order case, in section 5.3.1.3.

5.3.2.3 Impulse response

In figure 5.4, we present the impulse response of the second-order filter for three different values of κ, one without any cross-effect ($\kappa = 0$) corresponding to a thin-plate model, and two others with cross-effects. Here again, the material behaves more like a incompressible material with $\kappa > 0$ and thus is less deformed. Using $\kappa < 0$, the material has a non-intuitive behavior, as the impulse response is extrapolated as corresponding to an inflation of the material.



(a) $\lambda = 2,\ \kappa = 0$ (b) $\lambda = 2,\ \kappa = 0.6$ (c) $\lambda = 2,\ \kappa = -0.6$

FIG. 5.4 – *Three examples of impulse response of second-order isotropic filters.*

Topology problems in the case when $\kappa < 0$ are due to the arbitrary multiplicative coefficient used for visualization purpose. This does not mean that choosing $\kappa < 0$ will always gives topological problems.

Note that in the second-order case, impulse responses are smooth and do not have a discontinuity in their first derivative, contrary to the first-order regularization. In the context of non-rigid registration, these filters yield smoother solutions, and are more appropriate for example for Jacobian analysis of the motion.

5.3.3 Generalization

5.3.3.1 Higher-order isotropic filters

Given the results obtained for first and second order isotropic regularization energies, we are tempted to generalize the linear PDE to higher order regularization. Even though we did not characterize all n-th order IDQF, we can set the PDE for the n-th order regularization as:

$$(-1)^n \left[\alpha.\Delta^n \mathbf{f} + \beta.\Delta^{n-1}.\nabla\nabla^T \mathbf{f}\right] = \mathbf{f} - \mathbf{g}$$

which is indeed isotropic, because its left member is proportional to the derivative of the following isotropic quadratic form:

$$E_n(\mathbf{f}) = \alpha.\partial_{i_1\ldots i_n} f_{i_{n+1}} \partial_{i_1\ldots i_n} f_{i_{n+1}} + \beta.\partial_{i_1\ldots i_n} f_{i_{n+1}} \partial_{i_{n+1} i_2 \ldots i_n} f_{i_1} \tag{5.7}$$

The linear function associated to this quadratic form is

$$Q(T) = \alpha.T_{i_1,\ldots i_{n+1}} E^{(i_1,\ldots i_{n+1})} + \beta.T_{i_1,\ldots i_{n+1}}.E^{(i_{n+1}, i_2,\ldots i_n, i_1)}$$

where $E^{(i_1,\ldots i_{n+1})}$ is the tensor whose only non-zero element is $E^{(i_1,\ldots i_{n+1})}_{i_1,\ldots i_{n+1}} = 1$. Its eigentensors and associated eigenvalues are (without Einstein convention):

Eigentensor	Eigenvalue
$E^{(i_1,\dots i_{n+1})} + E^{(i_{n+1},i_2,\dots i_n,i_1)}, \forall (i_1,\dots,i_{n+1}) \in [\![1;d]\!]^{n+1}, i_1 > i_{n+1}$	$\alpha+\beta$
$E^{(i_1,\dots i_{n+1})} - E^{(i_{n+1},i_2,\dots i_n,i_1)}, \forall (i_1,\dots,i_{n+1}) \in [\![1;d]\!]^{n+1}, i_1 > i_{n+1}$	$\alpha-\beta$
$E^{(k,i_2,\dots i_n,k)}, \forall (k,i_2,\dots,i_n) \in [\![1;d]\!]^{n}$	$\alpha-\beta$

We can verify, as in the second-order case, that all these tensors are orthogonal, and that they are d^n. Therefore, there exists no any other eigenvalue, and as for the first and second order regularization, we should choose $\alpha \geq 0$ and $\beta \geq -\alpha$.

We have the following correspondences between the Spatial Domain and the Fourier Domain:

Spatial domain		Fourier domain
$\mathbf{f}(\mathbf{x})$	$\longleftrightarrow$	$\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{w})$
$\Delta^n \mathbf{f}(\mathbf{x})$	$\longleftrightarrow$	$(-1)^n(\mathbf{w}^T\mathbf{w})^n\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{w})$
$\Delta^{n-1}(\nabla\nabla^T)\mathbf{f}(\mathbf{x})$	$\longleftrightarrow$	$(-1)^n(\mathbf{w}^T\mathbf{w})^{n-1}(\mathbf{w}\mathbf{w}^T)\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{w})$

The differential equation becomes (setting $\alpha = \lambda$ and $\beta = \lambda\kappa$):

$$\underbrace{\left[\left(1+\lambda.(\mathbf{w}^T\mathbf{w})^n\right)\mathrm{Id} + \lambda\kappa.(\mathbf{w}^T\mathbf{w})^{n-1}(\mathbf{w}\mathbf{w}^T)\right]}_{M_n}\hat{\mathbf{f}} = \hat{\mathbf{g}}$$

To solve this equation, we have to invert the matrix M_n:

$$M_n^{-1} = \frac{1}{1+\lambda.(\mathbf{w}^T\mathbf{w})^n}\mathrm{Id} - \frac{\lambda\kappa(\mathbf{w}^T\mathbf{w})^{n-1}}{(1+\lambda.(\mathbf{w}^T\mathbf{w})^n)(1+\lambda(1+\kappa).(\mathbf{w}^T\mathbf{w})^n)}\mathbf{w}\mathbf{w}^T \tag{5.8}$$

As previously, the regularization is done by multiplying the Fourier transform of the vector field by the matrix M_n^{-1}.

5.3.3.2 Multi-order filters

A regularization energy may include several (or even all) orders of derivation. We can consider regularization energies that are linear combinations of our previous isotropic energies (5.7)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n.\partial_{i_1\dots i_n} f_{i_{n+1}}\partial_{i_1\dots i_n} f_{i_{n+1}} + \beta_n.\partial_{i_1\dots i_n} f_{i_{n+1}}\partial_{i_{n+1}i_2\dots i_n} f_{i_1} \tag{5.9}$$

The regularization PDE is

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\alpha_n.\Delta^n\mathbf{f} + \beta_n.\Delta^{n-1}.\nabla\nabla^T\mathbf{f}\right] = \mathbf{f}-\mathbf{g}$$

with two scalar $\alpha_n \geq 0$ and $\beta_n \geq -\alpha_n$ to choose per order of derivation. There are two degrees of freedom per order of differentiation, corresponding approximately to its strength and its shear. In the Fourier domain, the previous PDE becomes

$$\underbrace{\left[\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(\mathbf{w}^T\mathbf{w})^n\right)\mathrm{Id} + \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n(\mathbf{w}^T\mathbf{w})^{n-1}(\mathbf{w}\mathbf{w}^T)\right]}_{M}\hat{\mathbf{f}} = \hat{\mathbf{g}}$$

As previously, one should invert matrix M and apply it to the Fourier transform of $\mathbf{g}$ to obtain the solution.

5.3.3.3 A note on the regularization strength

Energies (5.9) are designed for regularization. Therefore, we should be able to control their weight relatively to another energy, typically a fitting distance, *via* a regularization parameter λ. Now, what influence should have λ on each order of differentiation?

In the case of quadratic approximation, choosing λ as a global multiplicative factor:

$$\lambda.E_{reg}(\mathbf{f}) = \lambda.\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n.\partial_{i_1\dots i_n} f_{i_{n+1}} \partial_{i_1\dots i_n} f_{i_{n+1}} + \beta_n.\partial_{i_1\dots i_n} f_{i_{n+1}} \partial_{i_{n+1} i_2 \dots i_n} f_{i_1} \tag{5.10}$$

gives counterintuitive results, because λ changes the shape of the impulse response of (5.10), instead of just rescaling it.

If we want to extract from the parameters α_n and β_n a regularization strength λ that corresponds to a scale factor of the impulse response, we should choose

$$E_{reg}(\mathbf{f},\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \left[\alpha_n.\partial_{i_1\dots i_n} f_{i_{n+1}} \partial_{i_1\dots i_n} f_{i_{n+1}} + \beta_n.\partial_{i_1\dots i_n} f_{i_{n+1}} \partial_{i_{n+1} i_2 \dots i_n} f_{i_1}\right]$$

Therefore, in the general case, it seems better not to write the regularization parameter λ as a multiplicative factor of the energy but rather as a parameter of the regularization energy itself. However, if the regularization energy uses only one order of differentiation, which is quite frequent in non-rigid registration, both approaches are of course equivalent, and λ can be written as a multiplicative coefficient of the energy.

5.3.4 Separable isotropic filters

In this section, we are interested in finding isotropic vectorial filters similar to the previous filters, with the additional constraint that they should be separable, so that they can be applied numerically very efficiently in the real domain, without using Fourier transforms.

5.3.4.1 Definitions

Définition 6 (Isotropic Filters) *A scalar filter $f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ is isotropic if it is invariant by rotations and symmetries, i.e. if*

$$f(R^T\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \forall R \in O(d)$$

A vector filter is isotropic if its kernel $F(\mathbf{x}) = F(x_1,\dots,x_d) : \mathbb{R}^d \to \mathcal{M}_d$ is invariant by rotation and symmetries:

$$R.F(R^T\mathbf{x}).R^T = F(\mathbf{x}) \quad \forall R \in O(d)$$

An isotropic scalar filter f depends only on radial distance: $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}^T\mathbf{x})$. This is not true anymore for isotropic vector filters.

Définition 7 (Separable Filters) *A scalar kernel $f(\mathbf{x}) = f(x_1,\dots,x_d) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ is separable if there exists d functions f_k, $k \in [\![1;d]\!]$, such that:*

$$f(\mathbf{x}) = f_1(x_1).f_2(x_2)\dots f_d(x_d) = \prod_{k=1}^{d} f_k(x_k)$$

A vector filter $F(\mathbf{x}) = F(x_1,...,x_d) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{M}_d$ *is separable is there exists* d^3 *functions* $f_k^{(i,j)}$, $(i,j,k) \in [\![1;d]\!]^3$, *such that*

$$F(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \prod_{k=1}^d f_k^{(1,1)} & \prod_{k=1}^d f_k^{(1,2)} & \cdots & \prod_{k=1}^d f_k^{(1,d)} \\ \prod_{k=1}^d f_k^{(2,1)} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \prod_{k=1}^d f_k^{(d,1)} & \cdots & \cdots & \prod_{k=1}^d f_k^{(d,d)} \end{pmatrix}$$

This property of separability is very interesting from a numerical point of view, because a n-D convolution with a separable filter can be achieved as a sequence of 1-D convolutions, for which a number of fast techniques exists such as recursive filtering.

The choice of separable filters is drastically restricted if we also impose the isotropy property. For scalars, it is known that the only isotropic separable kernels are the family of Gaussians (Kannappan et Sahoo, 1992). However, for the best of our knowledge, there is no similar theorem for vector filters. We propose the following result, easy to verify:

Proposition 1 *The vector filter* $G_{\sigma,\kappa}$ *defined by*

$$G_{\sigma,\kappa}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^d(1+\kappa)}(Id_d + \frac{\kappa}{\sigma^2}.\mathbf{x}.\mathbf{x}^T).e^{-\frac{\mathbf{x}^T\mathbf{x}}{2\sigma^2}} \tag{5.11}$$

is separable and isotropic.

The normalization coefficient $(\sigma\sqrt{2\pi})^d(1+\kappa)$ is chosen so that a constant vector field is unchanged by convolution with $G_{\sigma,\kappa}$. Equivalently, the integral of the diagonal elements of the matrix $G_{\sigma,\kappa}(\mathbf{x})$ should be equal to 1. As previously, the coefficient κ is linked to the degree of shear we expect in the material. Note that when κ is set to zero, the matrix $G_{\sigma,0}$ is diagonal and we obtain a classical Gaussian filtering, independently on each component of the vector field.

There exist separable isotropic filters that are not part of this previous family, as this filter in 2D:

$$\frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^2(1-\kappa)}\begin{pmatrix} 1-\kappa.y^2/\sigma^2 & \kappa.x.y/\sigma^2 \\ \kappa.x.y/\sigma^2 & 1-\kappa.x^2/\sigma^2 \end{pmatrix}.e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

We think that such counter examples are possible only in two dimensions and cannot be generalized in higher dimension. The filters $G_{\sigma,\kappa}$ given by (5.11) are probably the only separable isotropic filters in dimension greater or equal to 3, but this has yet to be proven.

5.3.4.2 Computation with classical Gaussian filters

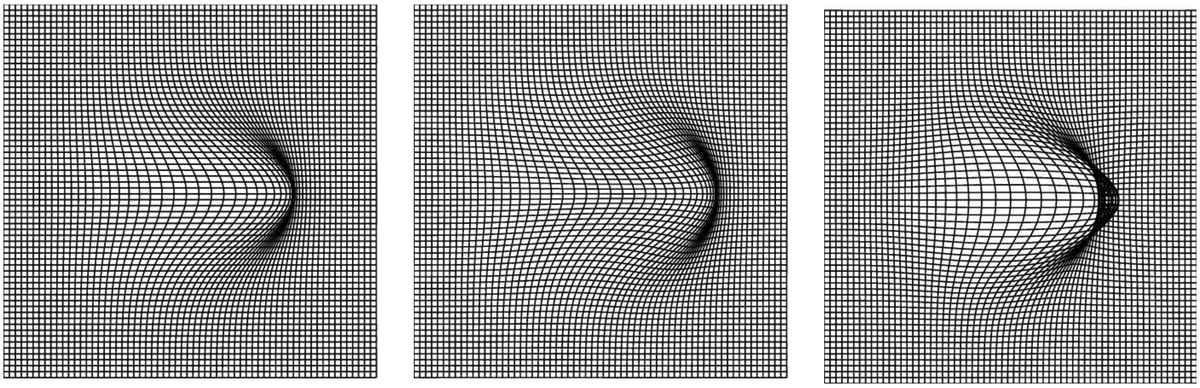
Proposition 2 *If we note* $G_\sigma(\mathbf{x}) = \exp(-\mathbf{x}^T\mathbf{x}/(2\sigma^2))/(\sigma\sqrt{2\pi})^d$ *the normalized, d-dimensional scalar Gaussian kernel, and* $\mathcal{H}G_\sigma$ *the Hessian matrix consisting of its second-order derivatives, the following relation holds:*

$$G_{\sigma,\kappa}(\mathbf{x}) = G_\sigma(\mathbf{x}).Id + \frac{\sigma^2\kappa}{1+\kappa}\mathcal{H}G_\sigma(\mathbf{x})$$

Because $G_\sigma(\mathbf{x})$.Id and $\mathcal{H}G_\sigma(\mathbf{x})$ are also separable, the convolution with $G_{\sigma,\kappa}$ can be computed as a weighted sum of convolutions with a one-dimensional Gaussian, and its first and second derivatives. There exists many efficient techniques to implement these filters. Here, we have chosen Deriche's recursive filters (Deriche, 1992), which have a computation time independent of the size of the Gaussian kernel.

5.3.4.3 Impulse response

Figure 5.11 shows the impulse responses of the separable isotropic filter (5.11) for three different values of parameter κ. With a κ set to zero (figure 5.5(a)), we obtain a classical scalar Gaussian filter which is applied on each component separately. Setting κ to a positive or negative value enables cross effects and yields to the same physical interpretation as for the previous first- and second-order filters.



(a) $\sigma = 8$, $\kappa = 0$ (b) $\sigma = 8$, $\kappa = 1/8$ (c) $\sigma = 8$, $\kappa = -1/8$

FIG. 5.5 – *Impulse responses of different separable isotropic vector filters $G_{\sigma,\kappa}$ (5.11) generalizing the classical scalar Gaussian filtering to vectors.*

5.3.5 An application to image registration

In the experiment reported in figure 5.6, two circles have been moved apart. They have been registered with PASHA (Cachier et Ayache, 2001a), a competitive pair-and-smooth non-rigid registration algorithm, using the separable isotropic filters described in section 5.3.4 for the regularization step. We have run the registration without ($\kappa = 0$) and with cross-effects ($\kappa > 0$).

Without cross-effects, horizontal lines stay horizontal outside the circles. Especially, there is no noticeable vertical deformation between the circles. Choosing $\kappa > 0$ gives a more realistic extrapolation of the motion, as the material between both circles is bending towards the center. Depending on prior knowledge on the material, this latter behavior may be more appropriate.

5.4 Vectorial splines for feature point matching

This section has multiple goals. First, we want to generalize thin-plate splines and other radial-basis functions in the case of vector interpolation, using the isotropic energies and PDEs developed previously. Similarly to the filters obtained in section 5.3, we obtain interpolation kernels with cross-effects that are no more radial and cannot be applied on each component independently. Then, we merge the dense vectorial approximation problem of section 5.3 with the sparse vectorial approximation presented here to obtain an hybrid approximation scheme. This is of high interest for merging intensity and geometrical features in non-rigid registration algorithms (Cachier et al., 2001).

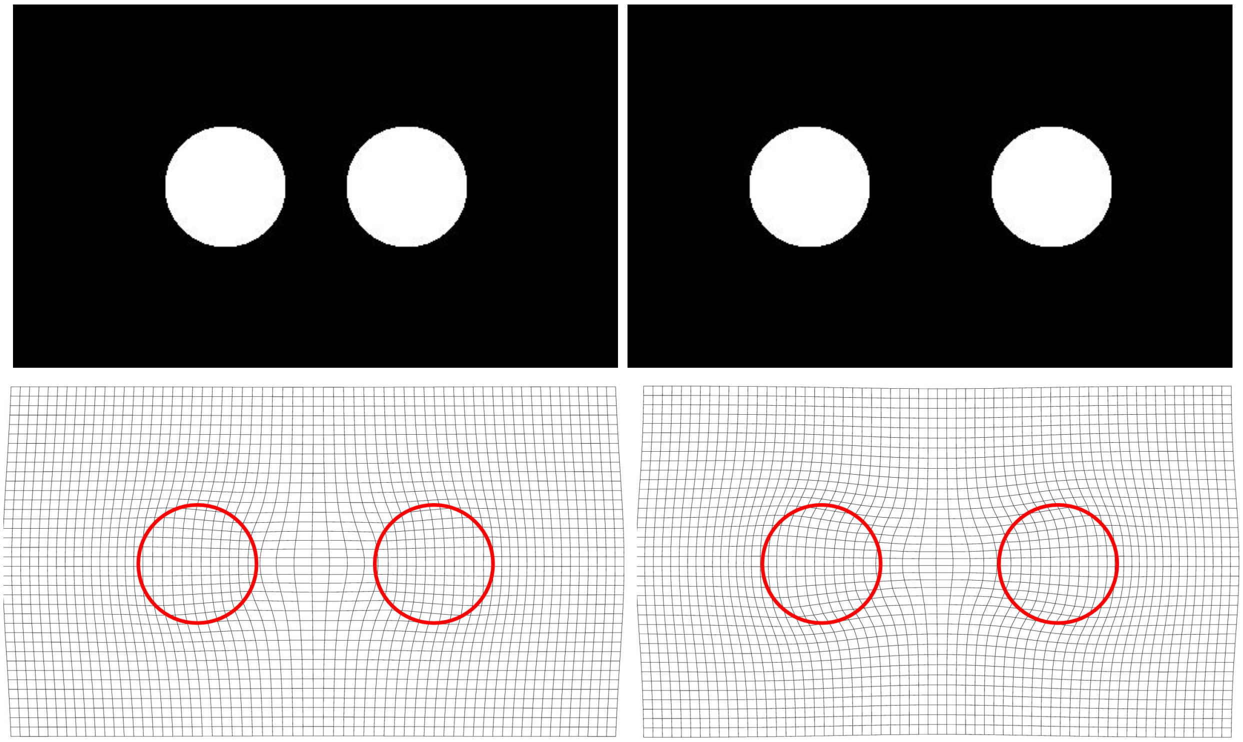


FIG. 5.6 – ***Up:*** *Two circles initially closed to each other are moved far apart.* ***Down:*** *Result of registration, without (left) and with (right) cross-effect filtering. Without cross-effects, horizontal lines stay horizontal outside the circles, and there is no noticeable vertical deformation. With cross-effects, the material between the circles is compressing vertically to compensate the horizontal dilatation.*

5.4.1 Interpolation and approximation of sparse features

5.4.1.1 The scalar case

The scalar interpolation problem can be defined as follows: given a set of p points $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^d$ and p values $f_i \in \mathbb{R}$, find a functional f that minimizes some regularization energy $E_{reg}(f)$ under the constraint that $f(\mathbf{x}_i) = f_i$, $\forall i \in [\![1;p]\!]$. This interpolation problem assumes that there are no error on the measure of the values f_i.

The scalar approximation problem is close to the previous one, but this time the f_i may be corrupted by noise, and thus f is allowed to have at $\mathbf{x}_i$ a value different yet close to the initial guess f_i. The optimal solution f^* to approximate f_i is chosen as the solution of the optimization problem:

$$f^* = \arg\min_f \sum_i (f_i - f(\mathbf{x}_i))^2 + \lambda E_{reg}(f)$$

The approximation problem tends toward an interpolation problem as $\lambda \to 0$ (besides, as discussed in section 5.3.3.3, λ is not necessarily a multiplicative factor of the regularization energy).

5.4.1.2 The vectorial case

Given two sets of points $\mathbf{x}_i$ and $\mathbf{y}_i$, the vector interpolation problem consists in finding a transformation T which minimizes a regularization energy $E_{reg}(T)$ under the constraint that $T(\mathbf{x}_i) = \mathbf{y}_i$.

As for the vectorial approximation problem, it seeks an approximation T^* which is solution of

$$T^* = \arg\min_T \sum_i ||\mathbf{y}_i - T(\mathbf{x}_i)||^2 + \lambda E_{reg}(T)$$

There are more elaborated approximation problems, where for example the isotropic distance $||\mathbf{y}_i - T(\mathbf{x}_i)||^2$ is replaced by an anisotropic distance depending on the index i (Rohr et al., 1999).

5.4.2 Scalar Laplacian splines

When E_{reg} is a quadratic energy, there exists a closed form solution for the interpolation and approximation of scalars (Duchon, 1976). In both cases, the solution has the following form:

$$f(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}) + \sum_i \alpha_i s(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \tag{5.12}$$

where $p(\mathbf{x})$ is a polynomial in the kernel of E_{reg}, i.e. $E_{reg}(p) = 0$, and s is a function, commonly called spline, that depends only on E_{reg} and the dimension of the space where points $\mathbf{x}_i$ and $\mathbf{y}_i$ are located.

When E_{reg} is the n-th order regularization energy $\partial_{i_1 \ldots i_n} f \partial_{i_1 \ldots i_n} f$, the spline s belongs to the family of the Laplacian splines s_n, that are solution of the PDE

$$(-1)^n \Delta^n s_n = \delta$$

or, more generally, $\Delta^n s = \alpha\delta$, where α is an appropriate constant multiplicative factor introduced only to simplify the expression of s; the introduction of this multiplicative factor has no consequence on the solution, which remain the same – the coefficients α_i of (5.12) are simply divided by $(-1)^n \alpha$. This linear PDE can be solved, and there exists closed-form formulas for s (Duchon, 1976). The most famous of these splines is perhaps the second-order Laplacian spline s_2, or thin plate spline, whose equation is $r^2 \ln r$ in 2D and $|r|$ in 3D.

The coefficients α_i as well as the coefficients of the polynomial p are found by solving a set of linear equations, which requires the inversion of a matrix of size $(p+n) \times (p+n)$, where p is the number of points to be interpolated or approximated, and n the number of coefficients in the multivariate polynomial p. We give an example in the case of thin plate spline interpolation and approximation.

Example: Thin Plate Spline Interpolation

The thin plate spline is the Laplacian spline of order 2, related to the bending energy $E_2(\mathbf{f}) = \partial_{ij} f \partial_{ij} f$. The polynomial p in the formula (5.12) is then a polynomial of order 1, i.e. an affine function.

The function f whose values on a set of p points $\mathbf{x}_i \in \mathrm{I\!R}^d$ is f_i and that minimizes the bending energy E_2 is

$$f(\mathbf{x}) = p_0 + (p_1,\ldots,p_d).\mathbf{x} + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i s_2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$$

where the unknowns $\mathbf{a} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_p,p_0,p_1,\ldots,p_d)^T$ are solution of the linear equation

$$\left(\begin{array}{c|c} W & X^T \\ \hline X & 0 \end{array}\right).\mathbf{a} = \left(\begin{array}{c} \mathbf{f} \\ \hline 0 \end{array}\right) \tag{5.13}$$

with W being the $p \times p$ matrix

$$W = (s_2(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)) = \begin{pmatrix} s_2(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1) & s_2(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) & \cdots & s_2(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_p) \\ s_2(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ s_2(\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_1) & \cdots & \cdots & s_2(\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_p) \end{pmatrix}$$

X the $(d+1) \times p$ matrix

$$X = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_p \end{pmatrix}$$

and $\mathbf{f}$ the p-vector

$$\mathbf{f} = (f_1,...,f_p)^T$$

In equation (5.13), the condition $X.(\alpha_1...\alpha_p)^T = 0$ can be seen as a constraint on the coefficients α_i so that the sum $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i s_2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$ remains bounded. Indeed, when $\mathbf{x}$ becomes large,

$$\sum_i \alpha_i ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|| \ln ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|| = ||\mathbf{x}|| \ln ||\mathbf{x}|| \left(\sum_i \alpha_i \right) - \frac{\mathbf{x}^T}{||\mathbf{x}||} \left(\sum_i \alpha_i \mathbf{x}_i \right) + O(1)$$

Therefore, to obtain a bounded solution, we should cancel the two sums in the right member of the previous equation, i.e. set $\sum_i \alpha_i$ and $\sum_i \alpha_i \mathbf{x}_i$ to zero.

When the f_i are noisy, f can be sought to minimize the following approximation energy:

$$E(f) = \sum_i (f_i - f(\mathbf{x}_i))^2 + \lambda E_2(f)$$

The vector of the unknown coefficients $\mathbf{a}$ is then solution of the equation

$$\left(\begin{array}{c|c} W + \lambda.\mathrm{Id} & X^T \\ \hline X & 0 \end{array} \right).\mathbf{a} = \left(\begin{array}{c} \mathbf{f} \\ \hline 0 \end{array} \right)$$

5.4.3 Vectorial Laplacian splines

For vector interpolation and approximation, the most common solution in the field of non-rigid registration consists in interpolating or approximating every component independently, and thus to split the problem of n-dimensional vector fitting into n problems of scalar fitting. Thus, radial basis functions like the thin-plate spline are used for each component independently.

A notable exception is the elastic body spline of (Davis et al., 1997), which is based on linear elasticity. Unfortunately, the exact interpolation kernel of linear elasticity is ill-defined as it tends toward infinity at its center.

For vector interpolation or approximation problems, we propose to generalize the n-th order Laplacian spline by using the isotropic quadratic energies (5.7) of p. 122 (for simplicity, we drop one of the two parameters and keep only a cross-effect parameter κ, since splines are defined up to a global multiplicative coefficient) :

$$E_n(\mathbf{f}) = \partial_{i_1 \ldots i_n} \mathbf{f}_{i_{n+1}} \partial_{i_1 \ldots i_n} \mathbf{f}_{i_{n+1}} + \kappa . \partial_{i_1 i_2 \ldots i_n} \mathbf{f}_{i_{n+1}} \partial_{i_{n+1} i_2 \ldots i_n} \mathbf{f}_{i_1}$$

If we note S_n the matrix solution of

$$(-1)^n \left[\Delta^n S_n + \kappa \Delta^{n-1} \nabla \nabla^T S_n \right] = \delta.\mathrm{Id} \tag{5.14}$$

then the solution $\mathbf{f}$ of the vector interpolation of approximation problem has the following form

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}(\mathbf{x}) + \sum_i S_n(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)\boldsymbol{\alpha}_i \tag{5.15}$$

where $\mathbf{p}$ is a vector polynomial such that $E(\mathbf{p}) = 0$, and $\boldsymbol{\alpha}_i \in \mathbb{R}^d$ are appropriate coefficients, found by solving a system of linear equations.

Closed-form formulas

As in the scalar case, it is possible to get closed-form formulas for S_n. Getting into the Fourier domain, the PDE (5.14) becomes

$$\left[(\mathbf{w}^T\mathbf{w})^n \mathrm{Id} + \kappa(\mathbf{w}^T\mathbf{w})^{n-1}\mathbf{w}\mathbf{w}^T\right] \hat{S}_n = \mathrm{Id}$$

and we find that

$$\hat{S}_n = \frac{1}{(\mathbf{w}^T\mathbf{w})^n}\mathrm{Id} - \frac{\kappa}{(1+\kappa)(\mathbf{w}^T\mathbf{w})^{n+1}}\mathbf{w}\mathbf{w}^T$$

The Fourier transform of the scalar Laplacian spline s_n is precisely $\frac{1}{(\mathbf{w}^T\mathbf{w})^n}$. Thus, we can express S_n as a function of s_n and s_{n+1}:

$$S_n = s_n \mathrm{Id} + \frac{\kappa}{1+\kappa}\mathcal{H}s_{n+1}$$

where $\mathcal{H}s_{n+1}$ is the Hessian matrix of s_{n+1}.

Example: Vectorial Thin Plate Spline Interpolation

Up to a multiplicative coefficient, the 2-D second-order Laplacian spline (or thin plate spline) is $s_2(x,y) = r^2 \ln r^2$, and the 2-D third-order Laplacian spline is $s_3(x,y) = r^4 \ln r^2$ (Duchon, 1976), where $r^2 = x^2 + y^2$.

The Hessian matrix of s_3 is

$$\mathcal{H}s_3 = 2\begin{pmatrix} 2(3x^2+y^2)\ln r^2 + 7x^2 + y^2 & 2xy(2\ln r^2 + 3) \\ 2xy(2\ln r^2+3) & 2(3y^2+x^2)\ln r^2 + 7y^2 + x^2 \end{pmatrix}$$

Thus, S_2 is of the form

$$S_2 = \begin{pmatrix} r^2\ln r^2 + \frac{\kappa}{1+\kappa}\left[2(3x^2+y^2)\ln r^2 + 7x^2 + y^2\right] & 2\frac{\kappa}{1+\kappa}xy(2\ln r^2+3) \\ 2\frac{\kappa}{1+\kappa}xy(2\ln r^2+3) & r^2\ln r^2 + \frac{\kappa}{1+\kappa}\left[2(3y^2+x^2)\ln r^2 + 7y^2 + x^2\right] \end{pmatrix}$$

Figure 5.7 compares the basis function associated to this matrix and the scalar thin plate spline.

In figure 5.8, we compare the results of the interpolation of motion using scalar and vectorial thin plate splines. In the original position (figure 5.8(a)), four points are placed at each corner of a square. Then the upper point, in red, is forced to move to the center of the square.

The interpolation using both methods are given in figure 5.8(b) and 5.8(c). The scalar thin-plate spline interpolation applied on each component independently, in figure 5.8(b), do not present any horizontal motion, and thus vertical lines remains straight. It possess a strong accumulation of matter just under the point that has been moved. The vectorial Laplacian spline interpolation, in figure 5.8(c), is more realistic because of the horizontal motion, which enables the motion to be less strained, especially under the red point where the previous accumulation of matter has disappear.

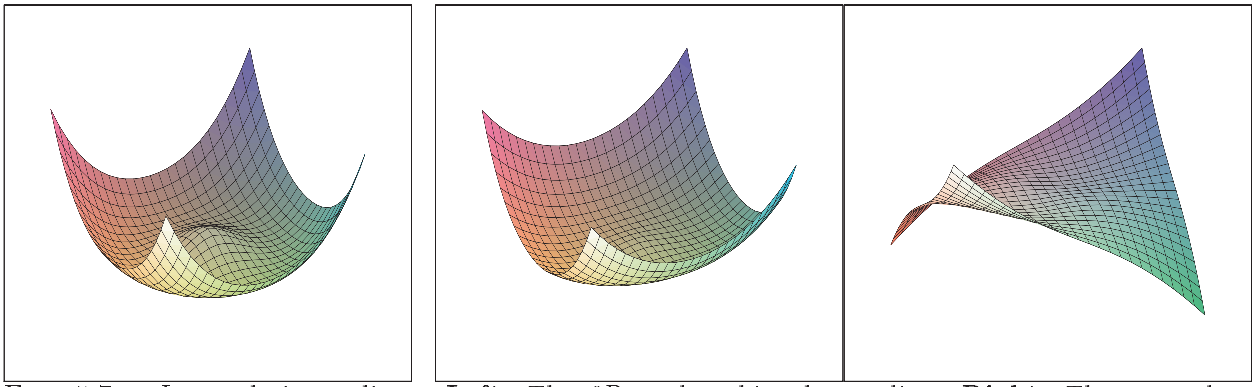


FIG. 5.7 – *Interpolating splines:* ***Left:*** *The 2D scalar thin-plate spline.* ***Right:*** *The x- and y-component of a 2D vectorial thin-plate spline.*

5.4.4 Merging filters and splines for sparse-and-dense feature approximation

In section 5.3 we have seen that the continuous approximation problem

$$\min \int ||T - C||^2 + E_{reg}(T)$$

where $E_{reg}(T)$ is an IDQF, has a closed-form solution using convolution. In section 5.4.3 we have seen that the discrete approximation problem

$$\min \sum_i ||T(\mathbf{x}_i) - C(\mathbf{x}_i)||^2 + E_{reg}(T)$$

has a closed-form solution which is a linear combination of vectorial basis functions, whose multiplicative coefficients are found by solving a set of linear equations.

Now, we merge the two previous problems: we search for a vector field T that should approximate both a continuous function C_1, and a set of discrete pairings C_2. The energy to minimize is thus

$$E(T) = \int ||T - C_1||^2 + \gamma \sum_i ||T(\mathbf{x}_i) - C_2(\mathbf{x}_i)||^2 + E_{reg}(T)$$

We show in appendix of this chapter that T has a very interesting closed form formula: it is a linear combination of a smoothed vector field and a sum of splines

$$T(\mathbf{x}) = K * C_1(\mathbf{x}) + \sum_i K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)\boldsymbol{\alpha}_i \tag{5.16}$$

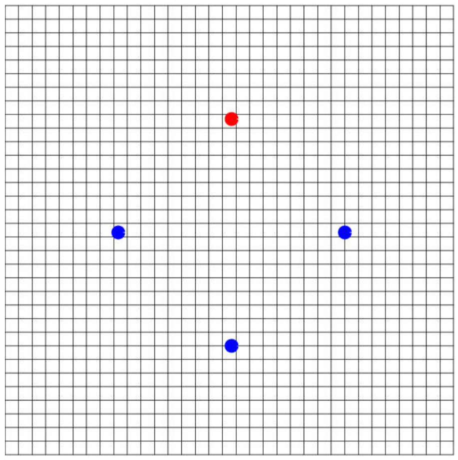
where K is the smoothing kernel associated to E_{reg}, as those found in section 5.3, and $\boldsymbol{\alpha}_i \in \mathbb{R}^d$ are coefficients found by solving a set of linear equations. The same kernel is used both as a smoothing kernel to smooth C_1, and as a spline to approximate the sparse correspondences C_2. Contrary to the vectorial Laplacian splines of section 5.4.3, though, these splines are bounded and decrease toward zero at infinity.

This formulation can be very useful in the context of non-rigid registration, when one wants to add point feature matching to and intensity-based registration : the similarity measure gives dense correspondences C_1, while geometric constraint gives sparse correspondences C_2. A non-rigid motion can thus be estimated from these two sets using equation (5.16). An example of this application to intersubject brain comparison using intensity and sulci matching can be found in (Cachier et al., 2001).

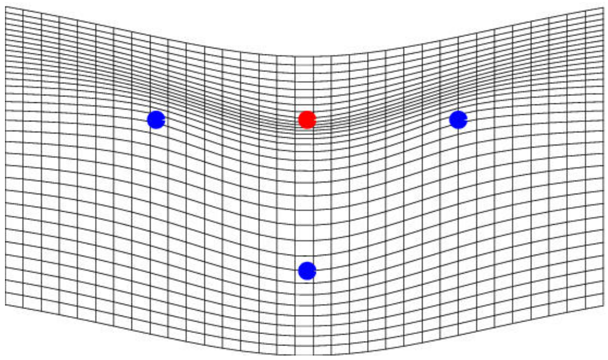
5.5 Conclusion

In this chapter we introduced some new techniques for regularizing vectorial problems. We first studied isotropic quadratic energies, and then used these energies to deduce vector filters and splines to approximate respectively a dense and sparse vector field. We also introduced a separable vector filter that generalizes Gaussian filtering to vectors and enables a particularly efficient smoothing, using recursive filtering.

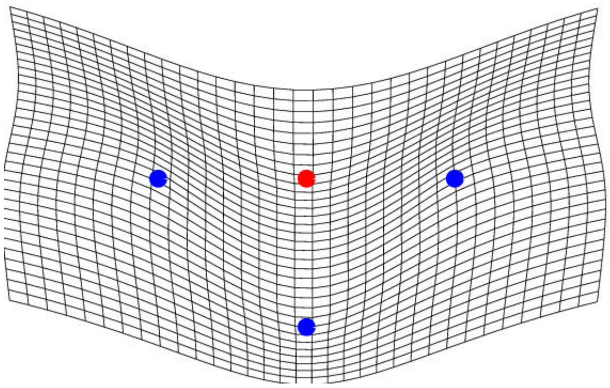
The original feature of vector regularization is the possibility to have cross-effects between components, which is not possible using standard scalar regularization on each component separately. This new parameter makes it possible to more finely tune the solution of our problem, in the context of non-rigid registration for example, depending on our prior knowledge.



(a) Original Position



(b) Deformation using thin plate splines



(c) Deformation using vectorial thin plate splines

FIG. 5.8 – *Interpolation of motion using splines. The three green circles stay at their original position, while the red circle comes down to the center of the square. Without cross effects, vertical lines remain vertical and straight, and present a strong accumulation of matter in front of the translated point. When using cross-effect, the matter is less deformed and has a more physical motion.*

5.A Reduction of second-order IDQF generators

According to Theorem 1, the 15 quadratic forms that generate the set of second-order IDQF are

$$\partial_{ii}f_j\partial_{jk}f_k \quad (5.17) \qquad \partial_{ii}f_j\partial_{kj}f_k \quad (5.22) \qquad \partial_{ii}f_j\partial_{kk}f_j \quad (5.27)$$
$$\partial_{ij}f_i\partial_{jk}f_k \quad (5.18) \qquad \partial_{ij}f_i\partial_{kj}f_k \quad (5.23) \qquad \partial_{ij}f_i\partial_{kk}f_j \quad (5.28)$$
$$\partial_{ij}f_j\partial_{ik}f_k \quad (5.19) \qquad \partial_{ij}f_k\partial_{ij}f_k \quad (5.24) \qquad \partial_{ij}f_k\partial_{ik}f_j \quad (5.29)$$
$$\partial_{ij}f_j\partial_{ki}f_k \quad (5.20) \qquad \partial_{ij}f_k\partial_{ji}f_k \quad (5.25) \qquad \partial_{ij}f_k\partial_{ki}f_j \quad (5.30)$$
$$\partial_{ij}f_j\partial_{kk}f_i \quad (5.21) \qquad \partial_{ij}f_k\partial_{jk}f_i \quad (5.26) \qquad \partial_{ij}f_k\partial_{kj}f_i \quad (5.31)$$

Because we suppose that the derivation commutes with itself, some of these 15 quadratic forms are equal. It is straightforward to see that (5.17)=(5.22), (5.18)=(5.23), (5.19)=(5.20), (5.24)=(5.25), (5.26)=(5.31) and (5.29)=(5.30). Renaming $i \to j$ and $j \to i$, we also find (5.19)=(5.23), (5.21)=(5.28) and (5.29)=(5.31). We now have only 6 quadratic forms:

$$\partial_{ij}f_j\partial_{ik}f_k \quad (5.32) \qquad \partial_{ij}f_k\partial_{ij}f_k \quad (5.34) \qquad \partial_{ij}f_i\partial_{kk}f_j \quad (5.36)$$
$$\partial_{ii}f_j\partial_{kj}f_k \quad (5.33) \qquad \partial_{ii}f_j\partial_{kk}f_j \quad (5.35) \qquad \partial_{ij}f_k\partial_{kj}f_i \quad (5.37)$$

Now, because the multiplication commutes, two of these 6 quadratic forms are also equal. Renaming $k \to i$ and $i \to k$, we see that (5.33)=(5.36). We finally have only 5 independent quadratic forms:

$$\partial_{ij}f_j\partial_{ik}f_k \qquad \partial_{ii}f_j\partial_{kj}f_k \qquad \partial_{ij}f_k\partial_{ij}f_k \qquad \partial_{ii}f_j\partial_{kk}f_j \qquad \partial_{ij}f_k\partial_{kj}f_i$$

5.B Proof of equation (5.16)

We now focus on the problem where T should fit both a continuous function C_1, and a set of discrete pairings C_2. The energy to minimize is thus

$$E(T) = \int ||T - C_1||^2 + \gamma \sum_i ||T(\mathbf{x}_i) - C_2(\mathbf{x}_i)||^2 + E_{reg}(T)$$

Using the Fourier transform, we rewrite the previous energy:

$$E(T) = \int ||\hat{T} - \hat{C}_1||^2 + \gamma \sum_i ||T(\mathbf{x}_i) - C_2(\mathbf{x}_i)||^2 + \int P(\mathbf{w}).||\hat{T}||^2$$

where $P(\mathbf{w})$ is a polynomial matrix related to the IDQF E_{reg}, and which is a linear combination of the terms $\lambda(\mathbf{w}^T\mathbf{w})^n + \lambda\kappa(\mathbf{w}^T\mathbf{w})^{n-1}\mathbf{w}\mathbf{w}^T$ if E_{reg} is on the form (5.9) (see section 5.3). Since $T(\mathbf{x}_i) = \int \hat{T}(\mathbf{w}) \exp(2\pi i.\mathbf{w}^T\mathbf{x}_i)$, the formal differentiation of this energy w.r. to $\hat{T}$ leads to

$$(\hat{T} - \hat{C}_1) + \gamma \sum_i (T(\mathbf{x}_i) - C_2(\mathbf{x}_i)) \exp(-2\pi i\mathbf{w}^T\mathbf{x}_i) + P(\mathbf{w}).\hat{T} = 0$$

The solution of this equation is

$$\hat{T} = M^{-1}\hat{C}_1 + \gamma \sum_i \exp(-2\pi i\mathbf{w}^T\mathbf{x}_i)M^{-1}(C_2(\mathbf{x}_i) - T(\mathbf{x}_i))$$

where M^{-1} is the invert matrix of $M = \mathrm{Id} + P(\mathbf{w})$, with the same notation of section 5.3.

