

HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

présentée à

l'Université de Nice-Sophia Antipolis

Spécialité : Sciences Pour l'Ingénieur

Sur quelques problèmes inverses en traitement d'image

par

Laure BLANC-FERAUD

Soutenue le 7 juillet 2000 devant la commission composée de :

M. Olivier FAUGERAS	Directeur de recherche, INRIA	Président
M. Yoram BRESLER	Professeur, Université de l'Illinois à Urbana-Champaign	Rapporteur
M. Jean-Marc CHASSERY	Directeur de recherche, CNRS	Rapporteur
Mme Christine GRAFFIGNE	Professeur, Université Paris Descartes	Rapporteur
M. Jean-Michel MOREL	Professeur, ENS Cachan	Rapporteur
M. Gilles AUBERT	Professeur, UNSA	
M. Michel BARLAUD	Professeur, UNSA	
Mme Josiane ZERUBIA	Directeur de recherche, INRIA	

Table des matières

Chapitre 1. Introduction et notations	1
1.1 Introduction	1
1.2 Typographie, Notations	2
Chapitre 2. Problèmes inverses mal-posés en imagerie	5
2.1 Introduction	5
2.2 Difficultés d'inversion d'un problème mal posé	6
2.3 Les applications traitées	7
2.3.1 La restauration d'image (floue, bruitée)	7
2.3.2 La reconstruction SPECT	11
2.3.3 La diffraction inverse	16
Le problème direct, modélisation 2D-TM	17
Géométrie du problème	18
Discrétisation du problème direct	20
Existence, Unicité et stabilité de la solution	20
Méthodes de résolution quantitatives	21
Algorithme du gradient modifié (GM)	21
Algorithme de Newton-Kantorovitch (NK)	22
Calcul du Jacobien D	23
Problème du mauvais conditionnement de la matrice D^*D	24
Algorithme du gradient conjugué (GC)	24
Calcul du facteur d'échelle α^i	25
Calcul de la direction d^i	26
Calcul du gradient de la fonctionnelle	26
Rapprochement entre les algorithmes NK et GC	27
Chapitre 3. Régularisation de problèmes inverses	29
3.1 Principe théorique de la régularisation	29
3.2 Quelques méthodes linéaires de régularisation	31
3.2.1 Régularisation par introduction d'information a priori	33
Approche déterministe	34
Lien avec le traitement d'image par EDP (linéaire)	35
Approche stochastique	36
Conclusion	37
3.3 Régularisation avec préservation de discontinuité	38
3.3.1 Approche variationnelle, en variables discrètes	38
Norme $\ \cdot\ _1$	38
Fonctions φ	39
3.3.2 Approche variationnelle, en variables continues	41

	Norme L_1	41
	Variation totale	41
	Fonctions φ	42
	Question d'existence de solution	43
	Choix de la fonction φ	44
3.3.3	Régularisation semi-quadratique	47
	Première extension semi-quadratique	47
	Deuxième extension semi-quadratique	48
3.3.4	Algorithmes de minimisation	49
	Minimisations alternées [IEEE IP-97]	49
	Algorithme rapide pour la déconvolution [RRest-98]	50
3.3.5	Diffusion anisotrope par EDP	53
3.3.6	Approche stochastique	55
3.4	Applications	57
3.4.1	Restauration	57
3.4.2	Reconstruction SPECT	58
3.4.3	Diffraction inverse	62
	Objet synthétique 1	62
	Objet synthétique 2	63
	Objet synthétique 3	65
	Objets réels	67
	Objet réel 1 (Carré de polystyrène)	70
	Objets réels 2 et 3 (mystérieux).	71
	Chapitre 4. Régularisation et segmentation	73
4.1	Fonctionnelle de Mumford et Shah	73
4.2	J_{MS} et les fonctionnelles de régularisation	75
4.2.1	Décomposition dans BV et espace SBV	75
4.2.2	Lien entre J_{MS} et la régularisation dans SBV	76
4.3	Segmentation par Γ -convergence	77
4.3.1	Fonctionnelles proposées par Ambrosio et Tortorelli	78
4.3.2	Régularisation de l'intensité et des contours	79
4.3.3	Définition d'une suite de fonctionnelles	81
4.3.4	Du discret au continu	82
4.3.5	Discrétisation et paramètre de Γ -convergence	83
4.3.6	Conclusion	86
4.4	Segmentation par contours actifs	86
4.4.1	Introduction	86
4.4.2	Brève présentation des contours actifs	88
	Contours actifs classiques de type "Snakes"	88
	Contours actifs géométriques - Mise œuvre par ensemble de niveau	89
	Minimisation de la longueur d'une courbe, écriture en fonction u	91
	Détection de contours par EDP géométriques	93
	Détection de contours par EDP géodésiques	96
4.4.3	Lien entre contours actifs classiques et contours actifs géodésiques	97
4.4.4	Régularisation et contours actifs	98
	EDP couplées proposées	98
	Autres travaux reliant régularisation et contours actifs	101
4.5	Conclusion	106

Chapitre 5. Classification d'images	107
5.1 Introduction	107
5.1.1 Hypothèses et notations	108
5.1.2 Description du modèle stochastique	109
5.2 Classification par minimisation de fonctionnelles	110
5.2.1 Théorie des transitions de phases de Cahn-Hilliard	111
5.2.2 Analogie avec la classification d'image	113
5.2.3 Algorithme et résultats	115
Images synthétiques	116
5.2.4 Discussion	119
5.3 Classification par régions actives	123
5.3.1 Le modèle de partitionnement	123
5.3.2 Algorithme et résultats	126
5.3.3 Discussion	128
5.4 Conclusion	130
Chapitre 6. Estimation des hyperparamètres	133
6.1 Introduction	133
6.1.1 Méthodes et difficultés de l'estimation des paramètres	134
6.1.2 Travaux effectués	139
6.2 Maximum de vraisemblance généralisée	139
6.3 Méthode MCMCMV (Monte Carlo Markov Chain Maximum de Vraisem- blance)	143
6.3.1 Echantillonnage de la loi a posteriori	144
6.3.2 Echantillonnage du modèle a priori	148
Etude de convergence	148
6.3.3 Algorithme d'estimation des hyperparamètres MCMCML	149
6.3.4 Convergence	150
6.3.5 Précision de l'estimation	151
6.4 Résultats	151
6.4.1 Multiplicité des solutions	151
6.4.2 Influence de la zone d'extraction des imagettes	156
6.5 Coût de l'algorithme	158
6.6 Conclusion	159
Chapitre 7. Conclusion	163
Références bibliographiques	165
Annexe A. Curriculum vitae	181
Annexe B. Liste des publications	187
B.1 Liste des publications - Juin 2000	188
B.1.1 Participations à des ouvrages de synthèse	188
B.1.2 Publications dans des revues avec comité de lecture	188
B.1.3 Communications dans des conférences avec actes et comité de lecture	189
B.1.4 Colloques internationaux sans acte ou avec actes à diffusion restreinte	193
B.1.5 Colloques nationaux sans actes ou avec actes à diffusion restreinte, participation aux GDR	194
B.1.6 Rapports de recherche/ articles soumis	195

B.1.7	Rapports de contrats	196
B.1.8	Dépôt de logiciels à l'agence pour la protection des programmes (APP)	196
B.1.9	Diffusion de la connaissance	196
B.1.10	Séminaires	196
Annexe C. Les publications jointes (document annexe)		197

Liste des figures

2.1	Noyau de convolution selon lignes et colonnes, et représentation 3D. Ce noyau est modélisé par le CNES pour les capteurs de SPOT 5.	7
2.2	Nîmes, image originale 512×512 , 256 niveaux de gris - Cette image est une simulation SPOT 5, obtenue par le CNES à partir d'une image aérienne.	8
2.3	Nîmes, image dégradée (H : voir fig. 2.1 et bruit σ , $\text{SNR} = 16.1$ dB), 512×512 , 256 niveaux de gris - Cette image est également simulée par le CNES.	8
2.4	Tomographie à émission SPECT à géométrie parallèle.	11
2.5	Transformation de Radon.	12
2.6	Construction de la matrice de projection R	13
2.7	Acquisition des projections 1D en parallèle (a) et en éventail (b).	16
2.8	Géométrie du problème	18
3.1	Comportement de l'erreur totale $\ R_\alpha\ \ \delta\ + \ (R_\alpha \mathcal{H} - I)f\ $	30
3.2	Inversion par l'algorithme du gradient conjugué.	33
3.3	Inversion par l'algorithme EM.	33
3.4	Comparaison des normes $\ \cdot\ _2^2$ et $\ \cdot\ _1$	39
3.5	Exemple de fonctions de régularisation.	45
3.6	Fonctions de pondération $\frac{\varphi'(t)}{2t}$	46
3.7	Description de quelques fonctions de régularisation.	46
3.8	Fonctions de régularisation φ et fonctions ψ associées.	48
3.9	Résultat de la déconvolution par régularisation semi-quadratique dans le plan de la DCT ($\lambda = 0.2$, $\delta = 2.5$).	58
3.10	Nîmes, image restaurée avec $\lambda = 0.49$, $\delta = 10$ ($\text{SNR} = 21.54$ dB)	59
3.11	Comparaison sur un extrait agrandi de l'image Nîmes	60
3.12	Restauration d'image floue provenant du télescope Hubble.	61
3.13	Reconstruction SPECT sur données réelles de cerveau acquises au centre A. Lacassagne (Algorithme ARTUR).	62
3.14	Reconstructions de l'objet synthétique 1.	64
3.15	Comparaison des convergences pour les méthodes NK+TK et GC (objet synthétique 1).	65
3.16	Reconstructions de l'objet synthétique 2.	66
3.17	Convergences comparées des différentes régularisations agissant sur l'algorithme GC (objet synthétique 2).	67
3.18	Reconstructions de l'objet synthétique 3.	68
3.19	Convergences comparées des différentes régularisations agissant sur l'algorithme GC (objet synthétique 3).	69
3.20	Montage expérimental utilisé pour les objets diélectriques	69
3.21	Reconstruction de l'objet réel 1 (carré de polystyrène).	71