Let us note K the inverse Fourier transform of M^{-1}. In the real domain, the first term $M^{-1}\hat{C}_1$ transforms as $K * C_1$, as in section 5.3. Since M^{-1} is the Fourier transform of $K(\mathbf{x})$, $\exp(-2\pi i \mathbf{w}^T \mathbf{x}_i) M^{-1}$ is the Fourier transform of $K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$, so the second term transforms as $\gamma \sum_i K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)(C_2(\mathbf{x}_i) - T(\mathbf{x}_i))$. The solution to this approximation problem is thus of the form

$$T(\mathbf{x}) = K * C_1(\mathbf{x}) + \sum_i K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)\boldsymbol{\alpha}_i$$

where $\boldsymbol{\alpha}_i = \gamma(C_2(\mathbf{x}_i) - T(\mathbf{x}_i)) \in \mathbb{R}^d$ is a set of multiplicative coefficient that solve the set of equation:

$$K * C_1(\mathbf{x}_i) + \sum_j K(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)\boldsymbol{\alpha}_j = C_2(\mathbf{x}_i) - \boldsymbol{\alpha}_i/\gamma \qquad \forall i \in [\![1; p]\!]$$

Let us note $\boldsymbol{\alpha}$ the vector of size $d.p$ of all the coefficient

$$\boldsymbol{\alpha} = \left(\boldsymbol{\alpha}_1^T, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_p^T\right)^T$$

Let us note W the $(d.p) \times (d.p)$ matrix

$$W = (K(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)) = \begin{pmatrix} K(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1) & K(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) & \cdots & K(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_p) \\ K(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ K(\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_1) & \cdots & \cdots & K(\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_p) \end{pmatrix}$$

Finally, let us note $\boldsymbol{\beta}$ the vector of size $d.p$

$$\boldsymbol{\beta} = ((C_2(\mathbf{x}_1) - K * C_1(\mathbf{x}_1))^T, \ldots, (C_2(\mathbf{x}_p) - K * C_1(\mathbf{x}_p))^T$$

Then to find the coefficients α_i, the equation to solve is

$$\left(\frac{1}{\gamma}\mathrm{Id} + W\right)\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$$

Chapitre 6

Symétrisation du recalage et énergies invariantes par inversion

«Être là, amère, si mal,
Être passive je dirais.
Être venue jeune mère, mais,
Être là, amère, si mal!

Elle bise ma douce vérité,
Elle me frise de rage, égal!
Étire mal-être, pleur cru, ô mal,
L'amour cruel? Perte l'a mérité.

L'âge égare désir femelle,
Étire vécu, ô dame si belle,
La misère m'a alerté.

Si amère, menue, jeune, verte,
Si aride, je vis sa perte,
La misère m'a alerté.»

Dominic Bergeron, *Sonnet palindromique.*[1]

1. La symétrie particulière de ce texte permet sa lecture de bas en haut et de droite à gauche.

Dans ce chapitre, nous abordons le problème de la symétrisation du recalage. La majorité des algorithmes de recalage existants, y compris nos algorithmes `MAMAN` et `PASHA` des chapitres 2 et 3, sont en effet asymétriques : les résultats dépendent du choix de l'image de référence. Cela est bien sûr philosophiquement ennuyeux ; mais nous montrons qu'en fait cela a des conséquences pratiques sur le champ de déformations estimé qui peuvent être véritablement désastreuses. En particulier, nous montrons que les croissances sont beaucoup moins bien retrouvées que les décroissances. Résoudre le problème de la symétrie devient dès lors essentiel pour des applications comme la détection d'évolutions de lésions reposant sur un recalage non rigide.

Nous allons d'abord présenter les trois causes d'asymétrie dans ces algorithmes. L'étude de la première de ces causes nous amènera à introduire la notion d'invariance par inversion des énergies de recalage. Nous construisons un algorithme minimisant une telle énergie, et nous montrons sur des exemples synthétiques et réels le gain en symétrie ainsi obtenu.

6.1 Introduction

6.1.1 La symétrie du recalage

Le recalage d'images recouvre en fait plusieurs définitions possibles quant au type de correspondances recherchées. Dans ce chapitre nous nous intéressons au cas où le recalage de deux images I et J consiste à rechercher une transformation $T(I,J)$ lisse, et si possible bijective, entre les deux images, pour mettre en correspondance les points homologues.

A priori, il n'y a pas lieu de privilégier une image par rapport à l'autre : le problème est symétrique par rapport aux deux images.

Malheureusement, des problèmes de symétrie apparaissent dans le formalisme du recalage. La transformation $T(I,J)$ n'est pas si simplement *entre* les images : elle part du domaine de l'une des images, en direction de l'autre. Cette brisure de symétrie a d'ailleurs donné naissance à une terminologie spécifique au domaine : l'image sur laquelle la transformation est définie est appelée *image source* ; l'image vers laquelle pointe la transformation est l'*image cible*. Par la formulation même du problème, une dissymétrie est introduite dans le rôle des deux images, car l'une d'entre elle doit être choisie comme image source et l'autre comme image cible.

Toutefois, les algorithmes reposant sur cette formulation dissymétrique ne sont pas nécessairement eux-mêmes dissymétriques : pour un algorithme de recalage, la symétrie réside en ce que le résultat du recalage ne dépende pas du choix de l'image cible. Mathématiquement, l'algorithme est symétrique si les précautions nécessaires sont prises pour que $T(I,J)$ soit toujours l'inverse de $T(J,I)$ (voir figure 6.1).

6.1.2 Causes de dissymétrie

En pratique, cette symétrie n'est jamais respectée. Pour les algorithmes de recalage non rigide reposant sur la minimisation d'une énergie en fonction d'une transformation inversible, il existe trois causes de dissymétrie : la non-préservation de l'ordre des énergies par inversion, la non-stabilité de l'espace des transformations, et la dissymétrie des méthodes d'optimisation numérique sous-optimales.

Non-préservation de l'ordre des énergies.

L'énergie $E(I,J,T)$ utilisée pour recaler I et J avec la transformation T compare les transformations entre elles : une transformation T_1 est meilleure que T_2 si $E(I,J,T_1) < E(I,J,T_2)$. Pour que

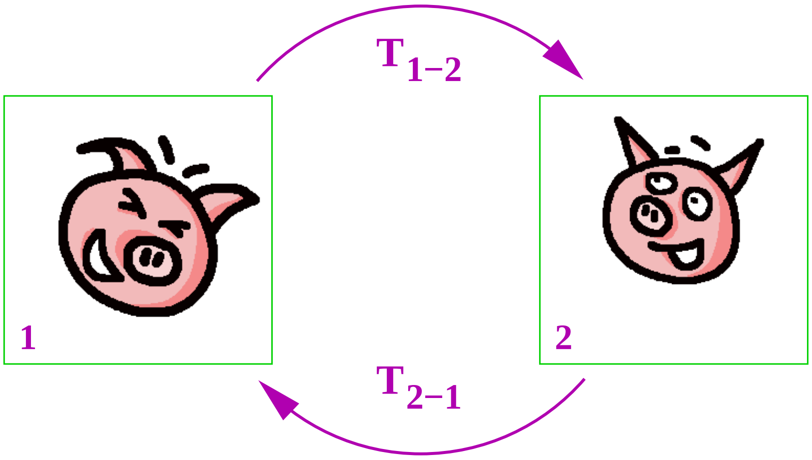


FIG. 6.1 – *Un recalage symétrique donne des résultats indépendants de l'image de référence. En conséquence, la composition des transformations T_{1-2} et T_{2-1} donne l'identité, laissant l'image inchangée.*

le recalage soit symétrique, cet ordre doit être préservé pour le problème inverse : T_1^{-1} doit être meilleure que T_2^{-1} lorsque l'on échange les images. E vérifie alors la propriété de préservation de l'ordre par inversion :

$$E(I,J,T_1) < E(I,J,T_2) \quad \Longleftrightarrow \quad E(J,I,T_1^{-1}) < E(J,I,T_2^{-1})$$

quelles que soient les images I et J et les transformations T_1 et T_2.

La plupart, sinon la totalité, des mesures de similarité et de régularisation utilisées en recalage non rigide d'images médicales ne préservent pas l'ordre par inversion, et fournissent donc des résultats dissymétriques. C'est le cas des mesures de similarité standard : écart quadratique, corrélation linéaire, rapport de corrélation, information mutuelle. C'est également le cas des énergies de régularisation quadratiques, telles que l'énergie de l'élasticité linéaire ou du modèle de plaque mince. Même l'élasticité générale non linéaire est conceptuellement dissymétrique, car l'une des images, l'image source, est supposée être dans un état de repos sans contrainte. Cette considération est fondamentale pour comprendre le comportement des algorithmes de recalage : voir (Kyriacou et Davatzikos, 1998) pour un exemple d'application où cela peut poser un problème et nécessite une solution spécifique.

Non-stabilité de l'espace des transformations par inversion.

La stabilité par inversion impose à l'espace $\mathcal{T}$ des transformations de contenir l'inverse de ses éléments :

$$T \in \mathcal{T} \quad \Longrightarrow \quad T^{-1} \in \mathcal{T}$$

La quasi-totalité des algorithmes de recalage ne respectent pas cette règle. Les seuls groupes utilisés en recalage sont les groupes des transformations rigides, homothétiques ou affines. A notre connaissance, les espaces de transformations utilisés en recalage non rigide ne sont pas des groupes. Notons que mêmes les algorithmes utilisant des transformations dites « libres », possédant un degré de liberté par voxel et par dimension, sont en fait implicitement paramétriques dès que l'on aborde le problème de leur inversion : en effet, le modèle d'interpolation de la transformation nécessaire pour le calcul de l'inverse est assimilable à une paramétrisation.

Minima locaux de l'énergie.

En plus des deux conditions théoriques précédentes s'ajoute une contrainte pratique importante. Même si l'énergie de recalage préserve l'ordre par inversion, et que l'ensemble des transformations forme un groupe, il se peut que l'algorithme de minimisation soit quand même dissymétrique en restant bloqué dans des minima locaux différents de l'énergie selon le sens du recalage.

Le mieux serait bien entendu que l'algorithme de minimisation trouve le minimum global, qui est le même quel que soit le choix de l'image de référence si les deux conditions théoriques précédentes sont réunies ; malheureusement, ces algorithmes optimaux sont excessivement lents et peu utilisés en pratique (voir p. 36). Une solution plus réaliste consisterait à utiliser un algorithme de minimisation symétrique, c'est-à-dire dont le parcours dans l'espace de recherche au fil des itérations soit le même quel que soit le sens du recalage.

6.1.3 Problèmes liés à la dissymétrie

Choix de l'image de référence

Le premier problème de la dissymétrie est la dépendance de la transformation estimée du sens du recalage. La qualité du résultat peut dépendre du choix de l'image de référence, qui doit dépendre en fonction de l'algorithme de recalage lui-même mais également des images et de l'application.

Régions croissantes et décroissantes

L'une des conséquences de la dissymétrie des mesures de similarité et des énergies de régularisation standard est assez surprenante : les algorithmes dissymétriques ont tendance à retrouver les croissances beaucoup plus facilement que les décroissances. Cela est faux dans le cas général : on peut très bien construire un contre-exemple de recalage dissymétrique où les rétrécissements seraient moins bien retrouvés que les grossissements. Cependant, ce comportement est constaté avec toutes les mesures habituelles. Nous allons tenter d'expliquer comment la régularisation et les mesures de similarité encouragent ce comportement.

Régularisation. Pour les mesures de régularisation, nous pouvons comprendre intuitivement ce phénomène en étudiant un exemple unidimensionnel, où une fonction f est lissée par un noyau d'une certaine taille σ (figure 6.2). Un lissage de cette fonction f par un noyau de taille σ donne grossièrement le même résultat qu'un lissage de f^{-1} par un noyau de taille $\sigma f'$. Donc, une région croissante, pour laquelle $f' > 1$, est plus lissée qu'elle ne le serait si la transformation était d'abord inversée puis lissée avec le même noyau ; autrement dit, elle est plus lissée que si le recalage est fait dans l'autre sens. Une énergie de régularisation symétrique devra donc générer des forces internes de rappel plus fortes aux endroits décroissants que les mesures classiques.

Énergies de similarité. Nous pouvons également tenter de comprendre le rôle des mesures de similarité dans cette dissymétrie, en prenant l'exemple de deux cercles de tailles différentes, figure 6.3. La mesure de similarité va pousser le cercle avec une force proportionnelle à sa surface initiale, et ce, quel que soit la déformation qui lui est appliquée car le calcul de la mesure de similarité et donc des forces se fait dans le repère initial de l'objet. Le grand cercle sera donc beaucoup plus sensible aux forces extérieures que le petit cercle, même si leurs volumes respectifs ont sensiblement changé. Dès lors, les mesures de similarité classiques vont retrouver les décroissances plus facilement que les croissances. Une mesure de similarité symétrique devra donc posséder des forces plus importantes aux endroits croissants.

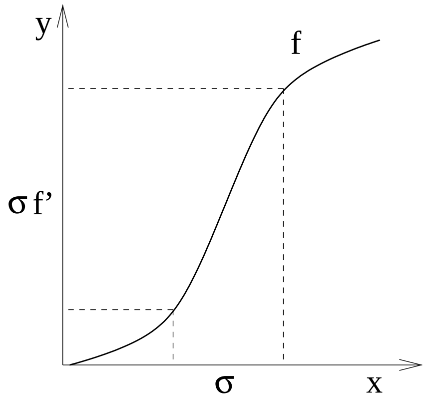


FIG. 6.2 – *Le lissage d'une fonction f par un noyau de taille σ est grossièrement équivalent à un lissage de f^{-1} par un noyau de taille $\sigma f'$. Un processus d'expansion, où $f' > 1$, est donc plus lissé qu'il le serait si la transformation était inversée et lissée avec le même noyau.*

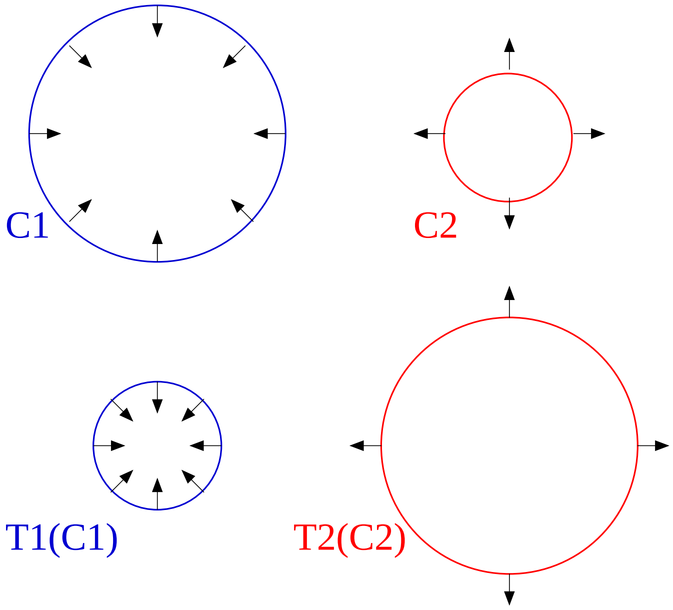


FIG. 6.3 – ***En haut :*** *Deux cercles, initialement non déformés. De par leur circonférence, le grand cercle subit plus de forces que le petit.* ***En bas :*** *Pendant la déformation, malgré le changement effectif de circonférence, la même quantité de force s'applique aux cercles, car le calcul de la similarité se fait toujours dans le repère initial de l'objet. Les mesures de similarité classiques favorisent donc également les décroissances aux croissances.*

Si un couple d'images représente un objet subissant un seul mouvement simple de croissance ou de décroissance, et que l'on utilise un algorithme de recalage dissymétrique, il est alors préférable de prendre l'objet le plus gros comme image source, afin d'estimer une décroissance. Hélas, ce genre de situation est rare : les mouvements se composent généralement d'une multitude de croissances et de décroissances.

Ainsi, dans les travaux de (Rey et al., 1999) sur la détection automatique des lésions évolutives dans les IRM, les images sont recalées dans les deux sens. Ensuite, pour retrouver les lésions ayant grossies ou rétrécies entre les deux acquisitions, Rey ne détecte que les régions décroissantes, mais dans les deux champs de déformations, car il a constaté empiriquement qu'il est beaucoup plus facile de retrouver les lésions décroissantes que les lésions croissantes.

6.1.4 Travaux existants en symétrisation

A ce jour, peu de chercheurs se sont penchés sur la symétrisation du recalage non rigide. Une exception notable dans la littérature est l'article de (Christensen, 1999). Dans ce travail, deux recalages dissymétriques sont effectués simultanément dans les deux sens. Des termes quadratiques ajoutés à l'énergie de recalage contraignent les deux transformations à rester proches de l'inverse de l'autre. Le recalage n'est donc asymptotiquement symétrique que lorsque la pondération de ces derniers termes tend vers l'infini ; l'énergie est alors mal conditionnée et difficile à minimiser.

Un deuxième travail traitant de la symétrie se trouve dans (Ashburner et al., 2000). L'auteur note que les modèles physiques utilisés pour la régularisation sont dissymétriques. Il propose d'utiliser une énergie de régularisation plus symétrique, qui se rapproche du logarithme du jacobien de la transformation. Ces travaux constituent un premier pas vers la symétrisation, bien que l'approche soit nettement heuristique. De plus, l'attention n'est portée que sur l'énergie de régularisation, et pas sur l'énergie de similarité, qui reste un écart quadratique dissymétrique.

6.2 Énergies invariantes par inversion

Dans nos travaux, nous nous sommes focalisés sur la première des trois causes de dissymétries présentées à la section 6.1.2 : la préservation de l'ordre des énergies par inversion. Nous proposons de résoudre ce point en imposant aux énergies de similarité et de régularisation une propriété encore plus forte, *l'invariance par inversion* : cette propriété impose que

$$E(I,J,T) = E(J,I,T^{-1})$$

Une énergie invariante par inversion conserve bien sûr l'ordre par inversion. Ce type d'invariance est proche de celles imposées à des distances entre formes paramétriques unidimensionnelles par (Trouvé et Younes, 2000) dans un de leurs travaux très récent.

Cette contrainte peut sembler forte. En fait, il existe beaucoup d'énergies possédant cette propriété. Il existe même un moyen simple de rendre invariant par inversion les énergies de similarité ou de régularisation standard, que nous exposons ci-dessous, et qui rend cette propriété utilisable en pratique.

6.2.1 Symétrisation des énergies standard

Il existe plusieurs méthodes pour rendre invariant par inversion une énergie $E(I,J,T)$. Parmi celles-ci, la plus simple est peut-être de prendre la moyenne de l'énergie calculée dans les deux sens possible du recalage. On notera $E^*(I,J,T)$ l'énergie ainsi obtenue :

$$E^*(I,J,T) = \frac{1}{2}\left[E(I,J,T) + E(J,I,T^{-1})\right] \tag{6.1}$$

Il est clair que l'énergie E^* est bien invariante par inversion, i.e.

$$E^*(I,J,T) = E^*(J,I,T^{-1})$$

Cependant, il n'existe pas une seule manière de symétriser les énergies ; nous verrons plus loin qu'il peut être préférable d'adapter cette symétrisation en fonction du problème, notamment avec les mesures de similarité.

A priori, le calcul de E^* nécessite de calculer l'inverse de T, ce qui faisable mais n'est pas très efficace numériquement, et rendrait donc lourde l'utilisation de telles énergies. Heureusement, les mathématiques peuvent nous aider à nous débarrasser parfois de T^{-1} dans l'expression de E^* : c'est ce que nous allons maintenant étudier pour certaines énergies de régularisation et de similarité.

6.2.2 Symétrisation des énergies de régularisation

Soit $\mathbf{p}$ un point de l'image I, et $d^nT(\mathbf{p})$ le tenseur différentiel d'ordre n de la transformation T au point $\mathbf{p}$. Nous nous intéressons ici aux énergies de régularisation $E_{reg}(T)$ pouvant être écrites sous forme d'une intégrale d'une certaine fonction e des différentielles de T :

$$E_{reg}(T) = \int e_2(dT(\mathbf{p}),d^2T(\mathbf{p}),...)\, d\mathbf{p} \tag{6.2}$$

Cette formulation recouvre la quasi-totalité des énergies de régularisation usuelles, telles que les énergies élastiques, les énergies de membrane, etc. Calculons cette énergie sur l'inverse de T :

$$\begin{aligned} E_{reg}(T^{-1}) &= \int e_2(d(T^{-1})(\mathbf{q}),d^2(T^{-1})(\mathbf{q}),...)\, d\mathbf{q} \\ &\overset{\mathbf{p}=T^{-1}(\mathbf{q})}{=} \int e_2(d(T^{-1})\circ T(\mathbf{p}),d^2(T^{-1})\circ T(\mathbf{p}),...)|dT(\mathbf{p})|\, d\mathbf{p} \end{aligned}$$

L'astuce pour ne pas avoir à calculer T^{-1} est que les différentielles de T^{-1} peuvent être exprimées en fonction de celles de T, comme nous allons l'illustrer maintenant avec l'énergie de membrane.

Exemple : Symétrisation de l'énergie de membrane

Considérons l'énergie de membrane en deux dimensions :

$$E_{m2D}(T) = \int_{\mathbb{R}^2} ||dT||^2 = \int_{\mathbb{R}^2} ||\partial_x T||^2 + ||\partial_y T||^2$$

L'application de cette énergie à l'inverse de T donne

$$\begin{aligned} E_{m2D}(T^{-1}) &= \int_{\mathbb{R}^2} ||d(T^{-1})(\mathbf{q})||^2\, d\mathbf{q} \\ &\overset{\mathbf{p}=T^{-1}(\mathbf{q})}{=} \int_{\mathbb{R}^2} ||d(T^{-1})\circ T(\mathbf{p})||^2|dT(\mathbf{p})|\, d\mathbf{p} \end{aligned}$$

Or, mathématiquement, nous avons la relation

$$d(T^{-1})\circ T = (dT)^{-1}$$

De plus, nous avons également l'égalité

$$||[dT(\mathbf{p})]^{-1}||^2 = \frac{1}{|dT(\mathbf{p})|^2}||dT(\mathbf{p})||^2$$

que nous établissons en annexe de ce chapitre. En utilisant ces deux égalités dans l'expression de $E_{m2D}(T^{-1})$, nous obtenons

$$E_{m2D}(T^{-1}) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{|dT(\mathbf{p})|}||(dT)^{-1}(\mathbf{p})||^2 \, d\mathbf{p}$$

Finalement, l'énergie de membrane symétrisée s'écrit

$$\begin{aligned} E^*_{m2D}(T) &= \frac{1}{2}\left[E_{m2D}(T) + E_{m2D}(T^{-1})\right] && (6.3)\\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\left(1 + \frac{1}{|dT|}\right)||dT||^2 && (6.4)\end{aligned}$$

La symétrisation de l'énergie de membrane bidimensionnelle par la formule (6.1) se résume à l'introduction du facteur de normalisation locale $(1 + 1/|dT|)/2$. Ce facteur dépend du jacobien de la transformation $|dT|$, et pénalise les transformations dont le jacobien est faible, i.e. les dilatations. C'est exactement la rectification que nous attendions section 6.1.3 de la part d'une énergie symétrique.

Recalage symétrique et bijectivité

Notons que ce facteur $(1 + 1/|dT|)/2$ tend vers l'infini pour des valeurs de jacobien qui tendent vers zéro. En pratique, cela force la transformation recherchée à être bijective. La symétrisation est donc un moyen d'introduire des énergies assurant la bijectivité de la transformation en tendant vers l'infini pour des valeurs de jacobien se rapprochant vers zéro, comme cela a été fait dans ce but mais de manière plus heuristique par exemple dans (Musse et al., 2001; Rohlfing et Maurer, 2001).

Symétrisation des énergies de régularisation en dimension et en ordre supérieurs

La symétrisation de l'énergie de membrane en deux dimensions obtenue en (6.4) est un exemple où la formule donnée par cette technique est assez synthétique. Malheureusement, nous devons souligner que ce n'est pas toujours le cas.

En deux dimensions, la simplicité de l'inversion d'une matrice permet d'exprimer la norme de l'inverse en fonction de la norme de la matrice et de son déterminant. Il n'existe pas de telle formule en dimension supérieure à deux, et il faut alors calculer explicitement la comatrice ou l'inverse de dT pour trouver sa norme.

De même, les liens entre les différentielles d'ordre un d'une transformation et de son inverse sont simples, puisque ces matrices sont simplement inverses l'une de l'autre. Ces relations deviennent nettement plus compliquées pour des différentielles d'ordre supérieur. Par exemple, la relation entre les tenseurs différentiels d'ordre deux de la transformation et de son inverse est

$$d^2(T^{-1}) = -\left[dT \circ T^{-1}\right]^{-1} d^2T \circ T^{-1}\left[dT \circ T^{-1}\right]$$

Pour le calcul de l'énergie proprement dite, la complexité reste modeste, car ces matrices sont petites ($d \times d$ en dimension d). En revanche, si le processus de minimisation utilise les dérivées de l'énergie, les calculs deviennent nettement plus long, car les formules des dérivées sont complexes.

6.2.3 Symétrisation des énergies de similarité

Les énergies de similarité peuvent être également symétrisées par la formule (6.1). Nous pouvons de nouveau éviter de calculer l'inverse de la transformation apparaissant dans cette formule en utilisant un changement de variable.

Dans les énergies de similarité standard, la transformation n'apparaît que sous forme de changement de repère de l'une des images. Les formules de symétrisation sont de ce fait plus simples que celles des énergies de régularisation.

Symétrisation des mesures ponctuelles

La symétrisation des mesures de similarité ponctuelles est le cas le plus simple. Considérons les mesures de similarité du type :

$$E_{sim}(I,J,T) = \int e(I,J \circ T)$$

où e est une mesure d'écart telle que

$$e(x,y) = e(y,x) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Le calcul de cette énergie en sens inverse donne

$$\begin{aligned} E_{sim}(J,I,T^{-1}) &= \int e(J(\mathbf{q}),I \circ T^{-1}(\mathbf{q}))\, d\mathbf{q} \\ &\overset{\mathbf{p}=T^{-1}(\mathbf{q})}{=} \int e(I(\mathbf{p}),J \circ T(\mathbf{p}))|dT(\mathbf{p})|\, d\mathbf{p} \end{aligned}$$

La symétrisation de E_{sim} est alors

$$\begin{aligned} E^*_{sim}(I,J,T) &= \frac{1}{2}\left[E_{sim}(I,J,T) + E_{sim}(J,I,T^{-1})\right] \\ &= \frac{1}{2}\int (1+|dT|)\, e(I,J \circ T) \end{aligned}$$

La symétrisation des mesures ponctuelles, comme l'écart quadratique, se fait donc par l'introduction d'un facteur $1+|dT|$ sous l'intégrale.

Symétrisation des statistiques

Certaines mesures de similarité, comme la corrélation linéaire, font intervenir dans leur formule des statistiques de l'image en plus des valeurs de l'image elle-même. Pour ces mesures de similarité, deux choix s'offrent à nous :

- Soit symétriser la mesure de similarité comme précédemment, en utilisant la formule (6.1).
- Soit symétriser d'abord les statistiques de l'image, avant de symétriser la nouvelle mesure ainsi obtenue.

Prenons pour exemple la corrélation linéaire entre deux images I et J :

$$\begin{aligned} < I,J \circ T > &= \int (I - \bar{I}).(J \circ T - \overline{J \circ T}) \\ &= \int I.J \circ T - \bar{I}.\overline{J \circ T} \end{aligned}$$

La symétrisation de la corrélation en utilisant notre formule (6.1) donne

$$\begin{aligned}
< I,J \circ T >^* &= \frac{1}{2}\left[< I,J \circ T > + < J,I \circ T^{-1} >\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\int (1+|dT|) I.J \circ T - \bar{I}.\overline{J \circ T} - \bar{J}.\overline{I \circ T^{-1}}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\int (1+|dT|) I.J \circ T - \bar{I}.\overline{J \circ T} - \int |dT| I \int |dT| J \circ T\right]
\end{aligned}$$

Cette formule est bien moins synthétique que celle obtenue pour les mesures ponctuelles. Nous allons donc essayer de symétriser la corrélation par la deuxième méthode, en commençant par symétriser les statistiques utilisées sous l'intégrale. Si nous remplaçons dans l'expression de la corrélation la moyenne $\bar{I}$ par sa symétrisation

$$\bar{I}^* = \frac{1}{2}\int (1+|dT|)\, I$$

nous obtenons une nouvelle corrélation que l'on note $< \cdot,\cdot >_2$:

$$< I,J \circ T >_2 = \int (I - \bar{I}^*).(J \circ T - \left(\overline{J \circ T}\right)^*)$$

Cette nouvelle corrélation devient, une fois symétrisée

$$< I,J \circ T >_2^* = \frac{1}{2}\int (1+|dT|).(I - \bar{I}^*).(J \circ T - \left(\overline{J \circ T}\right)^*)$$

Autrement dit, $< \cdot,\cdot >_2^*$ se déduit de $< \cdot,\cdot >_2$ par l'introduction du facteur multiplicatif $(1+|dT|)/2$ sous l'intégrale, comme pour les mesures de similarité ponctuelles. Cette dernière symétrisation semble donc plus appropriée ; ce développement souligne en tout cas qu'il n'y a pas de solution universelle à la symétrisation, mais que nous pouvons nous y prendre de plusieurs façons.

Symétrisation des mesures reposant sur un modèle relationnel fonctionnel

Les mesures reposant sur un modèle relationnel fonctionnel (voir l'état de l'art p. 22) font l'hypothèse qu'il existe idéalement une fonctionnelle f, dans un certain espace fonctionnel $\mathcal{F}$, telle que $I = f \circ J$. La mesure de similarité proprement dite est alors l'écart de ce modèle par rapport à la réalité. Étudions la mesure de similarité quadratique suivante :

$$E_{vc}(I,J,T) = \min_f \int (I - f \circ J \circ T)^2$$

où f est un modèle relationnel valant à l'optimum

$$f(x) = E(I|J \circ T = x)$$

$E_{vc}(I,J,T)$ est donc en réalité la variance conditionnelle $E_x(Var(I|J \circ T = x))$, fortement reliée à la mesure du rapport de corrélation (Roche et al., 1999).

Une symétrisation de la variance conditionnelle selon l'équation (6.1) nécessite l'estimation de deux modèles relationnels :

$$E_{vc}^* = \frac{1}{2}\left[\min_{f_1} \int (I - f_1 \circ J \circ T)^2 + \min_{f_2} \int |dT| (J \circ T - f_2 \circ I)^2\right] \tag{6.5}$$

f_1 reste égal à $E(I|J \circ T)$, et f_2 est $E(J|I \circ T^{-1})$. Cependant, ces modèles ne sont généralement pas relié entre eux.

Dans certaines situations, comme en recalage IRM/scanner, l'une des images (l'IRM) est beaucoup plus informative que l'autre ; nous ne voulons donc pas évaluer de modèle fonctionnel partant de l'image scanner, car celui-ci a peu de chance d'être efficace. Une symétrisation de la variance conditionnelle plus adaptée à ce cas garde un seul modèle fonctionnel :

$$E^*_{vc} = \frac{1}{2} \min_f \int (1 + |dT|)(I - f \circ J \circ T)^2$$

f est maintenant une espérance conditionnelle pondérée par le facteur $(1 + |dT|)/2$.

Enfin, lorsque l'espace $\mathcal{F}$ ne comporte que des modèles relationnels fonctionnels inversibles, nous pouvons forcer les modèles fonctionnels f_1 et f_2 de l'équation (6.5) à être inversible l'un de l'autre. Cette troisième possibilité de symétrisation de la variance conditionnelle est :

$$E^*_{vc} = \frac{1}{2} \min_f \int (I - f \circ J \circ T)^2 + \int |dT|(J \circ T - f^{-1} \circ I)^2$$

Par exemple, si $f(x) = a.x + b$ est une fonction affine,

$$E^*_{vc} = \frac{1}{2} \min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int (a.J \circ T + b - I)^2 + |dT|(\frac{1}{a} I - \frac{b}{a} - J \circ T)^2$$

La minimisation par rapport à a et b peut alors se faire explicitement de manière numérique en calculant préalablement les intégrales $\int I$, $\int |dT| I$, $\int IJ$, etc.

Ces trois symétrisations illustrent une fois de plus la non-unicité de la symétrie, et l'adaptation que l'on doit faire de notre schéma de symétrisation donné par l'équation (6.1) en fonction du problème.

6.3 Minimisation des énergies symétriques

Pour produire les résultats présentés dans la section suivante, nous avons mis en œuvre la minimisation d'énergies symétriques sur l'ensemble des transformations libres non paramétriques. Nous avons retenu deux méthodes de minimisation : la première utilise une modélisation du problème par éléments finis ; quant à la seconde, elle se sert de l'inverse de la transformation, qui est calculée explicitement.

6.3.1 Minimisation par éléments finis sans inversion : l'algorithme `Sym1`

Notre première implémentation repose sur la symétrisation de l'énergie de recalage suivante

$$E(I,J,T) = \int (I - J \circ T)^2 + \lambda \int ||dT||^2 \tag{6.6}$$

qui est une somme pondérée de l'écart quadratique entre les images, et de l'énergie de régularisation de membrane. La symétrisation de cette énergie utilisée par notre algorithme est

$$E^*(I,J,T) = \frac{1}{2} \left[\int (1 + |dT|)(I - J \circ T)^2 + \lambda \int \left(1 + \frac{1}{|dT|}\right) ||dT||^2 \right] \tag{6.7}$$

Après plusieurs tentatives de minimisation de cette énergie, notamment par différences finies, nous nous sommes rendus à l'évidence que la précision de la symétrie était très sensible à la qualité de la discrétisation du problème. L'expérience nous a montré que les résultats étaient sensiblement meilleurs en utilisant une discrétisation par éléments finis. Une triangularisation de la grille régulière définie par les pixels est utilisée. Les images ainsi que la transformation sont définies par des fonctions continues linéaires par morceaux sur cette triangularisation. Pour minimiser l'énergie (6.7), nous avons utilisé une descente de gradient standard, avec une recherche linéaire parabolique (Press et al., 1992), couplée à une approche pyramidale semblable à celle de nos algorithmes précédents `MAMAN` et `PASHA`.

6.3.2 Minimisation alternée avec inversion : l'algorithme `Sym2`

La seconde méthode utilise explicitement l'inverse de la transformation : au lieu de minimiser l'énergie symétrique $E^*(I,J,T) = E(I,J,T) + E(J,I,T^{-1})$, nous allons minimiser alternativement les énergies $E(I,J,T)$ et $E(J,I,T^{-1})$ de l'équation (6.6) en utilisant comme image de référence I et J, respectivement. Cette méthode nécessite une inversion de la transformation à chaque changement d'image de référence.

Pour une meilleure comparaison avec l'algorithme précédent en deux dimensions, nous avons utilisé la même discrétisation par éléments finis. Toutefois, cela n'est pas nécessaire avec cette approche, ce qui constitue l'un de ces avantages : des algorithmes de minimisation plus rapides donnant des qualités de symétrie comparables sont utilisables, comme nous le ferons avec un cas réel tridimensionnel.

Calcul de l'inverse d'une transformation

Au sein de l'algorithme `Sym2`, l'inverse de la transformation est calculée en cherchant, pour chaque point $\mathbf{q}$, le zéro de la fonction vectorielle :

$$f_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) = \mathbf{q} + T(\mathbf{p})$$

Le zéro de cette équation est atteint en $T^{-1}(\mathbf{q})$, l'inverse recherché.

La technique de recherche du zéro de cette fonction est dérivée de la technique classique de Newton (Press et al., 1992). Pour cela, une méthode d'interpolation du champ de vecteurs est nécessaire. Nous avons utilisé une méthode d'interpolation (bi-/tri-)linéaire. L'espace des transformations (bi-/tri-)linéaires n'étant pas un groupe, le calcul de l'inverse contient nécessairement une erreur, qu'il est impossible de réduire. Toutefois, l'inverse d'une transformation est généralement trouvée avec une précision inférieure à 0.1 voxel. Cette méthode s'est avérée d'ailleurs beaucoup plus précise que la minimisation du critère $||\mathbf{q} + T(\mathbf{p})||^2$.

Nous devons être particulièrement soigneux avec l'utilisation de l'inverse, car l'énergie $E(I,J,T)$ ne garantit absolument pas que T soit effectivement inversible. Ce sont surtout les premières itérations qui posent problème, car à ce moment du recalage, seuls les points situés sur les contours de l'objet bougent : la probabilité que la transformation ne soit pas inversible est forte. La régularité ne sera acquise qu'aux itérations suivantes, lorsque ces mouvements seront propagés par régularisation aux points voisins.

Pour contourner ce problème, nous avons combiné deux techniques :

- multiplier le champ de corrections par un facteur multiplicatif inférieur à un ;
- lisser le champ de corrections, ce qui est équivalent à un lissage fluide.

6.4 Résultats sur un exemple synthétique

Le but de l'exemple synthétique suivant est de quantifier le gain en symétrie obtenu par nos deux algorithmes.

Pour cela, nous avons pris deux images de taille 520×280 contenant deux disques noirs sur fond blanc. L'un de ces disques apparaît deux fois plus gros dans l'une des images, et l'autre disque, symétriquement, deux fois plus petit. Nous avons recalé ces images en utilisant l'énergie asymétrique (6.6) en utilisant des éléments finis (algorithme `Asym`), et minimisant l'énergie symétrique (6.7) en utilisant la minimisation par éléments finis (algorithme `Sym1`) et en utilisant un calcul explicite de l'inverse de la transformation (algorithme `Sym2`).

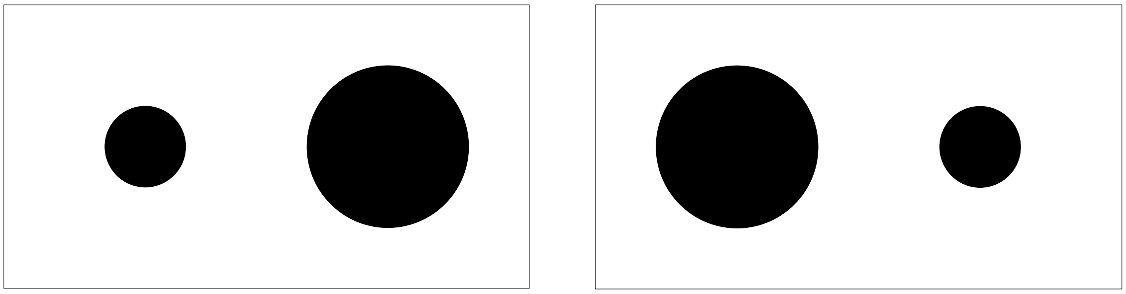


FIG. 6.4 – *Deux images synthétiques à recaler : l'un des cercles double de diamètre, l'autre, de manière symétrique, réduit son diamètre de moitié.*

6.4.1 Erreur de symétrie

La première série de mesures effectuée au cours de cette expérience concerne la symétrie proprement dite. Nous recalons d'abord les images dans les deux sens, obtenant ainsi $T(I,J)$ et $T(J,I)$. Si l'algorithme est parfaitement symétrique, nous devrions obtenir l'identité en composant ces deux transformations :

$$T(I,J) \circ T(J,I) = \mathrm{Id}$$

Nous définissons donc l'*erreur de symétrie* l'écart moyen entre cette composition et l'identité :

$$e_{sym} = \int ||T(I,J) \circ T(J,I) - \mathrm{Id}\,||$$

Nous avons calculé l'erreur de symétrie sur le couple d'image de la figure 6.4, pour les algorithmes `Asym`, `Sym1` et `Sym2`. Comme tous nos algorithmes de recalage dépendent d'un paramètre de régularisation λ, qui n'est pas choisi automatiquement (voir discussion page 42), nous devons calculer cette erreur pour toute une plage de paramètres afin de regarder l'évolution de cette erreur en fonction de la force de la régularisation. Ces résultats sont reportés dans la figure 6.5.

Les résultats montrent que l'erreur de symétrie, en utilisant l'énergie quadratique (6.6), est de l'ordre de 4 pixels en moyenne. Cette erreur est considérablement réduite en utilisant la symétrisation de cette énergie : de l'ordre de 0.4 pixels sans calculer l'inverse de la transformation (`Sym1`), et de l'ordre de 0.3 pixels en calculant explicitement l'inverse (`Sym2`).

6.4.2 Symétrisation de la récupération des croissances et des décroissances

L'autre série de mesures que nous reportons concerne le problème plus spécifique de la récupération des croissances et des décroissances. Nous avons affirmé en introduction que les mesures

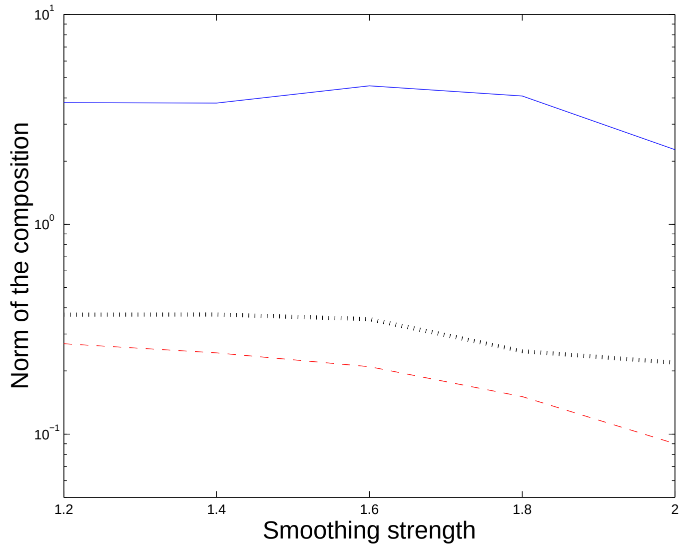


Fig. 6.5 – *Erreur de symétrie (en échelle logarithmique) obtenue sur le couple d'image de la figure 6.4 en fonction du paramètre de régularisation λ, pour les algorithmes* `Asym` *(en trait plein),* `Sym1` *(en pointillés) et* `Sym2` *(en tirets). L'erreur de symétrie est considérablement réduite en utilisant une énergie symétrique, avec un avantage pour l'algorithme* `Sym2` *utilisant le calcul de l'inverse de la transformation.*

de similarité et de régularisation standard ont tendance à retrouver plus facilement les croissances que les décroissances, et que ce problème était lié à la dissymétrie du recalage et devrait donc être résolu avec un algorithme symétrique : nous allons maintenant le vérifier en pratique.