3.22	Evolution de l'erreur normalisée pour la reconstruction du carré de polystyrène	71
3.23	Reconstruction de l'objet réel 2.	72
3.24	Reconstruction de l'objet réel 3.	72
4.1	Image synthétique constante par morceaux : (a) image originale, (b) coupes des images originale et bruitée, (c) image bruitée (15 dB).	80
4.2	Résultats de la régularisation semi-quadratique (algorithme ARTUR). Paramètres $\lambda = 30$ et $\delta = 15$) : (a) image restaurée (SNR= 27.4 dB), (b) coupes des images originale et restaurée, (c) contours (variable auxiliaire b). Paramètres $\lambda = 50$ et $\delta = 10$: (d) image restaurée (SNR= 24.5 dB), (e) coupes des images originale et restaurée, (f) contours (variable auxiliaire b).	80
4.3	Fonctions ψ correspondant aux fonctions de potentiel φ	81
4.4	Résultats de segmentation et restauration par minimisation de $J_r^\epsilon(f, b)$ avec φ_r non convexe. A la première itération $\epsilon = 1$: (a) image restaurée (SNR= 28.4 dB), (b) coupe des images originale et restaurée, (c) contours (variable b). A l'itération 5, $\epsilon = \frac{1}{5}$ (d) image restaurée (SNR= 31.7 dB), (e) coupe des images originale et restaurée, (f) contours (variable b).	82
4.5	Résultats de segmentation et restauration par minimisation de $J_r^\epsilon(f, b)$, avec φ_r quadratique ($\epsilon_f = \frac{1}{4}$) : (a) image restaurée (SNR= 25.2 dB), (b) coupe des images originale et restaurée, (c) contours (variable b) ; avec φ_r convexe ($\varphi_r(t) = \sqrt{1+t^2} - 1$, $\epsilon_f = \frac{1}{5}$) : (d) image restaurée (SNR= 30.8 dB), (e) coupe des images originale et restaurée, (f) contours (variable b).	83
4.6	Résultats des contours (variable b) de segmentation et restauration sur l'image de Nîmes (CNES), uniquement bruitée (de SNR = 15dB). Evolution en fonction des itérations k , $\epsilon = \frac{1}{k}$	84
4.7	Détection d'un objet non convexe par contraction d'un contour actif.	94
4.8	Première image d'intensité de la séquence Parking Lot (a) et flot optique associé (b).	95
4.9	Valeurs de la fonction d'arrêt g calculées sur différentes données.	95
4.10	Contours actif initial (a) et final (b).	95
4.11	Projections bruitées par un bruit de Poisson.	100
4.12	Images reconstruites/segmentées : (a) au cours du traitement, (b) à la fin du traitement.	100
4.13	Images des contours : (a) courbe initiale, (d) courbe finale.	100
4.14	Image synthétique constante par morceaux.	101
4.15	Evolution du snake pendant le processus de restauration et segmentation appliqué à l'image bruitée.	102
4.16	Profils des images originale, bruitée et restaurée avec l'agorithme de restauration et segmentation simultannées.	103
4.17	Résultats de segmentation de l'image bruitée par l'algorithme des snakes géodésiques.	103
4.18	Restauration par l'algorithme ARTUR.	104
5.1	Construction de la fonction W , parabolique par morceaux.	111
5.2	Fonction W à deux puits (<i>double-well potential</i>).	111
5.3	Résultats sur l'image "échiquier". Paramètre du modèle variationnel : $\lambda = 16$, $\delta = 15$, $\eta = 0.1$, 7 itérations sur ϵ . Paramètre du modèle stochastique : $\beta = 2.1$, 1000 itérations du recuit simulé. Temps de calcul : VC=18s, SC=78s.	117

5.4	Classification de l'image "échiquier" avec différentes fonctions φ	118
5.5	Fonction W pour l'image "gdr" avec 8 classes. Les classes de moyennes 156.0, 160.0 et 163.0 sont très difficiles à distinguer.	119
5.6	Résultats pour l'image bruitée "gdr" avec 8 classes. Paramètres du modèle variationnel : $\lambda = 60$, $\delta = 6$, $\eta = 0.05$, 35 itérations sur ϵ . Paramètres du modèle stochastique : $\beta = 1.3$, 2000 itérations de recuit simulé. Temps de calcul : VC=101s, SC=671s.	120
5.7	Solution f_ϵ (côté gauche) et contours associés b (côté droit) pour l'image "gdr" avec 8 classes quand ϵ décroît au cours des itérations. De l'itération 1 à 30, le terme de restauration est dominant, puis le terme de contrainte de classes devient prépondérant.	121
5.8	Suite de la fig. 5.7. Les classes commencent à se dessiner à partir de l'itération 30. Le résultat final est celui présenté (en couleur) en bas à gauche de la figure 5.6.	122
5.9	Une partition de Ω	124
5.10	Approximations δ_α et H_α des distributions de Dirac et Heaviside.	125
5.11	Etude locale de la vitesse du contour actif sur 2 régions. (a) Localement en a , $o(a) = \mu_2$ et la vitesse V est $(\mu_2 - \mu_1)^2 / \sigma_1^2$. (b) Localement en b , $o(b) = \mu_1$ et la vitesse V est $-(\mu_1 - \mu_2)^2 / \sigma_2^2$	127
5.12	Données bruitées : version bruitée (SNR=3.2dB) d'une partie de l'image du GdrPRC ISIS. Evolution des contours des régions pour trois classes. Paramètres : $\lambda = 5.0$, $dt = 0.2$, et pour tout l on a $\gamma_l = 0.2$ et $e_l = 0.001$. L'image en fausses couleurs en haut à droite est le résultat de la classification (après 200 itérations) où la couleur noire représente les pixels non classés (région de vide).	129
5.13	Evolution des régions associées à la figure 5.12.	131
6.1	Résultat de la restauration en fonction des hyperparamètres avec φ_{GM}	134
6.2	Echantillons du modèle (6.3,6.2) avec différentes valeurs de λ^2	142
6.3	Restauration d'image floue avec estimation des paramètre par Maximum de Vraisemblance Généralisée.	143
6.4	Comparaison entre les fonctions φ et $\tilde{\varphi}$	146
6.5	Justification de l'initialisation des échantillonneurs par l'image \hat{f} qui maximise la probabilité $P(f/o)$	147
6.6	Echantillons de taille 64×64 tirés avec la loi a posteriori (6.7), calculée par l'algorithme de Geman et Yang modifié.	147
6.7	Echantillons de la loi a priori par l'algorithme de Gibbs (A) et l'algorithme de Geman et Yang modifié (après 20 itérations chacun).	149
6.8	Nîmes, image dégradée o (H : cf. fig. 2.1 et bruit σ , SNR = 16, 1 dB), 512×512 , 256 niveaux de gris - ©CNES.	152
6.9	Nîmes, image restaurée avec $\lambda = 0, 49$, $\delta = 10$ (SNR = 21, 5 dB).	153
6.10	Nîmes, image originale f , 512×512 , 256 niveaux de gris - ©CNES.	154
6.11	Image 128×128 extraite de Nîmes (usine) ; a) originale, b) dégradée (SNR= 17.6 dB), c) restaurée avec $\lambda = 0.49$, $\delta = 10$ (SNR= 22.82 dB) d) erreur.	155
6.12	Ensemble des hyperparamètres (λ, δ) pour lesquels le gradient de la vraisemblance s'annule (image synthétique et usine, cf. fig. 6.13).	155
6.13	Image synthétique et extrait de Nîmes (usine) : comparaison des résultats de la restauration avec une série d'hyperparamètres optimaux (fonction φ_{HS}).	157
6.14	SNR de l'image reconstruite (cf. fig. 6.11) avec différents (λ, δ) ; ligne pointillée :valeurs optimales $(\hat{\lambda}, \hat{\delta})$ (annulant le gradient de $L(\theta)$).	158

6.15	Gradients du critère $\frac{\partial L}{\partial \lambda}$ et $\frac{\partial L}{\partial \delta}$ (gL et gD) en fonction de λ , pour $\delta = 2$ (imagerie usine extraite de Nîmes, voir fig. 6.11).	159
6.16	Rapport signal/bruit de l'image restaurée en fonction de λ en abscisse, autour de $\hat{\lambda} = 0.19$, avec $\delta = 2$ (imagerie usine extraite de Nîmes, cf. fig. 6.11). . .	159
6.17	Influence de la zone d'extraction de l'imagerie (64×64) sur l'estimation de λ , avec $\delta = 2$	160

Liste des tableaux

2.1	Conditionnement de la matrice D^*D	24
5.1	Des transitions de phases à la fonctionnelle de classification	115
5.2	Paramètres des 4 classes pour l'image "échiquier". L'écart type est le même pour toutes les classes, égal à celui du bruit additif.	116
5.3	Paramètres des 8 classes de l'image "gdr". L'écart type est le même pour toutes les classes, égale à celui du bruit additif sur l'observation.	119

Chapitre 1

Introduction et notations

1.1 Introduction

Mon activité de recherche depuis mon entrée au CNRS en 1990 a porté sur la résolution de problèmes inverses en traitement d'image. J'ai principalement étudié les problèmes suivants : la restauration d'image bruitée et/ou floue, la segmentation, la reconstruction d'image en médecine nucléaire 2D et 3D SPECT (Single Photon Emission Computed Tomography), la diffraction inverse en imagerie micro-onde, l'estimation de flot optique dans une séquence d'images. Pour ces différentes applications, j'ai étudié des modèles d'images servant à la régularisation de ces problèmes inverses en général mal-posés. L'objet principal de ce travail a porté sur la définition de contrainte de régularisation, donc de lissage des solutions obtenues par inversion, tel que le lissage préserve les discontinuités de cette solution [Charbonnier *et al.*, 1997]. Ces discontinuités en effet représentent en particulier les contours des objets de l'image qui sont, pour toutes les applications, des attributs importants. Dans le cadre de la régularisation, différents modèles de contours ont été introduits [Teboul *et al.*, 1998, Teboul *et al.*, 1997b].

Le plan de ce mémoire est le suivant :

- Dans un premier chapitre, après avoir mis en évidence les difficultés de résolution des problèmes inverses en traitement d'image de par leur caractère mal-posé, je décris plus particulièrement trois applications : la restauration d'image floue et bruitée, la reconstruction SPECT en imagerie nucléaire médicale, la diffraction inverse en imagerie microonde.
- Le deuxième chapitre est consacré à la régularisation. Un bref rappel des méthodes classiques de régularisation implique de manière évidente le développement de nouvelles techniques. Le modèle de base de régularisation avec prise en compte des contours de l'image est présenté, dans sa version implicite et ses versions explicites. Ce travail est restitué à la fois dans les approches stochastique, variationnelle ou par équations aux dérivées partielles (EDP). Des résultats sont présentés sur les applications.
- Le troisième chapitre est consacré à des travaux plus récents sur la segmentation d'image pour la régularisation. Nous synthétisons dans un premier temps les résultats obtenus dans la littérature sur la segmentation d'image par approche variationnelle et par EDP (équations aux dérivées partielles). Nous considérons ensuite les méthodes de segmentation pour la régularisation de problèmes inverses. Deux modèles ont été proposés : le premier consiste en une régularisation des contours et est directement lié aux fonctionnelles proposées par Ambrosio et Tortorelli [Ambrosio et Tortorelli, 1992] pour l'approximation de la fonctionnelle de segmentation de Mumford

et Shah [Mumford et Shah, 1989] par Γ -convergence ; le second utilise les techniques de contours actifs avec mise en œuvre par ensembles de niveaux. Les méthodes qui en découlent traitent de manière simultanée la restauration (ou la reconstruction) et la segmentation de l'image cherchée.

- Le chapitre quatre est consacré à une application très particulière : la classification d'images satellitaires. Cette application est intéressante dans le sens où elle est proche du problème de la segmentation, mais elle est en même temps plus simple si nous considérons le cas *supervisé*, c'est-à-dire le cas où le nombre des classes et les caractéristiques des classes sont connus à l'avance. Il s'agit alors de trouver une partition de l'image observée, la partition étant constituée des classes, et telle qu'elle soit régulière. Nous avons développé pour cela deux méthodes dans le cadre du calcul des variations et des EDP : l'une utilise des résultats de Γ -convergence développés dans le domaine de la mécanique des fluides ; l'autre utilise les ensembles de niveaux pour modéliser les régions définies par les classes, leur évolution étant donnée par minimisation d'une fonctionnelle.
- Le chapitre 5 traite de la question de l'estimation des hyperparamètres (paramètres du modèle de régularisation) et présente des résultats obtenus pour l'estimation des paramètres du modèle de régularisation avec prise en compte des discontinuités pour la restauration d'image floue et bruitée.

La présentation de ce travail renvoie à des articles publiés dont certains sont joints en annexe.

1.2 Typographie, Notations

Les Variables

Les principales variables sont :

f : image cherchée,

o : observation,

v : bruit,

b : variable auxiliaire.

h : noyau de convolution représentant un flou (filtre passe-bas).

Typographie :

- f est une fonction définie sur Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , $n = 2, 3$:

$$\begin{aligned} f : \Omega \subset \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow f(x) \end{aligned}$$

Par défaut f est dans $L^2(\Omega)$.

La donnée o sera toujours supposée dans $L^2(\Omega)$.

- f est la version discrète de f . Les variables x_i sont discrétisées au pas d'échantillonnage $\delta x_i = \delta x$. Pour $n = 2$, l'image discrète f est donnée par les valeurs des $I \times J$ pixels, $f(i, j) = f(i\delta x, j\delta x)$.

Ce signal est considéré

- soit comme une matrice 2D, f est alors à double indice $f(i, j) = f_{i,j}$, $(i, j) \in 0, \dots, I - 1 \times 0, \dots, J - 1$,

- soit comme un vecteur 1D de dimension $(IJ, 1)$ où les pixels sont rangés dans l'ordre lexicographique, f n'a alors qu'un seul indice $f(s) = f_s, s \in 0, \dots, IJ - 1$.
On travaille de manière similaire si $n = 3$.

- F représente la variable aléatoire multidimensionnelle définie sur l'ensemble des pixels. Une image f est une réalisation de cette variable aléatoire.
Par simplification, on écrira souvent $P(f)$ au lieu de $P(F = f)$.
- $\mathcal{TF}(f)$ est la transformée de Fourier continue de f .
- $\mathcal{TF}(f)$ est la Transformée de Fourier Discrète (TFD) de f .
Les mêmes notations sont utilisées en 3D.

Opérateur de convolution :

- h : noyau de convolution défini en variables continues sur \mathbb{R}^2 (de support compact),
- \mathcal{H} est l'opérateur de convolution associé à h .

$$\begin{aligned} \mathcal{H} : L^2(\mathbb{R}^2) &\rightarrow L^2(\mathbb{R}^2) \\ f &\rightarrow \mathcal{H}(f) = h * f \end{aligned}$$
- h : opérateur défini en variables discrètes sur $-K_1, \dots, K_1 \times -K_2, \dots, K_2$,
- H : matrice de dimension $IJ \times IJ$ telle que l'équation $\mathbf{o}(s) = h * f(s), \forall s \in 0, \dots, IJ - 1$ s'écrive de manière vectorielle $\mathbf{o} = Hf$.
Si les conditions aux bords sont nulles, H a une structure de Toeplitz par bloc de Toeplitz, si elles sont périodiques, H a une structure circulante par bloc circulants.
- $h_{2I \times 2J}$: vecteur de dimension $4IJ$ formé du noyau de h et de zéros (et égal à la première colonne de la matrice de convolution par h appliquée à une image symétrisée dans les deux directions, donc de dimension $2I \times 2J$).

Opérateur de dérivation :

- ∇ est l'opérateur gradient. $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{i=1, \dots, n}$
- \mathcal{D}_u est l'opérateur de la dérivée dans la direction $u \in \mathbb{R}^n$. $\mathcal{D}_u f = \langle \nabla f, u \rangle$.
- $div(w)$ est l'opérateur de divergence défini pour $w \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ (où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n) par $div(w) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial w_i}{\partial x_i}$.
- Quand $n = 2$, on remplace souvent (x_1, x_2) par (x, y) .
- D_x et D_y sont les opérateurs discrets de dérivation sur des images discrètes, par rapport aux colonnes et aux lignes :
 $(D_x f)_{i,j} = f_{i+1,j} - f_{i,j}$ et $(D_y f)_{i,j} = f_{i,j+1} - f_{i,j}$.

- $d_{2I \times 2J}^x$ et $d_{2I \times 2J}^y$: vecteurs de dimension $4IJ$ formés du noyau de D_x et D_y respectivement et de zéros (et égal à la première colonne de la matrice D_x et D_y respectivement appliquée à une image symétrisée dans les deux directions, donc de dimension $2I \times 2J$).