Pour cela, nous allons calculer le log-jacobien $\log(|dT|)$ de la transformation partout dans l'image. Cette valeur est un indice local de la variation de volume : elle est positive si le volume croît, et négative si le volume décroît (voir figure 6.6).

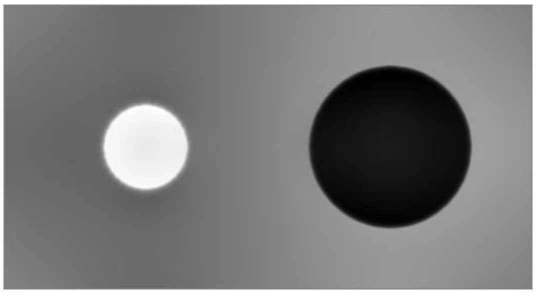
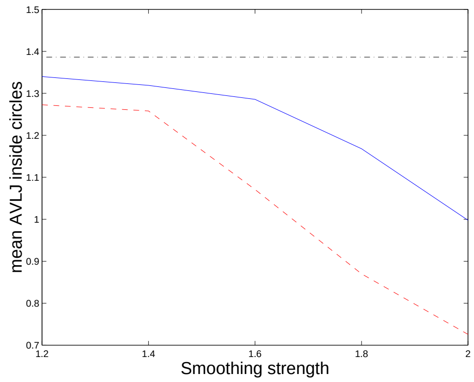


Fig. 6.6 – *Un exemple d'image de log-jacobien d'une transformation recalant les deux images de la figure 6.4. Les valeurs positives, en clair, se situent à l'intérieur du petit cercle qui croît. Les valeurs négatives, en noir, se situent à l'intérieur du grand cercle qui décroît. Les valeurs grises correspondent à des variations de volume négligeables.*

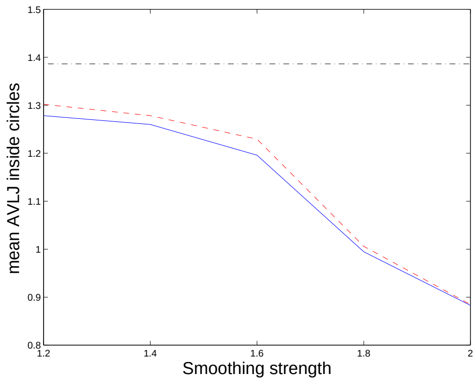
Nous avons calculé la moyenne du log-jacobien à l'intérieur des deux cercles, et pris sa valeur absolue (*absolute value of the log-Jacobian*, ou AVLJ). Si les croissances sont retrouvées aussi bien que les décroissances, l'AVLJ à l'intérieur du grand cercle doit être égal à l'AVLJ à l'intérieur du petit ; si, de plus, les cercles sont parfaitement recalés, cette valeur doit être égale à

$$\log\left[\frac{\pi(2r)^2}{\pi r^2}\right] = \log(4) \approx 1.39$$

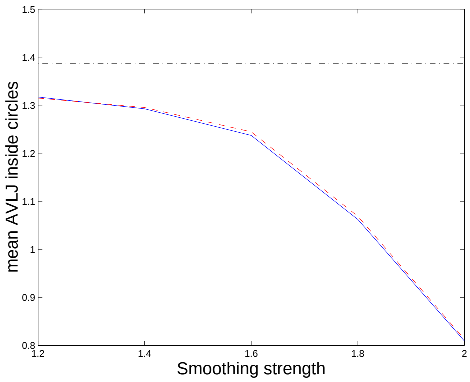
Nous avons calculé l'AVLG à l'intérieur des deux cercles pour les trois algorithmes `Asym`, `Sym1` et `Sym2`, en fonction de la valeur du paramètre de régularisation, figure 6.7



(a) `Asym`



(b) `Sym1`



(c) `Sym2`

FIG. 6.7 – *Tracé de l'AVLJ à l'intérieur du grand cercle (ligne pleine) et du petit cercle (ligne pointillée) en fonction du paramètre de régularisation et comparée à la valeur théorique de* $\log(4) \approx$ 1,39*, pour les algorithmes* `Asym`*,* `Sym1` *et* `Sym2`*.*

Les résultats montrent que pour tous les algorithmes, l'AVLJ diminue lorsque la force de la régularisation augmente, et s'éloigne de la valeur théorique, ce qui est parfaitement normal. Cependant, avec l'algorithme `Asym`, l'AVLJ à l'intérieur du grand cercle est toujours supérieur à celui du petit cercle : le rétrécissement du grand cercle est mieux retrouvé que la croissance du petit cercle.

En utilisant la symétrisation de l'énergie et l'algorithme `Sym1`, l'écart entre les deux courbes est considérablement réduit. Il reste cependant une petite différence, à l'avantage cette fois-ci de la croissance du petit cercle. Nous n'avons pas encore d'explication à cette légère inversion de tendance pour l'algorithme `Sym1`.

Avec l'algorithme `Sym2`, la différence entre les deux courbes est virtuellement nulle : les croissances et les décroissances sont retrouvées de manière similaire.

Les résultats montrent que `Sym2` s'en sort un peu mieux que `Sym1`. L'explication réside en partie dans le fait que la minimisation directe de l'énergie (6.7) n'est pas évidente, et la qualité de la symétrie ainsi obtenue, quoique bien supérieure à celle obtenue avec l'énergie asymétrique (6.6), n'est encore pas parfaite. A cela, plusieurs obstacles rencontrés sont autant d'explications possibles.

- La modélisation par éléments finis, telle que nous l'avons implémentée, fait appel à un rééchantillonage de l'image J, afin que la triangularisation de $J \circ T$ corresponde exactement à celle de I : le calcul de la similarité entre les images est ainsi relativement simple a calculer, mais le profil de J change au cours de la minimisation, ce qui n'est pas tout à fait rigoureux. Une implémentation plus complexe pourrait déformer la triangularisation de J avec T. Le calcul de la similarité demande alors de calculer les intersections des deux triangularisations, ce qui est beaucoup plus lourd numériquement.
- L'énergie est relativement difficile à minimiser car le terme en $1/|dT|$ soulève des problèmes numériques, notamment lorsque la contrainte de régularité est faible ($\lambda \ll 1$). A titre de remarque, notons que (Rohlfing et Maurer, 2001) approxime son énergie de régularisation, possédant un pôle en 0, par une énergie qui ne prend pas de valeur infinie, et qui pénalise simplement plus fortement les jacobiens négatifs, afin de s'affranchir de ces problèmes numériques.
- Enfin, la descente de gradient sur T est une méthode de minimisation qui est hautement dissymétrique : nous retombons là sur le troisième point de notre liste des causes de dissymétrie (section 6.1.2). En effet, la dérivée de l'énergie (6.7) par rapport à T fait intervenir les dérivées de J, mais pas celles de I. Cela empêche une symétrie parfaite du résultat.

Enfin, nous voudrions souligner qu'à forces de régularisation égales, la solution donnée par une énergie symétrique n'est *pas* partout meilleure que celle donnée par une énergie standard : le petit cercle est plus grossi avec une énergie symétrique, mais le grand cercle est moins rétréci. La distance par rapport à la vraie transformation n'est pas uniformément décrue ; les erreurs sont simplement distribuées plus équitablement entre les régions croissantes et décroissantes.

6.5 Résultats sur un cas réel d'IRM de sclérose en plaques

Dans cette section, nous montrons que l'utilisation d'un algorithme symétrique simplifie sensiblement l'algorithme de détection d'évolution de lésions de sclérose en plaques dans les images IRM développé par (Rey et al., 1999).

Dans ce papier en effet, notre camarade David Rey recale deux IRM du même patient atteint de sclérose en plaques acquises à des instants différents, et utilise le jacobien de la transformation pour détecter les lésions ayant évoluées entre les deux acquisitions. Lors de ses travaux, il s'est aperçu qu'il était plus difficile de retrouver les lésions croissantes : il propose donc de recaler les images dans les deux sens, et de rechercher les régions décroissantes uniquement, mais sur les deux transformations (pour cela, il se donne un seuil inférieur à un, et ne retient que les régions dont le jacobien est inférieur à ce seuil). Cette technique permet de détecter les lésions croissantes et décroissantes.

En utilisant un algorithme symétrique, la procédure est considérablement allégé, puisqu'il suffit de ne recaler qu'une seule fois les images. De plus, les seuils sont cohérents entre les lésions croissantes et décroissantes.

Pour illustrer ce point, prenons deux IRM T2 d'un patient souffrant de sclérose en plaques, figure 6.8. Le temps séparant les deux acquisitions est de 8 semaines. La difficulté principale provient de la faible résolution coronale (les voxels ont une taille de $0{,}9 \times 0{,}9 \times 5{,}5$ mm^3), comme nous pouvons le voir sur les première et dernière lignes de la figure. Cette faible résolution empêche une récupération totale des déplacements apparents, et favorise donc l'émergence de problèmes de dissymétrie.

Nous avons calculé quatre transformations sur cet ensemble d'images : une dans chaque sens avec `Asym`, et une pour chaque sens avec `Sym2`. Ces algorithmes utilisent ici une discrétisation par différences finies et non par éléments finis, moins rapide et plus complexe que cette première, surtout en 3D.

Pour chacune de ces transformations, nous calculons le jacobien, puis nous recherchons manuellement l'isovaleur du jacobien qui segmente au mieux la lésion — comme cela est expliqué dans (Rey et al., 1999), il n'existe pas actuellement de méthode efficace pour trouver la meilleure valeur du jacobien automatiquement. Ces isovaleurs ont été tracées et superposées sur les images sources, pour ces quatre transformations, à la figure 6.8.

Sur ce jeu de données, le calcul symétrique du champ de déformations améliore la détection et la segmentation des lésions évolutives. Premièrement, il permet d'utiliser la même valeur de log-jacobien pour les lésions croissantes et décroissantes : en effet, avec l'algorithme symétrique, les valeurs du jacobien segmentant la lésion en sens direct et inverse sont inverses l'une de l'autre, ce qui n'est pas vérifié avec un algorithme de recalage classique. Deuxièmement, sur ce jeu de données difficile, l'énergie symétrique donne une meilleure segmentation, collant à la lésion de plus près.

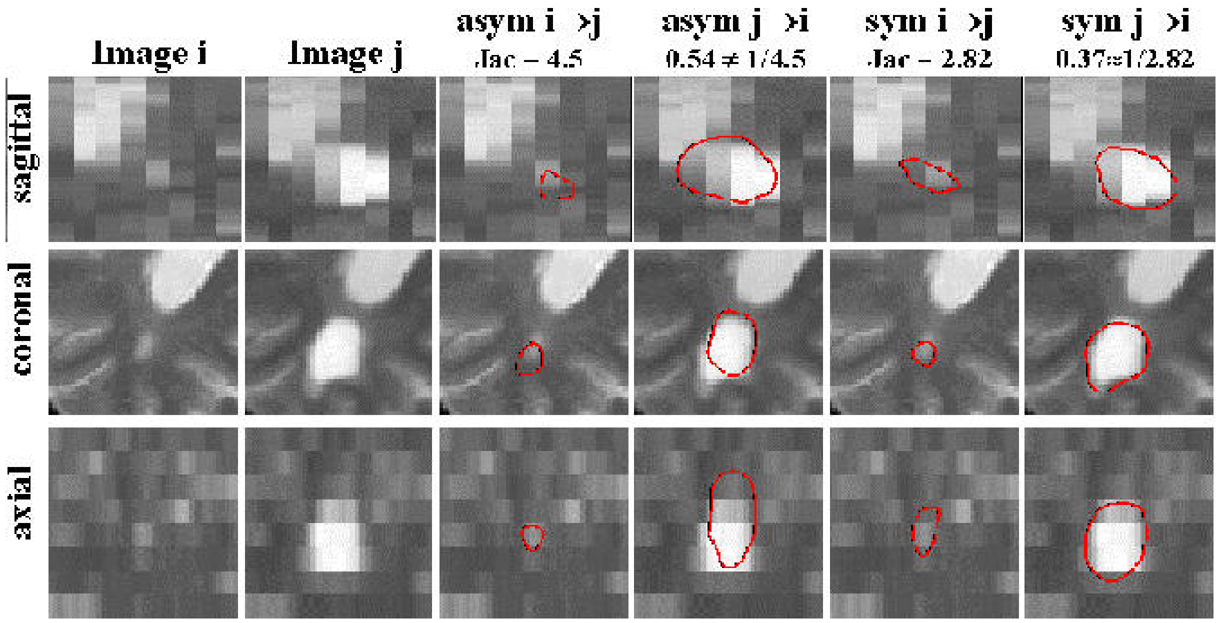


FIG. 6.8 – ***Deux premières colonnes :*** *images originales.* ***Colonnes suivantes :*** *segmentation de la lésion par une isovaleur du jacobien de la transformation, avec un algorithme asymétrique en sens direct et inverse, et avec un algorithme symétrique en sens direct et inverse. La valeur du jacobien correspondant à la courbe en rouge est optimisée manuellement et est reportée en haut de la colonne correspondante. Avec l'algorithme asymétrique, ces valeurs ne sont pas inverses l'une de l'autre, contrairement au cas symétrique. De plus, la segmentation obtenue avec l'énergie symétrique semble meilleure et colle de plus près à la lésion.*

6.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exposé le problème de la dissymétrie du recalage, dont nous avons listé les trois grandes causes. Nous avons proposé une solution à la première de ces causes en utilisant des énergies invariantes par inversion. Nous avons présenté des résultats en utilisant une telle énergie, et nous avons montré le gain en symétrie pure ainsi obtenu. De plus, contrairement aux énergies classiques, ces énergies ne privilégient pas les rétrécissements par rapport aux croissances, et il est donc plus aisé de détecter les évolutions de lésions au cours du temps. Nous détaillerons d'ailleurs au chapitre 9 une application du recalage symétrique à l'interpolation d'images, pour laquelle il est important de garantir cette invariance.

La symétrie pose cependant un certain nombre de problèmes non encore résolus.

- Les algorithmes SIB compétitifs symétriques, dont nous avons présenté deux instances dans ce chapitre (`Sym1` et `Sym2`), souffrent des mêmes maux que leurs compères asymétriques (`Asym`) discutés au chapitre 3. Or, les énergies hybrides du type de celles utilisées en recalage P&S, et qui ne présentent pas ces problèmes, ne sont pas symétrisables facilement avec notre technique :
  1. Les appariements C n'ont *a priori* aucune raison d'être inversibles, ni d'être forcés à être inversibles.
  2. Si, malgré tout, C et T sont inversibles, le terme $\int ||C^{-1} - T^{-1}||^2$ ne peut pas être calculé autrement qu'en calculant C^{-1} et T^{-1}.
- Après la dissymétrie des énergies, la deuxième grande cause de dissymétrie provient de l'algorithme de minimisation. Une technique de descente de gradient symétrique devrait être mise en place. Il nous est apparu que ce problème pourrait être résolu en utilisant une *racine carrée au sens de la composition* de T, c'est-à-dire une fonction t telle que $T = t \circ t$; ainsi, les énergies pourraient être écrite dans le repère intermédiaire décrit par t, par exemple $\int (I \circ t^{-1} - J \circ t)$. Le problème est qu'à notre connaissance, il n'existe pas de théorème d'existence d'une telle racine carrée dans le cas général.
- Bien que les algorithmes présentés ici soit du type compétitifs, il serait très intéressant d'appliquer cette approche aux algorithmes paramétriques, pour deux raisons :
  1. d'une part, parce que comme nous l'avons souligné, les énergies hybrides sont difficilement symétrisables, et donc la régularité des résultats n'est pas homogène : il est donc tentant de forcer l'uniformité en utilisant l'approche paramétrique, très efficace pour des déformations faiblement non rigides ;
  2. d'autre part, parce que les énergies de régularisation sont beaucoup plus compliquées à symétriser que les énergies de similarité. Utiliser une approche paramétrique permettrait de s'affranchir de l'utilisation de telles énergies.

  Cette approche suppose bien sûr que nous utilisions en premier lieu un groupe de transformations non rigides adéquat.

6.A Inverse de différentielle et norme quadratique

Si $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une transformation difféomorphique bidimensionnelle, sa matrice jacobienne s'écrit :

$$dT(\mathbf{p}) = \left(\frac{\partial T}{\partial x}(\mathbf{p}) \frac{\partial T}{\partial y}(\mathbf{p}) \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_x}{\partial x}(\mathbf{p}) & \frac{\partial T_x}{\partial y}(\mathbf{p}) \\ \frac{\partial T_y}{\partial x}(\mathbf{p}) & \frac{\partial T_y}{\partial y}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

L'inverse de cette matrice 2×2 est

$$[dT(\mathbf{p})]^{-1} = \frac{1}{|dT(\mathbf{p})|} \begin{pmatrix} \frac{\partial T_y}{\partial y}(\mathbf{p}) & -\frac{\partial T_y}{\partial x}(\mathbf{p}) \\ -\frac{\partial T_x}{\partial y}(\mathbf{p}) & \frac{\partial T_x}{\partial x}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

Si l'on définit la norme quadratique $||\cdot||$ sur les matrices par

$$||A||^2 = \mathrm{tr}(A^T A) = \sum_{i,j} a_{i,j}^2$$

alors, d'après la formule précédente,

$$||[dT(\mathbf{p})]^{-1}||^2 = \frac{1}{|dT(\mathbf{p})|^2} ||dT(\mathbf{p})||^2$$

Deuxième partie

Applications

Chapitre 7

Recalage de séquences d'échographies tridimensionnelles

« Le plus pénible dans tout ça, c'était de coincer le cochon. Jusque-là la brave bête pensait que c'était pour rire qu'on la coursait, une façon de jouer, si bien qu'au lieu de prendre peur elle se défilait gaminement, gigotait sans cesse. D'autre part c'est pas simple d'en vouloir brutalement à quelqu'un, de se mettre froidement à le détester. (...)

Au hasard de la chorégraphie le père ajustait son coup, soucieux de ne pas trop viser l'audience, s'énervant crescendo au fil des dérapages. Le cochon — toujours dans l'esprit de la déconnade — devenait de moins en moins tenable, gigotant au possible, ne serait-ce que pour voir lequel d'entre nous tiendrait le plus longtemps. Mais à un moment ou à un autre il fallait bien que le coup parte, et là, en général, elle retombait d'un coup l'ambiance.

Était-ce l'énervement, la pesanteur du climat, toujours est-il que ce jour-là l'ambiance retomba encore plus profond que d'habitude. En effet, va savoir pourquoi ce jour-là le coup partit dans une direction parfaitement inattendue, touchant l'oncle en pleine poitrine en plus de déstabiliser tout le monde. Le pauvre homme s'écroula sur place, sobrement tout de même, et déjà le père nous gueulait dessus parce qu'on avait relâché la bête. »

Serge Joncour, *Vu*, 1998.

Ce chapitre présente nos travaux réalisés dans le cadre du projet européen ROBOSCOPE, qui s'est déroulé de juin 1998 à juin 2000. Ce projet a pour but le suivi des déformations du cerveau au cours d'une opération de neurochirurgie. Pour cela, nous disposons d'échographies tridimensionnelles fournies par une sonde ultrasonore spécialement conçue pour cette application. Le travail présenté dans ce chapitre fourni une étude de faisabilité du suivi de ces déformations par recalage de la séquence d'échographies avec `MAMAN`[1], avec de surcroît une contrainte de temps, le suivi devant se faire idéalement en temps réel. Ces travaux ont été publiés dans (Pennec et al., 2001).

Nous allons d'abord présenter le projet ROBOSCOPE, et plus spécifiquement les parties concernant le recalage, à la section 7.1. Puis nous présenterons l'algorithme retenu pour cette application, section 7.2, et nous montrerons les résultats obtenus sur les jeux de données fournies par le projet ROBOSCOPE à la section 7.3.

7.1 Présentation du problème

7.1.1 Le projet européen ROBOSCOPE

Le projet ROBOSCOPE est un projet européen regroupant de nombreux partenaires, tant industriels (IBMT, Fokker Control Systems, Kretz-Technik, Silicon Graphics, ...) qu'académiques (INRIA, Imperial College, Max Planck Institut, Katholieke Universiteit Leuven, Hôpital Henri Mondor,...) et qui s'est étendu sur deux ans, de juin 1998 à juin 2000.

Le but de ce projet est de développer un système de neuronavigation utilisant un bras manipulateur guidant les instruments chirurgicaux, et une sonde échographique tridimensionnelle permettant de suivre en temps réel la progression de ces instruments ainsi que les déformations du cerveau au cours de l'opération.

L'utilité du bras manipulateur réside en premier lieu en l'augmentation de la précision du geste du neurochirurgien. Cela est réalisé par la démultiplication de ses mouvements, mais surtout par la réduction du tremblement naturel de la main du chirurgien sous tension musculaire. La précision est une contrainte majeure en neurochirurgie, où l'endommagement accidentel de certaines zones du cerveau peut entraîner des séquelles graves et irréversibles.

Outre cette démultiplication, des fonctionnalités peuvent être ajoutées au bras manipulateur. Dans le cadre du projet ROBOSCOPE, le bras est de surcroît contraint de rester dans une certaine zone de sécurité et à ne pas dépasser une certaine limite (*no-go area*) au-delà de laquelle des tissus importants pourraient être endommagés. La délimitation de cette zone doit être faite au cas par cas, préalablement à l'opération, et en fonction de la localisation de la zone à opérer.

L'utilisation d'un système d'imagerie tridimensionnel permet de pratiquer une chirurgie minimalement invasive. En suivant l'opération à l'aide d'échographies, seul un petit orifice est nécessaire pour introduire les instruments ainsi que la sonde, ce qui réduit considérablement les traumatismes et les risques de complication postopératoire, sans compter le gain esthétique pour le patient.

Le choix de l'utilisation d'une sonde échographique pour suivre les instruments chirurgicaux et les déformations du cerveau est essentiellement d'ordre économique : c'est en effet la solution la moins coûteuse. Les IRM peropératoires sont encore très chères et peu nombreuses dans le monde. Leur utilisation est peu commode car l'espace de travail est limité ; de plus, des instruments chirurgicaux amagnétiques doivent être utilisés. L'utilisation d'images X ou scanner est moins coûteuse que l'IRM, mais le neurochirurgien doit opérer muni d'un tablier de plomb afin de se protéger des rayons nocifs, ce qui n'est pas commode pour des opérations de plusieurs heures. L'utilisation des

1. Pour des raisons historiques, nous avons utilisé `MAMAN` pour cette application plutôt que `PASHA`, ce dernier n'ayant pas été encore conçu

images échographiques est donc une solution pratique pour le neurochirurgien, et comparativement peu coûteuse. De plus, les échographies peuvent être obtenue quasiment en temps réel (jusqu'à 5 images par seconde prévues pour la sonde tridimensionnelle du projet ROBOSCOPE). En contre-partie, les échographies sont des images beaucoup plus difficiles à interpréter que les IRM ou X, et présentent un rapport signal/bruit beaucoup plus faible.

Le but de la partie du projet ROBOSCOPE dont nous allons traiter est une étude de faisabilité de l'utilisation d'outils de recalage automatique d'images pour corriger au moins partiellement les déplacements survenus pendant l'opération.

7.1.2 Déroulement de l'opération neurochirurgicale

Préalablement à une opération de neurochirurgie, une IRM du patient est acquise (appelée IRM 1). C'est sur cette IRM que toute l'opération est planifiée, et notamment la délimitation des tissus à enlever, le futur positionnement de l'ouverture pratiquée dans le crâne, le trajet souhaité des instruments chirurgicaux de cette ouverture aux tissus à enlever, ainsi que la délimitation des zones sensibles dans lesquelles les instruments ont une interdiction formelle de pénétrer.

Cependant, le cerveau se déforme pendant l'opération. Le liquide céphalorachidien se déverse par l'ouverture pratiquée dans le crâne pour l'opération, provoquant un affaissement bien connu (*brain shift*). La progression des instruments chirurgicaux et l'ablation de tissus occasionnent également des déplacements. Il faut donc pouvoir remettre à jour la géométrie de l'IRM préopératoire sur laquelle a été planifiée l'opération.

Pour cela, des échographies 3D sont acquises régulièrement. En recalant l'IRM 1 sur l'échographie actuelle, nous pouvons injecter les déformations observées dans l'image préopératoire.

7.1.3 Stratégie de recalage pour le suivi du mouvement

Le recalage non rigide d'IRM et d'échographies est un problème complexe encore peu étudié. Dans le cadre du projet ROBOSCOPE, ce problème est habilement coupé en deux : un recalage IRM/US rigide d'une part, un recalage monomodal US non rigide d'autre part.

Pour cela, une image échographique, appelée US 1, est acquise au tout début de l'opération, avant l'ouverture de la dure mère contenant le liquide céphalorachidien. Dans un premier temps, nous recalons IRM 1 et US 1. C'est un recalage multimodal IRM/US que nous pouvons supposer rigide, car l'anatomie a peu bougé pendant ces deux acquisitions, bien que l'échographie US 1 puisse contenir des distorsions géométriques propres à cette modalité. Les résultats des travaux portant sur cette partie du recalage, auxquels nous n'avons pas participé, peuvent être trouvés dans (Roche et al., 2000b).

Ensuite, pendant l'opération, l'image US 1 est recalée sur l'image US n courante, de manière monomodale mais non rigide. Il suffit alors de composer les transformations rigide et non rigide pour retrouver les déplacements entre IRM 1 et US 1. Cette composition peut permettre également de déformer IRM 1 dans la géométrie actuelle du cerveau et de générer ainsi des IRM dites « virtuelles » (voir figure 7.1).

7.1.4 Travaux existants

The difficult MR/US registration problem

The idea of MR/US registration is already present in (Trobaugh et al., 1994a; Trobaugh et al., 1994b) where the US probe is calibrated (i.e. registered to the surgical space) and then tracked using an optical device. The MR/US registration is then obtained using the registration of the

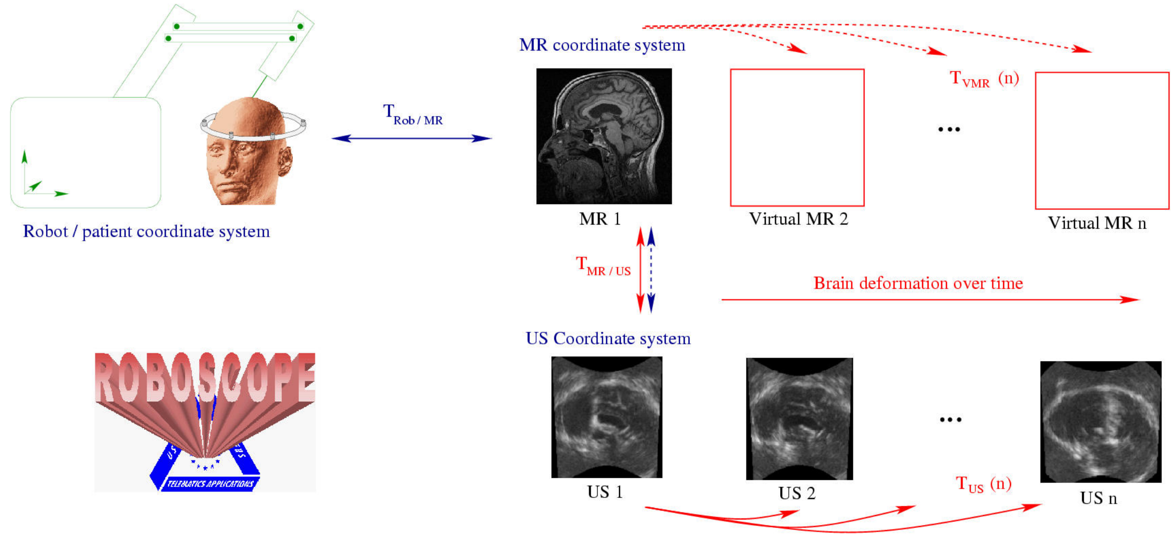


FIG. 7.1 – *Vue d'ensemble de la stratégie de recalage IRM/US du projet ROBOSCOPE.*

MR image to the surgical space by standard stereotaxic neurosurgical procedures. (Richard et al., 1999) improved this method by designing a real-time low-cost US imaging system based on a PCI bus. In (Pagoulatos et al., 1999), the tracking of the US probe is performed with a DC magnetic position sensor. In (Erbe et al., 1996), the registration is performed by interactively delineating corresponding surfaces in all images and a visual rigid fitting of the surfaces using a 6D space-mouse. In (Hata et al., 1994), the outlines of the 2D US image are registered to the MR surface using a Chamfer matching technique. All these techniques only perform a *rigid* registration of the MR and the US images.

For a non rigid registration (i.e. a brain shift estimation), we have to turn to (Gobbi et al., 1999; Gobbi et al., 2000; Comeau et al., 2000), where the 2D US probe is still optically and rigidly tracked but the corresponding MR slice is displayed to the user who marks corresponding points on MR and US slices. Then, a thin plate spline warp is computed to determine the brain shift. This method is also developed in (Bucholz et al., 1997) with the possibility of using 3D US images and a deformation computed using a spring model instead of splines. More recently, (Ionescu et al., 1999) registered US with Computed Tomography (CT) data after automatically extracting contours from the US using watershed segmentation. In these studies, there is no processing of a full time sequence of US images : the brain shift estimation is limited to a few samples at given time-points as the user interaction is required at least to define the landmarks.

Recently, an automatic rigid registration of MR and US images was presented (Roche et al., 2000b). This work is based on image intensities and does not rely on feature extraction. However, the estimated motion remains limited to rigid or possibly affine transformations. Up to our knowledge, only (King et al., 2000) deals with an automatic non-rigid MR/US registration : the idea is to register a surface extracted from the MR image to the 3D US image using a combination of the US intensity and the norm of its gradient in a Bayesian framework. The registration is quite fast (about 5 minutes), even if the compounding of the 3D US and the computation of its gradient takes about one hour. However, experiments are presented only on phantom data and our experience (see section 7.3) is that real US images may lead to quite different results.

Tracking methods in sequences of US images

Since non-rigid MR/US registration is a difficult problem, we chose to split it into two sub-problems: first a rigid MR/US registration is performed with dura matter still closed (there is no brain shift yet), for instance using the approach of (Roche et al., 2000b). Then we look for the non-rigid motion within the US time-sequence. In the literature, we found a small number of articles on the registration of 3D US images. (Strintzis et Kokkinidis, 1997) use a maximum-likelihood approach to deduce a similarity measure for ultrasound images corrupted by Rayleigh noise and a block-matching strategy to recover the rigid motion. In (Rohling et al., 1998), the correlation of the norm of the image gradient is used as the similarity measure to rigidly register two US images in replacement of the landmark-based RANSAC registration of (Rohling et al., 9967). However, these methods only deal with rigid motion and consider only two images, eluding the tracking problem.

One has to move to cardiac application to find some real tracking of non-rigid motion in US images. In (Papademetris et al., 1999), the endo- and epicardial surfaces are interactively segmented on each 2D image plane. Then, a shape-memory deformable model determines the correspondences between the points of the 3D surfaces of successive images. These correspondences are used to update an anisotropic linear elastic model (finite element mesh). The approach is appealing but relies once again on an interactive segmentation. In (Sanchez-Ortiz et al., 2000), a combination of feature point extraction (phase-based boundaries) and a multi-scale fuzzy clustering algorithm (classifying the very low intensities of intra-ventricular pixels) is used to segment the surface of the left ventricular cavity. This process is done in 2D+T and then reconstructed in 3D. Thus it exploits the whole sequence before tracking the motion itself, which is not possible for our application. These two methods are well suited for the shape of the cardiac ventricle using dedicated surface models. If they could be adapted to the brain ventricles, it seems difficult to extend them to the tracking of the volumetric deformations of the whole brain.

7.2 From registration to tracking

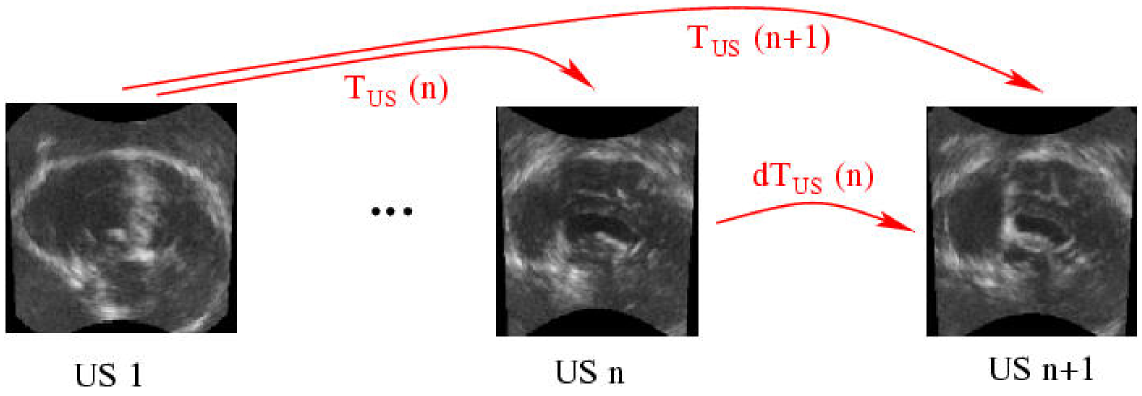
In the previous chapters, we studied how to register two images together. We now have to estimate the deformation of the brain between the first image (since the dura mater is still closed, it is assumed to correspond to the preoperative brain) and the current image of the sequence. One could think of registering directly US_1 (taken at time t_1) and US_n (at time t_n) but the deformations could be quite large and the intensity changes important. To constrain the problem, we need to exploit the temporal continuity of the deformation.

First, assuming that we already have the deformation $T_{US}(n)$ from image US_1 to US_n, we register US_n with the current image US_{n+1}, obtaining the transformation $dT_{US}(n)$. If the time step between two images is short with respect to the deformation rate (which should be the case in real-time sequences at a rate ranging from 1 to 5 images per second), this registration should be easy. Moreover, the intensity changes should be small. For this step, we believe that the SSD criterion is well adapted.

Then, composing with the previous deformation, we obtain a first estimation of $T_{US}(n+1) \simeq dT_{US}(n) \circ T_{US}(n)$. However, the composition of deformation fields involves interpolations and just keeping this estimation would finally lead to a disastrous cumulation of interpolation errors:

$$T_{US}(n+1) = dT_{US}(n) \circ dT_{US}(n-1) \ldots dT_{US}(2) \circ dT_{US}(1)$$

Moreover, a small systematic error in the computation of $dT_{US}(n)$ leads to a huge drift in $T_{US}(n)$ as we go along the sequence.



Thus, we only use $dT_{US}(n) \circ T_{US}(n)$ as an initialization for the registration of US_1 to US_n. Starting from this position, the residual deformation should be small (it corresponds to the correction of interpolation and systematic error effects) but the difference between homologous point intensities might remain important. In this case, the Local Correlation Coefficient (LCC, see chapter 4) criterion might be more appropriate than the SSD, despite its worse computational efficiency.

One of the main consequences is that the first US image will have to be of very high quality since it will be the only reference for tracking deformations along the whole sequence. One possibility consists in acquiring several images of the still brain in order to compute a mean image of better quality. Another possibility consists in performing some anisotropic diffusion on US_1 to improve its quality.

7.2.1 Registration parameters

For this application, we have chosen the `MAMAN` algorithm, presented in chapter 2 — we did not use `PASHA`, since it did not exist at that time. In the following results, the SSD criterion has been used, although the LCC criterion has been used as well without any noticeable gain in the tracking quality.

Since the estimated transformation has to be strongly constrained in order to remain smooth even with noisy images, a Gaussian reparametrization of the vector field has been used (the Gaussian reparametrization has already been presented in section 2.3.7 p. 58). We should mention that in this particular case, the Gaussian reparametrization has been particularly useful and enabled results that we were not able to retrieve without this reparametrization. A Levenberg-Marquardt gradient descent has been used to minimized the SSD w.r.t. the coefficient of this Gaussian parametrization.

Two specific features have been added to `MAMAN` for this particular set of experiments, in order to adapt it more specifically to ultrasound images. First, a threshold on the source image is chosen, so that the similarity measure is not computed for pixels whose intensity is below this threshold. Indeed, in the following ultrasound images, the information mainly relies in high intensity pixels ; the low intensities are mainly due to noise and their patterns should not be registered. Second, if the correspondent of a point is found outside the field of view of the probe (seen as the black patches on the sides of the images), then its previous correspondent is maintained. This second feature avoid the registration of the black patterns, although its efficiency is not perfect : the edges of the field of view are still slightly moved, as we will see in the following experiments.

7.3 Experiments

In this section, we present qualitative results of the tracking algorithm on a sequence of US images of a phantom, and quantitative results on a small sequence of US images of a dead pig brain with a simulated cyst. Experiments were performed using the SSD and the LCC criterion without significant differences in the results. Since the LCC is around 2 times slower than the SSD, we present here results and computation times for the SSD criterion. All 3D-US images were acquired using a commercial 3D-US volume scanner Voluson 530 D from Kretz Technology with a commercial 4-9 MHz, 90 degrees aperture probe. Unfortunately, this probe is not the probe expected to be used for this particular surgical procedure, since at the time of these acquisitions it was still not completely designed. This is quite unfortunate since image quality may be very dependent of the probe — in our case, we should expect a worse image quality than those of the images presented below.

7.3.1 A phantom study

Within the ROBOSCOPE project, an MR and US compatible phantom was developed by Prof. Auer and his colleagues at ISM (Austria) to simulate brain deformations. It is made of two balloons, one ellipsoid and one ellipsoid with a "nose", that can be inflated with known volumes. Each acquisition consists in one 3D MR image and one 3D US image (see Fig. 7.2 for an example). The goal is to use the US sequence to track the deformations and compute the corresponding virtual MR images from the first MR image. Then, the original MR images can be used to assess the quality of the tracking.

Since the US probe cannot enter the MR machine, it was removed for the MR acquisitions. Thus, we had to compensate for the apparent motion of the probe by first computing a rigid registration of all the US images together. Then we run the deformation tracking algorithm. The registration of each image of the sequence takes between 10 and 15 minutes on a standard PC running Linux.

In figure 7.2, we present the tracking results with the deformed images. The upper row presents the first images of the original phantom sequence. The lower row presents the first image registered to the current image of the sequence. These image-based results are presented in a different way in figure 7.3, which presents intensity differences before and after registration. It is clearly seen that the intensity differences are strongly reduced, showing that the registration has recovered a good part of the motion.

We also present motion-based results, to ensure the coherence and the smoothness of our registration, in figure 7.4. The recovered motion seems realistic, as it is composed only of compression of dilatation inside the balloons, except for occasional incoherences near the right edge due to image border effects.

In figure 7.5, we compare true and "virtual" (i.e. generated by our tracking algorithm) MR images. We present the MR image registered to the original US (our "ground truth", on the upper row) and the virtual MR produced by the tracking algorithm (lower row). To assess the quality of the tracking, we superimposed on the virtual MR images the contours of the balloons extracted from the "original" MR images.

Even if there are very few salient landmarks (all the information in the US images is located in the thick and smooth balloons boundaries, and thus the tracking problem is loosely constrained), results are globally good all along the sequence. This shows that the SSD criterion correctly captures the information at edges and that our regularized free-form deformation field is able to interpolate reasonably well in uniform areas.