Normes :

- $\|f\|_p$ désigne la norme dans $L^p(\Omega)$ ($p=1,2$) :

$$\|f\|_p = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

- $\|\mathbf{f}\|_p$ désigne la norme discrète dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^{IJ})$ ($p = 1, 2$) :

$$\|\mathbf{f}\|_p = \left[\sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} |\mathbf{f}_{i,j}|^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

- $|\nabla f|$ est employé pour $|\nabla f(x)|$, *i.e.* le module euclidien de ∇f en un point $x \in \mathbb{R}^n$ quelconque et est défini par $|\nabla f(x)| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|^2}$.

Espaces de fonctions :

- Λ est l'espace des configurations (ensemble des images discrètes de dimension $I \times J$ à pixels réels, soit \mathbb{R}^{IJ}).
- $W^{1,1}(\Omega)$ est l'espace de Sobolev $\{f \in L^1(\Omega); \nabla f \in L^1(\Omega)^n\}$, le gradient étant défini au sens des distributions.
- $V(\Omega) = \{\mathcal{H}f \in L^2(\Omega); \nabla f \in L^1(\Omega)^n\}$.
- Espace des fonctions à variations bornées BV :

$$\text{BV} = \{f \in L^1 \mid \int_{\Omega} |Df| < +\infty\} \quad (1.3)$$

Df est la mesure définie par le gradient de f , $\int_{\Omega} |Df|$ est la variation totale de la mesure Df , définie par

$$\int_{\Omega} |Df| = \sup \left\{ \int_{\Omega} f \operatorname{div}(g) \mid g \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \text{ et } \|g(x)\|_{\infty} \leq 1 \text{ pour } x \in \Omega \right\}$$

$C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des fonctions continument dérivables de Ω dans \mathbb{R}^n , à support compact dans Ω .

Si $f \in C^1(\Omega)$ alors $\int_{\Omega} |Df| = \int_{\Omega} |\nabla f|$.

En traitement d'image, la notation $\int_{\Omega} |\nabla f|$ est souvent utilisée (à tort) pour $\int_{\Omega} |Df|$ avec $f \in \text{BV}$.

Chapitre 2

Problèmes inverses mal-posés en imagerie

2.1 Introduction

Un grand nombre d'applications du traitement d'image se formulent comme des problèmes inverses. En effet, les quantités qui nous intéressent ne peuvent en général être observées directement. Le lien entre observations et quantités cherchées est direct, s'il s'agit de restauration d'image par exemple, mais de très nombreuses applications se sont développées ces dernières années en traitement d'image où des systèmes plus ou moins complexes permettent l'accès à des données inobservables directement. Une application exemplaire est l'imagerie médicale qui a pris un essor important depuis les années 80. Différents systèmes permettent de multiples examens non invasifs de l'intérieur du corps humain et fournissent de nombreuses informations extrêmement utiles à l'analyse et au diagnostic. D'autres domaines applicatifs comme le contrôle non destructif, la géosismologie, l'astrophysique, l'imagerie satellitaire etc., sont générateurs de problèmes inverses de cette nature. Les variables cherchées (que l'on note f dans le texte) sont alors calculées à partir d'observations (notées o). La modélisation mathématique du phénomène physique fournit une (ou plusieurs) équation(s) reliant les observations à la variable cherchée par une équation du type général $o = \mathcal{G}(f)$. Cette équation peut être linéaire ou non, explicite ou implicite. Il apparaît dès à présent les difficultés d'inversion liées à la nature même de l'équation à inverser. Par exemple, les problèmes de restauration/déconvolution et de reconstruction tomographique en imagerie nucléaire s'écrivent linéairement alors que celui de la diffraction inverse en imagerie microonde ou de l'estimation de mouvement ne le sont pas. Mais l'inversion est toujours délicate même dans les cas les plus simples. Par exemple, lorsque la variable f est directement mesurée par un capteur, la seule déformation entre f et o est celle liée au capteur. La sortie o est en général une fonction linéaire de l'entrée f et lorsque la réponse du capteur ne varie pas au cours du temps, l'équation $o = \mathcal{G}(f)$ est simplement une équation de convolution $\int h(t - \tau)f(\tau)d\tau = o(t)$. En supposant que l'on connaisse les caractéristiques des appareils de mesures, c'est-à-dire ici la réponse impulsionnelle $h(t)$, le problème d'inversion est un problème de déconvolution. Nous rappelons, dans cette première partie, pourquoi ce problème simple en apparence est difficile à résoudre et qu'il en est de même de tous les problèmes d'inversion auxquels nous sommes confrontés. Ces résultats sont classiques mais ils sont à la base de tous nos travaux. Aussi ne nous semble-t-il pas inutile de les rappeler, en montrant le caractère générique du problème et par là même la généralité de nos travaux. Nous posons ensuite les équations à inverser pour les quatre applications auxquelles nous nous sommes plus particulièrement intéressés et pour lesquelles

des résultats sont présentés tout au long de ce mémoire.

2.2 Difficultés d'inversion d'un problème mal posé

Avant de montrer que les problèmes d'inversion sont mal posés, rappelons ce qu'est un problème bien posé au sens de Hadamard [Hadamard, 1923]. Considérons une équation d'observation $o = \mathcal{G}(f)$. \mathcal{G} est un opérateur de $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{O}$, où \mathcal{O} et \mathcal{E} sont des espaces vectoriels normés. Les trois conditions de Hadamard sont :

- existence d'une solution : $\forall o \in \mathcal{O}$, il existe $f \in \mathcal{E}$ tel que $o = \mathcal{G}(f)$
- unicité de la solution : $\forall o \in \mathcal{O}$, il existe au plus un $f \in \mathcal{E}$ tel que $o = \mathcal{G}(f)$
- stabilité de la solution par rapport aux données : $\forall f_n$ une suite de \mathcal{E} telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{G}(f_n) = \mathcal{G}(f)$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f$$

L'existence et l'unicité sont les deux conditions classiques pour la résolution d'équation. L'existence peut souvent être assurée en élargissant l'ensemble des solutions (par exemple en cherchant la solution d'une équation différentielle au sens des distributions, ou dans le cas d'un système linéaire discret surdéterminé, en redéfinissant le problème avec moins d'équations ou en cherchant la solution au sens des moindres carrés). L'unicité peut être obtenue en rajoutant des informations sur le modèle pour réduire l'ensemble des solutions (introduction de contraintes sur la solution). La stabilité est une condition liée à la physique : elle signifie qu'une petite perturbation sur les données observées n'entraîne qu'une petite erreur sur la solution. **Malheureusement cette condition n'est jamais vérifiée pour tous les problèmes inverses auxquels nous sommes confrontés en traitement d'images.** Ceci rend le calcul pratique de la solution impossible car un peu de bruit sur les données peut rendre la solution calculée très éloignée de la vraie solution.

Rappelons ici que les problèmes inverses définis par une équation intégrale ne sont jamais bien posés. L'équation intégrale définit un exemple générique de problèmes inverses, dont on trouve de multiples exemples d'application, comme le problème de la déconvolution par exemple. Ceci nous permet de mettre en évidence sur des exemples simples les caractéristiques en continu et en discret des problèmes mal posés et d'établir les bases qui serviront au développement des techniques classiques de régularisation.

Considérons une équation intégrale en dimension un

$$o(t) = \int_{\Omega_1} h(t, s) f(s) ds, \quad t \in \Omega_2 \quad (2.1)$$

où Ω_1 et Ω_2 sont deux ouverts de \mathbb{R} , et $h(t, s)$ une fonction continue sur $\Omega_1 \times \Omega_2$.

L'opérateur \mathcal{H} que l'on considère est l'opérateur linéaire défini par :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} : \mathcal{E} &\rightarrow \mathcal{O} \\ f &\rightarrow \mathcal{H}(f) \text{ tel que } \mathcal{H}(f)(t) = \int_{\Omega_1} h(t, s) f(s) ds, \quad \forall t \in \Omega_2 \end{aligned}$$

En tant qu'opérateur de $\mathcal{E} = L^2(\Omega_1)$ dans $\mathcal{O} = L^2(\Omega_2)$, l'opérateur \mathcal{H} est borné.

Si $h \in L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ alors \mathcal{H} est un opérateur compact (pour la topologie forte) défini de $\mathcal{E} = L^2(\Omega_1)$ dans $\mathcal{O} = L^2(\Omega_2)$.

Ainsi les opérateurs intégraux auxquels nous sommes confrontés sont des opérateurs compacts. Un théorème classique d'analyse fonctionnelle [Trenoguine, 1985] indique que si $\text{Ker}(\mathcal{H}) = \{0\}$ et que la dimension de \mathcal{E} est infinie, alors l'opérateur \mathcal{H} est bijectif sur $\text{Im}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{O}$ et l'inverse \mathcal{H}^{-1} est non borné sur $\text{Im}(\mathcal{H})$. On peut donc trouver une suite $(f_n) \in \mathcal{E}$ telle que $\mathcal{H}(f_n) = 0$ mais f_n ne converge pas. Ainsi la condition de stabilité n'est jamais vérifiée pour les applications que l'on a à traiter. Ces résultats et d'autres sont présentés par exemple dans [Blanc-Féraud, 1997, Kirsch, 1996].

2.3 Les applications traitées

2.3.1 La restauration d'image (floue, bruitée)

Le terme restauration d'image représente aussi bien le problème de débruitage pur, que celui de la déconvolution d'image floue et bruitée. Dans l'hypothèse d'une dégradation invariante spatialement, la convolution représente une défocalisation ou un bougé de l'appareil optique. Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, c'est aussi le modèle qui intervient lorsque l'on veut améliorer numériquement les performances d'un capteur qui sont limitées par la physique. Ce problème nous a été soumis en particulier par le CNES pour améliorer numériquement la qualité des images satellitaires.

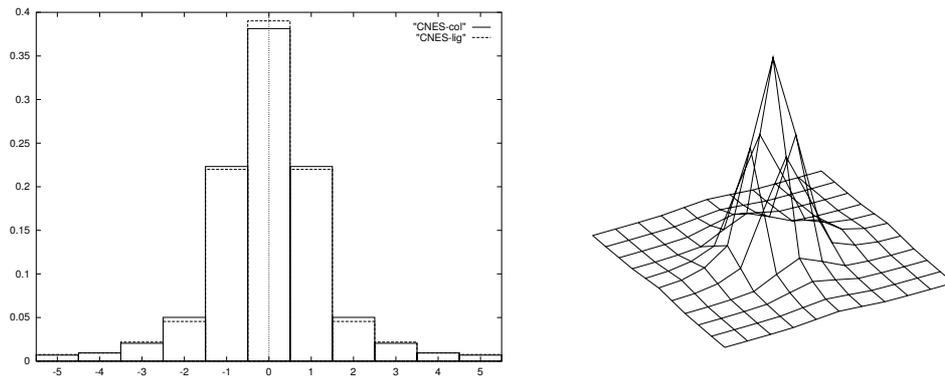


FIG. 2.1 – Noyau de convolution selon lignes et colonnes, et représentation 3D. Ce noyau est modélisé par le CNES pour les capteurs de SPOT 5.

Pour obtenir des images de meilleure qualité en terme de résolution, contraste,... il faut augmenter l'efficacité des capteurs qui vont coûter plus cher. Cette hausse de prix est d'autant plus importante que l'amélioration des capteurs entraîne une augmentation sensible de leur poids, et donc du coût financier au lancement. Ainsi, une des préoccupations du CNES a été de mettre au point une méthode de déconvolution pour la restauration d'image satellitaire dont on connaît la fonction de transfert puisqu'il s'agit de celle du capteur embarqué qui a été mesurée soigneusement avant le lancement. L'équation $o = \mathcal{H}(f)$ s'écrit pour la convolution 1-D :

$$o(t) = \int_{\Omega} h(s)f(t-s)ds \quad (2.2)$$

L'acquisition réelle mesure des variables discrètes. Supposons donc que l'on discrétise les signaux f, o, h avec le même pas d'échantillonnage $\delta x = 1$, que la durée des signaux entrée/sortie (o et f) soit limitée ainsi que le support du noyau de convolution h



FIG. 2.2 – Nîmes, image originale 512×512 , 256 niveaux de gris - Cette image est une simulation SPOT 5, obtenue par le CNES à partir d'une image aérienne.



FIG. 2.3 – Nîmes, image dégradée (H : voir fig. 2.1 et bruit σ , $\text{SNR} = 16.1$ dB), 512×512 , 256 niveaux de gris - Cette image est également simulée par le CNES.

à $[-K_1 \delta x, K_2 \delta x]$. L'équation de convolution s'écrit :

$$\mathbf{o}(i) = \sum_{k=-K_1}^{K_2} \mathbf{h}(k) \mathbf{f}(i-k) \quad i = 0, \dots, I-1$$

et de manière matricielle $\mathbf{o} = H\mathbf{f}$ où H est une matrice de Toeplitz, caractéristique des systèmes linéaires de relation entrée/sortie, invariante par translation (avec des conditions nulles aux bords du signal). Il faut de plus modéliser le bruit inhérent à tout capteur. Dans de nombreuses applications, et particulièrement lorsqu'il s'agit d'un bruit d'électronique du capteur, il est modélisé de manière additive par un bruit blanc gaussien \mathbf{v} . On a alors :

$$\mathbf{o} = \mathbf{h} * \mathbf{f} + \mathbf{v} \quad (2.3)$$

$\mathbf{v} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \mathbf{R}_{\mathbf{v}\mathbf{v}})$ avec $\mathbf{R}_{\mathbf{v}\mathbf{v}} = E[\mathbf{v}\mathbf{v}^T] = \sigma^2 Id$. En supposant l'image infiniment périodique sur \mathbb{R}^2 , H est circulante et dans l'espace de Fourier l'équation devient :

$$\mathcal{TF}(\mathbf{o}) = \mathcal{TF}(\mathbf{h})\mathcal{TF}(\mathbf{f}) + \mathcal{TF}(\mathbf{v}) \quad (2.4)$$

Dans la mesure où le spectre de $\mathcal{TF}(\mathbf{h})$ n'a pas de zéro, il y a existence et unicité de la solution $\mathcal{TF}(\mathbf{f})$. Celle-ci peut être calculée par simple inversion :

$$\mathcal{TF}(\mathbf{f}) = \frac{\mathcal{TF}(\mathbf{o})}{\mathcal{TF}(\mathbf{h})} + \frac{\mathcal{TF}(\mathbf{v})}{\mathcal{TF}(\mathbf{h})} \quad (2.5)$$

Malheureusement, c'est le terme $\mathcal{TF}(\mathbf{v})/\mathcal{TF}(\mathbf{h})$ qui domine dans cette équation. Même si le bruit est faible, il est amplifié lors de l'inversion par $\mathcal{TF}(\mathbf{h})$. En effet, \mathbf{h} modélisant un filtre passe-bas, $\mathcal{TF}(\mathbf{h})$ a des valeurs très faibles en hautes fréquences.

D'autre part, plus la discrétisation est fine (δx petit), plus les lignes de la matrice H sont semblables et plus H est proche d'une matrice singulière. Cependant, si la discrétisation peut contribuer à rendre un problème inverse mal posé, rappelons que **les problèmes inverses liés à la physique sont en général mal posés fondamentalement**, comme nous l'avons montré sur leur expression continue. L'existence et l'unicité de la solution de l'équation discrète sont assurées dès que H définit une application bijective, c'est-à-dire si H est carrée et non singulière. La stabilité est mesurée par le conditionnement de la matrice H . Si H est régulière, son conditionnement est mesuré par :

$$Cond(H) = \|H\| \cdot \|H^{-1}\|$$

où $\|H\|$ est la norme matricielle induite d'une norme vectorielle sur \mathbb{R}^N (ici $N = I^2$ où I est la dimension de \mathbf{o} ou \mathbf{f}). L'opérateur H est borné donc la norme matricielle est bien définie. On a toujours $Cond(H) \geq 1$. Une matrice bien conditionnée (donnant lieu à un problème bien posé) est telle que $Cond(H)$ est proche de la valeur 1. Notons que $Cond(I) = 1$ où I est la matrice identité. Avec la norme euclidienne sur \mathbb{R}^N , on montre que :

$$Cond(H) = \frac{\mu_{max}}{\mu_{min}} \quad (2.6)$$

où μ_i sont les valeurs singulières de H . Le conditionnement dépend donc de l'étalement du spectre de H . Par exemple dans le cas de la déconvolution circulaire considérée précédemment, les vecteurs propres de H sont les vecteurs de base de la Transformée de Fourier Discrète (TFD) de longueur I où I est la longueur du signal convolué, et ses valeurs propres sont calculées par TFD de longueur I du noyau \mathbf{h} . Les valeurs propres représentent donc le comportement de \mathbf{h} dans l'espace de Fourier, c'est-à-dire le comportement d'un filtre

passé-bas. La matrice H est très mal conditionnée, ceci quel que soit le pas de discrétisation δx . Le conditionnement est relié au problème de sensibilité par rapport au bruit car si l'on considère la relation matrice/vecteur à inverser $\mathbf{o} = H\mathbf{f}$ et que $\delta\mathbf{o}$ est une perturbation sur les observations, alors la perturbation $\delta\mathbf{f}$ sur la solution vérifie :

$$\frac{\|\delta\mathbf{f}\|}{\|\mathbf{f}\|} \leq \text{Cond}(H) \frac{\|\delta\mathbf{o}\|}{\|\mathbf{o}\|} \quad (2.7)$$

Ainsi si H est bien conditionnée ($\text{Cond}(H) \simeq 1$), alors une petite perturbation $\|\delta\mathbf{o}\|$ relativement aux données $\|\mathbf{o}\|$ engendrent une petite perturbation $\|\delta\mathbf{f}\|$ relativement à $\|\mathbf{f}\|$.

Par contre, quand le conditionnement est mauvais (*i.e.* $\text{Cond}(H)$ grand), $\frac{\|\delta\mathbf{f}\|}{\|\mathbf{f}\|}$ ne peut être borné par une constante petite même si $\frac{\|\delta\mathbf{o}\|}{\|\mathbf{o}\|}$ l'est. $\|\delta\mathbf{f}\|$ peut être très grand relativement à $\|\mathbf{f}\|$.