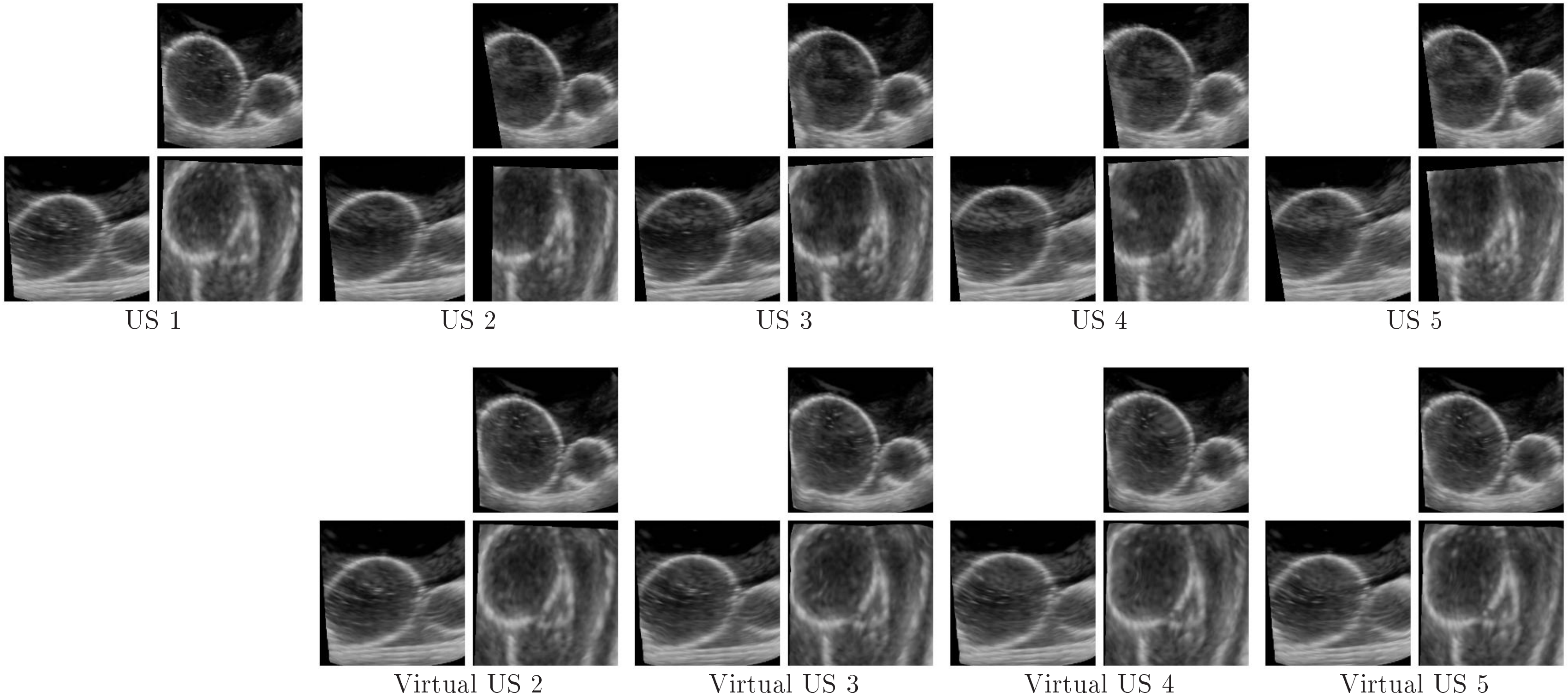


Fig. 7.2 – **Tracking deformations on a phantom**. *In this figure, each triplet of 2D images represents 3 orthogonal views resliced from the 3D image.* ***Upper Row :*** *The five images of the original phantom ultrasound sequence.* ***Lower Row :*** *The virtual ultrasound sequence, obtained by matching the first image US 1 onto the current ultrasound image US n with our tracking algorithm.*

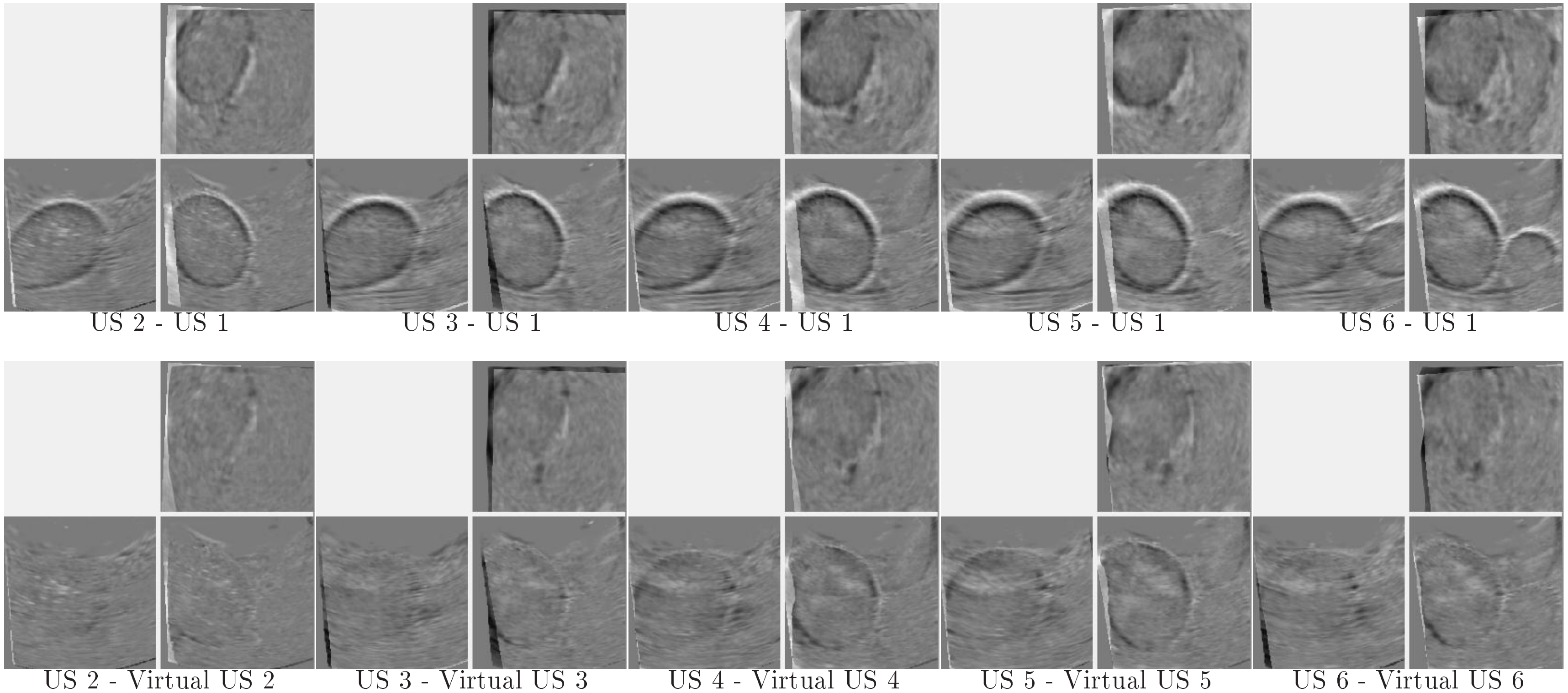


FIG. 7.3 – ***Upper Row :*** *The intensity differences between the first image and the current image for the original phantom sequence.* ***Lower Row :*** *The intensity differences between the current image and the first image registered with the current image. After registration, the intensity differences are strongly reduced.*

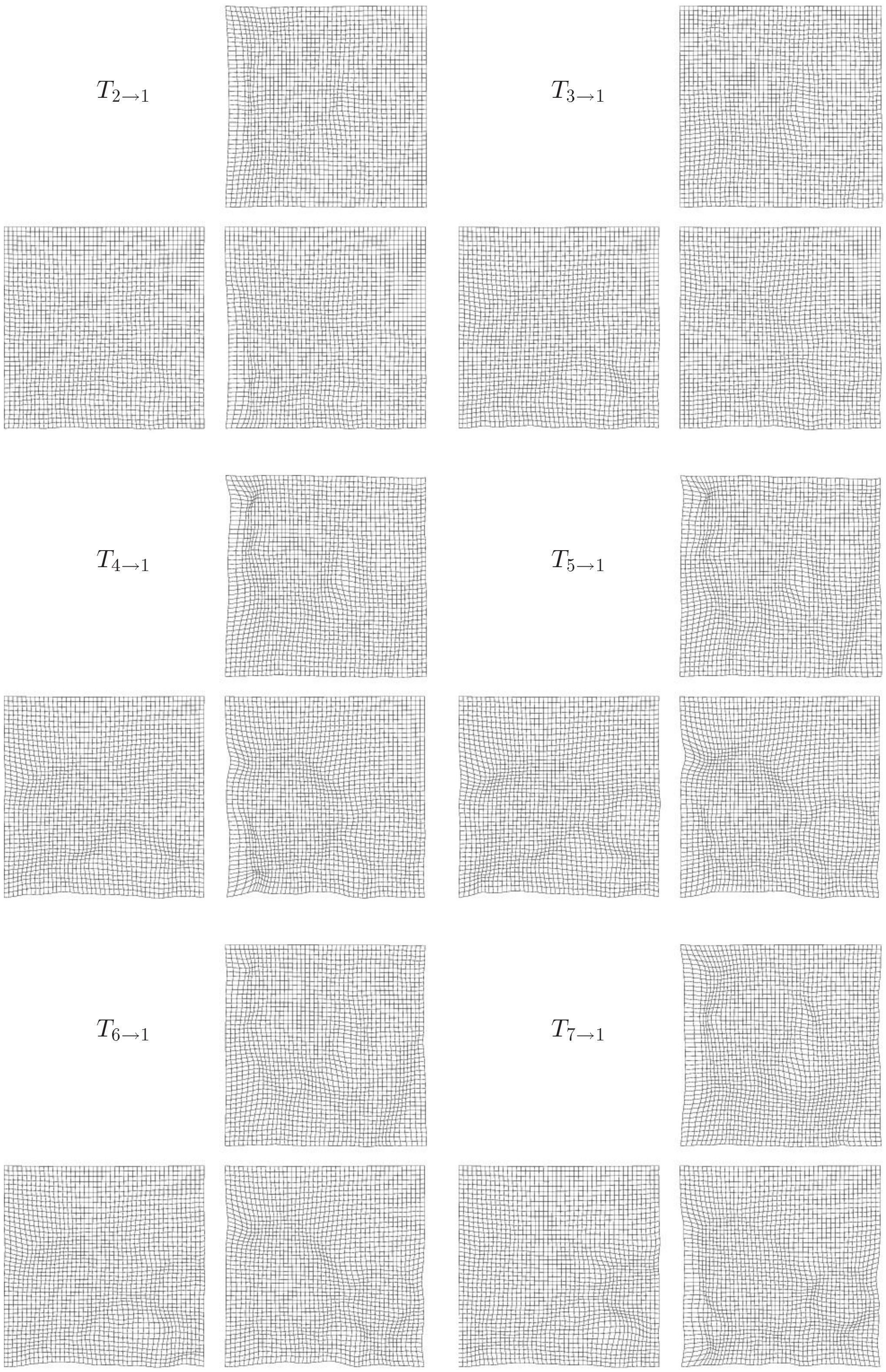


FIG. 7.4 – *Recovered motion for the phantom experiment. As desired, it is very smooth, and mainly composed of shrinkings or dilatations inside the balloons.*

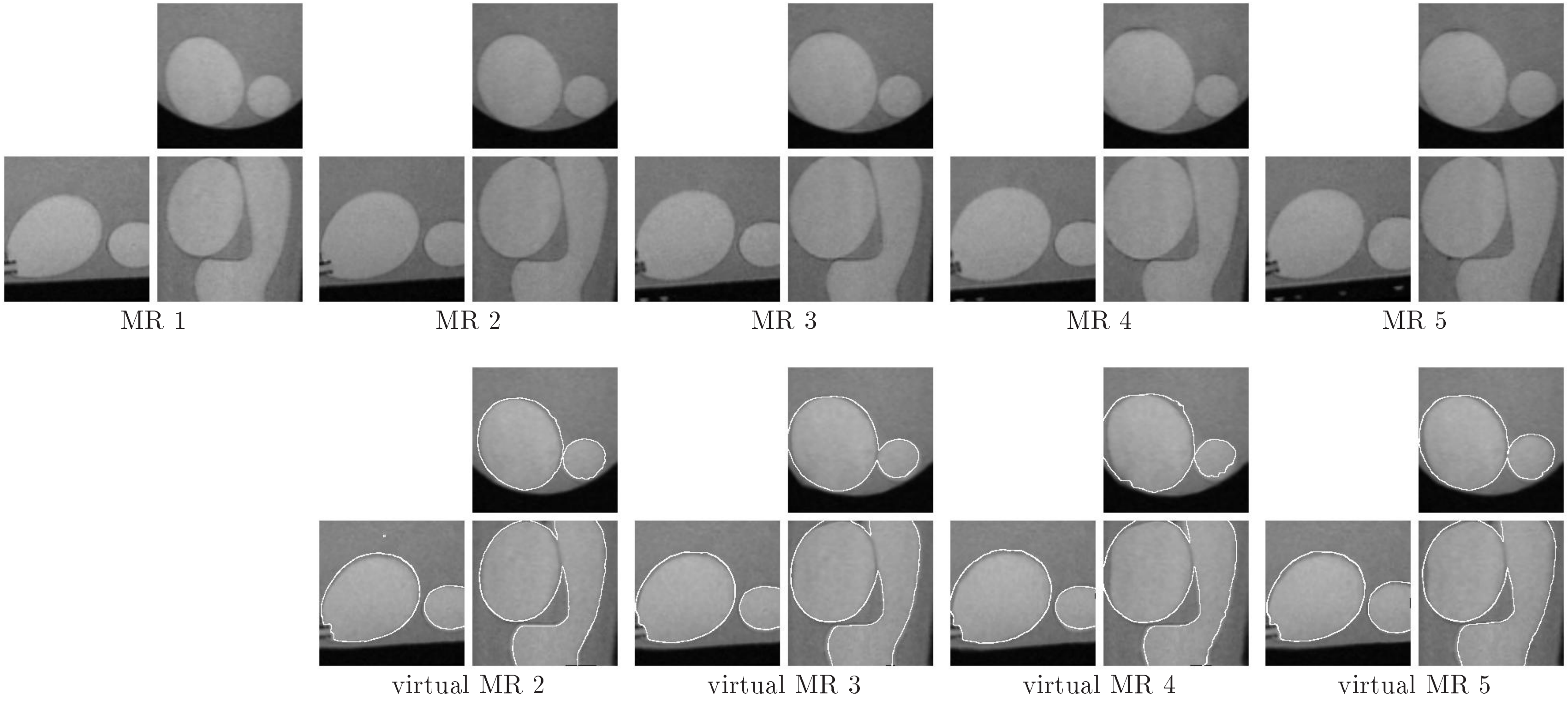


FIG. 7.5 – *The "original" MR images (rigidly registered to the corresponding US images to correct for the probe motion and the phantom motion between MR acquisitions) and the virtual MR image synthesized using the deformation field computed on the US images. To assess the quality of the tracking, we superimposed the contours of the "original" MR images. The volume of the balloons ranges from 60 to 90 ml for the ellipsoid one and 40 to 60 ml for the more complex one.*

When looking at the virtual MR in more details, one can however find some places where the motion is less accurately recovered : the contact between the balloons and borders of the US images. Indeed, the parameterization of the transformation and especially its smoothing are designed to approximate the behavior of a uniform elastic like body. If this assumption can be justified for the shift of brain tissues, it is less obvious for our phantom where balloons are placed into a viscous fluid. In particular, the fluid motions between the two balloons cannot be recovered. On the borders of the US images, there is sometimes a lack of intensity information and the deformation can only be extrapolated from the smoothing of neighboring displacements. Since we are not using a precise geometrical and physical model of the observed structures like in (Skrinjar et Duncan, 1999), one cannot expect this extrapolation to be very accurate.

As a conclusion from this experiment, one can say that elastic-like deformations are qualitatively well tracked in the sequence if there are some salient intensity landmarks surrounding the area of interest.

7.3.2 Real pig brain images

This dataset was obtained by Dr. Ing. V. Paul at IBMT, Fraunhofer Institute (Germany) from a pig brain at a post-lethal status. A cyst drainage has been simulated by deflating a balloon catheter with a complete volume scan at four steps.

The figure 7.7 presents both the original data (upper row) and the result of our tracking algorithm (lower row). Again, to better understand what is going on, we present the intensity differences between target images and deformed images, in figure 7.8. It can be see that most of the intensity differences due to motion are recovered near the balloon. We also present the recovered motion in figure 7.9, which is smooth and mainly composed of a growth centered on the balloon. The registration of each image of the sequence takes between 10 and 15 minutes on a standard PC running Linux.

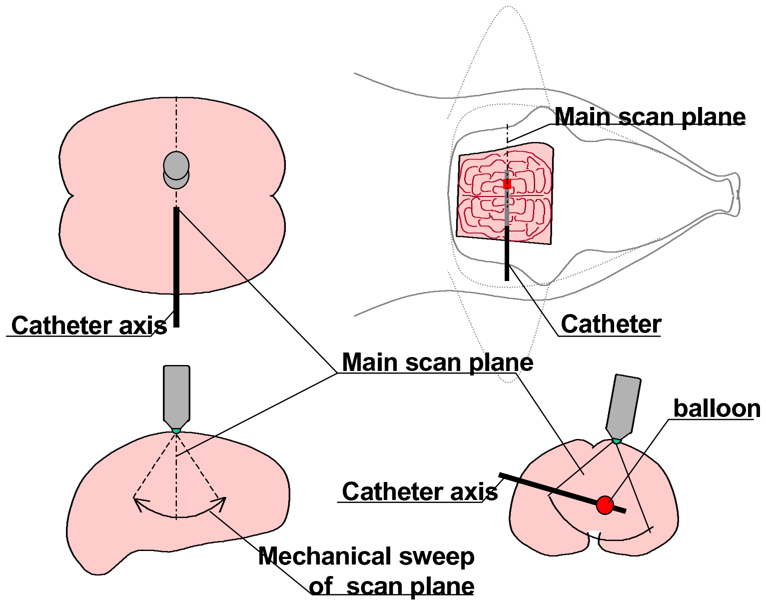


FIG. 7.6 – *Description of the pig brain US images acquisition.*

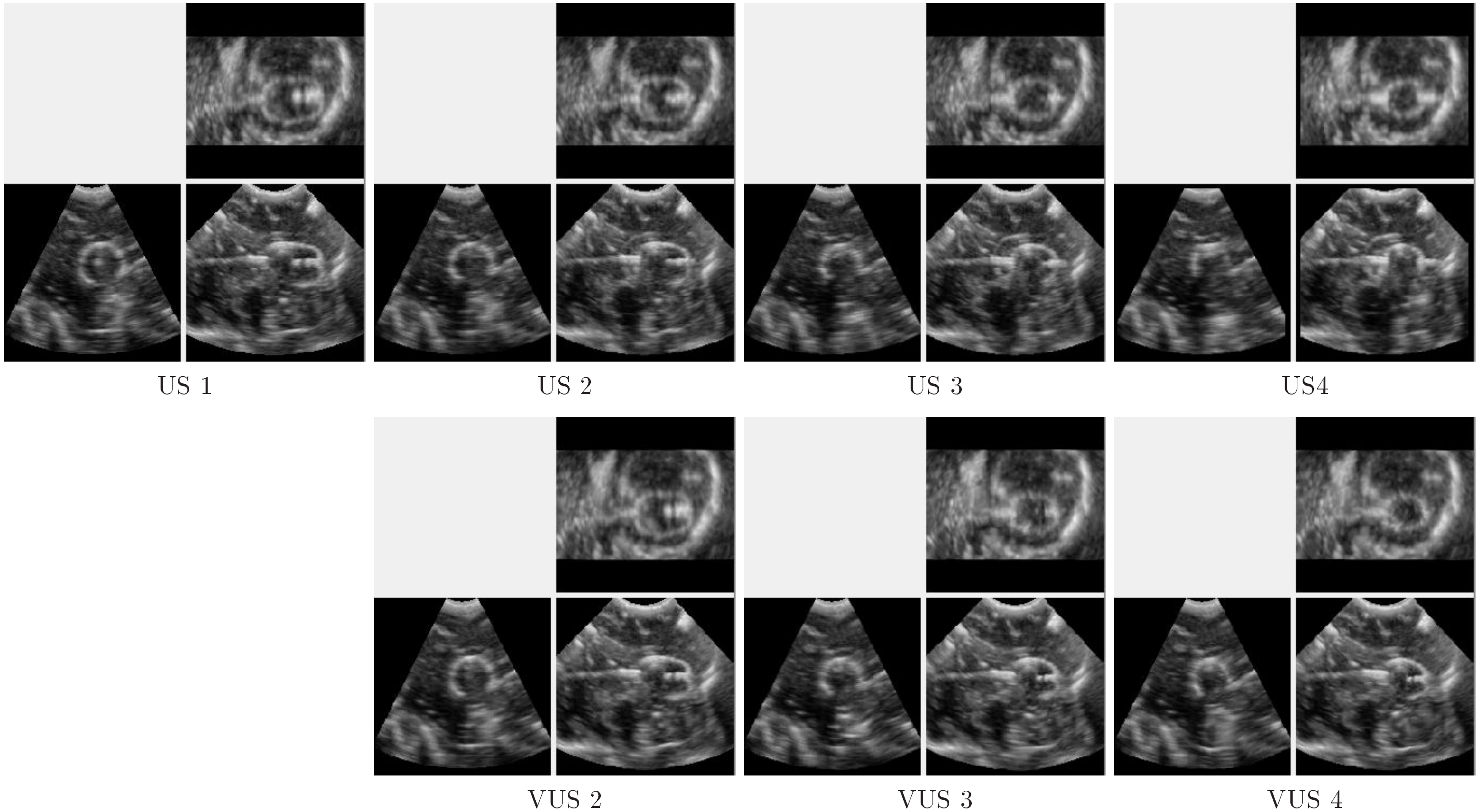


Fig. 7.7 – ***Tracking deformations of a pig brain****. In this figure, each triplet of 2D images represents 3 orthogonal views resliced from the 3D image.* ***Top :*** *The 4 images of the pig brain sequence with a deflating balloon simulating a cyst drainage.* ***Bottom :*** *The first image US 1 registered on the following images of the sequence.*

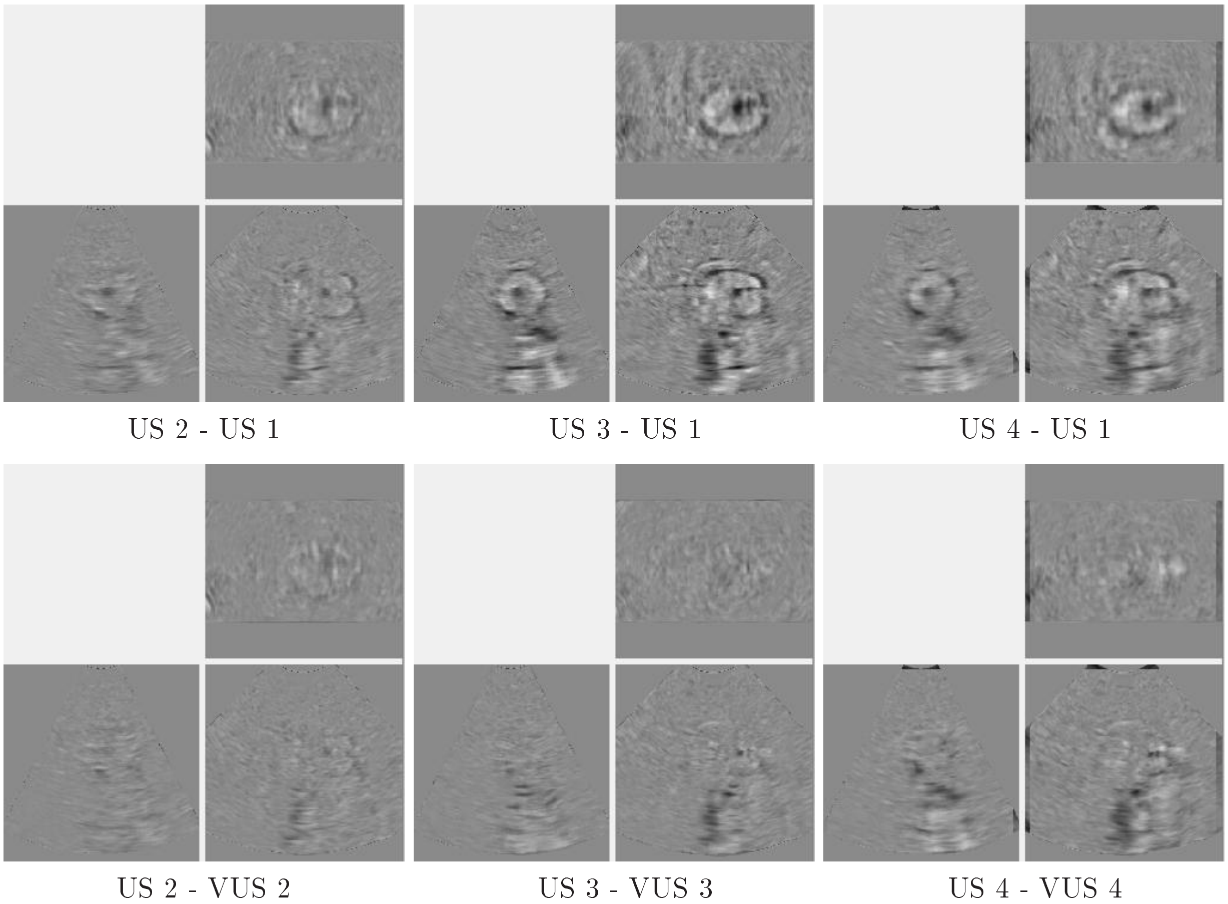


Fig. 7.8 – ***Top** : The original intensity differences between the first image US 1 and the following images of the sequence.* ***Bottom** : The intensity differences between the first image deformed after registration and the following images of the sequence. After registration, the intensity differences are strongly reduced, leaving mainly patterns of noise and artifacts.*

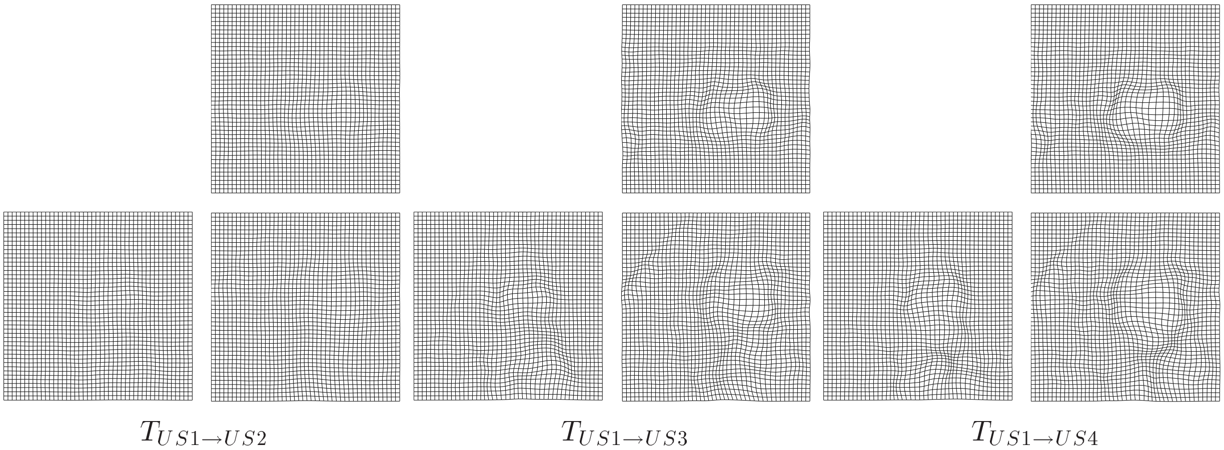


Fig. 7.9 – *Deformation field found for the registration of the first ultrasound image on the following images of the sequence.*

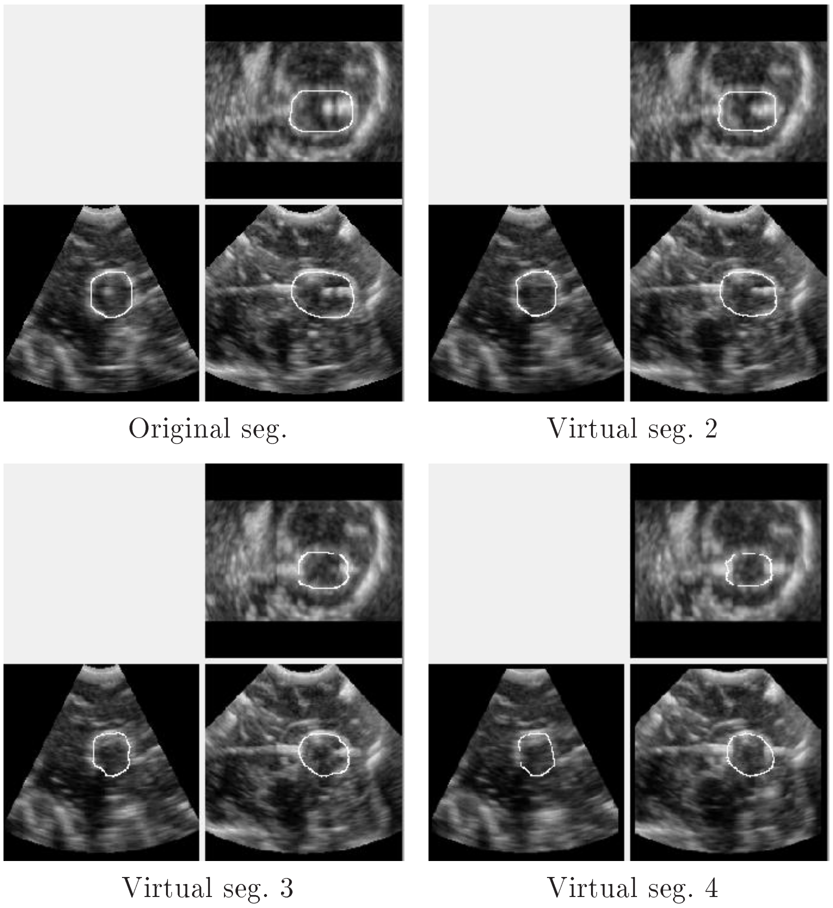


FIG. 7.10 – *We segmented the balloon on the first image. Then, this segmentation is deformed using the transformation found and superimposed to the corresponding original US image.*

The correspondence between the original and the virtual (i.e. deformed US 1) images is qualitatively very good. In fact, if the edges are less salient than in the phantom images, we have globally a better distribution of intensity features over the field of view due to the speckle in these real brain images. One should also note on the deformed grid images that the deformation found is very smooth.

To obtain a quantitative measurement of the transformation, we segmented the first image and we deformed this segmentation according to the estimated transformation field (see figure 7.10). We can now compare the volume of the deformed balloon with its theoretical value. In fact, since the segmentation originally overestimates the balloon volume, we have to compare the ratio between the deformed volume and the original one.

Image number	1	2	3	4
Original balloon volume (cm^3)	1.25	1.00	0.75	0.50
Relative volume ratio		0.8	0.6	0.4
Measured balloon volume	1.28	1.10	0.80	0.67
Measured volume ratio		0.86	0.62	0.53

The measurements indicates that we are overestimating the volume (underestimating the deformation) by 7.5% for image 2, by 3.3% for image 3, and by 30% for image 4. However, one should note that volume measurements are very sensitive as they relate to the cube of the balloon dimension: this corresponds to an error of less than one millimeter on the balloon diameter. This could be explained by an occlusion of the lower part of the balloon probably due to an air bubble trapped inside the balloon during the experience: on US 4, almost the entire lower half of the balloon is shadowed by the air bubble. In these conditions one cannot expect a perfect retrieval. The estimated deformation at the occlusion being computed thanks to the regularization of the deformation field from neighboring structures, it is expected to be less than the real deformations (maximal at the balloon boundaries).

Reducing the smoothing of the transformation could allow the algorithm to find a closer fit. However, this could allow some unwanted high frequency deformations due to the noise in the US images. We believe that it is better to recover the most important deformations and miss some smaller parts than trying to match exactly the images and have the possibility to create some possibly large deformations.

7.4 Discussion and conclusion

The algorithm presented here partly fills the goals of the ROBOSCOPE project: it is able to recover an important part of the deformations along the sequence and issues a smooth deformation, despite the noisy nature of the US images, which is an important point in this application since the signal to noise ratio is expected to be even worse with the actual probe designed for this kind of neurosurgical procedures. Experiments show that this allows to simulate virtual MR images qualitatively very close to the real ones. Quantitative measurements remains to be done, but it seems that an accuracy of 1 to 2 mm is achievable in the areas where there is an elastic deformation. This is encouraging since the accuracy of the clinicians without per-operative imaging is estimated to be around 3 to 5 mm. However, some improvements of the algorithm will likely be needed to cope with non-elastic deformations in the CSF, the skull, and with the introduction of the surgical tools.

We observed that the SSD criterion is well adapted for the registration of successive images in the time-sequence and performs well on our examples for the update of the global transformation. However, it is possible that other types of sequences with intensity changes may require a more complex criterion like the LCC, which is perfectly achievable by our algorithm (chapter 4), but at the cost of doubling the computation time.

The type of transformation is a very sensitive choice for such a tracking algorithm. We made the assumption of a "uniform elastic" material. This may be adequate for the brain tissues, but probably not for the ventricles and for the tracking of the surgical tools themselves. Indeed, they will penetrate into the brain without any elastic constraint with the neighboring tissues. A specific adaptation of the algorithm around the tools will likely be necessary. Another possibility for errors is the occlusion of a part of a structure visible in the US, for instance the shadowing by the endoscope.

The computation time is still far from real time for a continuous tracking of deformations during surgery but the implementation was focused on generic components in order to test different criteria and gradient descent methods. A dedicated re-implementation of the method may gain a factor 4 to 8, leading to a clinically useful tool for brain shift estimation (one estimation every minute or 2). To be further accelerated and reach real-time video-rate for instance, the algorithm must be parallelized. This would impose stronger hardware requirements but it is rather straightforward for both the computation of the image similarity and the regularization energies.

There are different parameters to tune in the algorithm but we believe that most of them could be adjusted for specific types of US images sequences. More sequences are anyway necessary to validate the estimation of the deformation.

In conclusion, we developed a tracking algorithm adapted to time sequences of US images and not only the registration of two images. Experiments on a phantom and on a real (pig) brain sequence show that the main part of the deformation is retrieved with a smooth deformation field. The image similarity criterion being independent from the type of transformation used, it could be changed in the future to better fit the assumptions on the US images depending on the application considered. We have shown here that the SSD criterion performs reasonably well in view of real-time considerations; a parallel version that is currently under developpment should be able to meet all the time requirements. However, more experiments will be needed to validate the accuracy of the estimation.

Chapitre 8

Recalage intersujet de cerveaux : fusion des approches iconiques et géométriques

Ce chapitre présente nos travaux effectués en collaboration avec le service hospitalier Frédéric Joliot (SHFJ) du commissariat à l'énergie atomique (CEA) d'Orsay. Nous abordons ici la mise en correspondance de cerveaux de sujets différents. La difficulté de ce problème provient de la grande variabilité topologique du cortex entre les individus : d'un point de vue purement géométrique, il est difficile, voire impossible, de savoir quels sillons mettre en correspondance. Pour résoudre ces ambiguïtés, nous devons faire appel à des connaissances anatomiques, introduites ici par segmentation puis étiquetage des sillons corticaux ; de plus nous devons pouvoir contrôler efficacement la régularité de la transformation afin d'éviter les problèmes de topologie auxquels le recalage inter-patient est particulièrement sujet. Nous modifions notre algorithme de recalage `PASHA` en ajoutant ces informations géométriques supplémentaires aux informations d'intensités, et nous montrons les résultats obtenus avec cette méthode sur un ensemble de cinq cerveaux segmentés et étiquetés.

8.1 Introduction

8.1.1 But du recalage intersujet de cerveaux

Dans le cadre de cette collaboration entre le projet Epidaure et le SHFJ, le recalage de cerveaux de sujets différent doit aider à long terme à la comparaison fonctionnelle de deux individus. En effet, des outils existent comme l'IRM fonctionnelle (IRMf) permettant de connaître en temps réel, ou presque, les activations[1] de certaines régions du cortex. Ces nouvelles techniques d'imagerie permettent de comprendre le fonctionnement du cerveau, et d'observer quelles régions sont utilisées pour telle procédure expérimentale. Elles permettent également de mettre à jour des différences fonctionnelles entre des populations différentes, et de comparer les individus de manière un peu

1. Plus précisément, dans le cas de l'IRMf, nous observons l'augmentation de la consommation locale d'oxygène du cortex *via* la désoxy-hémoglobine.

plus intelligente que d'utiliser le volume du cerveau [2]. L'utilisation de l'IRMf a permis de montrer par exemple que les hommes et les femmes utiliseraient différemment leur cerveau lors d'une écoute passive (Phillips et al., 2000).

Cependant, les zones fonctionnelles similaires de deux individus ne sont pas nécessairement bien alignées avec la méthode proportionnelle de Talairach. Dès lors, seul un expert peut décider si des activations présentes à des endroits différents chez deux individus proviennent en réalité de la même zone, ou sont signes d'une différence fonctionnelle.

Afin de faciliter cette comparaison, les cerveaux doivent être recalés plus précisément que ce qui est obtenu par la méthode de Talairach, en utilisant un recalage non rigide intersujet. C'est cet outil que nous souhaitons développer dans ce chapitre.

8.1.2 Problèmes posés par le recalage intersujet

Le recalage d'images provenant du même sujet a un but relativement clair : il s'agit de retrouver les mouvements apparents survenus entre les acquisitions. Ce problème est bien posé la plupart du temps, à moins que l'organe présent dans les deux images ait subi des modifications topologiques (par exemple, apparition d'un kyste ou ablation d'une partie des tissus par chirurgie).

La situation est bien différente en recalage intersujet, puisqu'il n'y a pas de déformation à proprement parler reliant les volumes. Le but du recalage est plus flou qu'en recalage monosujet ; la transformation est généralement comprise comme une liste de correspondances géométriques ou anatomiques. Cela suppose en premier lieu que l'on puisse effectivement dresser une telle liste : cela n'a aucun sens si les objets sont de natures différentes.

D'autre part, la régularisation est elle aussi mal définie dans la mesure où l'ensemble de correspondances recherché ne subit pas les même contraintes de continuité qu'un matériau qui se déforme. Le choix de la technique de régularisation, ainsi que la force de cette contrainte par rapport aux termes de recalage, sont donc largement heuristiques et dépendent de ce que l'on attend du recalage et de l'application que l'on désire en faire.

8.1.3 Problèmes spécifiques au recalage intersujet de cerveaux

Pour la plupart des membres ou organes comparés dans la littérature entre sujets différents, comme par exemple la tête fémorale (Behiels et al., 1999; Fleute et Lavallée, 1999), les mains ou le cartilage des genoux (Davies et al., 2001), le visage (Lantis et al., 1995), le corps calleux (Rueckert et al., 2001) ou d'autres structures profondes du cerveau (Shen et Davatzikos, 2000), la liste des correspondances se dresse finalement assez naturellement, car la forme générale de ces organes est bien conservée entre les individus : sauf pathologie particulière, une main droite comporte quatre doigts et un pouce agencés de la même manière.

Le cortex a la particularité de se différencier des autres organes par son incroyable variabilité interindividuelle (figure 8.1). Les différences topologiques sont la règle, même pour un sillon aussi marqué et simple que le sillon central, qui peut parfois présenter deux composantes connexes au lieu d'une. Cette complexité provient du développement important du cortex à l'intérieur de la boite crânienne, se plissant et se recroquevillant afin de gagner en superficie.

Dès lors, comment apparier des cerveaux différents ? Plusieurs points de vue sont possibles. Un recalage iconique classique, en utilisant par exemple notre algorithme `PASHA`, revient *grosso modo*

2. Stephen Jay Gould (Gould, 1980) poserait cependant la question de savoir si les conclusions tirées de ces comparaisons sont faites plus objectivement que ce qui se faisait au XIX^{e} sciècle ; après tout, le volume du cerveau, utilisé alors pour classer des groupes d'invididus selon des convictions racistes et sexistes, n'est-il pas une mesure tout aussi « objective » qu'une IRMf ?

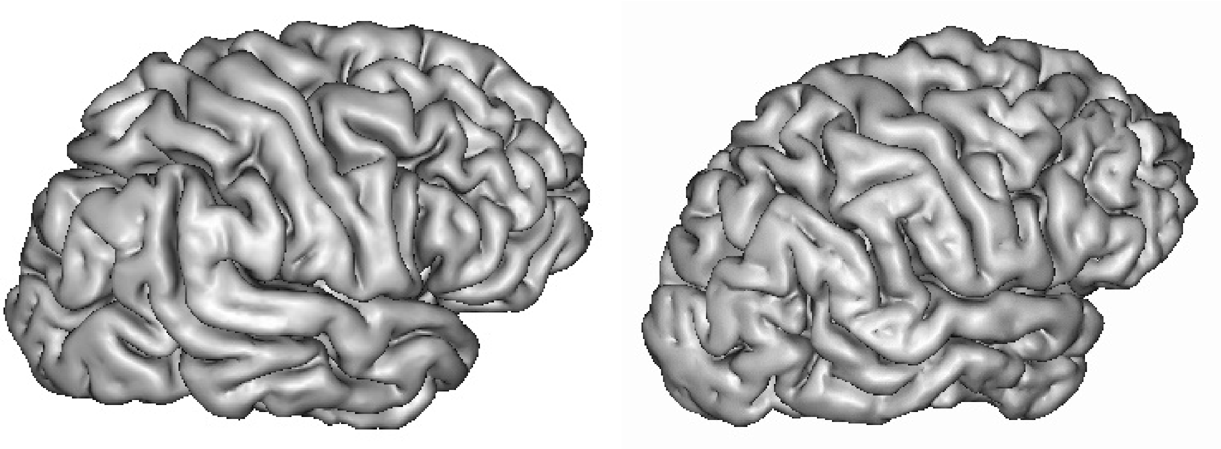


FIG. 8.1 – *Hémisphère droit de deux sujets différents. Si la forme globale reste la même, le détail des sillons corticaux donne la mesure de la complexité de la mise en correspondance de ces deux anatomies.*

à recaler les structures les plus proches entre elle, c'est-à-dire à considérer le cortex comme une surface uniquement.

Cependant, cette surface comporte des plis, les sillons corticaux, dont certains présentent une relative stabilité anatomique ; même si leurs topologies varient entre les individus, ils sont néanmoins toujours reconnaissables. Dès lors, il paraît raisonnable de rajouter cette contrainte dans les algorithmes de recalage, et de différencier les points du cortex situés sur ces sillons des autres points en les appariant exclusivement entre eux.

Enfin, d'un point de vue fonctionnel, le cerveau est constitué d'un certain nombre de zones dédiées à des tâches spécifiques (cortex visuel, cortex auditif, cortex somato-sensoriel, etc.). Dans le cadre d'une comparaison fonctionnelle entre individus, aligner ces zones entre elles semble être la bonne approche. Cependant, ces zones ne sont elles-mêmes pas triviales à extraire des images. Leurs localisations ne sont pas précisément connues *a priori* sans expériences fonctionnelles spécifiques. D'un autre côté, la localisation de ces zones en utilisant une technique d'imagerie fonctionnelle est techniquement assez lourde.