Ainsi les solutions basées sur l'inversion (inverse H^{-1} ou solution des moindres carrés $\min_{\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{IJ}} \|\mathbf{o} - H\mathbf{f}\|^2$) ne donnent pas en général une solution correcte mais un résultat dominé par le bruit. Notons qu'il en est de même s'il y a des erreurs sur les coefficients de la matrice H . La théorie de la régularisation va permettre de calculer des solutions aux problèmes inverses mal posés.

Maximum de vraisemblance et bruit gaussien

Dans l'approche probabiliste, une image est considérée comme étant à variables discrètes (de dimension $I \times J$) et est modélisée par une variable aléatoire multidimensionnelle F définie sur l'ensemble des pixels. Une image \mathbf{f} est une réalisation de cette variable aléatoire. Par simplification, on écrit souvent $P(\mathbf{f})$ au lieu de $P(F = \mathbf{f})$.

Calculer une image \mathbf{f} consiste à choisir un estimateur de la variable aléatoire F et calculer sa valeur. En traitement du signal ou d'image, l'approche bayésienne a été développée et très utilisée. Différents estimateurs peuvent être mis en œuvre. La loi $P(\mathbf{o}/\mathbf{f})$ est la probabilité de vraisemblance. Maximiser cette loi consiste à chercher \mathbf{f} tel que \mathbf{o} ait la plus grande chance d'être le résultat d'une mesure, selon le modèle de formation (2.3). L'estimateur du maximum de vraisemblance a de bonnes propriétés théoriques (non biaisé, asymptotiquement consistant si la distribution de vraisemblance est régulière). La loi $P(\mathbf{o}/\mathbf{f})$ ne dépend que du rapport entre \mathbf{f} et \mathbf{o} c'est-à-dire de la loi du bruit. Si le bruit V est indépendant de F alors $P(\mathbf{o}/\mathbf{f}) = P(\mathbf{o} = H\mathbf{f} + \mathbf{v}/\mathbf{f}) = P(\mathbf{o} - H\mathbf{f} = \mathbf{v})$. La distribution de probabilité de la vraisemblance est donnée par la distribution de probabilité du bruit. Dans le cas d'un bruit blanc gaussien, la vraisemblance est :

$$P(\mathbf{o}/\mathbf{f}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{IJ}{2}} \sigma_V} \exp\left[-\frac{(\mathbf{o} - H\mathbf{f})^*(\mathbf{o} - H\mathbf{f})}{2\sigma_V^2}\right] \quad (2.8)$$

et

$$\text{Max}_{\mathbf{f}} \{P(\mathbf{o}/\mathbf{f})\} \iff \text{Min}_{\mathbf{f}} \|\mathbf{o} - H\mathbf{f}\|^2 \quad (2.9)$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance sous l'hypothèse gaussienne du bruit est l'estimateur des moindres carrés. La matrice H étant mal conditionnée, H^*H l'est d'autant plus. La solution du maximum de vraisemblance n'est pas stable par rapport aux données et la déconvolution d'images réelles, même très peu bruitées, donne des images dominées par le bruit. C'est pourquoi l'estimateur du MAP est plus souvent utilisé (cf. paragraphe 3.2.1).

2.3.2 La reconstruction SPECT

Ce travail a été effectué en collaboration avec le Pr J. Darcourt du laboratoire de biophysique et traitement de l'image de la faculté de médecine de Nice au cours des thèses de P-M. Koulibali (en 1996) et I. Laurette (en 1997), et avec le Pr M. Barlaud du laboratoire I3S

Il s'agit d'imagerie médicale, dont le but est de reconstruire des images de coupe (respectivement de volume) d'une partie du corps humain, c'est-à-dire la distribution spatiale d'un phénomène dans un plan (resp. l'espace), à partir de distributions projetées mono-dimensionnelles (resp. bi-dimensionnelles) de ce phénomène, obtenues par un détecteur sous différents angles.

La présentation générale est faite en dimension 2 (reconstruction de section planaire) par simplicité. Les difficultés liées au 3D sont exposées par la suite.

A l'heure actuelle, en médecine, deux types différents de tomographie sont utilisés : la tomographie de transmission et la tomographie d'émission. Nos expérimentations portent principalement sur la tomographie d'émission. Si le formalisme est le même pour les deux types, les phénomènes physiques observés sont différents.

- La tomographie de transmission.

L'exemple le plus connu est celui de la tomodensitométrie (scanner X) qui détermine la répartition spatiale des coefficients d'atténuation d'une section de l'organisme pour un faisceau de rayons X.

Ce type d'imagerie fournit des images *anatomiques* d'excellente résolution.

- La tomographie d'émission.

Elle est basée sur la mesure du rayonnement émis par l'organisme après injection d'un traceur radioactif. De ces mesures, est calculé la répartition spatiale de la radioactivité. Nous nous sommes intéressés plus particulièrement à la tomographie à émission d'un seul photon (SPECT : "Single Photon Emission Computed Tomography" en anglais). Le radiotraceur émet des photons gamma dans toutes les directions. Un collimateur permet de mesurer le rayonnement émis dans une direction. Ce type d'imagerie renseigne non pas sur l'anatomie comme le scanner mais plutôt sur la fonctionnalité des organes.

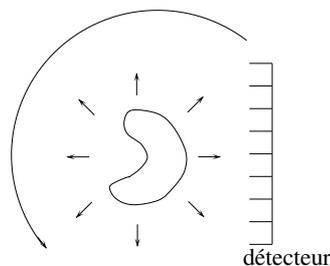


FIG. 2.4 – Tomographie à émission SPECT à géométrie parallèle.

Le formalisme de la tomographie.

La projection d'un objet suivant des angles multiples est la transformée de Radon (1917). En dimension 2, les projections p sont données par l'intégrale de f le long de l (cf. figure 2.5), le repère (r, l) étant obtenu à partir de (x, y) par une rotation de $-\theta$

$$p(r, \theta) = \int_{\mathbb{R}} f(r \cos \theta - l \sin \theta, r \sin \theta + l \cos \theta) dl \quad (2.10)$$

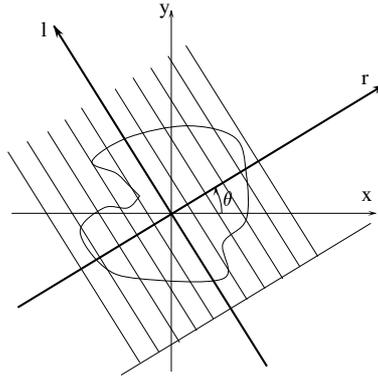


FIG. 2.5 – Transformation de Radon.

La transformation de Radon \mathcal{R} est définie par $\mathcal{R}(f(x, y)) = p(r, \theta)$ où f est une fonction définie sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, que l'on étend sur tout \mathbb{R}^2 par zéro et p est une fonction définie sur $\mathbb{R} \times [0, \pi[$. Le prolongement a la même régularité que celle de f sur Ω . En effet, on peut supposer sans perte de généralité que le support des objets imagés est un compact inclus dans Ω . La transformation de Radon est donc considérée de $L^2(\mathbb{R}^2)$ dans $L^2(\mathbb{R}, [0, \pi[)$.

L'ensemble des projections sur $[\pi, 2\pi[$ est symétrique de celui sur $[0, \pi[$.

Inversion de la transformée de Radon 2D

Pour des variables (x, y) et (r, θ) continues, c'est-à-dire un nombre infini de projections, la transformée de Radon bi-dimensionnelle est inversible et son inverse est unique. La connaissance de $p(r, \theta)$ pour $(r, \theta) \in \mathbb{R} \times [0, \pi[$ permet de déterminer de manière unique $f(x, y)$ par

$$f(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{\partial p(r, \theta)}{\partial r}}{r - x \cos \theta - y \sin \theta} dr d\theta \quad (2.11)$$

Il est évident, avec cette équation, que le problème inverse continu est mal posé. Une perturbation δp sur les observations p , telle que la grandeur relative soit bornée $\frac{|\delta p|}{|p|} < \alpha$ n'entraîne en aucun cas de pouvoir borner la variation relative induite sur f : $\frac{|\delta f|}{|f|}$, du fait de l'opérateur de dérivation sur p . Il faudrait pour cela considérer sur $\mathbb{R} \times [0, \pi[$ une topologie beaucoup plus restrictive que celle de la norme euclidienne, avec une norme faisant intervenir $\int \left| \frac{\partial p(r, \theta)}{\partial r} \right|$. Ceci définit des conditions sur les perturbations admissibles des projections qui sont beaucoup trop restrictives en comparaison des bruits possibles sur les projections réelles acquises par gamma-caméra. De plus, la caméra ne pouvant acquérir qu'un nombre fini de valeurs projetées p , le problème discret de l'inversion est, de toute façon, mal posé.

Nous ne décrivons pas dans ce mémoire les différentes méthodes d'inversion de la transformée de Radon discrète bi-dimensionnelle (méthodes analytiques par filtrage-rétroprojection ou transformée de Fourier inverse basées sur le théorème des projections) mais renvoyons à des références (voir par exemple [Natterer, 1986]). Pour ces méthodes, le compromis résolution/bruit est traité grâce à des techniques de filtrage linéaire du bruit.

L'approche choisie consiste à considérer le problème directement en discret et non en termes analytiques de la transformation de Radon inverse. Le problème direct s'écrit alors sous la forme d'une équation vectorielle linéaire du type $\mathbf{o} = H\mathbf{f}$ où $\mathbf{o} = \mathbf{p}$ l'ensemble des projections acquises dans les différentes directions, \mathbf{f} est l'image discrète à reconstruire et $H = R$ la matrice de la projection. R_{ij} représente le poids du pixel j dans la raie de projection i , c'est-à-dire un capteur donné pour un angle de projection donné (cf. figure 2.6).

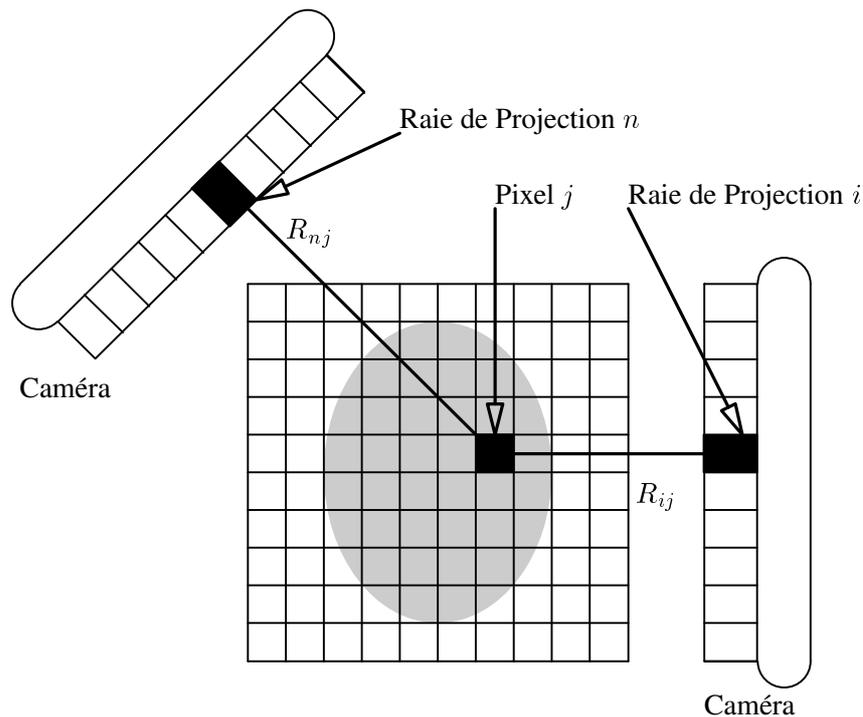


FIG. 2.6 – Construction de la matrice de projection R .

Deux aspects entrent en jeu dans la construction de R , auxquels une attention doit être portée : l'aspect géométrique et l'aspect physique (phénomène d'atténuation, perte de résolution en profondeur, effet Compton). Nous renvoyons à la thèse d'Ivan Laurette [Laurette, 1997] pour l'aspect géométrique de la construction de la matrice R (en 3D) et à la thèse de Malick Koulibaly [Koulibaly, 1996] pour l'étude des phénomènes physiques dans la construction de la matrice R .

Maximum de vraisemblance et bruit de Poisson

Si l'on est en présence d'un faible flux de photons, le modèle de bruit n'est pas une distribution gaussienne mais de Poisson. Le processus de formation de l'image est tel que \mathbf{p}_i qui modélise le nombre de photons détectés sur la raie de projection i suit une distribution de Poisson $\mathcal{P}\left(\sum_j R_{ij}f_j\right)$ avec f_j la concentration d'isotopes au pixel j et R_{ij} le nombre moyen de photons détectés en i par unité de concentration d'isotopes émis au pixel j . Le

bruit est indépendant d'un capteur à l'autre, la vraisemblance s'écrit donc :

$$P(\mathbf{p}/\mathbf{f}) = \prod_i \exp - \left\{ \sum_j R_{ij} \mathbf{f}_j \right\} \frac{\left(\sum_j R_{ij} \mathbf{f}_j \right)^{p_i}}{p_i!} \quad (2.12)$$

Maximiser la vraisemblance en \mathbf{f} revient à minimiser le critère :

$$J(\mathbf{f}) = \sum_i \left[\sum_j R_{ij} \mathbf{f}_j - p_i \log \left(\sum_j R_{ij} \mathbf{f}_j \right) \right] \quad (2.13)$$

Si ce critère est convexe en \mathbf{f} , il n'est pas quadratique, sa dérivée n'est donc pas linéaire. L'algorithme très utilisé en traitement d'image médicale est l'algorithme EM [Dempster *et al.*, 1977]). Le principe de cet algorithme est d'introduire une nouvelle variable dite variable cachée, de manière à simplifier la maximisation définie par (2.12). Dans le cas de la tomographie, on considère la variable \mathbf{z} telle que z_{ij} représente le nombre de photons enregistrés en i , émis au pixel j . Les z_{ij} définissent les données cachées ou complètes : $z_{ij} \sim \mathcal{P}(R_{ij} \mathbf{f}_j)$. L'algorithme EM consiste à chercher le maximum en \mathbf{f} de $P(\mathbf{z}/\mathbf{f})$ (étape M de Maximisation), en remplaçant \mathbf{z} inconnu par son espérance $E(\mathbf{z}/\mathbf{p})$ (étape E d'Espérance). L'algorithme est itératif sur ces deux étapes. Des résultats théoriques généraux [Dempster *et al.*, 1977] montrent que la vraisemblance que l'on cherche à maximiser augmente à chaque itération. Comme notre vraisemblance est convexe, l'optimum global est alors obtenu.

- L'étape E est :

$$z_{ij} = E(z_{ij}/\mathbf{p}_i) \quad (2.14)$$

Comme $\mathbf{p}_i = \sum_j z_{ij} \sim \mathcal{P}(\sum_j R_{ij} \mathbf{f}_j)$ on a

$$E(z_{ij}/\mathbf{p}_i) = \frac{\left(\sum_{j'} z_{ij'} \right) E(z_{ij})}{\sum_{j'} E(z_{ij'})} \quad (2.15)$$

ce qui conduit à

$$z_{ij} = p_i \frac{R_{ij} \mathbf{f}_j}{\sum_{j'} R_{ij} \mathbf{f}_{j'}} \quad (2.16)$$

- L'étape M est

$$\text{Max}_{\mathbf{f}} P(\mathbf{z}/\mathbf{f}) \quad (2.17)$$

Les z_{ij} sont indépendants donc

$$\log P(\mathbf{z}/\mathbf{f}) = \sum_{i,j} (z_{ij} \log(R_{ij} \mathbf{f}_j) - R_{ij} \mathbf{f}_j) + \text{cst} \quad (2.18)$$

Résoudre

$$\frac{\partial \log P(\mathbf{z}/\mathbf{f})}{\partial \mathbf{f}_j} = 0 \quad (2.19)$$

conduit à

$$\mathbf{f}_j = \frac{\sum_i z_{ij}}{\sum_i R_{ij}} \quad (2.20)$$

En combinant (2.16) et (2.20), on obtient l'algorithme itératif suivant

$$\mathbf{f}_j^{k+1} = \mathbf{f}_j^k \frac{1}{\sum_i R_{ij}} \left[\sum_i R_{ij} \frac{p_i}{\sum_{j'} R_{ij'} \mathbf{f}_{j'}^k} \right] \quad (2.21)$$

Remarque

En annulant la dérivée du critère (2.13), on obtient l'équation non linéaire suivante :

$$\sum_i p_i \frac{R_{ij}}{\sum_{j'} R_{ij'} f_{j'}} = \sum_i R_{ij} \quad (2.22)$$

En multipliant et en divisant par f_j , on obtient :

$$f_j = f_j \frac{1}{\sum_i R_{ij}} \sum_i p_i \frac{R_{ij}}{\sum_{j'} R_{ij'} f_{j'}} \quad (2.23)$$

Dans le cas de la reconstruction tomographique on a $\sum_i R_{ij} = 1$, le nombre de photons enregistré sur le détecteur i résultant de la somme des contributions dues à tous les pixels j de l'objet. L'algorithme itératif issu de (2.23) est alors égal à (2.21). Il s'écrit encore de manière synthétique :

$$f^{k+1} = f^k \cdot R^*(p/Rf^k) \quad (2.24)$$

où les caractères '.' et '/' symbolisent des opérations entre vecteurs effectuées point à point. On constate que c'est la version multiplicative de l'algorithme de gradient (additif) :

$$f^{k+1} = f^k + R^*(p - Rf^k) \quad (2.25)$$

La correction à chaque itération des deux algorithmes est une rétropropagation de l'erreur, en multiplicatif ou additif. L'algorithme (2.24) est aussi connu sous le nom de Richardson-Lucy en astrophysique [Richardson, 1972, Lucy, 1974], domaine dans lequel les données sont là aussi de faibles flux de photons, dont le bruit est modélisé par une distribution de Poisson. L'algorithme de Richardson-Lucy ne fait aucune référence à l'algorithme EM ni à de quelconques données cachées. On trouvera des résultats de reconstruction par les algorithmes (2.24) et (2.25) en partie 3.2 du chapitre 3 (figures 3.2 et 3.3).