Une hypothèse de travail permet toutefois de relier les zones fonctionnelles à des amers géométriques, et notamment aux sillons corticaux. Il a été remarqué, en effet, que certains sillons sont également des frontières entre zones fonctionnelles (Welker, 1989; Watson et al., 1993). L'alignement des sillons corticaux pourrait donc aider à recaler les zones fonctionnelles avec des données fournies par une IRM anatomique (IRMa).

C'est dans ce cadre de travail que nous développons notre algorithme. Dans un premier temps, nous extrayons et identifions tous les sillons corticaux (section 8.3) ; puis nous introduisons ces informations géométriques dans notre algorithme `PASHA`, tout en gardant une mesure de similarité des intensités pour recaler les parties du cerveaux autres que le cortex (section 8.4).

Nous devons faire particulièrement attention à préserver la topologie. En effet, dans cette application, la transformation trouvée par recalage devrait servir à déformer des IRMf ou des cartes d'activations. Si la transformation présente des recouvrements, il est possible que des activations artefactuelles soient créées par la déformation en étant dupliquées à l'intérieur d'une zone présentant un recouvrement. La présentation des résultats obtenus avec cette méthode, à la section 8.5, sera une occasion de vérifier la régularité des transformations retrouvées.

Avant cela, nous allons dresser un état de l'art dans le domaine du recalage interpatient de cerveaux, afin de mieux comprendre l'originalité de notre approche.

8.2 Travaux existants en recalage interpatient de cerveaux

L'utilisation de contraintes géométriques en plus des contraintes iconiques s'est imposée ces dernières années comme une solution élégante au problème du recalage interpatient de cerveaux. Cette méthode permet en effet de contraindre le recalage aux endroits critiques, là où les algorithmes iconiques ont le plus souvent des problèmes.

Les méthodes les plus similaires à la notre sont celles publiées dans (Collins et al., 1998; Hellier et Barillot, 2000b). Dans (Collins et al., 1998), c'est un algorithme de recalage par blocs qui est modifié afin de prendre en compte des appariements géométriques : 16 sillons par hémisphère sont extraits des images en utilisant un modèle de ruban paramétrique. Ces rubans sont ensuite discretisés sur la grille de l'image, et recalés entre eux en utilisant une distance de chanfrein. (Hellier et Barillot, 2000b) utilisent également un modèle de ruban pour extraire 6 sillons par hémisphère, et contraignent ainsi leur algorithme de recalage basé sur une version robuste de la contrainte du flux optique. Dans cet algorithme, les points de contrôle de la spline définissant le ruban sont contraints à être appariés entre eux.

Des approches purement géométriques sont également utilisées. (Thompson et Toga, 1996) segmentent les cortex avec un modèle de ballon (Cohen, 1991). Ils délimitent ensuite semi-manuellement 7 sillons par hémisphère. Les surfaces corticales sont recalées en utilisant d'une part une distance géométrique entre elles, et d'autre part en utilisant des termes d'appariements supplémentaires entre les sillons précédemment délimités. Dans (Vaillant et Davatzikos, 1999), les cortex sont également segmentés avec un modèle déformable, mais ils sont ensuite gonflés en une sphère. Ces sphères sont recalées par reparamétrisation, en utilisant la trace de quelques sillons sur chacune d'elles. Enfin, dans (Chui et al., 1999), l'auteur segmente semi-manuellement 5 sillons par hémisphère, et les recale en utilisant un algorithme de recalage robuste de points affine par morceaux.

Toutes ces approches ont en commun le faible nombre de sillons pris en compte. La complexité et la variabilité des modèles des sillons, lignes ou rubans, sont également en deçà de la réalité. A cet égard, notre approche est originale en ce que nous utilisons la totalité des sillons pour contraindre le recalage, et non une sous-partie — notre ensemble d'étiquettes comporte 45 éléments par hémisphère. De plus les sillons sont segmentés de manière non paramétrique ; les topologies permises sont ainsi très générales. Enfin, ces travaux précédents jugent les résultats sur la qualité du recalage des sillons segmentés uniquement ; or, nous devons être particulièrement attentif à la forme de la transformation en recalage intersujet, car l'alignement des structures peut causer de nombreux problèmes de topologie. Nous contrôlons donc la régularité de la transformation, qui s'avère excellente avec notre technique.

8.3 Traitement des sillons corticaux

8.3.1 Segmentation

Les sillons sont extraits automatiquement des IRM T1 en utilisant des outils de morphologie mathématique et de topologie discrète (Malandain et al., 1993). Cette technique est celle de J.-F. Mangin (Mangin et al., 1995) dont les étapes principales sont les suivantes.

1. Correction du biais non uniforme corrompant éventuellement l'image.

2. Segmentation de l'ensemble formé par la matière grise et du liquide céphalorachidien par seuillage de l'intensité.
3. Squelettisation homotopique de l'ensemble précédent, afin d'obtenir les sillons et une approximation de la surface du cerveau.
4. Division de ce squelette en surfaces simples. Nous obtenons donc d'une part, l'ensemble des sillons, et d'autre part, la surface du cerveau.

L'ensemble des sillons ainsi obtenu est représenté en rouge dans la figure 8.2.

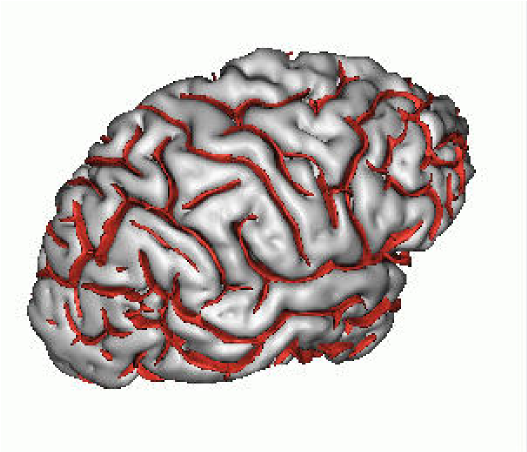


FIG. 8.2 – *En rouge, ensemble des sillons segmentés par l'application d'outils morphologie mathématique et de topologie discrète dans une IRM.*

8.3.2 Étiquetage

Les surfaces obtenues par la méthode précédente sont ensuite étiquetées automatiquement par l'algorithme de D. Rivière reposant sur une modélisation markovienne du graphe des étiquettes des sillons corticaux (Rivière et al., 2000). Ces informations prises en compte pour calculer ces probabilités sont de deux types : internes ou relationnelles.

1. Les informations internes comportent la position du sillon, sa longueur, sa profondeur maximale, ...
2. Les informations relationnelles comportent le nombre de voisins que possède un sillon, la distance envers ces voisins, leurs labels supposés, ...

Un réseau de neurones est d'abord entraîné sur un ensemble de cerveaux étiquetés manuellement. Puis, lorsque un nouveau cerveau est donné en entrée, une technique de recuit simulé est utilisée sur un critère de probabilité *a posteriori* donné par le réseau de neurone. Il est intéressant de relever que les sillons principaux sont étiquetés assez rapidement ; les étiquettes des sillons les plus variables anatomiquement, elles, ne convergent qu'aux dernières itérations.

Le taux d'erreur d'étiquetage de l'algorithme se situe autour de 24%. Ce chiffre est assez important ; il convient toutefois de relativiser les choses. Le calcul du taux d'erreur se fait par comparaison à une segmentation manuelle. Or, la plupart des erreurs se font à des endroits où il existe une réelle ambiguïté dans l'étiquetage. Même si l'étiquette trouvée par recuit simulé est différente de celle donnée par l'expert, elle n'est donc pas forcément mauvaise, de l'avis même de l'expert ; à certains endroits, l'algorithme semble même donner des résultats plus vraisemblables.

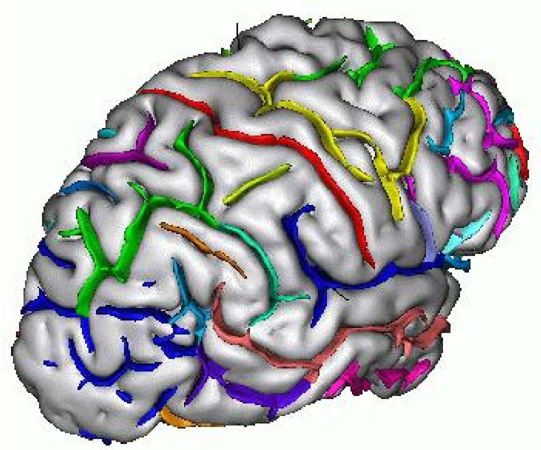


Fig. 8.3 – *Résultat de l'étiquetage des sillons corticaux segmentés à la figure 8.2. Chaque couleur représente une étiquette. Au milieu, le sillon rouge représente le sillon central ; à sa droite, en jaune, se trouve le sillon précentral ; et en dessous, en bleu foncé, le sillon temporal.*

8.3.3 Lignes sulcales supérieures et inférieures

De ces sillons segmentés et étiquetés, nous allons extraire deux types de lignes que nous utiliserons pour contraindre notre algorithme de recalage.

- Les lignes corticales supérieures représentent les jonctions entre les sillons et la surface du cerveau.
- Les lignes corticales inférieures représentent le fond des sillons.

Ces deux ensembles de points sont extraits des surfaces des sillons par des considérations de morphologie mathématique. Ces lignes sulcales inférieures et supérieures sont donc également non paramétriques et de topologie libre. Nous présentons figure 8.4 un exemple d'extraction de ces deux types de lignes sur quelques sillons.

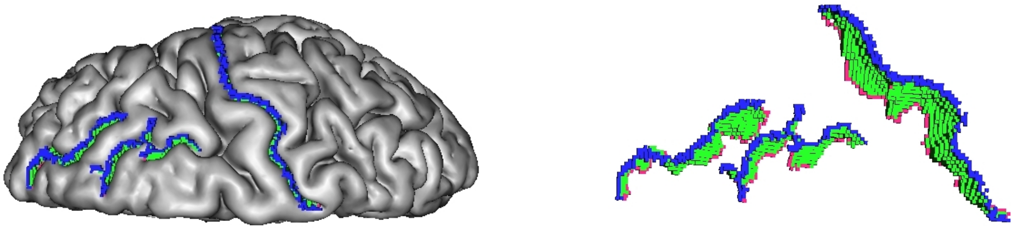


Fig. 8.4 – *Trois sillons corticaux segmentés, en vert, et leurs lignes inférieures (en rouge) et supérieures (en bleu) associées.*

L'abandon des sillons proprement dits au profit des lignes sulcales inférieures et supérieures est suscité par des considérations portant à la fois sur la morphogénèse du cerveau et sur les traitements informatiques.

D'un point de vue de la morphogénèse du cerveau, une théorie récente avance que les lignes sulcales inférieures sont des amers anatomiques plus stables que les sillons eux-mêmes (Welker, 1989; Régis et al., 1995). En effet, au début du développement fœtal, le cerveau ne possède que quelques plis faiblement marqués communs à tous les fœtus. Ce n'est que lors de son évolution ultérieure, lorsque le cortex gagne en superficie, que ces plis initiaux plongent dans le cerveau et que des plis additionnels se créent. Au demeurant, ce développement pourrait expliquer pourquoi certains de ces plis sont des limites de zones fonctionnelles. Le reste du sillon est moins stable anatomiquement puisque sa forme dépend de l'étendue du processus de plissement du cortex, qui varie sensiblement en fonction des individus, et explique la présence ou l'absence de plis ou de branches secondaires autour du sillon principal.

Quant aux lignes sulcales supérieures, elles permettent de mieux recaler le sillon en entier quand cela est possible. Cependant, comme nous venons de le souligner, la position de ces lignes est beaucoup moins stable que celles des lignes inférieures. Les contraintes de recalage des lignes supérieures seront donc beaucoup moins fortes que celles portant sur les lignes inférieures.

D'un point de vue informatique, l'utilisation d'amers unidimensionnels permet de réduire considérablement le nombre de points traités par les contraintes géométriques. Cela nous permettra également d'utiliser un algorithme simple pour la recherche des plus proches voisins.

Pour une certaine étiquette ℓ, nous notons $\mathcal{S}_\ell^\downarrow(I)$ les points de l'image I ayant été classés comme appartenant à la ligne sulcale inférieure du sillon ℓ (points en rouge de la figure 8.4). Nous notons $\mathcal{S}_\ell^\uparrow(I)$ l'ensemble de ceux ayant été classés comme appartenant à la ligne supérieure du sillon ℓ (points en bleu de la figure 8.4). Nous notons $\mathcal{S}_\ell(I) = \mathcal{S}_\ell^\downarrow(I) \cup \mathcal{S}_\ell^\uparrow(I)$ la réunion de ces deux classes de points pour le sillon ℓ. Finalement, $\mathcal{S}(I) = \bigcup_\ell \mathcal{S}_\ell(I)$ représente l'ensemble des points faisant l'objet de contraintes géométriques dans notre algorithme de recalage.

8.4 Recalage avec contraintes géométriques : l'algorithme PASTAGA

8.4.1 Introduction d'appariements géométriques dans l'énergie de recalage

Une fois les lignes sulcales inférieures et supérieures segmentées et étiquetées, il nous faut introduire explicitement le recalage de ces amers géométriques dans notre algorithme de recalage. Pour ce faire, nous allons modifier notre algorithme PASHA en rajoutant dans l'énergie de recalage un terme quadratique géométrique entre les points des sillons des deux images ayant le même label. Le fruit de ce travail est notre algorithme PASTAGA[3] dont nous détaillons maintenant le mécanisme.

I et J étant les deux images à recaler, nous introduisons un nouvel ensemble de correspondances C_2 entre les sillons des deux cerveaux. C_2 n'est défini que sur l'ensemble $\mathcal{S}(I)$; de plus, si $\mathbf{p} \in \mathcal{S}_\ell^\downarrow(I)$, alors $C_2(\mathbf{p}) \in \mathcal{S}_\ell^\downarrow(J)$ (et de même, si $\mathbf{p} \in \mathcal{S}_\ell^\uparrow(I)$, $C_2(\mathbf{p}) \in \mathcal{S}_\ell^\uparrow(J)$). Si nous notons T la transformation non rigide recherchée, et C_1 l'ensemble de correspondances denses trouvé par la mesure de similarité des intensités, notre nouvelle énergie de recalage minimisée par PASTAGA est :

$$E(C_1,C_2,T) = E_{sim}(I,J,C_1) + \sigma||C_1 - T||^2 + \sigma\gamma||C_2 - T||^2 + \sigma\lambda E_{reg}(T) \tag{8.1}$$

où σ est lié au niveau de bruit dans les images, λ est la force de la régularisation de l'algorithme, et γ représente le poids des contraintes géométriques par rapport aux contraintes iconiques. Dans cette nouvelle énergie, la transformation T recherchée doit à la fois approximer les correspondances denses C_1 trouvées par la mesure de similarité, et les correspondances éparses C_2 entre lignes sulcales inférieures et supérieures. Lorsque γ est mis à zéro, nous retombons sur l'énergie minimisée par PASHA (equation (3.3) p. 75).

L'avantage d'introduire les contraintes géométriques par un terme géométrique quadratique additionnel est que l'approximation de C_1 et C_2 par T possède une solution explicite (voir section 5.4.4 p.131). La minimisation alternée de l'énergie (8.1) par rapport à C_1, C_2 et T mène à l'algorithme en trois étapes suivant.

1. La minimisation de $E_{sim}(I,J,C_1)+\sigma.||C_1-T||^2$ par rapport à C_1 revient à trouver un ensemble

3. PASTAGA : acronyme de *PASHA Treating Additional Geometric Attributes.*

dense de correspondances entre les points des deux images. Cette minimisation est faite par descente de gradient.

2. La minimisation de $||C_2 - T||^2$ revient à trouver pour chaque point de $\mathbf{p} \in \mathcal{S}_\ell^{\downarrow}(I)$, le point de $\mathcal{S}_\ell^{\downarrow}(J)$ qui lui est le plus proche (et de même pour les points de $\mathcal{S}_\ell^{\uparrow}(I)$). Cette étape est faite en utilisant un algorithme de recherche exhaustive ; il est inutile dans notre cas d'utiliser un algorithme de recherche plus compliqué, comme l'algorithme du KDTree, les lignes comportant un faible nombre de points (22 en moyenne).
3. La minimisation de $||C_1 - T||^2 + \gamma.||C_2 - T||^2 + \lambda.E_{reg}(T)$ revient à trouver une fonction lisse collant au plus près des correspondances C_1 et C_2. Comme nous l'avons montré p. 131, cette minimisation quadratique possède une solution explicite sous la forme d'une combinaison linéaire d'une convolution et de splines :

$$T(\mathbf{x}) = K * C_1(\mathbf{x}) + \sum_{\mathbf{x}_i \in \mathcal{S}(I)} \boldsymbol{\alpha}_i K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$$

où $\boldsymbol{\alpha}_i \in \mathbb{R}^3$, $\forall i$, sont des coefficients à déterminer, et K est la réponse impulsionnelle de notre énergie E_{reg} ; dans notre cas, l'énergie est choisie afin que cette réponse impulsionnelle soit une gaussienne G_σ d'écart type σ.

8.4.2 Problèmes de robustesse

Cette contrainte quadratique est commode, car elle possède une solution explicite. D'un autre côté, elle n'est pas robuste aux mauvais appariements ; or cette considération est essentielle ici. Nous ne voulons pas toujours recaler parfaitement les lignes sulcales inférieures et supérieures à cause des raisons suivantes.

1. Les lignes sulcales correspondantes peuvent avoir des topologies non superposables, par exemple un nombre différent de branches ou de plis. Parfois, un même sillon peut même avoir un nombre différent de parties connexes chez deux individus. Dans tous ces cas, nous ne voulons qu'un recalage partiel de ces sillons, comme si les plis supplémentaires ne faisaient pas vraiment partie du sillon mais étaient juste une conséquence d'un enfouissement plus profond du sillon chez l'un des individus.
2. L'agencement des sillons eux-mêmes peut avoir une topologie différente selon les individus ; autrement dit, un même sillon n'a pas forcément les mêmes voisins. Ce point ainsi que le précédent s'illustrent parfaitement à la figure 8.5.
3. Enfin, le réseau de neurones est également sujet aux erreurs d'étiquetage. Les sillons ayant la même étiquette ne doivent donc pas forcement être mis en correspondance ; symétriquement, des sillons ayant des étiquettes différentes peuvent occasionnellement être mis en correspondance.

Pour introduire de la robustesse dans les appariements géométriques, tout en gardant un terme quadratique, nous utilisons la méthode des moindres carrés pondérés. Nous introduisons des facteurs β_i dans l'énergie :

$$E(C_1,C_2,T) = E_{sim}(I,J,C_1) + \sigma||C_1 - T||^2 + \sigma\gamma \sum_{\mathbf{p}_i \in \mathcal{S}(I)} \beta_i ||C_2(\mathbf{p}_i) - T(\mathbf{p}_i)||^2 + \sigma\lambda E_{reg}(T)$$

tels que

1. $\beta_i = 1$ si $\mathbf{p}_i$ appartient à une ligne sulcale dont l'étiquette est sûre. Cette ensemble d'étiquettes trouvées de manière fiable par recuit simulé comporte 15 éléments par hémisphère.

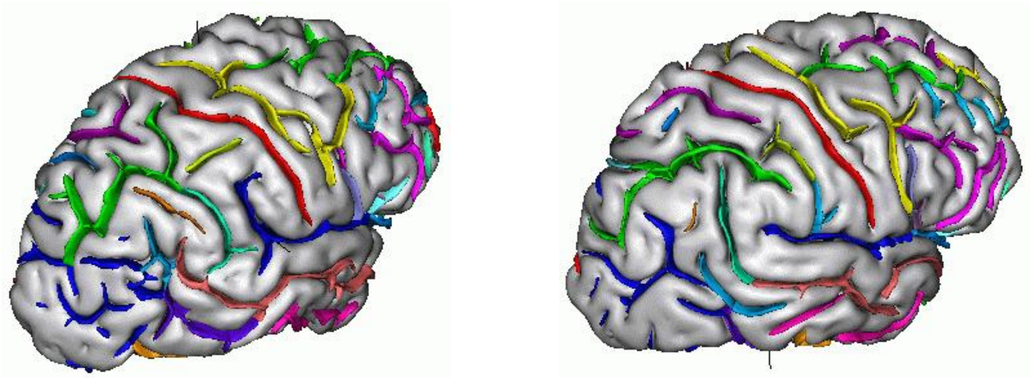


FIG. 8.5 – *Deux cerveaux différents dont les sillons ont été segmentés puis étiquetés. Cette figure illustre la variabilité de la topologie des sillons comme celle de leur agencement sur le cortex.*

2. $\beta_i = \exp(-||C_2(\mathbf{p}_i) - T(\mathbf{p}_i)||^2/\tau)$ sinon, τ étant une distance de coupure au-delà de laquelle deux sillons ne s'attirent quasiment plus l'un vers l'autre.
3. Si $\mathbf{p}_i$ est situé sur une ligne sulcale supérieure, le facteur β_i est de surcroît multiplié par $1 - \exp(-||C_2(\mathbf{p}_i) - T(\mathbf{p}_i)||^2/\tau_2)$, $\tau_2 < \tau$, car nous ne voulons pas recaler précisément ces lignes. Dans ce contexte, τ_2 représente la distance au-dessous de laquelle les lignes sulcales supérieures ne s'attirent plus.

L'introduction de ces poids permet de donner un peu de robustesse au critère d'appariement géométrique des sillons.

8.4.3 Approximation par convolution normalisée

La résolution du système linéaire permettant de trouver les coefficients $\boldsymbol{\alpha}_i$ nécessite l'inversion d'une matrice dont la taille dépend du nombre de paramètres à estimer. Or, dans notre cas, les contraintes géométriques portent typiquement sur plus de 2000 points ; la taille de la matrice carrée à inverser est donc de 6000 par 6000. Plutôt que de trouver la solution exacte à ce problème, nous approximons l'ajustement de splines dans `PASTAGA` par une convolution normalisée (Granlund et Knutsson, 1995).

La convolution normalisée est en fait une méthode rapide pour calculer des moyennes spatiales, et convient donc à l'approximation de valeurs éparses. Dans notre cas, nous voulons remplacer l'ajustement des splines par une interpolation des déplacements des points $\mathbf{p}_i \in \mathcal{S}(I)$. L'approche est nettement heuristique, mais donne de bons résultats.

- Nous donnons au point $\mathbf{p}_i$ le déplacement initial $C_2(\mathbf{p}_i) - G_\sigma * C_1(\mathbf{p}_i)$, correspondant aux inconnus $\boldsymbol{\beta}$ de la p. 131.
- Nous centrons autour de chacun de ces points une spline gaussienne interpolant ce déplacement : $[C_2(\mathbf{p}_i) - G_\sigma * C_1(\mathbf{p}_i)].G_\sigma(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i)$.
- L'ajustement final est trouvé en moyennant les valeurs de chacune de ces splines, pondérées par un facteur décroissant en fonction de la distance aux points de contrôle. Ce facteur est le même noyau gaussien que celui utilisé pour les splines, pondéré par le facteur β_i. Le

déplacement du point $\mathbf{p}$ est alors

$$\mathbf{U}_2(\mathbf{p}) = \frac{\sum_{\mathbf{p}_i \in \mathcal{S}(I)} \beta_i.[C_2(\mathbf{p}_i) - G_\sigma * C_1(\mathbf{p}_i)].G_\sigma(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i)^2}{\sum_{\mathbf{p}_i \in \mathcal{S}(I)} \beta_i.G_\sigma(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i)}$$

Chacune de ces sommes se fait par convolution avec une gaussienne (l'astuce, pour le numérateur, est que $G_\sigma^2 = G_{\sigma/\sqrt{2}}$).

- La transformation finale est une combinaison linéaire de la transformation précédente, et de la convolution des correspondances denses C_1 :

$$T = G_\sigma * C_1 + \zeta.\mathbf{U}_2$$

avec $\zeta \in [0; 1]$.

L'avantage de la convolution normalisée est qu'elle est une approximation raisonnable des splines, pour un coût de calcul très inférieur à celui que demanderait le calcul de la solution exacte. De plus, la convolution normalisée est ici une moyenne de noyaux gaussiens : nous restons donc dans un espace fonctionnel proche de celui généré par les splines, et notamment, nous gardons la même notion de régularité uniforme du champ de déplacements, qui est importante pour cette application (voir figure 8.6).

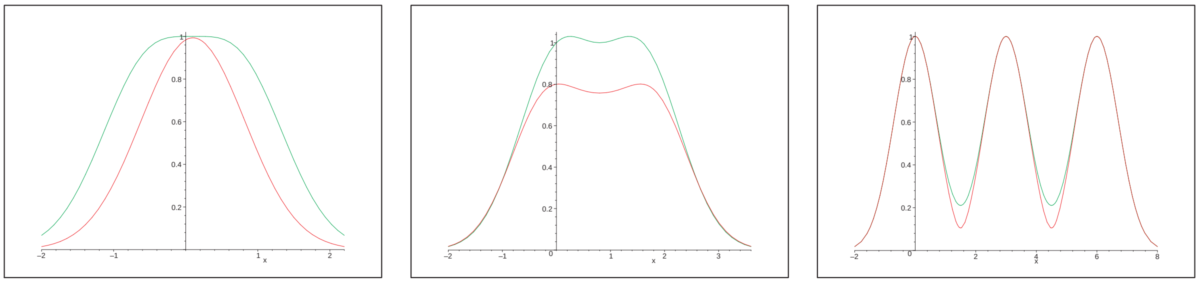


FIG. 8.6 – *Comparaison de l'interpolation par spline (courbe verte) et l'approximation par convolution normalisée (courbe rouge) d'une valeur unitaire placée en trois points séparés d'une distance respective de 0.1 (à gauche), de 0.8 (au milieu) et de 3 (à droite). L'écart type du noyau gaussien utilisé est de* 0.7. *La convolution normalisée donne des valeurs généralement plus faibles que les splines près des points de contrôle, mais présente le même type de régularité.*

8.5 Expériences

Dans cette section, nous présentons les résultats obtenus avec `PASTAGA` sur un ensemble de 5 IRM de cerveaux, fournies par le SHFJ avec la segmentation étiquetée des sillons. Un des cerveaux a été choisi arbitrairement comme cerveau de référence ; les autres ont été recalés sur lui. Un recalage affine a été effectué sur ce jeu de donné avec l'algorithme de (Roche et al., 2000a) préalablement au recalage non rigide. A titre de comparaison, nous avons également recalé les cerveaux sans contrainte géométrique supplémentaire avec notre algorithme `PASHA`.

Les résultats présentés à la figure 8.7 montrent que sans contraintes sulcales, `PASHA` recale correctement les sillons dont l'initialisation par le recalage affine est bonne. Par exemple, le sillon central, en rouge, est généralement bien recalé ; cependant, pour l'un des cerveaux, ce sillon est situé plus à l'arrière, et après initialisation affine, celui-ci recouvre partiellement un autre sillon du cerveau de référence. En utilisant des contraintes iconiques uniquement, cette partie du sillon central reste dans sa position initiale. En utilisant les contraintes géométriques, PASTAGA est capable de faire sortir ce sillon du mauvais sillon avec lequel il était apparié initialement pour le ramener sur le sillon central du cerveau de référence. Les contraintes géométriques permettent également de mieux recaler les sillons dont la topologie est complexe, comme le sillon précentral, en jaune.

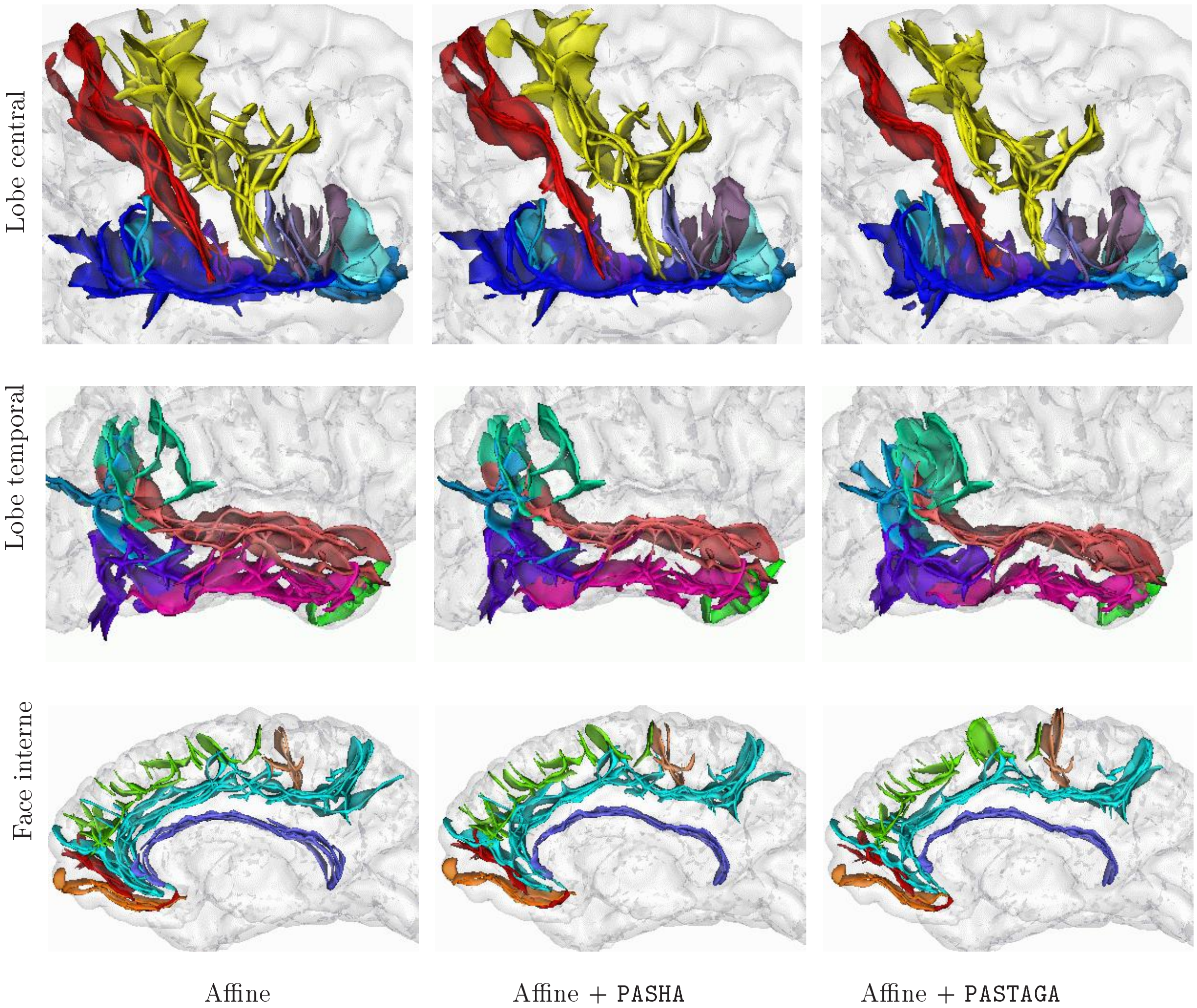


Fig. 8.7 – *Position des sillons des cinq cerveaux après initialisation affine (colonne de gauche), et après recalage avec PASHA (colonne du milieu) et PASTAGA (colonne de droite), pour une vue du lobe central (première ligne), temporal (ligne du milieu) et une vue de la face interne (dernière ligne) de l'hémisphère droit. La prise en compte de l'information géométrique des sillons permet d'améliorer leurs appariements lorsque ceux-ci sont mal positionnés après initialisation affine, ou lorsque leurs topologies sont complexes.*

Les travaux ayant introduit le même type de contraintes géométriques que les nôtres pour le recalage interpatient de cerveau vérifient la plupart du temps que les sillons sont précisément recalés, sans présenter la transformation retrouvée. Or, c'est précisément dans le compromis entre régularité et recalage que réside le problème du recalage non rigide. Il est facile de recaler parfaitement les sillons ici, puisqu'ils ont été segmentés ; la transformation trouvée a cependant toute les chances d'être très mauvaise et de présenter de nombreux recouvrements, à cause des problèmes de topologie et de variabilité intersujet que nous avons déjà évoqués. Ici, les transformations retrouvées sont très lisses, et conviennent donc parfaitement pour déformer des IRMf ou des cartes d'activations. La figure 8.8 représente la transformation pour une certaine coupe de l'IRM et donne une idée de la qualité de la transformation. En calculant le jacobien de ces transformations, nous avons vérifié expérimentalement que le recalage se fait sans aucun problème de topologie à l'intérieur du cerveau.

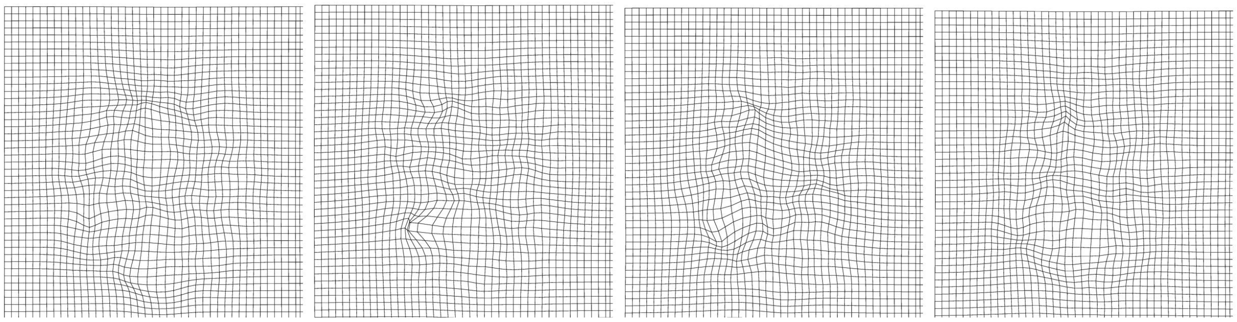


Fig. 8.8 – *Transformations trouvées entre le cerveau de référence et les quatre autres cerveaux de la base de donnée, correspondant aux résultats de la figure 8.7 pour une certaine coupe axiale. Malgré les contraintes supplémentaires sur les sillons, les transformations sont encore lisses et bijectives.*

8.6 Perspectives

Dans ce chapitre, nous avons attaqué le problème difficile du recalage interpatient de cerveaux. Pour ce faire, nous avons utilisé une segmentation étiquetée des sillons corticaux. Les sillons homologues sont appariés entre eux en rajoutant un critère de distance géométrique entre ces segmentations dans l'énergie de recalage de `PASHA`. Nous avons montré que cette information géométrique supplémentaire permettait de corriger certaines erreurs d'appariement, et ce, sans altérer la qualité de la transformation qui reste très lisse et bijective.

Plusieurs réflexions et développements futurs devront cependant être menés. Nous devrons d'abord poursuivre les travaux commencés ici sur le chemin de la comparaison fonctionnelle ; pour cela, il faudra disposer d'une base de données contenant à la fois des IRM anatomiques, dont les sillons corticaux sont segmentés et étiquetés, et des IRM fonctionnelles du même patient, afin d'appliquer les déformations retrouvées par `PASTAGA` aux IRMf. Ce recalage d'IRMf *via* le recalage des IRMa pourrait non seulement aider à la comparaison de ces premières, mais aussi à valider rétrospectivement certaines hypothèses de travail, comme le choix de l'ensemble des étiquettes utilisé, qui ne correspond pas forcément à la nomenclature habituelle des sillons corticaux, et le lien entre sillons corticaux et zones fonctionnelles, dont nous avons des preuves pour certains sillons, mais dont nous ne connaissons pas l'étendue de la validité.

Dans notre algorithme `PASTAGA`, nous avons introduit une robustesse dans l'appariement des sillons par une distance de coupure. Cela correspond-t-il au type de robustesse recherché ? Il est exact qu'à cause de la variabilité topologique des sillons, certaines branches ne peuvent être appariées. Mais cette robustesse géométrique doit être couplée à une robustesse portant sur l'étiquette du sillon, car l'étiquetage donné par la modélisation markovienne de D. Rivière est sujet à des erreurs qu'on ne peut négliger. Cet algorithme fournit, en plus des étiquettes, une valeur de confiance en celles-ci. Ces valeurs pourraient être utilisées par `PASTAGA`. Nous avons amorcé un premier pas en traitant à part des autres sillons ceux dont l'étiquetage est considéré comme sûr ; des travaux devraient continuer en ce sens en prenant en compte les indices de confiance fournis par le réseau de neurones.

Une étape supplémentaire sera d'utiliser une subdivision plus fine des sillons, et donc un ensemble d'étiquettes plus large, que ceux utilisés ici, et reposant sur la notion de racine sulcale (Régis et al., 1995; Lohmann et von Cramon, 2000). Les racines sulcales correspondent aux plis élémentaires apparaissant sur le cerveau du fœtus, et composés d'une seule composante connexe. Certaines études tendent à prouver que les racines sulcales pourraient être identifiées dans les cerveaux adultes en utilisant les variations de profondeur ou de courbure le long des lignes sulcales inférieures (Cachia et al., 2001). La topologie plus simple des racines sulcales par rapport aux lignes utilisées ici pourrait nous permettre d'utiliser des contraintes géométriques plus précises.

Une autre application de ce travail est l'étude des plis secondaires du cerveau après recalage, afin d'étudier des motifs stables entre les individus et d'améliorer la description du cortex humain. Cette description aiderait elle-même à mieux contraindre le recalage : ces travaux s'inscrivent donc dans une boucle ayant de nombreuses ramifications.

Chapitre 9

Interpolation de deux images

Nous présentons ici nos travaux sur l'interpolation de deux images, qui consiste à synthétiser des images virtuelles intermédiaires entre deux images originales. Cette interpolation repose sur un recalage non rigide symétrique réalisé avec l'algorithme `Sym2` développé au chapitre 6.

Ce chapitre est quelque peu une parenthèse dans cette thèse, puisque les applications présentées ici touchent au traitement vidéo ; toutefois, les possibilités d'application au domaine médical seront discutées en fin de chapitre. Ces travaux ont été réalisés en collaboration avec David Rey, et ont fait l'objet d'une étude pour la société RealViz [1], spécialisée dans le traitement numérique de films et les effets spéciaux.

9.1 Principe de l'interpolation d'images

9.1.1 Présentation du problème

Dans ce chapitre, l' « interpolation d'images » prend un sens particulier. Ce terme ne fait pas référence ici à l'interpolation des intensités des pixels aux positions non entières. Par interpolation d'images, nous entendons la création d'une ou de plusieurs images virtuelles intermédiaires, représentant une évolution possible de l'objet entre deux images originales ; en quelque sorte, c'est une interpolation temporelle qui nous préoccupe ici, et non une interpolation spatiale. Si les deux images I et J représentent une même scène aux instants t_I et t_J, nous voulons créer des images I_t qui se rapprochent le mieux possible de ce qu'aurait donné une prise de vue réelle aux instants t compris entre t_I et t_J.

L'idée la plus simple pour créer une image intermédiaire est de prendre la moyenne des images, comme cela est fait dans (Gerig et al., 2000) pour compléter des séries temporelles d'IRM. Malheureusement, cette méthode est peu performante : les structures sont lissées et l'image obtenue n'est pas un état transitoire réaliste. Dans le cas le plus simple où les images présentent le même objet à des positions différentes, nous voulons intuitivement obtenir par interpolation une image représentant cet objet à une position intermédiaire. Or, la moyenne des images garde une trace de l'objet aux deux positions de départ, et ne peut donner un résultat proche de ce que l'on attend. Des techniques fort jolies généralisent et complexifient le moyennage des intensités, en utilisant

1. `http://www.realviz.com`

notamment une décompostion en ondelettes des images (Kopp et Purgathofer, 1997) ; toutefois, les déplacements doivent quand même être explicitement estimés lorsqu'ils deviennent significatifs. Les techniques d'interpolation d'images font donc généralement intervenir une telle estimation.

La plupart des techniques d'interpolation d'images reposent sur l'extrapolation du mouvement d'amers géométriques segmentés et appariés manuellement dans chacune des images (voir (Wolberg, 1998) pour une revue). L'algorithme devenu classique de (Beier et Neely, 1992) calcule un champ de déformations à partir de paires de segments placés manuellement par l'utilisateur dans les images. Par la suite, d'autres travaux ont amélioré la précision de l'extraction d'amers géométriques en utilisant des contours actifs initialisés manuellement, et venant se coller près des contours de l'objet (Lee et al., 1995; Haque et al., 2000).

Une intervention manuelle peut être évitée si les amers géométriques sont segmentés automatiquement (Covell, 1995), en utilisant par exemple une recherche d'amers basée sur une analyse en composantes principales de ses occurances dans une base d'apprentissage. Cette approche suppose cependant que l'on se donne un modèle de la scène présente dans les images, limitant la portée de l'algorithme. De plus, le mouvement de tout ce qui n'est pas inclu dans le modèle n'est pas précisemment récupéré — par exemple, les cheveux sont rarement utilisés dans les modèles de visages. Par conséquent, les bords de l'objet interpolés peuvent être flous.

Dans le domaine de l'interpolation d'images, l'attention a surtout été portée sur les techniques d'extrapolation du mouvement, comme le morphisme de champs (*field morphing*) (Beier et Neely, 1992), les noyaux d'interpolations (Arad et Reisfeld, 1995) ou les énergies de déformation (Ruprecht et Müller, 1995) ; en effet, puisque l'information provenant des amers géométriques est eparse dans l'image, l'extrapolation de leurs déplacements est la principale limitation des performances de ces algorithmes.

Les approches reposant sur les ensembles de niveaux (*level sets*) consituent une exception dans le domaine, en ce qu'elles n'utilisent pas d'étape de segmentation, et sont de ce fait entièrement automatiques. Dans (Whitaker, 2000), l'auteur utilise une représentation de l'image par ensemble de niveaux pour réaliser une interpolation d'images, en utilisant des techniques d'interpolation de formes (Raya et Udupa, 1990). Bien que ces travaux soient une première étape vers une interpolation automatique d'images reposant sur une information dense (iconique), l'objet ainsi interpolé prend parfois des formes inattendues, éloignées des images originales.

En dimension supérieure, l'interpolation se fait généralement sur un objet tridimensionnel (segmenté dans une image volumique par exemple) et non sur les images (Hughes, 1992; He et al., 1994; Lazarus et Verroust, 1998). D'un autre côté, l'extension de l'approche de (Beier et Neely, 1992) aux images volumiques est délicate, car selectionner des paires de segments homologues est un exercice non trivial dans des volumes représentés par un ensemble de coupes, ne représentant qu'un détail de l'ensemble de la géométrie de l'objet.

Dans ce chapitre, nous proposons une technique d'interpolation d'images reposant sur un algorithme de recalage non rigide. Cet algorithme de nécéssite aucune information géométrique ni aucun modèle de la scène, et peut donc être utilisé pour des applications telles que le calcul de ralentis de séquences vidéos. Cet algorithme est symétrique, ainsi les croissances sont interpolées aussi bien que les décroissances. De plus, il s'aquite aussi bien de l'interpolation d'images bidimensionnelles que tridimensionnelles.

Nous allons maintenant présenter notre méthode d'interpolation d'images. Nous présenterons à la prochaine section des exemples d'interpolations sur des exemples synthétiques tridimensionnels, sur des séquences vidéos et sur des images.

9.1.2 Interpolation d'images reposant sur un recalage non rigide

Notre méthode d'interpolation d'images, baptisée `Intim`[2], repose sur un recalage non rigide des images initiales. Considérons le déplacements $\mathbf{U}$ reliant les deux images I et J comme le déplacement des points survenu pendant le temps séparant les acquisitions. Si nous faisons l'hypothèse de linéarité du mouvement, nous pouvons considérer que les positions intermédiaires de ces points sont données par une fraction $\varepsilon.\mathbf{U}$ du déplacement. C'est ce principe qui est utilisé pour créer des images intercalables entre les images originales.

Pour créer une image intermédiaire entre les images I et J, nous allons donc procéder en quatre étapes : recalage des images, interpolation du mouvement à l'image intermédiaire, inversion des transformations, puis interpolation des intensités. Ces étapes sont résumées à la figure 9.1.

Recalage des images

La première étape consiste à recaler les images I et J, afin de retrouver le mouvement des points. Si les images originales sont en couleurs, nous les transformons en niveaux de gris en ne gardant que leur luminance, cas les algorithmes de recalage développés dans cette thèse ne traitent que des images de scalaires.

Dans le cadre de cette étude, l'importance de la symétrie du recalage a été soulevée ; en effet, nous voulons que l'interpolation des régions croissantes soit visuellement aussi bonne que l'interpolation des régions décroissantes. Nous avons utilisé à cet effet l'algorithme de recalage non rigide symétrique `Sym2` développé au chapitre 6.

Interpolation du mouvement à l'image intermédiaire.

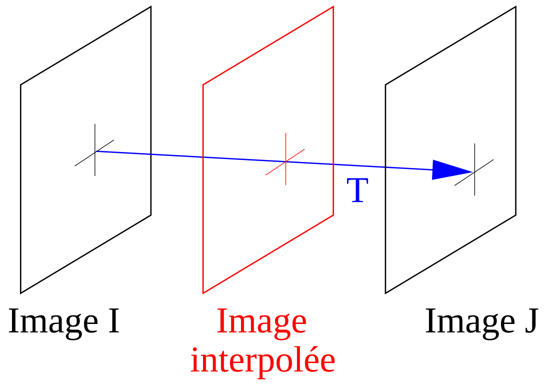
Considérons maintenant les images I et J comme faisant partie d'une série temporelle d'observations I_t, avec $I_0 = I$ et $I_1 = J$. Pour reconstruire une image I_t, $t \in [0;1]$, nous devons pouvoir retrouver la transformation qui la sépare de l'image originale I_0. En faisant l'hypothèse de linéarité du déplacement, les points de I_0 et de I_t sont simplement reliés par la déformation $t.\mathbf{U}$.

Inversion des transformations

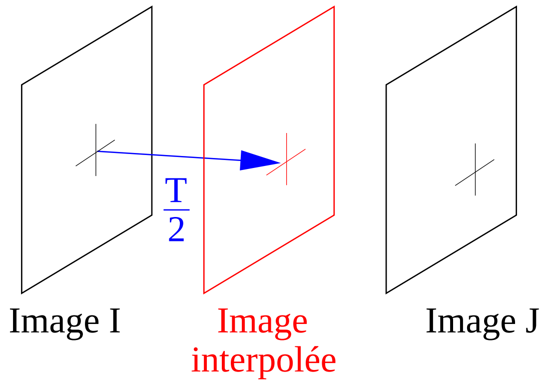
La déformation $t.\mathbf{U}$ donne la position d'un point de I_0 dans I_t. Ce que nous voulons est exactement l'inverse : étant donné un point de I_t, retrouver le point de I_0 correspondant. Pour cela, il nous faut inverser le champ de vecteurs $t.\mathbf{U}$, ce qui est fait ici avec la même technique qu'au chapitre 6 p. 146, c'est-à-dire en recherchant les zéros des fonctions $f_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) = \mathbf{q} + t.T(\mathbf{p})$ avec la méthode de Newton (en redéfinissant, par commodité, l'opération de multiplication d'un scalaire avec une transformation par $t.T = \mathrm{Id} + t.\mathbf{U}$ pour une transformation $T = \mathrm{Id} + \mathbf{U}$). Enfin, la transformation reliant I_t à I_1 se déduit facilement de $(t.T)^{-1}$ par linéarité du mouvement : si à l'instant t, le point s'est déjà déplacé du vecteur $\mathbf{u}$, alors il lui reste à parcourir $(t^{-1} - 1)\mathbf{u}$ jusqu'à l'instant 1. La transformation liant I_t et I_1 est donc simplement $-(t^{-1} - 1).(t.T)^{-1}$.

Pour des raisons de précision numérique, il est préférable de garder $(t^{-1} - 1)$ petit ; or ce facteur tend vers l'infini lorsque t devient petit. Lorsque $t \ll 1$, une solution consiste à inverser la transformation T, et partir de I_1 vers I_t. Pour les expériences menées à la section 9.2, où t prend la valeur minimale de 1/10, cela n'a cependant jamais été nécessaire.

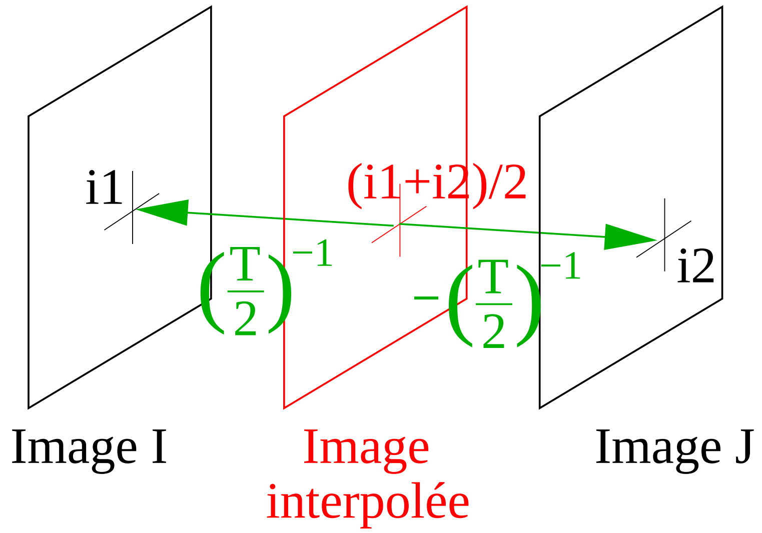
2. `Intim` : INTerpolation of IMages.



(a) Une transformation T, recalant les deux images d'origines, est calculée en utilisant notre algorithme de recalage symétrique `Sym2` du chapitre 6.



(b) La transformation reliant l'image I et l'image intermédiaire est supposée être la moitié de celle reliant I et J. Une hypothèse de linéarité est faite sur le déplacement.



(c) Pour trouver le point correspondant à un point de l'image intermédiaire dans l'image I, nous inversons $T/2$. Nous procédons de même pour le point correspondant dans J. L'intensité de ce pixel dans l'image intermédiaire est alors prise comme la moyenne des intensités des points correspondants ; nous faisons donc également une hypothèse de linéarité de l'évolution des intensités.

FIG. 9.1 – *Principe de notre méthode d'interpolation d'image. Par simplification, nous avons représenté ici la création d'une image à mi-chemin de I et de J ; le principe pour créer une image plus proche de I ou de J est identique.*

Interpolation des intensités

Maintenant que nous pouvons lier un pixel de I_t à un pixel de I_0 et un pixel de I_1, nous pouvons lui attribuer une intensité. Là encore, c'est une hypothèse de linéarité d'évolution que nous faisons : l'intensité du pixel de l'image intermédiaire est tout simplement une moyenne pondérée des intensités de ses correspondants dans les images I_0 et I_1 :

$$I_t(\mathbf{p}) = (1-t).I_0 \circ (t.T)^{-1}(\mathbf{p}) + t.I_1 \circ \left[-(t^{-1}-1).(t.T)^{-1}\right](\mathbf{p})$$

Dans les expériences suivantes, nous utilisons une interpolation spatiale (bi-/tri-)cubique pour retrouver les intensités des images I_0 et I_1 resp. aux points $(t.T)^{-1}(\mathbf{p})$ et $-(t^{-1}-1).(t.T)^{-1}$. Cette interpolation est plus coûteuse que l'interpolation linéaire. La qualité du résultat est cependant bien supérieure, ce qui est extrêmement important pour les rendus vidéos. Notamment, cette interpolation dégrade moins les images, étant plus proche du noyau du sinus cardinal (Meijering et al., 2001) : les images interpolées sont donc plus nettes. Pour le calcul de l'interpolation cubique, nous utilisons une adaptation de la technique d'Unser (Unser, 1999) reposant sur des filtres récursifs ; la différence entre nos filtres et ceux proposés par Unser réside dans les conditions aux bords, qui sont du type « répétition des valeurs aux bords » plutôt que du type « miroir », moins adaptées aux images nous semble-t-il.

9.2 Expériences

9.2.1 Expériences synthétiques tridimensionnelles

Le but de ces premières expériences est de vérifier l'interpolation fournie par notre algorithme sur des exemples synthétiques tridimensionnels pour lesquels nous connaissons les images intermédiaires attendues. Nous pouvons ainsi confronter nos résultats à une réalité, si l'on peut dire, chose qu'il est plus compliqué à réaliser avec de vraies images.

Nos expériences synthétiques portent sur trois couples d'images, pour lesquelles nous voulons calculer l'image intermédiaire à $t = 0{,}5$. Le premier couple présente une boule à deux positions différentes. Dans ce cas, l'image attendue contient une boule située à mi-chemin des boules des images originales (figure 9.2).

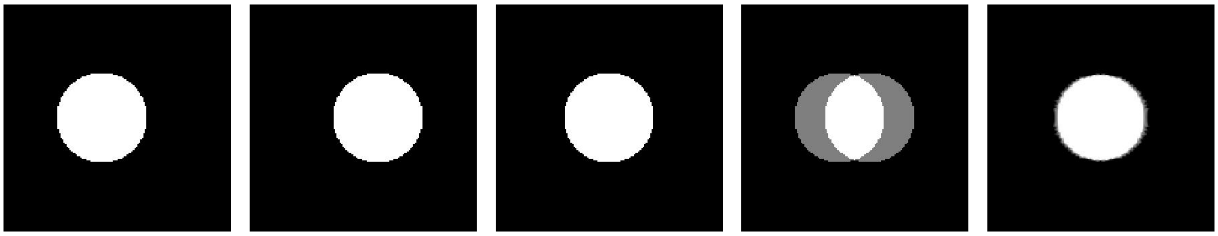
Dans le second couple d'images, la boule reste à la même position, mais change de rayon. L'image intermédiaire attendue est donc une boule située à cette même position, et de rayon moyen (figure 9.3).

Enfin, la troisième expérience met en scène les mêmes boules que dans l'expérience précédente, mais ici, la petite boule a également fortement baissé en intensité. L'image attendue présente donc une boule de rayon moyen, et également d'intensité moyenne (figure 9.4).

Sur ce jeu de données, notre algorithme donne des résultats très satisfaisants, proches des images intermédiaires attendues. Les boules sont placées aux bons endroits, avec la bonne intensité ; seuls les bords des boules sont un peu flous à cause de l'interpolation spatiale. A titre de comparaison, nous donnons également les résultats obtenus en moyennant les images ; sans surprise, les résultats sont nettement moins bons. Ces résultats peuvent également être comparés à ceux obtenus par (Whitaker, 2000), où la boule interpolée ne présente plus un forme sphérique.

9.2.2 Ralentis de séquences vidéos

Une des applications fructueuses de l'interpolation d'images est le calcul de ralentis de séquences vidéos. Pour cela, on se sert de l'interpolation pour intercaler un certain nombre d'images in-

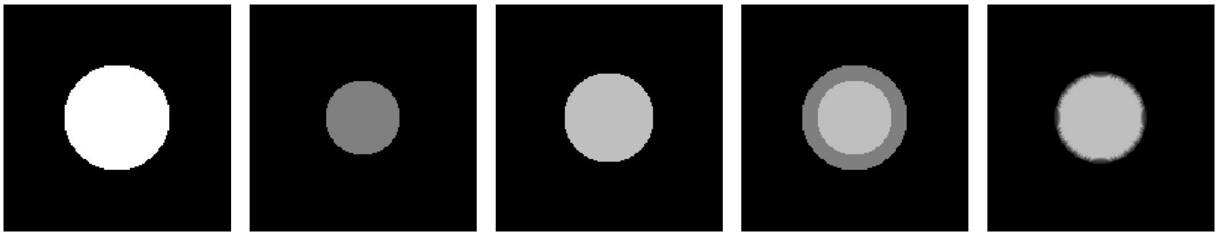


(a) Position 1 (b) Position 2 (c) Image souhaitée (d) Résultat de la moyenne (e) Résultat de notre méthode

FIG. 9.2 – *Interpolation d'une boule en mouvement. Les deux premières images sont les deux images originales sur lesquelles portent l'interpolation. Elles représentent une boule à deux positions différentes. L'image du milieu correspond à l'image intermédiaire idéale : une boule de même taille et de même couleur à mi-chemin. A droite, le résultat obtenu en moyennant les deux images d'origine, et en utilisant notre méthode d'interpolation d'images.*

(a) Position 1 (b) Position 2 (c) Image souhaitée (d) Résultat de la moyenne (e) Résultat de notre méthode

FIG. 9.3 – *Interpolation d'une boule rétrécissant. Les deux premières images sont les deux images originales. Elles représentent une boule à deux tailles différentes. L'image du milieu correspond à l'image intermédiaire idéale : une boule de même couleur à la même position, et de rayon moyen. A droite, le résultat obtenu en moyennant les deux images d'origine, et en utilisant notre méthode d'interpolation d'images.*



(a) Position 1 (b) Position 2 (c) Image souhaitée (d) Résultat de la moyenne (e) Résultat de notre méthode

FIG. 9.4 – *Interpolation d'une boule rétrécissant et changeant d'intensité. Les deux premières images sont les deux images originales. L'image du milieu correspond à l'image intermédiaire idéale : une boule à la même position, de couleur et de rayon moyens. A droite, le résultat obtenu en moyennant les deux images d'origine, et en utilisant notre méthode d'interpolation d'images.*

termédiaires dans la séquence originale, en fonction du facteur de ralentissement désiré.

Notre algorithme automatique d'interpolation `Intim` est particulièrement bien adapté à ce problème, pour essentiellement trois raisons.

D'une part, dans une séquence vidéo, le nombre d'images traitées est énorme. Une étape de traitement manuel n'est généralement pas envisageable ; il faut donc utiliser une méthode automatique telle que la nôtre.

D'autre part, une séquence vidéo peut présenter n'importe quelle type d'objet ou de mouvement. Les approches reposant sur un modèle, sur une segmentation, ou sur un mouvement paramétrique ne sont donc également pas envisageables.

Enfin, deux images successives d'une séquence vidéo sont fortement similaires. En utilisant le vocabulaire dédié aux applications médicales, le recalage qui en découle est monomodal, monosujet, et présente de faibles déplacements : c'est un problème facile aisément résolu par `Sym2`. De plus, les déplacements étant faibles, il est possible de diminuer le nombre de niveaux de multirésolution, ce qui peut faire gagner un temps non négligeable si le nombre d'images à traiter est important.

Nous avons appliqué notre algorithme à plusieurs séquences vidéos fournies par la société RealViz. Il est bien sûr difficile d'apprécier le rendu du ralenti sur papier ; nous présentons néanmoins un détail d'une séquence ralentie obtenue avec `Intim` entre les deux images de la séquence vidéo des « orques » présentées à la figure 9.5, au moment critique où le premier orque pénètre dans l'eau.

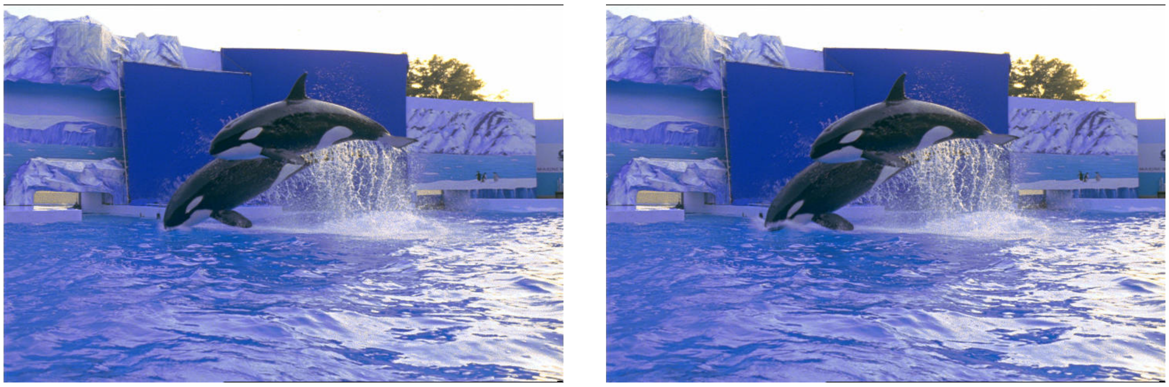


FIG. 9.5 – *Deux images successives de la séquence vidéo des « orques ».*

Nous nous somme également servis de la séquence vidéo pour confronter les résultats obtenus par `Intim` à la réalité. Pour cela, prenons trois images successives de la séquence. Nous recalons la première et la troisième image, puis en utilisant notre algorithme nous créons une image intermédiaire. Cette image intermédiaire est ensuite comparée à la seconde image, par soustraction. Le résultat de cet expérience, figure 9.7, montre que l'algorithme arrive parfaitement à retrouver le mouvement des orques. Quelques petits mouvements non linéaires, comme l'écume à l'avant de l'orque et quelques petites vagues au premier plan, ne sont pas parfaitement retrouvés. L'interpolation ayant eu lieu entre des images $n-1$ et $n+1$, nous pouvons nous attendre à ce que la qualité de l'interpolation sur la séquence normale (entre les images n et $n+1$) soit encore supérieure.

9.2.3 Interpolation et extrapolation

Dans ce qui précède, nous avons parlé d'interpolation d'images, qui consiste à retrouver les étapes intermédiaires du mouvement. Il est également possible, dans une certaine mesure, d'*extrapoler* le mouvement, c'est-à-dire de deviner la forme de l'objet après l'acquisition de la

Fig. 9.6 – *Détail du ralenti entre les deux images de la figure 9.5.*

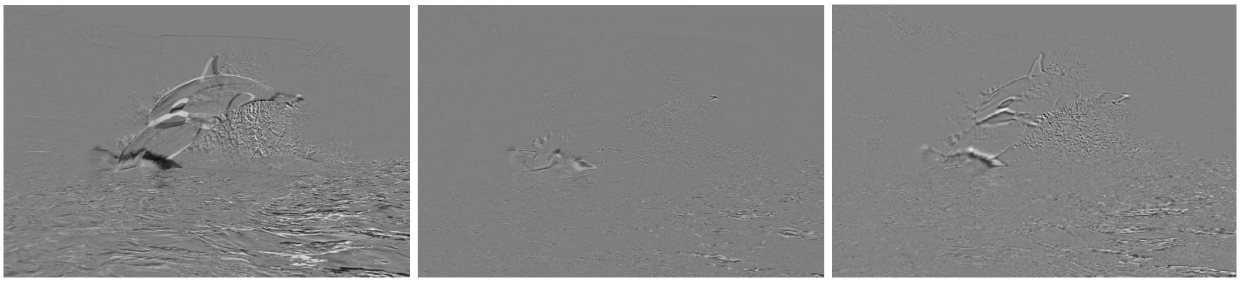


Fig. 9.7 – ***A gauche**: différence d'intensité entre les images $n-1$ et $n+1$. On distingue nettement les contours des orques, les vagues à l'avant-plan, et l'écume créée par l'orque pénétrant dans l'eau. **Au milieu**: différence d'intensité entre l'image n et l'interpolation des images $n-1$ et $n+1$. Le mouvement des orques est parfaitement retrouvé; seuls ceux de l'écume et de petites vagues à la surface de l'eau, pour lesquels l'hypothèse de linéarité n'est pas valide, ne sont pas retrouvés parfaitement. **A droite**: comparaison avec l'interpolation trouvée en moyennant les images.*

seconde image. L'extrapolation pourrait être utile lorsque l'on désire prévoir l'évolution future d'un objet subissant un processus d'évolution continu, par exemple le vieillissement, ou pour ralentir des films entre deux image provenant de séquences différentes. Bien entendu, ce problème est bien plus délicat et moins bien posé que celui de l'interpolation ; avec les hypothèses linéaires de mouvement et d'évolution des intensités que nous avons faites ici, nous ne pouvons espérer une bonne qualité d'extrapolation que sur des instants relativement courts.

Nous montrons une application distrayante de l'extrapolation à quatre couples d'images (figure 9.8). Ces couples d'images sont tous construits sur le même principe : l'une des images représente notre modèle, Karen, pose avec une expression neutre ; dans l'autre image, Karen prend une expression ou un mouvement typé (sourire, tristesse, étonnement, et rotation).

Pour chacun de ces couples, nous avons créé deux images. La première est une interpolation au temps $t = 0{,}5$; elle montre donc Karen avec une expression intermédiaire. La seconde est une extrapolation au temps $t = 1{,}5$: cette image exagère les traits caractéristiques de la seconde image par rapport au visage de référence, et renforce donc l'expression dégagée.

9.2.4 Morphisme de visages

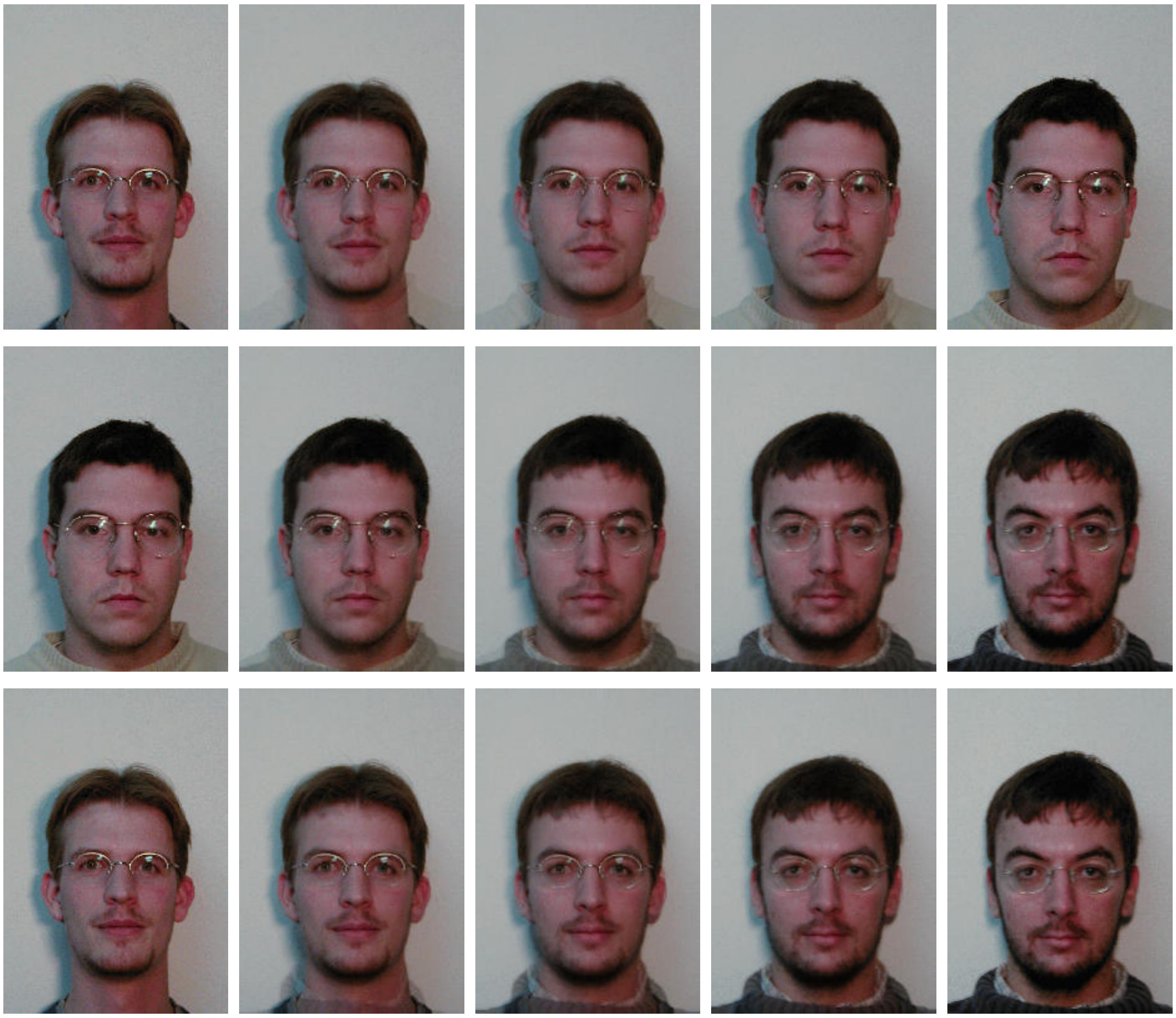
Une autre application possible d'`Intim` est le morphisme d'images (*morphing*). Traditionnellement, le morphisme nécessite une étape de segmentation manuelle : l'utilisateur doit sélectionner à la main des points de contrôle dans les deux images, comme dans l'algorithme de morphisme de référence de (Beier et Neely, 1992). Par exemple, dans le cas du morphisme de visages, l'utilisateur délimite les contours de la bouche, des yeux, des sourcils et du visage. L'algorithme extrapole le mouvement de ces points pour créer des images intermédiaires. L'intérêt de notre approche est qu'elle se fait de manière entièrement automatique — à l'exception, bien sûr, du choix manuel de la force de la régularisation — l'algorithme de recalage `Sym2` n'ayant besoin d'aucune information géométrique supplémentaire.

Notons que le problème du morphisme est plus difficile que celui de l'interpolation d'images tel que nous l'avons défini au début de ce chapitre : les objets présents dans les deux images sont de natures différentes. Cela pose le même genre de problèmes que ceux rencontrés en recalage multipatient de cerveaux, chapitre 8 : les anatomies ne sont pas toujours superposables, et la transformation retrouvée peut présenter des aberrations. La contrainte de régularité doit donc être relativement forte.

De plus, l'hypothèse de conservation de l'intensité, dont les petites violations en ralenti de films ou en monosujet sont tolérables, est ici complètement irréaliste. Nous avons donc utilisé la technique de corrélation locale développée chapitre 4. Il est intéressant de relever que les meilleurs résultats ont été obtenus pour des fenêtres gaussienne assez larges (écart type de 8 pixels, soit le double des fenêtres optimales trouvées section 4.4).

Nous présentons à la figure 9.9 les résultats des morphismes obtenus avec `Intim` sur trois couples d'images, représentant le visage de trois doctorants du laboratoire Epidaure. Pour chaque couple d'images, supposées être acquises aux instants $t = 0$ et $t = 1$, nous créons une image intermédiaire à l'instant $t = 0{,}5$, et également des interpolations aux instants $t = 0{,}25$ et $t = 0{,}75$. La qualité globale du morphisme est satisfaisante ; toutefois, certaines abérrations apparaissent occasionnellement, comme par exemple à la première ligne où le lobe de l'oreille de la personne à $t = 0$ disparait progressivement.

FIG. 9.8 – *Interpolation et extrapolation d'expressions ou de mouvements (de haut en bas : sourire, tristesse, étonnement, et rotation). Première et troisième colonnes : images originales. Deuxième colonne : images interpolées. Quatrième colonne : images extrapolées. L'interpolation atténue les expressions ; au contraire, l'extrapolation renforce les traits caractéristiques des images et accentue les expressions dégagées par Karen.*



$t = 0$ $t = 0.25$ $t = 0.5$ $t = 0.75$ $t = 1$

FIG. 9.9 – *Morphisme entre les visages de trois doctorants du laboratoire Epidaure. Première et dernière colonnes : images originales. Les colonnes du milieu contiennent les interpolations des images originales à des degrés différents de pondération. Psychologiquement, l'image qui nous semble la plus intermédiaire n'est pas toujours la moyenne géométrique obtenue à* $t = 0{,}5$.

9.3 Perspectives

Les résultats présentés dans ce chapitre (ralentis de films, morphisme, extrapolations d'expressions du visage) montrent la faisabilité d'une interpolation d'image reposant sur un recalage non rigide. Notre algorithme est utilisable pour des applications variées, car il n'utilise pas d'information géométrique, de modèle, ou de classe de déformation *a priori*.

Nous sommes conscient que dans certains cas, en morphisme particulièrement, il est souhaitable d'introduire des contraintes géométriques lorsque le couple d'image est difficile, afin d'introduire une interaction avec l'utilisateur. Dans ce cas, l'utilisation d'un recalage iconique et géométrique, du type `PASTAGA`, chapitre 8, semble particulièrement approprié : l'utilisation conjointe de termes iconiques et de termes géométriques permettrait à la fois à l'utilisateur de sélectionner moins de points, et à obtenir une interpolation beaucoup plus précise du mouvement de ces points.

De plus, nous avons travaillé ici sur des images de luminance, et non sur les images couleurs elles-mêmes, car les algorithmes de recalage développés dans cette thèse ont pour application principale le domaine médical où les images traitées sont essentiellement scalaires. Une extension de ce travail consisterait à utiliser des mesures de similarité sur les couleurs et non plus simplement sur les luminances.

Des applications dans le domaine médical sont également envisageables. Cette technique peut être utilisée pour compléter des séries temporelles incomplètes d'images médicales pour le suivi thérapeutique, comme cela est fait dans (Gerig et al., 2000). Une autre application intéressante pourrait être l'interpolation spatiale d'images volumiques, et plus précisément l'interpolation axiale inter-coupe pour des systèmes d'imagerie où la résolution axiale est comparativement bien plus faible que les résolutions coronales et sagittales, et pour lesquels les techniques d'interpolation spatiale classiques ne sont pas adaptées. Les approches utilisées jusqu'ici utilisent une segmentation semi-automatique des images (Shih et al., 1996; Haque et al., 2000).

Enfin, lorsque la position ou la couleur des points subissent des variations temporelles rapides, les hypothèses de linéarité sur lesquelles reposent `Intim` doivent être remises en cause. Dans le cas de séquences vidéos, il pourrait être envisagé d'utiliser une interpolation d'ordre supérieur, par exemple cubique, en s'appuyant non plus sur deux mais quatre images successives de la séquence afin de synthétiser une image interpolée.

Conclusion et perspectives

1 Bilan

1.1 Contributions théoriques

Le travail fourni pendant ces trois années de thèse a d'abord permis une meilleure compréhension des différences entre les algorithmes de recalage non rigide iconiques, grâce à une nouvelle classification. Nous avons scindé la classe des algorithmes iconiques en deux et introduit le concept d'amers iconiques, qui permet d'expliquer les grandes différences de comportement entre les algorithmes iconiques standard et ceux utilisant ces amers.

Cette nouvelle classification a fait apparaître que la quasi-totalité des algorithmes de recalage d'amers iconiques ne minimisent pas d'énergie globale. Nous avons comblé cette lacune en introduisant une nouvelle énergie de recalage d'amers iconiques. Cette énergie nous a permis de généraliser certaines approches précédentes, comme l'« ICP généralisé », et d'expliquer de nombreuses autres comme étant des cas limites de cette énergie pour certains paramètres. Nous avons de surcroît pu résoudre certains comportements étranges de ces algorithmes, jusqu'alors inexpliqués.

Nous avons étendu cette énergie aux régularisations mixtes compétitives/fluides, afin de tirer le meilleur de ces deux types de régularisation. Nous avons montré que pour les algorithmes P&S, cette régularisation mixte possède une solution explicite facilement implémentable.

Nous avons de plus étendu cette énergie au recalage hybride iconique/géométrique, en montrant comment l'introduction d'un terme de distance entre les amers géométriques modifiait notre algorithme. Notamment, nous avons montré que l'étape traditionnelle de lissage des algorithmes P&S était dans ce cas remplacée par une étape très jolie mêlant intimement lissage (pour les termes iconiques) et splines (pour les termes géométriques).

Cette énergie étant modulaire, nous nous sommes ensuite efforcés de développer des outils permettant de l'adapter à nos applications. Notre étude du chapitre 4 a permis de mettre en avant les mesures de similarité locale pour recaler des images corrompues par des biais non uniformes. Nous avons de plus développé une méthode très rapide pour les calculer, à base de convolutions.

Nous avons également contribué dans le domaines des énergies de régularisation, en généralisant l'élasticité linéaire à des ordres de régularité supérieurs. Ces énergies autorisent les effets croisés entre les composantes de la transformation, ce qui permet des interpolations de mouvement beaucoup plus réalistes. Nous avons établis les filtres et les splines associés, et nous en avons profité pour donner une classe de filtres généralisant le filtrage gaussien aux champs de vecteurs, et tout aussi rapide, puisqu'implémentable avec des filtres récursifs.

Enfin, nous avons expliqué et partiellement résolu le problème de la symétrie en recalage. Nous avons introduit le concept d'énergies invariantes par inversion, et nous avons donné un moyen de symétriser les énergies de similarité ou de régularisation usuelles.

1.2 Contributions expérimentales

Nous avons montré que l'utilisation de notre algorithme de recalage non rigide pour le suivi de déformations dans des séquences échographiques donne des résultats très satisfaisants. Malgré le bruit auto-corrélé très important caractéristique des échographies, la transformation estimée est lisse et les déplacements globaux sont retrouvés. Les bons résultats obtenus sur cette application importante ont incité la poursuite de ces travaux au sein du projet par la personne de Radu-Constantin Stefanescu, notamment afin de rendre l'algorithme utilisable en quasi-temps réel (5 images par secondes) en parallélisant notre algorithme.

Sur les données fournies par le service hospitalier Frédéric Joliot du CEA, nous avons montré qu'il était possible, avec les méthodes développées dans cette thèse, de recaler des cerveaux de patients différents en prenant en compte tous les sillons corticaux, tout en préservant la topologie de la transformation. Cette contrainte est essentielle pour l'application à long terme visée ici, l'alignement de séquences d'IRMf pour la comparaison fonctionnelle entre individus.

Enfin, les résultats obtenus en interpolation de deux images montrent que le recalage non rigide est parfaitement adapté au ralentissement de séquences vidéos et aux effets spéciaux. Jusqu'ici, peu de méthodes automatiques comme la nôtre ont été utilisées dans les domaines connexes au morphisme d'images. L'intérêt de notre approche est de montrer qu'une grande partie du traitement peut être faite en utilisant les intensités des images, ce qui pourra simplifier les méthodes géométriques mises en œuvres dans ces méthodes.

2 Problèmes rencontrés et perspectives

Validation des algorithmes non rigides

Comme nous l'avons souligné à la fin de notre état de l'art p. 39, il manque une méthode claire et reconnue de tous pour la validation du recalage non rigide similaire à ce qui se fait en rigide avec la base de donnée de l'université Vanderbilt. Tout au cours de cette thèse, nous avons illustré nos chapitres de résultats présentant les images déformées et les transformations sous-jacentes, avec parfois des mesures plus quantitatives lorsqu'il s'agissait d'expériences synthétiques. Il faudrait aller plus loin dans la validation, à la fois quantitativement et expérimentalement.

D'un point de vue quantitatif, c'est à notre avis l'utilisation de fantômes dédiés au recalage non rigide qui permettrait de donner un ordre de grandeur de la précision de nos algorithme, de manière plus fiable que ce que nous avons obtenu à travers nos expériences synthétiques. Ce genre de fantômes a été développé par (King et al., 2000) pour le recalage d'échographies, et par une équipe de Harvard[3] pour la validation de modèles biomécaniques par éléments finis.

D'un point de vue expérimental, il faudra continuer les applications présentées ici. En suivi de déformations dans des séquences échographiques, étant donné l'enjeu de ce problème, nous avons un bon espoir que des données plus riches que celles sur lesquelles nous avons dû travailler apparaissent prochainement. L'intégration de notre logiciel avec le bras manipulateur serait une occasion de tester ses performances dans un cas réel. En recalage intersujet de cerveau, l'utilisation d'IRMf serait un moyen extraordinaire de valider le recalage rétrospectivement, par alignement des zones fonctionnelles. Cependant, comme nous l'avons souligné au chapitre 8 traitant de ce sujet, ce résultat reposerait sur beaucoup d'hypothèses dont on ignore encore actuellement l'étendue de

3. `http://hrl.harvard.edu/hrsl/truthcube/index.htm`

validité, et dont ce travail devrait aider à la compréhension. La confiance et l'utilisation par des cliniciens de notre logiciel pour recaler les séquences d'IRMf serait déjà une validation en soi.

Algorithmes IFB paramétriques

L'intérêt du recalage d'amers iconiques a été mis en évidence, dans cette thèse, en recalage non rigide, et plus particulièrement en comparant les approches P&S et SIB compétitives. L'argument mis en avant dans cette thèse — la régularité plus uniforme des solutions trouvées par les algorithmes P&S que celles trouvées par les algorithmes SIB — est en effet beaucoup moins pertinent en recalage paramétrique, puisque la régularité uniforme est imposée par l'espace des transformations. *A fortiori*, cet argument n'a plus aucun sens en recalage rigide ou affine.

L'intérêt du recalage d'amers iconiques reste-t-il donc confiné au approches compétitives ? Des travaux devrait creuser cette question, surtout que le problème de la validation est moins problématique en recalage rigide. La base de donnée de Vanderbilt a déjà permis de mettre en avant les approches « iconiques » (en fait, iconiques standard) par rapport aux approches géométriques (West et al., 1999). Mais les résultats récents de (Ourselin, 2002) sur cette base de données en recalage rigide par blocs tendent à montrer la supériorité des approches IFB sur les approches iconiques standard même pour ces groupes de transformations. L'argument avancé, dans ce cas là, est la meilleure *robustesse* de ces approches, car portant sur des déplacements et non des intensités. De nombreux travaux intéressants peuvent être menés dans cette direction.

Fusion des recalages rigide et non rigide

Pour chacune des expériences présentées dans cette thèse, nos algorithmes partent d'images déjà globalement alignées. Dans la quasi-totalité des cas, nous avons fait appel préalablement à un algorithme de recalage rigide ou affine — ceux de nos collègues (Roche, 2001; Ourselin, 2002). Il en est ainsi de la quasi-totalité des algorithmes de recalage non rigide iconique.

En géométrique, ce n'est pas le cas : la solution explicite du recalage de points par splines de plaques minces, par exemple, comporte explicitement un terme affine.

Nous pensons que c'est exactement ce genre de combinaisons entre mouvements locaux et globaux qu'il faut utiliser en recalage non rigide, pour que ceux-ci soient réellement une généralisation du recalage rigide. Cette approche a déjà été utilisée par (Montagnat et Delingette, 1998) dans le domaine des modèles déformables.

Une approche peut-être encore plus satisfaisante a été proposée par (Wu et al., 2000) pour le recalage iconique, à base d'ondelettes. Cependant, ces ondelettes ne sont ici qu'une reparamétrisation de la partie non rigide de la transformation ; l'algorithme doit toujours être initialisé par un algorithme de recalage rigide ou affine. La reparamétrisation par ondelettes est finalement très proche de notre reparamétrisation par noyaux gaussiens de la section 2.3.7, avec toutefois l'avantage de présenter une organisation hiérarchique ce qui permet, selon cet article, d'obtenir une plus grande robustesse.

Une bonne raison pour laquelle cette extension du recalage non rigide n'est pas aussi facile qu'il y paraît, et qui explique cette réticence à incorporer une estimation de la composante rigide du mouvement en plus des déformations, est que nous sommes alors confrontés au problème de la normalisation de la mesure de similarité, lié à la gestion des portions d'images qui ne se recouvrent pas. En recalage non rigide, les conditions aux bords permettent généralement de minimiser ces effets. Nous pensons qu'une extension des travaux de (Roche, 2001) sur la normalisation des mesures de similarité dans le cas rigide permettrait de gérer élégamment ces problèmes en non rigide.

Réduction du nombre de paramètres

Un autre problème de notre approche, que nous partageons avec la quasi-totalité des algorithmes de recalage non rigide, est la dépendance des résultats aux valeurs des paramètres choisis manuellement, et donc, *in fine*, à l'expérience de l'utilisateur.

Nous avons montré que les résultats sont assez peu sensibles à certains paramètres, par exemple la taille de la fenêtre gaussienne utilisée pour le calcul des mesures de similarité locale, et que des valeurs génériques de ces paramètres peuvent convenir pour la majorité des problèmes. Cependant, force est de constater que la sensibilité de la transformation au paramètre de régularisation est élevée, voire critique. De plus, la valeur optimale de ce paramètre dépend de la régularité de la transformation réelle, et donc du problème ; des valeurs génériques de régularisation en fonction par exemple des modalités des images ne seraient donc pas pertinentes.

En théorie de l'approximation, il existe des méthodes connue pour choisir automatique la valeur du paramètre de régularisation (Wahba, 1990). Les essais préliminaires que nous avons effectués avec la validation croisée généralisée (GCV) ne semblent pour l'instant pas très concluants. Nous pensons que la méthode la plus appropriée serait une adaptation des techniques de (Schnabel et al., 2001a) au non paramétrique, reposant sur un raffinement en fonction de la similarité locale des images.

Interaction avec l'utilisateur

Enfin, et de manière qui peut apparaître contradictoire avec ce qui précède, nous pensons qu'une amélioration de l'interaction avec l'utilisateur des algorithmes de recalage non rigide permettrait à ce type de traitement d'être plus populaire dans le milieu médical. Nous pensons plus particulièrement à des outils permettant d'inclure de forte connaissances *a priori* dans la solution, que l'algorithme n'a aucune chance de trouver par lui-même, comme l'appariement de certains points (pouvant être géré par `PASTAGA`), la définitions de zones à ne pas recaler (pour des raisons de robustesse, par exemple parce qu'une partie des tissus a été enlevée par chirurgie), la définition d'endroits où la transformation est discontinue... La liste de ces outils serait bien sûr à dresser avec des cliniciens motivés par ce genre de traitements.

Troisième partie

Appendices

Annexe A

Interpolation linéaire et énergie de recalage quadratique

Le but de cette annexe est de montrer les problèmes que créent les méthodes d'interpolations d'ordre faible sur les critères de recalage. Pour cela, nous allons étudier un cas simple, celui du recalage de deux suites, en utilisant le critère des moindres carrés et une interpolation linéaire de l'intensité.

Nous tenterons ensuite d'avoir une vue un peu plus globale en faisant apparaître le lien qui unit intrinsèquement ce problème à celui du passage au discret (section A.2).

A.1 Une vue discrète

Soit donc deux suites $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Nous cherchons la translation t^* qui minimise la distance quadratique entre ces deux suites :

$$t^* = \arg\min_{t\in\mathbb{R}} \sum_{i\in\mathbb{N}} (u_{i+t} - v_i)^2$$

où u_{i+t} est obtenue par interpolation linéaire. Sans nuire à la la généralité du problème, nous pouvons nous restreindre à des valeurs de t comprises entre 0 et 1 ; dans ce cas,

$$u_{i+t} = (1-t).u_i + t.u_{i+1}$$

L'énergie à minimiser est donc

$$\begin{aligned}
E(t) &= \sum_{i\in\mathbb{N}} (u_{i+t} - v_i)^2 \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}} ((1-t).u_i + t.u_{i+1} - v_i)^2 \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}} \left[(u_i - v_i) + t.(u_{i+1} - u_i)\right]^2 \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}} (u_i - v_i)^2 + t^2 \sum_{i\in\mathbb{N}} (u_{i+1} - u_i)^2 + 2t \sum_{i\in\mathbb{N}} (u_i - v_i)(u_{i+1} - u_i)
\end{aligned}$$

D'autre part, l'interpolation linéaire de l'énergie, valant $\sum(u_i - v_i)^2$ pour $t = 0$, et $\sum(u_{i+1} - v_i)^2$ pour $t = 1$, est

$$E_{vp}(t) = \sum_{i\in\mathbb{N}}(u_i - v_i)^2 + t.\left[\sum_{i\in\mathbb{N}}(u_{i+1} - v_i)^2 - \sum_{i\in\mathbb{N}}(u_i - v_i)^2\right]$$

Comparons donc le profil de ces deux énergies en les soustrayant :

$$\begin{aligned} E(t) - E_{vp}(t) &= t^2\sum_{i\in\mathbb{N}}(u_{i+1} - u_i)^2 + t\sum_{i\in\mathbb{N}}\left[2(u_i - v_i)(u_{i+1} - u_i) - (u_{i+1} - v_i)^2 - (u_i - v_i)^2\right] \\ &= t^2\sum_{i\in\mathbb{N}}(u_{i+1} - u_i)^2 - t\sum_{i\in\mathbb{N}}(u_{i+1} - u_i)^2 \\ &= t(t-1)\sum_{i\in\mathbb{N}}(u_{i+1} - u_i)^2 \end{aligned}$$

Cette différence est strictement négative pour $t \in]0;1[$ si $\sum(u_{i+1} - u_i)^2 > 0$, ce qui est le cas dès que la suite (u_n) n'est pas constante. Ainsi, l'énergie de recalage obtenue par interpolation linéaire des valeurs sera la même que l'interpolation linéaire de l'énergie pour des valeurs entières de translation, mais est en dessous ailleurs, et présentent ces petites poches paraboliques caractéristiques.

Remarquons que ce phénomène est principalement dues aux fréquences élevées de l'image. Le facteur multiplicatif $\sum_{i\in\mathbb{N}}(u_{i+1} - u_i)^2$ s'écrit dans le domaine de Fourier

$$\begin{aligned} \sum_{i\in\mathbb{N}}(u_{i+1} - u_i)^2 &= \int_{-1/2}^{1/2} \left|(\exp(-2i\pi\omega) - 1).\hat{u}(\omega)\right|^2 d\omega \\ &= 4\int_{-1/2}^{1/2} \sin^2(\pi\omega)|\hat{u}(\omega)|^2 d\omega \qquad \text{(A.1)} \end{aligned}$$

K étant une constante, ce qui explique que ces phénomènes soit fortement atténués par un lissage préalable du signal (figure A.1).

A.2 Une vue continue

Supposons maintenant que les suites (u_i) et (v_i) soient des échantillons réguliers de signaux ayant un spectre limité. Les signaux u et v sous-jacents, définis sur $\mathbb{R}$, s'écrivent

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{i\in\mathbb{N}} u_i.\mathrm{sinc}(x - i) \qquad \text{(A.2)} \\ v(x) &= \sum_{i\in\mathbb{N}} v_i.\mathrm{sinc}(x - i) \end{aligned}$$

où $\mathrm{sinc}(x) = \sin(\pi x)/(\pi x)$ est la fonction d'interpolation appelée sinus cardinal. De plus, la translation d'un signal ne changeant pas son support fréquentiel, $u(x - t)$ s'écrit également

$$u(x - t) = \sum_{i\in\mathbb{N}} u_{i-t}.\mathrm{sinc}(x - i)$$

où $u_{i-t} = u(i - t)$ est obtenue par interpolation sinc, à partir de la formule A.2.

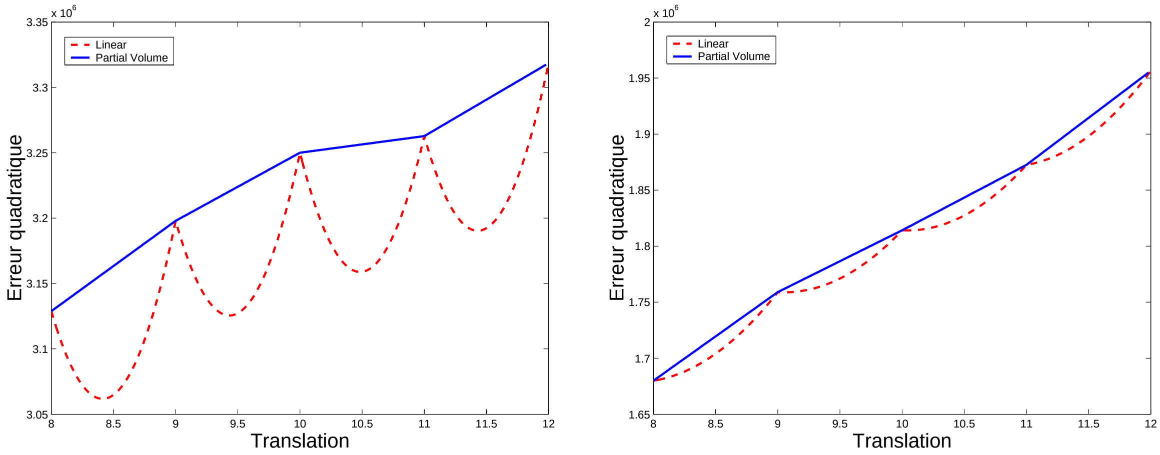


FIG. A.1 – *A gauche, l'erreur quadratique discrète obtenue par interpolation linéaire du signal présente des minima locaux paraboliques entre deux valeurs entière de translation par rapport à l'interpolation linéaire de l'erreur. L'amplitude de ces paraboles est principalement due aux fréquences les plus élevées du signal (equ. (A.1)), ce qui explique l'atténuation du phénomène, à droite, après un lissage gaussien ($\sigma = 2$).*

Le problème de l'alignement des signaux u et v s'écrit donc en fait

$$\begin{aligned} E(t) &= \int_{x\in\mathbb{R}} (u(x-t) - v(x))^2 \\ &= \int_{x\in\mathbb{R}} \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} (u_{i-t} - v_i \operatorname{sinc}(x-i)) \right)^2 \\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}} (u_{i-t} - v_i)^2 \int_{x\in\mathbb{R}} \operatorname{sinc}^2(x-i) + 2 \sum_{i\neq j} (u_{i-t} - v_i)(u_{j-t} - v_j) \int_{x\in\mathbb{R}} \operatorname{sinc}(x-i)\operatorname{sinc}(x-j) \\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}} (u_{i-t} - v_i)^2 \end{aligned}$$

car les sinus cardinaux sont orthonormaux. Le critère d'alignement quadratique, écrit pour les signaux continus, revient donc à une somme quadratique discrète sur les échantillons interpolés par un sinus cardinal ; cette équivalence est obtenue sans faire d'approximation.

Retenons donc que les problèmes de minima locaux ne sont pas caractéristiques à l'utilisation de l'interpolation des intensités : idéalement, l'algorithme d'alignement devrait utiliser une interpolation sinc pour calculer le critère. Les erreurs par rapport à ce « vrai » critère sont dues à l'écart entre la méthode d'interpolation utilisée et l'interpolation sinc (figure A.2).

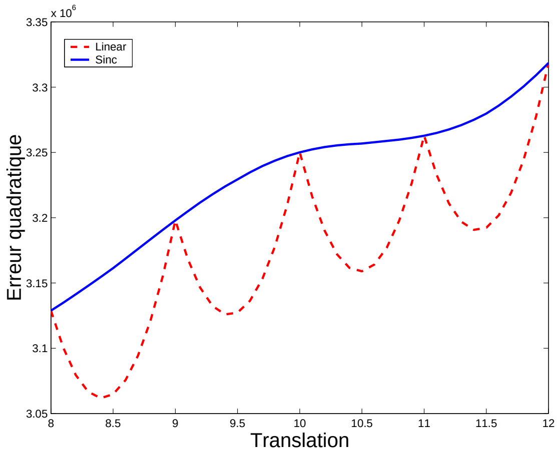


FIG. A.2 – *Comparaison du profil de l'écart quadratique en utilisant l'interpolation linéaire, et en utilisant l'interpolation sinc donnant la « vrai » valeur de l'écart quadratique continu, lisse et ne présentant aucun artefact.*

Bibliographie

Adler, R. J. (1980). *The Geometry of Random Fields.* John Wiley & Sons. (cité p. 79)

Ahlberg, J. H., Nilson, E. N., et Walsh, J. L. (1967). *The Theory of Splines and Their Applications*, volume 38 de *Mathematics in Science and Engineering.* Academic Press. (cité p. 29)

Alexander, D. C. et Gee, J. C. (2000). « Elastic Matching of Diffusion Tensor Images ». *Comp. Vision and Image Understanding*, 77(2):233 – 250. (cité p. 40)

Althof, R. J., Wind, M. G. J. K., et Dobbins, J. T. (1997). « A Rapid and Automatic Image Registration Algorithm with Subpixel Accuracy ». *IEEE Trans. on Medical Imaging*, 16(3):308 – 316. (cité p. 19, 29, 35)

Alvarez, L., Weickert, J., et Sánchez, J. (2000). « Reliable Estimation of Dense Optical Flow Fields with Large Displacements ». *Int. J. of Comp. Vision*, 39(1):41 – 56. (cité p. 32, 112, 113)

Amini, A. A., Chen, Y., et Abendschein, D. (1999). « Comparison of Landmark-Based and Curve-Based Thin-Plate Warps for Analysis of Left-Ventricular Motion from Tagged MRI ». Dans *Proc. of MICCAI'99*, volume 1679 de *LNCS*, pages 498 – 507, Cambridge, UK. Springer. (cité p. 17, 112)

Amini, A. A., Chen, Y., Sun, J., et Mani, V. (1998). « Dense 2D Displacement Reconstruction from SPAMM-MRI with Constrained Elastic Splines: Implementation and Validation ». Dans *Proc. of MICCAI'98*, volume 1496 de *LNCS*, pages 167 – 176, Cambridge, USA. Springer. (cité p. 40)

Amit, Y. (1994). « A Nonlinear Variational Problem for Image Matching ». *SIAM J. on Scientific Comp.*, 15(1):207 – 224. (cité p. 32)

Andresen, P. R., Bookstein, F. L., Conradsen, K., Ersbøll, B. K., Marsh, J. L., et Kreiborg, S. (2000). « Surface-Bounded Growth Modeling Applied to Human Mandibles ». *IEEE Trans. on Medical Imaging*, 19(11):1053 – 1063. (cité p. 33, 35)

Andresen, P. R. et Nielsen, M. (2001). « Non-Rigid Registration by Geometry-Constrained Diffusion ». *Medical Image Analysis*, 5(2):81 – 88. (cité p. 33)

Arad, N. (1995). « *Image Warp Design based on Variational Principles* ». PhD thesis, Tel-Aviv University. (cité p. 29, 59)

Arad, N. et Reisfeld, D. (1995). « Image warping using few anchor points and radial functions ». *Computer Graphics Forum*, 14(2):35 – 46. (cité p. 190)

Arbel, T., Morandi, X., Comeau, R. M., et Collins, D. L. (2001). « Automatic Non-Linear MRI-Ultrasound Registration for the Correction of Intra-operative Brain Deformation ». Dans *Proc. of MICCAI'01*, volume 2208 de *LNCS*, pages 913 – 922, Utrecht, the Netherlands. (cité p. 23)

Arun, K. S., Huang, T. S., et Blostein, S. D. (1987). « Least-Squares Fitting of Two 3-D Point Sets ». *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 9(5):698 – 700. (cité p. 29)

Ashburner, J., Andersson, J. L. R., et Friston, K. J. (2000). « Image Registration Using a Symmetric Prior – in Three Dimensions ». *Human Brain Mapping*, 9(4):212 – 225. (cité p. 140)

Ashburner, J. et Friston, K. J. (1999). « Nonlinear Spatial Normalization Using Basis Functions ». *Human Brain Mapping*, 7:254 – 266. (cité p. 30, 33)

BAJCSY, R. et KOVAČIČ, S. (1989). « Multiresolution Elastic Matching ». *Comp. Vision, Graphics and Image Processing*, 46:1–21. (cité p. 88, 94, 95)

BARRON, J. L., FLEET, D. J., et BEAUCHEMIN, S. S. (1994). « Performance of Optical Flow Techniques ». *Int. J. of Comp. Vision*, 12(1):43 – 77. (cité p. 40)

BEAUDET, P. (1978). « Rotationally Invariant Image Operators ». Dans *Proc. of Int. Joint Conf. on Pattern Recognition*, pages 579 – 583, Kyoto, Japan. (cité p. 15)

BEHIELS, G., VANDERMEULEN, D., MAES, F., SUETENS, P., et DEWAELE, P. (1999). « Active Shape Model-Based Segmentation od Digital X-ray Images ». Dans *Proc. of MICCAI'99*, volume 1679 de *LNCS*, pages 128 – 137, Cambridge, UK. (cité p. 176)

BEIER, T. et NEELY, S. (1992). « Feature-Based Image Metamorphosis ». *Computer Graphics*, 26(3):35 – 42. (cité p. 190, 197)

BELYAEV, A. G., ANOSHKINA, E. V., et KUNII, T. L. (1995). « Ridges, ravines, and related point features on a surface ». Dans *Proc. of SPIE*, volume 2573, pages 84–95, San Diego, USA. (cité p. 15)

BENAYOUN, S. et AYACHE, N. (1998). « Dense Non-Rigid Motion Estimation in Sequences of Medical Images Using Differential Constraints ». *Int. J. of Comp. Vision*, 26(1):25 – 40. (cité p. 14, 32)

BENJEMAA, R. et SCHMITT, F. (1998). « Recalage Global de plusieurs Surfaces par une Approche Algébrique ». Dans *RFIA*. 11ème Congrès AFCET de Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle. (cité p. 41)

BERGEVIN, R., SOUCY, M., GAGNON, H., et LAURENDEAU, D. (1996). « Towards a General Multi-View Registration Technique ». *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 18(5):540–547. (cité p. 41)

BEUCHER, S. et MEYER, F. (1993). The morphological approach to segmentation: the watershed transformation. Dans *Mathematical Morphology in Image Processing*. Marcel Dekker. (cité p. 16)

BLU, T., THÉVENAZ, P., et UNSER, M. (2001). « MOMS: Maximal-Order Interpolation of Minimal Support ». *IEEE Trans. on Image Processing*, 10(7):1069 – 1080. (cité p. 44)

BOES, J. L. et MEYER, C. R. (1999). « Multi-Variate Mutual Information for Registration ». Dans *Proc. of MICCAI'99*, volume 1679 de *LNCS*, pages 606 – 612, Cambridge, UK. Springer. (cité p. 42)

BOOKSTEIN, F. L. (1989). « Principal Warps: Thin-Plate Splines and the Decomposition of Deformations ». *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11(6):567 – 585. (cité p. 30, 35)

BOROVKOV, A. (1984). *Statistique Mathématique*. Édition MIR Moscou. (cité p. 34)

BRADY, M. et HORN, B. K. P. (1983). « Rotationally Symmetric Operators for Surface Interpolation ». *Comp. Vision, Graphics, and Image Processing*, 22:70 – 94. (cité p. 117, 120)

BREZINSKI, C. (1997). *Projection Methods for Systems of Equations*. Studies in Computational Mathematics. Elsevier. (cité p. 37)

BRICAULT, I., FERRETTI, G., et CINQUIN, P. (1998). « Registration of Real and CT-Derived Virtual Bronchoscopic Images to Assist Transbronchial Biopsy ». *IEEE Trans. on Medical Imaging*, 17(5):703–714. (cité p. 20, 52)

BRO-NIELSEN, M. (1996). « *Medical Image Registration and Surgery Simulation* ». PhD thesis, Institut for Matematisk Modellering, Danmarks Tekniske Universitet, Lyngby, Denmark. (cité p. 30)

BRO-NIELSEN, M. et GRAMKOW, C. (1996). « Fast Fluid Registration of Medical Images ». Dans *Proc. of VBC'96*, volume 1131 de *LNCS*, pages 267–276, Hamburg, Germany. Springer. (cité p. 33)

BROIT, C. (1981). « *Optimal Registration of Deformed Images* ». PhD thesis, Department of Computer and Information Science, University of Pennsylvania. (cité p. 17, 32, 88)

BROWN, L. G. (1992). « A Survey of Image Registration Techniques ». *ACM Computing Surveys*, 24(4):325 – 276. (cité p. 12)

BUCHOLZ, R., YEH, D., TROBAUGH, B., MCDURMONT, L., STURM, C., BAUMANN, C., HENDERSON, J., LEVY, A., et KESSMAN, P. (1997). « The Correction of Stereotactic Inaccuracy Caused by Brain Shift Using an Intraoperative Ultrasound Device ». Dans *Proc. of CVRMed-MRCAS'97*, volume 1205 de *LNCS*, pages 459–466. (cité p. 160)

BURR, D. J. (1981). « A Dynamic Model for Image Registration ». *Comp. Graphics and Image Proc.*, 15(2):102–112. (cité p. 33)

Butz, T. et Thiran, J.-P. (2001). « Affine Registration with Feature Space Mutual Information ». Dans *Proc. of MICCAI*, volume 2208 de *LNCS*, pages 549 – 556, Utrecht, the Netherlands. (cité p. 17, 38)

Buzug, T. et Weese, J. (1998). « Voxel-Based Similarity Measure for Medical Image Registration in Radiological Diagnosis and Image Guided Surgery ». *J. of Comp. and Information Technology*, 6(2):165 – 179. (cité p. 23)

Cachia, A., Mangin, J.-F., Rivière, D., Boddaert, N., Andrade, A., Kherif, F., Sonigo, P., Papadopoulos-Orfanos, D., Zilbovicius, M., Poline, J.-B., Bloch, I., Brunelle, F., et Régid, J. (2001). « A mean curvature based primal sketch to study the cortical folding process from antenatal to adult brain ». Dans *Proc. of MICCAI'01*, volume 2208 de *LNCS*, pages 897 – 904, Utrecht, the Netherlands. (cité p. 187)

Cachier, P. et Ayache, N. (2001a). « Regularization in Image Non-Rigid Registration: I. Trade-Off between Smoothness and Similarity. ». Rapport Technique RR-4188, INRIA. `http://www.inria.fr/rrrt/`. (cité p. 5, 14, 66, 112, 116, 126)

Cachier, P. et Ayache, N. (2001b). « Regularization in Image Non-Rigid Registration: II. Isotropic Energies, Filters and Splines. ». Rapport Technique RR-4243, INRIA. `http://www.inria.fr/rrrt/rr-4188.html`. (cité p. 6)

Cachier, P., Mangin, J.-F., Pennec, X., Rivière, D., Papadopoulos-Orfanos, D., Régis, J., et Ayache, N. (2001). « Multisubject Non-Rigid Registration of Brain MRI using Intensity and Geometric Features ». Dans *Proc. of MICCAI'01*, numéro 2208 dans 2208, pages 734 – 742, Utrecht, the Netherlands. (cité p. 6, 21, 35, 78, 126, 131)

Cachier, P. et Pennec, X. (2000). « 3D Non-Rigid Registration by Gradient Descent on a Gaussian-Windowed Similarity Measure using Convolutions ». Dans *Proc. of MMBIA'00*, volume 1935 de *LNCS*, pages 182 – 189, Hilton Head Island, USA. `http://www-sop.inria.fr/epidaure/personnel/Pascal.Cachier/publi.html`. (cité p. 6, 20, 32, 89, 98, 113)

Cachier, P., Pennec, X., et Ayache, N. (1999). « Fast Non-Rigid Matching by Gradient Descent: Study and Improvements of the "Demons" Algorithm ». Rapport Technique RR-3706, INRIA. `http://www.inria.fr/rrrt/`. (cité p. 5, 33, 34, 35, 48)

Cachier, P. et Rey, D. (2000). « Symmetrization of the Non-Rigid Registration Problem using Inversion-Invariant Energies: Application to Multiple Sclerosis ». Dans *Proc. of MICCAI 2000*, pages 472 – 481, Pittsburgh, USA. `http://www-sop.inria.fr/epidaure/personnel/Pascal.Cachier/publi.html`. (cité p. 6, 32)

Camion, V. et Younes, L. (2001). « Geodesic Interpolating Splines ». Dans *Proc. of EMMCVPR'01*, volume 2134 de *LNCS*, pages 513 – 527. (cité p. 41)

Christensen, G. E. (1994). « *Deformable Shape Models for Anatomy* ». PhD thesis, Washington University, Saint Louis, USA. (cité p. 30)

Christensen, G. E. (1999). « Consistent Linear-Elastic Transformations for Image Matching ». Dans *Proc. of IPMI'99*, volume 1613 de *LNCS*, pages 224 – 237, Visegrád, Hungary. Springer. (cité p. 30, 140)

Christensen, G. E., Joshi, S. C., et Miller, M. I. (1997). « Volumetric Transformation of Brain Anatomy ». *IEEE Trans. on Medical Imaging*, 16(6):864–877. (cité p. 33, 35)

Chui, H., Rambo, J., Duncan, J., Schultz, R., et Rangarajan, A. (1999). « Registration of Cortical Anatomical Structures via Robust 3D Point Matching ». Dans *Proc. of IPMI'99*, numéro 1613 dans LNCS, pages 168 – 181, Visegrád, Hungary. (cité p. 15, 29, 178)

Chui, H. et Rangarajan, A. (2000). « A Feature Registration Framework using Mixture Models ». Dans *Proc. of MMBIA'00*, pages 190 – 197, Hilton Head Island, USA. (cité p. 22, 30)

Chui, H., Win, L., Schult, R., Duncan, J., et Rangarajan, A. (2001). « A Unified Feature Registration Method for Brain Mapping ». Dans *Proc. of IPMI'01*, volume 2082 de *LNCS*, pages 300 – 314, Davis, USA. (cité p. 26, 30, 39)

Cohen, I., Ayache, N., et Sulger, P. (1992). « Tracking Points on Deformable Objects Using Curvature Information ». Dans *Proc. of ECCV'92*, pages 458 – 466. (cité p. 14)

Cohen, L. D. (1991). « On active contour models and balloon ». *Image Understanding*, 53(2):211 – 218. (cité p. 178)

Cohen, L. D. (1996). « Auxiliary Variables and Two-Step Iterative Algorithms in Computer Vision Problems ». *J. of Math. Imaging and Vision*, 6(1):59 – 83. (cité p. 76)

Collignon, A., Maes, F., Delaere, D., Vandermeulen, D., Suetens, P., et Marchal, G. (1995). Automated Multi-Modality Image Registration based on Information Theory. Dans *Information Processing in Medical Imaging*, pages 263 – 274. Kluwer Academic Publishers. (cité p. 12, 29, 35, 77, 112)

Collins, D. L. et Evans, A. C. (1997). « ANIMAL Validation and Applications of Nonlinear Registration Based Segmentation ». *Int. J. of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 11(8):1271 – 1294. (cité p. 19, 38, 94)

Collins, D. L., Le Goualher, G., et Evans, A. C. (1998). « Non-Linear Cerebral Registration with Sulcal Constraints ». Dans *Proc. of MICCAI'98*, volume 1496 de *LNCS*, pages 974 – 984, Cambridge, USA. Springer. (cité p. 21, 35, 178)

Comeau, R., Sadikot, A., Fenster, A., et Peters, T. (2000). « Intraoperative ultrasound for guidance and tissue shift correction in image-guided neurosurgery ». *Med. Phys.*, 27(4):787–800. (cité p. 160)

Cootes, T. F., Taylor, C. J., Cooper, D. H., et Graham, J. (1995). « Active Shape Models, their Training and Application ». *Comp. Vision and Image Understanding*, 61(1):38 – 59. (cité p. 17)

Covell, M. (1995). « Eigen-points: Control-point location using principle component analyses ». Dans *Proc. of AFGR'95*, pages 122 – 127. (cité p. 190)

Davies, R. H., Cootes, T. F., Waterton, J. C., et Taylor, C. J. (2001). « An Efficient Method for Constructing Optimal Statistical Shape Models ». Dans *Proc. of MICCAI'01*, volume 2208 de *LNCS*, pages 57 – 65, Utrecht, the Netherlands. (cité p. 176)

Davis, M. H., Khotanzad, A., Flamig, D. P., et Harms, S. E. (1997). « A Physics-Based Coordinate Transformation for 3D Image Matching ». *IEEE Trans. on Medical Imaging*, 16(3):317 – 328. (cité p. 30, 129)

Dawant, B. M., Hartmann, S. L., et Gadamsetty, S. (1999). « Brain Atlas Deformation in the Presence of Large Space-Occupying Tumors ». Dans *Proc. of MICCAI'99*, volume 1679 de *LNCS*, pages 589 – 596, Cambridge, UK. Springer. (cité p. 31, 35, 52)

Declerck, J., Ayache, N., et McVeigh, E. R. (1998). « Use of a 4D Planispheric Transformation for the Tracking and the Analysis of LV Motion with Tagged MR Images ». Rapport Technique RR-3535, INRIA. (cité p. 17, 30, 35)

Dennis, J. E. et Schnabel, R. B. (1983). *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*. Prentice-Hall Series in Computational Mathematics. Prentice-Hall. (cité p. 36, 101)

Deriche, R. (1992). « Recursively Implementing the Gaussian and Its Derivatives ». Dans *2nd Int. Conf. On Image Processing*, pages 263–267. (cité p. 37, 97, 125)

Devernay, F. (1997). « *Vision Stéréoscopique et Propriétés Différentielles des Surfaces* ». PhD thesis, École Polytechnique, Palaiseau, France. (cité p. 96)

Duchon, J. (1976). « Interpolation des fonctions de deux variables suivant le principe de la flexion des plaques minces ». *RAIRO Analyse Numérique*, 10(12):5 – 12. (cité p. 30, 128, 130)

Erbe, H., Kriete, A., Jödicke, A., Deinsberger, W., et Böker, D.-K. (1996). « 3D-Ultrasonography and Image Matching for Detection of Brain Shift During Intracranial Surgery ». *Computer Assisted Radiology*, pages 225–230. (cité p. 160)

Farnebäck, G. (1998). « *Spatial Domain Methods for Orientation and Velocity Estimation* ». PhD thesis, Institutionen för Systemteknik, Linköpings Universitet, Sweden. `ftp://ftp.isy.liu.se/pub/bb/Theses/LicTheses/G_Farneback_lic.ps.gz`. (cité p. 41)

Faugeras, O. D. et Herbert, M. (1986). « The representation, recognition, and locating of 3-D objects ». *Int. J. of Robotics Research*, 5(3):27–49. (cité p. 29)

Feldmar, J., Declerck, J., Malandain, G., et Ayache, N. (1997). « Extension of the ICP Algorithm to Nonrigid Intensity-Based Registration of 3D Volumes ». *Comp. Vision and Image Understanding*, 66(2):193–206. (cité p. 20, 29, 66, 77, 78)

Ferrant, M., Warfield, S. K., Guttmann, C. R. G., Mulkern, R. V., Jolesz, F. A., et Kikinis, R. (1999). « 3D Image Matching using a Finite Element Based Elastic Deformation Model ». Dans *Proc. of MICCAI'99*, volume 1679 de *LNCS*, pages 202 – 209, Cambridge, UK. Springer. (cité p. 112)

FERRANT, M., WARFIELD, S. K., NABAVI, A., JOLESZ, F. A., et KIKINIS, R. (2000). « Registration of 3D Intraoperative MRI of the Brain using a Finite Element Biomechanical Model ». Dans *Proc. of MICCAI'00*, volume 1935 de *LNCS*, pages 19 – 28, Pittsburgh, USA. Springer. (cité p. 31)

FIDRICH, M. et THIRION, J.-P. (1998). « Stability of corner points in scale space: the effects of small nonrigid deformations ». *Comp. Vision and Image Understanding*, 72(1):72 – 83. (cité p. 15)

FISCHER, B. et MODERSITZKI, J. (1999). « Fast Inversion of Matrices arising in Image Processing ». *Numerical Algorithms*, 22(1):1–11. (cité p. 32)

FLEET, D. et JEPSON, A. (1990). « Computation of Component Image Velocity from Local Phase Information ». *Int. J. of Comp. Vision*, 5(1):77 – 104. (cité p. 40, 41)

FLEUTE, M. et LAVALLÉE, S. (1999). « Nonrigid 3D/2D Registration of Images Using Statistical Models ». Dans *Proc. of MICCAI'99*, volume 1679 de *LNCS*, pages 138 – 147, Cambridge, UK. Springer. (cité p. 17, 176)

FLORACK, L. (1993). « *The Syntactical Structure of Scalar Images* ». PhD thesis, Universiteit Utrecht. `http://www.math.uu.nl/people/florack/`. (cité p. 14)

FORNEFETT, M., ROHR, K., et STIEHL, H. S. (1999). « Elastic Registration of Medical Images Using Radial Basis Functions with Compact Support ». Dans *Proc. of CVPR'99*, pages 402 – 407, Fort Collins, USA. (cité p. 30)

FORNEFETT, M., ROHR, K., et STIEHL, H. S. (2001). « Radial Basis Functions with Compact Support for Elastic Registration of Medical Images ». *Image and Vision Comp.*, 19(1-2):87–96. (cité p. 30)

FÖRNSTER, W. (1986). « A Feature-based Correspondance Algorithm for Image Matching ». *Int. Arch. Photogramm. Remote Sensing*, 26:150 – 166. (cité p. 15)

FRANGI, A. F., NIESSEN, W. J., et VIERGEVER, M. . A. (2001). « Three-Dimensional Modeling for Functional Analysis of Cardiac Images: A Review ». *IEEE Trans. on Medical Imaging*, 20(1):2 – 25. (cité p. 12)

FRISTON, K., ASHBURNER, J., FRITH, C., POLINE, J.-B., HEATHER, J., et FRACKOWIAK, R. (1995). « Spatial registration and normalization of images ». *Human Brain Mapping*, 3(3):165 – 189. (cité p. 25, 89)

GABRANI, M. et TRETIAK, O. J. (1999). « Surface-Based Matching using Elastic Transformations ». *Pattern Recognition*, 32(1):87 – 97. (cité p. 30)

GAENS, T., MAES, F., VANDERMEULEN, D., et SUETENS, P. (1998). « Non-Rigid Multimodal Image Registration using Mutual Information ». Dans *Proc. of MICCAI'98*, volume 1496 de *LNCS*, pages 1099 – 1106, Cambridge, USA. Springer. (cité p. 19)

GAUCH, J. M. et PIZER, S. M. (1993). « Multiresolution Analysis of Ridges and Valleys in Grey-Scale Images ». *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 15(6):635 – 646. (cité p. 16)

GEE, J. C. (1999). « On Matching Brain Volumes ». *Pattern Recognition*, 32:99 – 111. (cité p. 32, 34)

GEE, J. C., LE BRIQUER, L., BARILLOT, C., et HAYNOR, D. R. (1995a). « Probabilistic Matching of Brain Images ». Dans *Proc. of IPMI'95*. (cité p. 34)

GEE, J. C., LE BRIQUER, L., BARILLOT, C., HAYNOR, D. R., et BAJCSY, R. (1995b). « Bayesian Approach to the Brain Image Matching Problem ». Dans *SPIE Medical Imaging*. (cité p. 94, 112)

GERIG, G., WELTI, D., GUTTMANN, C. R. G., COLCHESTER, A. C. F., et SZÉKELY, G. (2000). « Exploring the discrimination power of the time domain for segmentation and characterization of active lesions in serial MR data ». *Medical Image Analysis*, 4(1):31 – 42. (cité p. 189, 200)

GILL, P. E., MURRAY, W., et WRIGHT, M. H. (1981). *Practical Optimization*. Academic Press. (cité p. 36, 55)

GOBBI, D., COMEAU, R., et PETERS, T. (1999). « Ultrasound Probe Tracking for Real-Time Ultrasound/MRI Overlay and Visualization of Brain Shift ». Dans *Proc of MICCAI'99*, LNCS 1679, pages 920–927. (cité p. 160)

GOBBI, D., COMEAU, R., et PETERS, T. (2000). « Ultrasound/MRI Overlay with Image Warping for Neurosurgery ». Dans *Proc of MICCAI'00*, LNCS 1935, pages 106–114. (cité p. 160)

GOULD, S. J. (1980). *Le pouce du panda*. Grasset. (cité p. 176)

GRANGER, S., PENNEC, X., et ROCHE, A. (2001). « Rigid Point-Surface Registration Using an EM Variant of ICP for Computer Guided Oral Implantology ». Dans *Proc. of MICCAI'01*, volume 2208 de *LNCS*, pages 752 – 761, Utrecht, the Netherlands. (cité p. 26, 39)

GRANLUND, G. H. et KNUTSSON, H. (1995). *Signal Processing for Computer Vision*. Kluwer Academic Publishers. (cité p. 183)

GROVA, C., BIRABEN, A., SCARABIN, J.-M., JANNIN, P., BUVAT, I., BENALI, H., et GIBAUD, B. (2001). « A Methodology to Validate MRI/SPECT Registration Methods Using Realistic Simulated SPECT Data ». Dans *Proc. of MICCAI'01*, volume 2208 de *LNCS*, pages 275 – 282, Utrecht, the Netherlands. (cité p. 23, 94)

GUILPIN, C. (1999). *Manuel de Calcul Numérique Appliqué*. EDP Sciences. (cité p. 91, 92)

GUIMOND, A., ROCHE, A., AYACHE, N., et MEUNIER, J. (2001). « Three-Dimensional Multimodal Brain Warping Using the Demons Algorithm and Adaptive Intensity Corrections ». *IEEE Trans. on Medical Imaging*, 20(1):58–69. (cité p. 20, 23, 32, 35, 52, 94)

GUÉZIEC, A. (1993). « Large Deformable Splines, Crest Lines and Matching ». Dans *Proc. of ICCV'93*, pages 650 – 657, Berlin, Germany. (cité p. 15)

HACKBUSCH, W. (1994). *Iterative Solution of Large Sparse Systems of Equations*. Springer - Verlag. (cité p. 37)

HADAMARD, J. (1923). *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*. Yale University Press. (cité p. 27)

HAGEMANN, A., ROHR, K., STIEHL, H. S., SPETZGER, U., et GILSBACH, J. M. (1999). A Biomechanical Model of the Human Head for Elastic Registration of MR Images. Dans *Bildverarbeitung fuer die Medizin 1999*, pages 44 – 48. Springer Verlag. (cité p. 28)

HAJNAL, J., SAEED, N., SOAR, E., OATRIDGE, A., YOUNG, I., et BYDDER, G. (1995). « A Registration and Interpolation Procedure for Subvoxel Matching of Serially Acquired MR Images ». *J. of Comput. Assist. Tomogr.*, 19:289 – 296. (cité p. 22)

HALES, S. J. et LEVESLEY, J. (2000). « On Compactly Supported, Positive Definite, Radial Basis Functions ». Rapport Technique, Department of Mathematics and Computer Science, University of Leicester. (cité p. 30)

HAQUE, H., HASSANIEN, A.-E., et NAKAJIMA, M. (2000). « Generation of Missing Medical Slices Using Morphing Technology ». *IEICE Trans. Inf. Syst.*, E83(7). (cité p. 190, 200)

HARTKENS, T., ROHR, K., et STIEHL, H. S. (1999). « Performance of 3D differential operators for the detection of anatomical point landmarks in MR and CT images ». Dans *Proc. of SPIE's Int. Symp. on Med. Im. and Im. Proc.*, pages 32 – 43, San Diego, USA. (cité p. 15)

HATA, N., DOHI, T., WARFIELD, S., WELLS, W., KIKINIS, R., et JOLESZ, F. A. (1998). « Multimodality Deformable Registration of Pre- and Intraoperative Images for MRI-Guided Brain Surgery ». Dans *Proc. of MICCAI'98*, numéro 1496 dans LNCS, pages 1067 – 1074, Cambridge, USA. Springer. (cité p. 32, 35)

HATA, N., SUZUKI, M., DOHI, T., ISEKI, H., TAKAKURA, K., et HASHIMOTO, D. (1994). « Registration of Ultrasound echography for Intraoperative Use: A Newly Developed Multiproperty Method ». Dans *Proc. of VBC'94*, volume 2359 de *SPIE Press*, pages 251–259, Rochester, USA. (cité p. 160)

HE, T., WANG, S., et KAUFMAN, A. (1994). « Wavelet-Based Volume Morphing ». Dans *Proc. of Visualization'94*, pages 85–92, Washington, USA. (cité p. 190)

HELLIER, P. et BARILLOT, C. (2000a). « Coupling Dense and Landmark-Based approaches for Non Rigid Registration ». Rapport Technique 1368, IRISA. (cité p. 21)

HELLIER, P. et BARILLOT, C. (2000b). « Multimodal Non-Rigid Warping for Correction of Distortions in fMRI ». Dans *Proc. of MICCAI'00*, volume 1935 de *LNCS*, Pittsburgh, USA. Springer. (cité p. 178)

HELLIER, P., BARILLOT, C., MÉMIN, E., et PÉREZ, P. (1999). « Medical Image Registration with Robust Multigrid Techniques ». Dans *Proc. of MICCAI'99*, volume 1679 de *LNCS*, pages 680 – 687, Cambridge, UK. Springer. (cité p. 20, 26, 112, 113)

HERMOSILLO, G., CHEFD'HOTEL, C., et FAUGERAS, O. (2001). « A Variational Approach to Multi-Modal Image Matching ». Rapport Technique RR-4117, INRIA. (cité p. 36)

HOLDEN, M., HILL, D. L. G., DENTON, E. R. E., JAROSZ, J. M., COX, T. C. S., ROHLFING, T., GOODEY, J., et HAWKES, D. J. (2000). « Voxel Similarity Measures for 3-D Serial MR Brain Image Registration ». *IEEE Trans. on Medical Imaging*, 19(2):94 – 102. (cité p. 94, 112)

HORN, B. K. P. et SCHUNK, B. G. (1981). « Determining Optical Flow ». *Artificial Intelligence*, 17:181–203. (cité p. 19, 50)

HSU, L.-Y. et LOEW, M. H. (2001). « Fully automatic 3D Feature-Based Registration of Multi-Modality Medical Images ». *Image and Vision Comp.*, 19(1-2):75 – 85. (cité p. 29)

HUBER, P. J. (1981). *Robust Statistics*. John Wiley & Sons. (cité p. 26)

HUGHES, J. F. (1992). « Scheduled Fourier volume morphing ». *Computer Graphics*, 26(2):43 – 46. (cité p. 190)

IONESCU, G., LAVALLÉE, S., et DEMONGEOT, J. (1999). « Automated Registration of Ultrasound with CT Images: Application to Computer Assisted Prostate Radiotherapy and Orthopedics ». Dans *Proc. of MICCAI'99*, volume 1679 de *LNCS*, pages 768–777, Cambridge (UK). (cité p. 160)

JANKE, A. L., ROSE, S. E., GALLOWAY, G. J., et CHALK, J. B. (2001). « Mutual Information vs Negative Cross Correlation Registration: Applied to T1 and T2 3D MRI AD and Normal Volumes ». Dans *Proc. of VISIM'01*, Utrecht, Netherlands. `http://www.science.uva.nl/research/isis/VISIM/`. (cité p. 24, 94)

JEFFREYS, H. (1973). « On Isotropic Tensors ». *Proc. of Cambridge Phil. Soc.*, 73:173 – 176. (cité p. 114)

KANNAPPAN, P. et SAHOO, P. K. (1992). « Rotation Invariant Separable Functions are Gaussian ». *SIAM J. on Math. Analysis*, 23(5):1342 – 1351. (cité p. 97, 125)

KING, A. P., BLACKALL, J. M., PENNEY, G. P., EDWARDS, P. J., HILL, D. L. G., et HAWKES, D. J. (2000). « Bayesian Estimation of Intra-operative Deformation for Image-Guided Surgery using 3D Ultrasound ». Dans *Proc. of MICCAI'00*, volume 1935 de *LNCS*, pages 588 – 597, Pittsburgh, USA. Springer. (cité p. 40, 160, 202)

KIRKPATRICK, S., GELATT, C. D., et VECCHI, M. P. (1983). « Optimization by Simulated Annealing ». *Science*, 220(4598):671 – 680. (cité p. 37)

KITCHEN, L. et ROSENFELD, A. (1982). « Grey level corner detection ». *Pattern Recognition Letters*, 1:95–102. (cité p. 15)

KOPP, M. et PURGATHOFER, W. (1997). « Multi-Resolution Image Morphing ». Rapport Technique TR186-2-97-20, Tech. U. of Vienna. (cité p. 190)

KOTSAS, P., MALASIOTIS, S., STRINTZIS, M., PIRAINO, D. W., et CORNHILL, J. F. (1998). « A Fast and Accurate Method for Registration of MR Images of the Head ». *Int. J. of Medical Informatics*, 52:167 – 182. (cité p. 29)

KOVESI, P. (1996). « *Invariant Measures of Image Features from Phase Information* ». PhD thesis, University of Western Australia. (cité p. 41)

KOVESI, P. (1999). « Image features from phase congruency ». *Videre*, 1(3). `http://mitpress.mit.edu/e-journals/Videre/`. (cité p. 99)

KRISSIAN, K. (2000). « *Traitement multi-échelle : Applications à l'imagerie médicale et à la détection tridimensionnelle de vaisseaux* ». Thèse de sciences, université de Nice Sophia-Antipolis. (cité p. 39)

KRISSIAN, K., MALANDAIN, G., et AYACHE, N. (1997). « Directional Anisotropic Diffusion Applied to Segmentation of Vessels in 3D Images ». Dans *Scale-Space Theory in Computer Vision*, pages 345–348, Utrecht, The Netherlands. (cité p. 79, 82)

KUMAR, K. et DESAI, U. (1995). « A multiresolution approach to integrated optical flow computation ». Dans *Proc. of ICIPA'95*, pages 852 – 857, Edinburgh, UK. IEE, London, UK. (cité p. 38)

KYBIC, J. (2001). « *Elastic Image Registration using Parametric Deformation Models* ». PhD thesis, École Polytechnique Fédérale de Lausanne. (cité p. 29)

KYRIACOU, S. K. et DAVATZIKOS, C. (1998). « A Biomechanical Model of Soft Tissue Deformation, with Applications to Non-Rigid Registration of Brain Images with Tumor Pathology ». Dans *Proc. of MICCAI'98*, pages 531 – 538, Cambridge, USA. Springer. (cité p. 31, 35, 137)

LAI, S.-H. (2000). « Robust Image Matching under Partial Occlusion and Spatially Varying Illumination Change ». *Comp. Vision and Image Understanding*, 78(1):84 – 98. (cité p. 89)

LAKES, R. (1987). « Foam Structures with a negative Poisson's ratio ». *Science*, 235(4792):1038 – 1040. (cité p. 119)

Lantis, A., Taylor, C. J., et Cootes, T. F. (1995). « A unified approach to coding and interpreting face images ». Dans *Proc. of ICCV'95*, pages 368 – 373, Cambridge, USA. (cité p. 176)

Lau, Y. H., Braun, M., et Hutton, B. F. (1999). « Non-Rigid 3D Image Registration Using Regionally Constrained Matching and the Correlation Ratio ». Dans *Proc. of WBIR'99*, pages 137 – 148, Bled, Slovenia. (cité p. 19, 94)

Lazarus, F. et Verroust, A. (1998). « Three-dimensional metamorphosis: A survey ». *The Visual Computer*, 14:373 – 389. (cité p. 190)

Lee, S.-Y., Chwa, K.-Y., Shin, S.-Y., et Wolberg, G. (1995). « Image metamorphosis using snakes and free-form deformations ». Dans *Proc. of SIGGRAPH'95*, pages 439 – 448. (cité p. 190)

Lefébure, M. et Cohen, L. D. (2001). « Image Registration, Optical Flow and Local Rigidity ». *J. of Math. Imaging and Vision*, 14(3):131 – 147. (cité p. 20, 30, 36)

Lemaréchal, C. (1989). *Méthodes Numériques d'Optimisation.* Collection Didactique. INRIA. (cité p. 36)

Lester, H. et Arridge, S. R. (1999). « A Survey of Hierarchical Non-Linear Medical Image Registration ». *Pattern Recognition*, 32:129 – 149. (cité p. 22, 39)

Lester, H., Arridge, S. R., Jansons, K. M., Lemieux, L., Hajnal, J. V., et Oatridge, A. (1999). « Non-Linear Registration with the Variable Viscosity Fluid Algorithm ». Dans *Proc. of IPMI'99*, volume 1613 de *LNCS*, pages 238 – 251, Visegrád, Hungary. Springer. (cité p. 33, 35)

Likar, B. et Pernuš, F. (2001). « A Hierarchical Approach to Elastic Registration Based on Mutual Information ». *Image and Vision Comp.*, 19(1-2):33 – 44. (cité p. 30)

Little, J. A., Hill, D. L. G., et Hawkes, D. J. (1996). « Deformations Incorporating Rigid Structures ». Dans *Proc. of MMBIA'96*, pages 104 – 113, San Fransisco, USA. (cité p. 28, 29)

Lohmann, G. et von Cramon, D. Y. (2000). « Automatic Labelling of the Human Cortical Surface using Sulcal Basins ». *Medical Image Analysis*, 4(3):179 – 188. (cité p. 187)

Lotjonen, L. et Mäkelä, T. (2001). « Elastic Matching Using a Deformation Sphere ». Dans *Proc. of MICCAI'01*, volume 2208 de *LNCS*, pages 541 – 548, Utrecht, the Netherlands. (cité p. 30)

Lutton, E., Lévy-Véhel, J., Cretin, G., Glevarec, P., et Roll, C. (1996). « Mixed IFS: Resolution of the Inverse Problem Using Genetic Programming ». Rapport Technique RR-2631, INRIA. (cité p. 37)

Ma, B., Ellis, R. E., et Fleet, D. J. (1998). « Spotlights: A Robust Method for Surface-Based Registration in Orthopedic Surgery ». Dans *Proc. of MICCAI'98*, volume 1679 de *LNCS*, pages 936 – 944, Cambridge, UK. Springer. (cité p. 26)

Maes, F., Collignon, A., Vandermeulen, D., Marchal, G., et Suetens, P. (1997). « Multimodality Image Registration by Maximization of Mutual Information ». *IEEE Trans. on Medical Imaging*, 16(2):187–198. (cité p. 29, 48)

Maes, F., Vandermeulen, D., et Suetens, P. (1999). « Comparative Evaluation of Multiresolution Optimization Strategies for Multimodality Image Registration by Maximization of Mutual Information ». *Medical Image Analysis*, 3(4):373 – 386. (cité p. 38)

Maintz, J. B. A., Meijering, E. H. W., et Viergever, M. A. (1998). « General Multimodal Elastic Registration based on Mutual Information ». *Image Processing.* (cité p. 19, 94)

Maintz, J. B. A. et Viergever, M. A. (1998). « A Survey of Medical Image Registration ». *Medical Image Analysis*, 2(1):1–36. (cité p. 12)

Malandain, G., Bertrand, G., et Ayache, N. (1993). « Topological Segmentation of Discrete Surfaces ». *Int. J. of Comp. Vision*, 10(2):158 – 183. (cité p. 178)

Manceaux-Demiau, A., Mangin, J.-F., Régis, J., Pizzato, O., et Frouin, V. (1997). « Differential Features of Cortical Folds ». Dans *Proc. of CVRMed - MRCAS'97*, volume 1205 de *LNCS*, pages 439 – 448. (cité p. 14)

Mangin, J.-F. (2000). « Entropy Minimization for Automatic Correction of Intensity Nonuniformity ». Dans *Proc. of MMBIA'00*, pages 162 – 169. (cité p. 25, 82, 88, 89, 103)

Mangin, J.-F., Frouin, V., Bloch, I., Regis, J., et López-Krahe, J. (1995). « From 3D MR images to structural representations of the cortex topography using topology preserving deformations ». *J. of Math. Imaging and Vision*, 5(4):297 – 318. (cité p. 178)

MEIJERING, E. H. W., NIESSEN, W. J., et VIERGEVER, M. A. (2001). « Quantitative Evaluation of Convolution-Based Methods for Medical Image Interpolation ». *Medical Image Analysis*, 5(2):111 – 126. (cité p. 43, 48, 193)

MEYER, C., BOES, J., KIM, B., et BLAND, P. (1998). « Evaluation of Control Point Selection in Automatic, Mutual Information Driven 3D Warping ». Dans *Proc. of MICCAI'98*, volume 1496 de *LNCS*, pages 944 – 951, Cambridge, USA. Springer. (cité p. 42)

MEYER, C. R., BOES, J. L., KIM, B., et BLAND, P. H. (1999). « Probabilistic Brain Atlas Construction: Thin Plate Spline Warping via Maximization of Mutual Information ». Dans *Proc. of MICCAI'99*, volume 1679 de *LNCS*, pages 631 – 637, Cambridge, UK. Springer. (cité p. 30, 35)

MILLER, M. et YOUNES, L. (1999). « Group actions, homeomorphisms, and matching: a general framework ». Dans *Proc. of IEEE Workshop. on Statistical and Comp. Theories of Vision*, Fort Collins, USA. (cité p. 33)

MILLER, M. et YOUNES, L. (2001). « Group Actions, Homeomorphisms, and Matching: A General Framework ». *Int. J. of Comp. Vision*, 41(1/2):61–84. (cité p. 36, 41)

MILLER, M. I., CHRISTENSEN, G. E., AMIT, Y., et GRENANDER, U. (1993). « Mathematical Textbook of Deformable Neuroanatomies ». *Proc. of the National Academy of Science*, 90(24):11944–11948. (cité p. 32, 34, 35, 112)

MITRA, S. K. et KAISER, J. F., éditeurs (1993). *Handbook for Digital Signal Processing*. John Wiley & Sons. (cité p. 32, 37)

MONGA, O., ARMANDE, N., et MONTESINOS, P. (1997). « Thin nets and crest lines: application to satellite data and medical images ». *Comp. Vision and Image Understanding*, 67(3):285 – 295. (cité p. 15)

MONTAGNAT, J. et DELINGETTE, H. (1997). « Volumetric medical images segmentation using shape-constrained deformable models ». Dans *Proc. of CVRMed-MRCAS'97*, volume 1205 de *LNCS*, pages 13 – 22, Grenoble, France. (cité p. 17)

MONTAGNAT, J. et DELINGETTE, H. (1998). « Globally constrained deformable models for 3D object reconstruction ». *Signal Processing*, 71(2):173–186. (cité p. 203)

MONTAGNAT, J., DELINGETTE, H., et MALANDAIN, G. (1999). « Nonrigid 3D/2D Registration of Images Using Statistical Models ». Dans *Proc. of MICCAI'99*, volume 1679 de *LNCS*, pages 168 – 175, Cambridge, UK. Springer. (cité p. 41)

MUNDY, J. L. et ZISSERMAN, A., éditeurs (1992). *Geometric Invariance in Computer Vision*. Artificial Intelligence series. MIT Press. ISBN 0-262-13285-0. (cité p. 14)

MUSSE, O., HEITZ, F., et ARMSPACH, J.-P. (1999). « 3D Deformable Image Matching using Multiscale Minimization of Global Energy Functions ». Dans *Proc. of CVPR'99*, Fort Collins, USA. (cité p. 30, 35)

MUSSE, O., HEITZ, F., et ARMSPACH, J.-P. (2001). « Topology Preserving Deformable Image Matching using Constrained Hierarchical Parametric Models ». *IEEE Trans. on Image Processing*, 10(7):1081 – 1093. (cité p. 41, 142)

NEUMAIER, A. (1998). « Solving Ill-Conditioned and Singular Linear Systems: a Tutorial on Regularization ». *SIAM Review*, 40(3):636 – 666. (cité p. 27)

NIELSEN, M., FLORACK, L., et DERICHE, R. (1994). « Regularization and Scale Space ». Research Report RR-2352, INRIA. (cité p. 54, 117, 120)

NIKOU, C., HEITZ, F., et ARMSPACH, J.-P. (1998). « Brain Segmentation from 3D MRI using Statistically Learned Physics-based Deformable Models ». Dans *IEEE Nuclear Science Symposium Conf. Record*, volume 3, pages 2045 – 2049, Toronto, Canada. (cité p. 17)

NIKOU, C., HEITZ, F., et ARMSPACH, J.-P. (1999). « Robust voxel similarity metrics for the registration of dissimilar single and multimodal images ». *Pattern Recognition*, 32(8):1351 – 1368. (cité p. 26, 37, 112)

OLVER, P. J. (1999). *Classical Invariant Theory*. Numéro 44 dans London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press. ISBN 0-521-55821-2. (cité p. 14)

OURSELIN, S. (2002). « *Recalage d'images médicales par appariement de régions. Application à la construction d'atlas histologiques* ». PhD thesis, Université de Nice Sophia-Antipolis. (cité p. 76, 203)

OURSELIN, S., ROCHE, A., et PENNEC, X. (1999). « Automatic Alignment of Histological Sections ». Dans *Proc. of WBIR'99*, Bled, Slovenia. (cité p. 104)

Ourselin, S., Roche, A., Subsol, G., Pennec, X., et Ayache, N. (2001). « Reconstructing a 3D Structure from Serial Histological Sections ». *Image and Vision Comp.*, 19(1-2):25 – 31. (cité p. 19, 29, 35)

Pagoulatos, N., Edwards, W., Haynor, D., et Kim, Y. (1999). « Interactive 3-D Registration of Ultrasound and Magnetic Resonance Images Based on a Magnetic Position Sensor ». *IEEE Transactions on Information Technology In Biomedicine*, 3(4):278–288. (cité p. 160)

Papademetris, X., Sinusas, A. J., Dione, D. P., et Duncan, J. S. (1999). « 3D Cardiac Deformation from Ultrasound Images ». Dans *Proc. of MICCAI'99*, volume 1679 de *LNCS*, pages 420 – 429, Cambridge, UK. Springer. (cité p. 14, 161)

Peckar, W., Schnörr, C., Rohr, K., et Stiehl, H. S. (1999). « Parameter-Free Elastic Deformation Approach for 2D and 3D Registration Using Prescribed Displacements ». *J. of Math. Imaging and Vision*, 10:143 – 162. (cité p. 30, 36)

Pennec, X., Cachier, P., et Ayache, N. (1999). « Understanding the "Demons" Algorithm: 3D Non-Rigid Registration by Gradient Descent ». Dans *Proc. of MICCAI'99*, volume 1679 de *LNCS*, pages 597 – 605, Cambridge, UK. Springer.
`http://www-sop.inria.fr/epidaure/personnel/Pascal.Cachier/publi.html`. (cité p. 33, 35)

Pennec, X., Cachier, P., et Ayache, N. (2001). « Tracking Brain Deformations in Time-Sequences of 3D US Images ». *Pattern Recognition Letters - Special Issue on Ultrasonic Image Processing and Analysis*. in press. (cité p. 6, 34, 158)

Pennec, X., Guttman, C. R. G., et Thirion, J.-P. (1998). « Feature-Based Registration of Medical Images: Estimation and Validation of the Pose Accuracy ». Dans *Proc. of MICCAI'98*, numéro 1496 dans LNCS, pages 1107 – 1114, Cambridge, USA. Springer. (cité p. 29)

Phillips, M. D., Lowe, M. J., Lurito, J. T., Dzemidzic, M., et Mathews, V. P. (2000). « Temporal lobe activation demonstrates sex-based differences during passive listening ». *Radiology*, 220(1):202 – 207. (cité p. 176)

Pluim, J. P. W., Maintz, J. B. A., et Viergever, M. A. (2000a). « Image Registration by Maximisation of Combined Mutual Information and Gradient Information ». *IEEE Trans. on Medical Imaging*, 19(8):809 – 814. (cité p. 24)

Pluim, J. P. W., Maintz, J. B. A., et Viergever, M. A. (2000b). « Interpolation Artefacts in Mutual Information-Based Image Registration ». *Comp. Vision and Image Understanding*, 77(2):211 – 232. (cité p. 44)

Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., et Flannery, B. P. (1992). *Numerical Recipies in C*. Cambridge University Press. (cité p. 38, 55, 146)

Prima, S. (2001). « *Étude de la symétrie bilatérale en imagerie cérébrale volumique* ». PhD thesis, Université Parix XI.
`http://www-sop.inria.fr/epidaure/BIBLIO/Author/PRIMA-S.html`. (cité p. 25, 88, 89)

Prima, S., Thirion, J.-P., Subsol, G., et Roberts, N. (1998). « Automatic Analysis of Normal Brain Dissymmetry of Males and Females in MR Images ». Dans *MICCAI'98*, volume 1496 de *LNCS*, pages 770–779. (cité p. 52)

Ramponi, G. (1999). « Warped Distance for Space-Variant Linear Image Interpolation ». *IEEE Trans. on Image Processing*, 8(5):629 – 639. (cité p. 43)

Rangarajan, A., Chui, H., et Duncan, J. S. (1999). « Rigid Point Feature Registration using Mutual Information ». *Medical Image Analysis*, 3(4). (cité p. 29, 30, 35)

Raya, S. P. et Udupa, J. K. (1990). « Shape-based interpolation of multidimensional objects ». *IEEE Trans. on Medical Imaging*, 9(1):32 – 43. (cité p. 190)

Rey, D., Subsol, G., Delingette, H., et Ayache, N. (1999). « Automatic Detection and Segmentation of Evolving Processes in 3D Medical Images: Application to Multiple Sclerosis ». Dans *Proc. of IPMI'99*, volume 1613 de *LNCS*, pages 154–167, Visegrád, Hungary. (cité p. 105, 119, 140, 150, 151)

Régis, J., Mangin, J.-F., Frouin, V., Sastre, F., Peragut, J. C., et Samson, Y. (1995). « Generic Model for the Localization of the Cerebral Cortex and Preoperative Multimodal Integration in Epilepsy Surgery ». *Stereotactic Functional Neurosurgery*, 65:72 – 80. (cité p. 180, 187)

RICHARD, C. et HEMAMI, H. (1974). « Identification of three dimensional objects using Fourier descriptors of the boundary curve ». *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics*, 4(4):371 – 378. (cité p. 21)

RICHARD, W., ZAR, D., LAPRESTO, E., et STEINER, C. (1999). « A low-cost PCI-bus-based ultrasound system for use in image-guided neurosurgery ». *Computerized Medical Imaging and Graphics*, 23(5):267–276. (cité p. 160)

RIVIÈRE, D., MANGIN, J.-F., PAPADOPOULOS, D., MARTINEZ, J.-M., FROUIN, V., et RÉGIS, J. (2000). « Automatic Recognition of Cortical Sulci using a Congregation of Neural Networks ». Dans *Proc. of MICCAI'00*, volume 1935 de *LNCS*, pages 40 – 49, Pittsburgh, USA. Springer. (cité p. 14, 179)

ROCHE, A. (2001). « *Recalage d'images médicales par inférence statistique* ». PhD thesis, Université de Nice - Sophia Antipolis.
`http://www.inria.fr/rrrt`. (cité p. 24, 43, 203)

ROCHE, A., MALANDAIN, G., et AYACHE, N. (2000a). « Unifying Maximum Likelihood Approaches in Medical Image Registration ». *Int. J. of Imaging Systems and Technology*, 11:71–80. (cité p. 23, 24, 82, 88, 94, 106, 184)

ROCHE, A., MALANDAIN, G., AYACHE, N., et PRIMA, S. (1999). « Towards a Better Comprehension of Similarity Measures Used in Medical Image Registration ». Dans *Proc. of MICCAI'99*, volume 1679 de *LNCS*, pages 555 – 566, Cambridge, UK. Springer. (cité p. 144)

ROCHE, A., MALANDAIN, G., PENNEC, X., et AYACHE, N. (1998). « Multimodal Image Registration by Maximization of the Correlation Ratio ». Research Report RR-3378, INRIA. (cité p. 29, 112)

ROCHE, A., PENNEC, X., RUDOLPH, M., AUER, D. P., MALANDAIN, G., OURSELIN, O., AUER, L. M., et AYACHE, N. (2000b). « Generalized Correlation Ratio for Rigid Registration of 3D Ultrasound with MR Images ». Dans *Proc. of MICCAI'00*, volume 1935 de *LNCS*, pages 567 – 577, Pittsburgh, USA. (cité p. 17, 45, 159, 160, 161)

ROHLFING, T. et MAURER, C. R. (2001). « Intensity-based Non-rigid Registration using Adaptive Multilevel Free-form Deformation with an Incompressibility Constraint ». Dans *Proc. of MICCAI'01*, volume 2208 de *LNCS*, pages 111 – 119, Utrecht, the Netherlands. (cité p. 33, 41, 142, 150)

ROHLING, R. N., GEE, A. H., et BERMAN, L. (1996/7). « Three-Dimensional Spatial Compounding of Ultrasound Images ». *Medical Image Analysis*, 1(3):177–193. (cité p. 161)

ROHLING, R. N., GEE, A. H., et BERMAN, L. (1998). « Automatic Registration of 3-D Ultrasound Images ». *Ultrasound in Medicine and Biology*, 24(6):841–854. (cité p. 161)

ROHR, K. (1998). « Image Registration Based on Thin-Plate Splines and Local Estimates of Anisotropic Landmark Localization Uncertainties ». Dans *Proc. of MICCAI'98*, pages 1174 – 1183, Cambridge, USA. Springer. (cité p. 15)

ROHR, K., FORNEFETT, M., et STIEHL, H. S. (1999). « Approximating Thin-Plate Splines for Elastic Registration: Integration of Landmark Errors and Orientation Attributes ». Dans *Proc. of IPMI'99*, volume 1613 de *LNCS*, pages 252 – 265, Visegrád, Hungary. Springer. (cité p. 14, 30, 35, 41, 128)

ROUET, J.-M., JACQ, J.-J., et ROUX, C. (2000). « Genetic Algorithm for a Robust 3-D MR-CT Registration ». *IEEE Trans. on Inf. Tech. in Biomedicine*, 4(2):126 – 136. (cité p. 38)

RUECKERT, D., FRANGI, A. F., et SCHNABEL, J. A. (2001). « Automatic Construction of 3D Statistical Deformation Models Using Non-rigid Registration ». Dans *Proc. of MICCAI'01*, volume 2208 de *LNCS*, pages 77 – 84, Utrecht, the Netherlands. (cité p. 45, 176)

RUECKERT, D., HAYES, C., STUDHOLME, C., SUMMERS, P., LEACH, M., et HAWKES, D. J. (1998). « Non-Rigid Registration of Breast MR Images Using Mutual Information ». Dans *Proc. of MICCAI'98*, pages 1144 – 1152, Cambridge, USA. Springer. (cité p. 30, 35)

RUECKERT, D., SONODA, L., HAYES, C., HILL, D., LEACH, M., et HAWKES, D. (1999). « Nonrigid registration using free-form deformations: application to breast MR images ». *IEEE Trans. on Medical Imaging*, 18(8):712 – 721. (cité p. 33, 39, 112)

RUIZ-ALZOLA, J., WESTIN, C.-F., WARFIELD, S. K., NABAVI, A., et KIKINIS, R. (2000). « Nonrigid Registration of 3D Scalar, Vector and Tensor Medical Data ». Dans *Proc. of MICCAI'00*, volume 1935 de *LNCS*, Pittsburgh, USA. Springer. to appear in Medical Image Analysis. (cité p. 40, 79)

RUPRECHT, D. et MÜLLER, H. (1995). « Image warping with scattered data interpolation ». *IEEE Comp. Graphics and Applications*, 15(2):37 – 43. (cité p. 190)

SAAD, Y. (1996). *Iterative Methods for Sparse Linear Systems.* PWS Series in Computer Science. PWS Publishing Company. (cité p. 37)

SANCHEZ-ORTIZ, G., DECLERCK, J., MULET-PARADA, M., et NOBLE, J. (2000). « Automatic 3D Echocardiographic Image Analysis ». Dans *Proc. of MICCAI'00*, volume 1935 de *LNCS*, pages 687–696, Pittsburgh, USA. (cité p. 161)

SCHMID, C. et MOHR, R. (1995). « Matching by Local Invariants ». Rapport Technique RR-2644, INRIA. `http://www.inria.fr/rrrt/`. (cité p. 14)

SCHNABEL, J. A., RUECKERT, D., QUIST, M., BLACKALL, J. M., CASTELLANO-SMOTH, A. D., HARTKENS, T., PENNEY, G. P., HALL, W. A., LIU, H., TRUWIT, C. L., GERRITSEN, F. A., HILL, D. L. G., et HAWKES, D. J. (2001a). « A Generic Framework for Non-Rigid Registration Based on Non-uniform Multi-level Free-Form Deformations ». Dans *Proc. of MICCAI'01*, volume 2208 de *LNCS*, pages 573 – 581, Utrecht, the Netherlands. (cité p. 30, 33, 204)

SCHNABEL, J. A., TANNER, C., CASTELLANO SMITH, A. D., LEACH, M. O., HAYES, C., DEGENHARD, A., HOSE, R., HILL, D. L. G., et HAWKES, D. J. (2001b). « Validation of Non-Rigid Registration Using Finite Element Methods ». Dans *Proc. of IPMI'01*, volume 2082 de *LNCS*, pages 344 – 357, Davis, USA. (cité p. 40)

SCHORMANN, T., HENN, S., et ZILLES, K. (1996). « A New Approach to Fast Elastic Alignment with Applications to Human Brains ». Dans *Proc. of VBC'96*, volume 1131 de *LNCS*, pages 337 – 342, Hamburg, Germany. Springer. (cité p. 32)

SELMAOUI, N., LESCHI, C., et EMPTOZ, H. (1993). « Crest lines detection in grey level images: studies of different approaches and proposition of a new one ». Dans *Proc. of CAIP'93*, pages 157 – 164, Budapest, Hungary. (cité p. 15)

SERMESANT, M., COUDIÈRE, Y., DELINGETTE, H., AYACHE, N., et DÉSIDÉRI, J. (2001). « An Electro-Mechanical Model of the Heart for Cardiac Image Analysis ». Dans *Proc. of MICCAI'01*. (cité p. 45)

SHANNON, C. E. et WEAVER, W. (1949). *The Mathematical Theory of Communication.* University of Illinois Press.
`http://galaxy.ucsd.edu`. (cité p. 24)

SHEN, D. et DAVATZIKOS, C. (2000). « Adaptative-Focus Statistical Shape Model for Segmentation of 3D MR structures ». Dans *Proc. of MICCAI'00*, volume 1935 de *LNCS*, pages 206 – 215, Pittsburgh, USA. (cité p. 176)

SHIH, W.-S. V., LIN, W.-C., et CHEN, C.-T. (1996). « Contour Model Guided Image Warping for Medical Image Interpolation ». Dans *Proc. of MMBIA'96*, pages 329 – 338. (cité p. 200)

SILVESTER, P. P. et FERRARI, R. L. (1996). *Finite Elements for Electrical Engineers.* Cambridge University Press, 3rd edition edition. (cité p. 44)

SIMONCELLI, E. P., ADELSON, E. H., et HEEGER, D. J. (1991). « Probability Distributions of Optical Flow ». Dans *Proc. of CVPR'91*, pages 310 – 315, Mauii, Hawaii. (cité p. 20, 32)

SKRINJAR, O. et DUNCAN, J. (1999). « Real Time 3D Brain Shift Compensation ». Dans *Proc of IPMI'99*, pages 42–55, Visegrad, Hungary. (cité p. 168)

SLED, J. et PIKE, B. (1998). « Standing-Wave and RF Penetration Artifacts Caused by Elliptic Geometry: An Electrodynamic Analysis of MRI. ». *IEEE Trans. on Medical Imaging*, 17(4):653–662. (cité p. 88)

SLED, J. G. (1998). « A nonparametric method for automatic correction of intensity nonuniformity in MRI data ». *IEEE Trans. on Medical Imaging*, 17(1):87 – 97. (cité p. 25, 88, 89, 103)

SMITH, G. F. (1968). « On Isotropic Tensors and Rotation Tensors of Dimension m and Order n ». *Tensor, N. S.*, 19:79 – 88. (cité p. 116)

STARCK, J.-L. et GASTAUD, R. (2000). « Multiscale Entropy and its Applications ». Dans *Proc. of RFIA'00*, volume II, pages 317 – 326, Paris, France. (cité p. 24)

STRINTZIS, M. G. et KOKKINIDIS, I. (1997). « Maximum Likelihood Motion Estimation in Ultrasound Image Sequences ». *IEEE Signal Processing Letters*, 4(6). (cité p. 19, 94, 161)

STUDHOLME, C., CONSTABLE, R. T., et DUNCAN, J. S. (2000). « Accurate Alignment of Functional EPI Data to Anatomical MRI Using a Physics-Based Distortion Model ». *IEEE Trans. on Medical Imaging*, 19(11):1115 – 1127. (cité p. 24, 45)

STUDHOLME, C., HILL, D. L. G., et HAWKES, D. J. (1995). Multiresolution Voxel Similarity Measures for MR-PET Registration. Dans *Information Processing in Medical Imaging*, pages 287–298. Kluwer Academic Publishers. (cité p. 38, 112)

STUDHOLME, C., HILL, D. L. G., et HAWKES, D. J. (1999). « An Overlap Invariant Entropy Measure of 3D Medical Image Alignment ». *Pattern Recognition*, 32(1):71 – 86. `http://www.elsevier.nl/inca/publications/store/3/2/8`. (cité p. 43, 112)

SUBSOL, G. (1995). « *Construction automatique d'atlas anatomiques morphométriques à partir d'images médicales tridimensionnelles* ». PhD thesis, École Centrale Paris. (cité p. 14)

SUBSOL, G. (1998). Crest Lines for Curve Based Warping. Dans *Brain Warping*, Chapitre 14, pages 241 – 262. Academic Press. (cité p. 15)

SUBSOL, G., THIRION, J. P., et AYACHE, N. (1998). « A General Scheme for Automatically Building 3D Morphometric Anatomical Atlases: application to a Skull Atlas ». *Medical Image Analysis*, 2(1):37–60. (cité p. 30, 35)

SUTER, D. et CHEN, F. (2000). « Left Ventricular Motion Reconstruction Based on Elastic Vector Splines ». *IEEE Trans. on Medical Imaging*, 19(4):295 – 305. (cité p. 17, 30, 42)

SZELISKI, R. (1990). « Bayesian Modeling of Uncertainty in Low-Level Vision ». *Int. J.of Comp. Vision*, 5(3):271 – 301. (cité p. 31)

SZELISKI, R. et COUGHLAN, J. (1997). « Spline-Based Image Registration ». *Int. J. of Comp. Vision*, 22(3):199–218. (cité p. 30, 33, 35)

TALAIRACH, J. et TOURNOUX, P. (1988). *Co-Planar Stereotaxic Atlas of the Human Brain : 3-Dimensional Proportional System : An Approach to Cerebral Imaging.* Thieme Medical Publishers. (cité p. 14, 15)

TERZOPOULOS, D. (1986). « Regularization of Inverse Visual Problems Involving Discontinuities ». *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 8(4):413 – 424. (cité p. 113)

THIRION, J.-P. (1994). « Extremal Points: Definition and Application to 3D Image Registration ». Dans *Proc. of CVPR'94*, pages 587 – 592, Seattle, USA. (cité p. 15)

THIRION, J.-P. (1998). « Image matching as a diffusion process: an analogy with Maxwell's demons ». *Medical Image Analysis*, 2(3):243–260. `http://www3.oup.co.uk/jnls/list/mediaj/contents/`. (cité p. 20, 32, 35, 48, 49, 52, 66, 77)

THOMPSON, P. et TOGA, A. W. (1996). « A Surface-Based Technique for Warping 3-Dimensional Images of the Brain ». *IEEE Trans. on Medical Imaging*, 15(4):402–417. (cité p. 15, 22, 178)

THÉVENAZ, P., BLU, T., et UNSER, M. (2000). Image Interpolation and Resampling. Dans *Handbook of Medical Imaging: Processing and Analysis*, pages 393 – 420. Academic Press. (cité p. 43, 44)

THÉVENAZ, P., RUTTIMANN, U. E., et UNSER, M. (1998). « A Pyramid Approach to Sub-Pixel Registration Based on Intensity ». *IEEE Trans. on Image Processing*, 7(1):27 – 41. (cité p. 29, 53)

TROBAUGH, J., RICHARD, W., SMITH, K., et BUCHOLZ, R. (1994a). « A low-cost PCI-bus-based ultrasound system for use in image-guided neurosurgery ». *Computerized Medical Imaging and Graphics*, 18(4):235–246. (cité p. 159)

TROBAUGH, J., TROBAUGH, D., et RICHARD, W. (1994b). « Three-dimensional imaging with stereotactic ultrasonography ». *Computerized Medical Imaging and Graphics*, 18(5):315–323. (cité p. 159)

TROUVÉ, A. (1998). « Diffeomorphisms Groups and Pattern Matching in Image Analysis ». *Int. J. of Comp. Vision*, 28(3):213–221. (cité p. 33)

TROUVÉ, A. et YOUNES, L. (2000). « Diffeomorphic Matching Problems in One Dimension: Designing and Minimizing Matching Functionals ». Dans *Proc. of ECCV'00*, volume 1842 de *LNCS*, pages I.573–587, Dublin, Ireland. Springer. (cité p. 41, 140)

TSAI, A., YEZZI, A., et WILLSKY, A. S. (2000). « A Curve Evolution Approach to Medical Image Magnification via the Mumford-Shah Functional ». Dans *Proc. of MICCAI'00*, numéro 1935 dans LNCS, pages 246 – 255, Pittsburgh, USA. Springer. (cité p. 113)

UNSER, M. (1999). « Splines: a perfect fit for signal and image processing ». *IEEE Signal Processing Magazine*, 16(6):22 – 38. (cité p. 30, 193)

VAILLANT, M. et DAVATZIKOS, C. (1999). « Hierarchical Matching of Cortical Features for Deformable Brain Image Registration ». Dans *Proc. of IPMI'99*, volume 1613 de *LNCS*, pages 182 – 195, Visegrád, Hungary. Springer. (cité p. 14, 178)

VAN HERK, M., GILHUIJS, K. G. A., de MUNCK, J., et TOUW, A. (1997). « Effect of Image Artifacts, Organ Motion, and Poor Segmentation on the Reliability and Accuracy of 3D Chamfer Matching ». *Comp. Aided Surgery*, 2:346 – 355. (cité p. 29, 35, 38)

VAN LEEMPUT, K., MAES, F., VANDERMEULEN, D., et SUETENS, P. (1999). « Automated model-based bias field correction of MR images of the brain ». *IEEE Trans. on Medical Imaging*, 18(10):885 – 896. (cité p. 25, 88, 89)

VEMURI, B. C., HUANG, S., SAHNI, S., LEONARD, C. M., MOHR, C., GILMORE, R., et FITZSIMMONS, J. (1998). « An Efficient Motion Estimator with Application to Medical Image Registration ». *Medical Image Analysis*, 2(1):79–98. (cité p. 30)

VIOLA, P. A. (1995). « *Alignment by Maximization of Mutual Information* ». PhD thesis, M.I.T. Artificial Intelligence Laboratory. also A.I. Technical Report 1548. (cité p. 12, 29)

ŠKRINJAR, O. M. et DUNCAN, J. S. (1999). « Real Time 3D Brain Shift Compensation ». Dans *Proc. of IPMI'99*, volume 1613 de *LNCS*, pages 42 – 55, Visegrád, Hungary. Springer. (cité p. 45)

WAHBA, G. (1990). *Spline Models for Observational Data*, volume 59 de *CRMS-NSE Regional Conf. Series in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics. (cité p. 29, 42, 66, 204)

WANG, Y. et STAIB, L. H. (1998). « Elastic Model Based Non-Rigid Registration Incorporating Statistical Shape Information ». Dans *Proc. of MICCAI'98*, pages 1162 – 1173, Cambridge, USA. Springer. (cité p. 21, 35)

WATSON, J. D. G., MYERS, R., et FRACKOWIAK *et al.*, R. (1993). « Area (V5) of the human cortex: evidence from a combined study using positron emission tomography and magnetic resonnance imaging ». *Cerebral Cortex*, 3:79–94. (cité p. 177)

WEBB, J., GUIMOND, A., ROBERTS, N., ELDRIDGE, P. an Chadwick, D., MEUNIER, J., et THIRION, J.-P. (1999). « Automatic Detection of Hippocampal Atrophy on Magnetic Resonna nce Images ». *Magnetic Resonance Imaging*, 17(8):1149–1161. (cité p. 52)

WEESE, J., BUZUG, T. M., LORENZ, C., et FASSNACHT, C. (1997). « An Approach to 2D/3D Registration of a Vertebra in 2D X-ray Fluoroscopies with 3D CT Images ». Dans *Proc. of CVRMed - MRCAS'97*, volume 1205 de *LNCS*, pages 119 – 128. Springer. (cité p. 37)

WEESE, J., RÖSCH, P., NETSCH, T., BLAFFERT, T., et QUIST, M. (1999). « Gray-Value Based Registration of CT and MR Images by Maximization of Local Correlation ». Dans *Proc. of MICCAI'99*, volume 1679 de *LNCS*, pages 656 – 663, Cambridge, UK. Springer. (cité p. 94, 96, 108, 112)

WELKER, W. (1989). « Why does the cerebral cortex fissure and fold ». *Cerebral Cortex*, 8B:3 – 135. (cité p. 15, 177, 180)

WELLS, W. M., VIOLA, P., ATSUMI, H., NAKAJIMA, S., et KIKINIS, R. (1996). « Multi-Modal Volume Registration by Maximization of Mutual Information ». *Medical Image Analysis*, 1(1):35–51. (cité p. 29, 35, 37, 77, 112)

WENDLAND, H. (1995). « Piecewise Polynomial, Positive Definite and Compactly Supported Radial Functions of minimal degree ». *Adv. in Comp. Math.*, 4:389 – 396. (cité p. 30)

WEST, J., FITZPATRICK, J., WANG, M., DAWANT, B., MAURER, C., KESSLER, R., et MACIUNAS, R. (1999). « Retrospective Intermodality Registration Techniques for Images of the Head: Surface-based versus Volume-based ». *IEEE Trans. on Medical Imaging*, 18(2):144 – 150. (cité p. 18, 29, 40, 203)

WESTIN, C.-F., MAIER, S. E., KHIDHIR, B., EVERETT, P., JOLESZ, F. A., et KIKINIS, R. (1999). « Image Processing for Diffusion Tensor Magnetic Resonance Imaging ». Dans *Proc. of MICCAI'99*, volume 1679 de *LNCS*, pages 441 – 452, Cambridge, UK. Springer. (cité p. 61)

WEYL, H. (1966). *The Classical Groups: their invariants and representations*. Princeton University Press. (cité p. 114)

WHITAKER, R. T. (2000). « A Level-Set Approach to Image Blending ». *IEEE Trans. on Image Processing*, 9(11):1849 – 1861. (cité p. 190, 193)

WITKIN, A., TERZOPOULOS, D., et KASS, M. (1987). « Signal Matching through Scale Space ». *Int. J. of Comp. Vision*, 1(2):133 – 144. (cité p. 61, 94)

WOLBERG, G. (1998). « Image morphing: a survey ». *The Visual Computer*, 14(8/9):360 – 371. (cité p. 190)

WU, Y.-T., KANADE, T., LI, C.-C., et COHN, J. (2000). « Image Registration using Wavelet-Based Motion Model ». *Int. J. of Comp. Vision*, 38(2):129 – 152. (cité p. 30, 203)

YANG, Z. et COHEN, F. S. (1999). « Cross-Weighted Moments and Affine Invariants for Image Registration and Matching ». *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 21(8):804 – 814. (cité p. 14, 21, 29)

ZHU, S. et MA, K.-K. (2000). « A New Diamond Search Algorithm for Fast Block-Matching Motion Estimation ». *IEEE Trans. on Image Processing*, 9(2):287 – 290. (cité p. 96)

Recalage non rigide d'images médicales volumiques :
Contributions aux approches iconiques et géométriques

Pascal CACHIER
INRIA, Sophia-Antipolis, France.

Le recalage non rigide d'images est un problème classique en vision par ordinateur qui revient à déformer une image afin qu'elle ressemble à une autre. Les techniques existantes, très nombreuses, sont généralement répertoriées selon l'information utilisée pour le recalage. D'un côté, les algorithmes *iconiques* utilisent l'intensité des images. De l'autre, les algorithmes *géométriques* utilisent des amers géométriques extraits des images, comme les bords d'un objet.

Dans cette thèse, nous montrons d'abord que cette classification n'est pas assez fine pour expliquer certaines différences fondamentales dans le comportement de certains algorithmes. Nous proposons de ce fait de diviser la classe des algorithmes iconiques en deux : nous distinguons d'une part les algorithmes iconiques standard, et d'autre part les algorithmes de recalage d'amers iconiques. Nous introduisons une énergie générale de recalage d'amers iconiques, puis nous développons des instances particulières de cette énergie ayant des propriétés spéciales selon l'application visée : ajout de contraintes géométriques supplémentaires, invariance au biais non uniforme, régularisation vectorielle avec des effets croisés, invariance par échange des images. Nous montrons des applications de nos algorithmes en suivi du mouvement dans des séquences échographiques tridimensionnelles, en recalage intersujet de cerveaux, et en interpolation de formes et d'intensités.

Mots clés : *baba, bibi, bubu.*

Contributions to deformable registration of
volumetric medical image

Yeah yeah to the rythm to the rythm.

Keywords: *Yeah, I mean, right.*