Reconstruction de volume

Une description détaillée peut être trouvée dans la thèse de Ivan Laurette [Laurette, 1997]. Nous ne donnons ici que les conditions expérimentales de nos données. La transformée correspondant à l'acquisition réelle des données est la transformée en faisceaux coniques (le long de droites), ce qui est différent de la transformée en dimension 3 de Radon qui correspond à l'intégrale le long des hyperplans de l'espace ambiant, c'est-à-dire les plans. En dimension 2, ces deux transformées sont égales.

La géométrie exposée en 2D fait apparaître des raies de projections parallèles. On peut aussi considérer des raies de projection en éventail, ce qui améliore la résolution grâce à l'effet de zoom. Ceci est obtenu avec des collimateurs spécifiques (fig.2.7).

En 3D, les meilleurs résultats sont obtenus grâce à des projections coniques dans toutes les directions ce qui implique de reconstruire tout le volume en une seule fois à partir de toutes les projections, contrairement au cas de l'empilement des projections des coupes du volume, que ce soit en éventail ou en parallèle. Seule la géométrie conique (le vrai 3D) permet d'améliorer la résolution grâce à l'effet de zoom ainsi que la sensibilité [Tournier *et al.*, 1994]. Un point important en géométrie conique est la définition de la trajectoire d'acquisition qui doit répondre à un certain nombre d'impératifs pour que l'objet puisse être reconstruit à partir des données observées. Il apparaît que la trajectoire circulaire, la plus répandue actuellement car la plus aisée à mettre en œuvre techniquement, ne vérifie pas les conditions nécessaires et suffisantes pour pouvoir reconstruire une fonction 3D définie par Tuy [Tuy, 1983] puis Smith [Smith, 1985]. La reconstruction conique avec trajectoire d'acquisition circulaire qui nous a été donnée à résoudre est un problème inverse hautement mal posé.

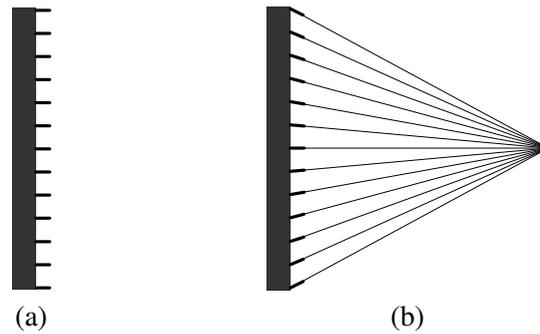


FIG. 2.7 – Acquisition des projections 1D en parallèle (a) et en éventail (b).

2.3.3 La diffraction inverse

Ce paragraphe est en partie extrait de la thèse de Pierre Lobel soutenue en septembre 1996 [Lobel, 1996], effectuée en collaboration avec C. Pichot, directeur de recherche au Cnrs, au laboratoire d'antenne et télécommunications de Sophia Antipolis et du Pr M. Barlaud du laboratoire I3S.

Une partie de ces travaux est reporté dans l'article [Lobel *et al.*, 1996b] joint en annexe sous la référence [IEEE APM-96], paru dans *IEEE Antennas & Propagation Magazine*, en juin 1996.

Ce travail s'inscrit dans le cadre général des problèmes de diffraction inverse. Il est plus particulièrement consacré à la reconstruction d'image en tomographie microonde.

En soumettant un objet à un rayonnement électromagnétique, un champ diffracté dépendant des caractéristiques géométriques et électromagnétiques de l'objet va être généré. Ce champ diffracté peut alors être mesuré grâce à des capteurs placés, soit dans un environnement proche de l'objet (cas d'une configuration dite en "champ proche"), soit dans un environnement éloigné de lui (cas d'une configuration dite en "champ lointain"). Le but de la diffraction inverse est de pouvoir reconstruire le plus fidèlement possible un profil de l'objet à partir des valeurs mesurées du champ diffracté dans un domaine limité de l'espace environnant. Ce profil est lié aux propriétés électromagnétiques et géométriques intrinsèques de l'objet.

En fait, ce que l'on reconstruit dépend du type d'onde que l'on utilise pour illuminer l'objet. Dans le cas des microondes, on cherche à reconstruire la *permittivité complexe* de l'objet. Cette grandeur est sensible à de nombreux paramètres physico-chimiques, permettant ainsi le suivi satellitaire des différents types de végétation, la détection de l'humidité des sols, ou le contrôle de l'humidité du papier. D'autres applications existent aussi, telles le contrôle non destructif (détection de l'armature métallique dans des blocs de béton armé, détection d'objets enterrés...) ou le contrôle des défauts dans des structures (microfissures apparaissant dans les murs de soutènement des immeubles soumis à un tremblement de terre par exemple). Dans le domaine de la géophysique ou le domaine militaire, un exemple d'application de l'imagerie microonde concerne la détection d'objets enfouis (structures enterrées, cavités, mines diélectriques, armes...)

Encore à l'état expérimental dans le domaine médical, la tomographie microonde est complémentaire aux autres méthodes de tomographie classiques (tomodensitométrie, tomographie par émission, imagerie par résonance magnétique (IRM)...) [Louis, 1992a], en ce sens que l'image qu'elle produit est liée à une valeur – la permittivité complexe – qui est radicalement différente des grandeurs impliquées dans les autres méthodes de tomo-

graphie (par exemple une carte des coefficients d'atténuation aux rayons X pour la tomographie). Toutes ces méthodes permettent de mettre en valeur des informations différentes concernant les organes humains et définissent donc des approches complémentaires de l'imagerie médicale. La permittivité mesurée par la reconstruction microonde est sensible à la variation de température. Ainsi, elle pourrait être utile à la détection des tumeurs cancéreuses (zones plus chaudes ou plus froides), le suivi des grands brûlés, des personnes irradiées... Cependant, cette technique est limitée par la difficulté d'ordre technologique de faire pénétrer les microondes jusqu'à la partie à imager. C'est pourquoi les recherches concernant l'utilisation de microondes dans le domaine médical sont à l'heure actuelle plutôt tournées vers la thermométrie non invasive, technique qui cherche à mesurer le faible rayonnement microonde émis par un échauffement. Cette technique passive, est très différente de l'approche étudiée ici qui est active dans le sens où l'objet à imager est soumis à un rayonnement.

Les premières méthodes de reconstruction tomographique dans le domaine de l'imagerie microonde datent des années 80. Elles font appel à des algorithmes de *résolution qualitative* du problème, basés sur des méthodes de tomographie par diffraction [Devaney, 1983, Tabbara *et al.*, 1988]. La tomographie par diffraction consiste à reconstruire non pas la permittivité complexe des objets mais les sources induites qui ne peuvent donner qu'une image qualitative de ces objets. Son principal intérêt réside dans le faible coût en temps de calcul qu'elle requiert, ce qui permet ainsi des reconstructions d'images en temps-réel ou quasi-réel. La *résolution quantitative* consiste quant à elle, à reconstruire directement la permittivité complexe des objets. Elle n'était à l'époque envisageable qu'avec le modèle d'approximation de Born ou Rytov, permettant de ne reconstruire que des objets à faibles valeurs de contraste [Slaney *et al.*, 1984, Paolini, 1987, Bolomey *et al.*, 1991].

Ce n'est que plus récemment que de nouvelles méthodes de résolution quantitative ont pu être pratiquement développées et utilisées [Chew et Wang, 1990, Habashy *et al.*, 1990, Joachimowicz *et al.*, 1991, Garnero *et al.*, 1991, Kleinman et van den Berg, 1992, Harada *et al.*, 1995]. En effet, de part sa nature non linéaire et son caractère *mal-posé*, le problème de diffraction inverse est particulièrement complexe à résoudre. Il conduit à la minimisation d'un système non linéaire nécessitant le traitement et le calcul d'un nombre considérable d'informations. Cet important volume de données mis en jeu restreint pour l'instant la taille et les dimensions des reconstructions, si bien que nous n'avons considéré que des reconstructions d'objets bidimensionnels en configuration 2D-Transverse Magnétique (2D-TM).

Le problème direct, modélisation 2D-TM

On considère un domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, \mathcal{D} ouvert borné, représentant l'intérieur d'un objet 2D, avec des bords réguliers. Cet objet est plongé dans un milieu homogène de permittivité complexe ϵ_{ext} . En fait, la géométrie 2D est une approximation d'une configuration 3D pour laquelle on suppose que l'objet est identique le long de l'axe z perpendiculaire au plan considéré. Il est possible de montrer que les effets des bords de l'objet sur l'axe z n'ont pas d'influence s'ils se situent à plus de 7 fois la longueur d'onde de l'onde incidente. Dans le cas d'une dépendance temporelle du champ électromagnétique en $\exp(-i\omega t)$, c'est-à-dire en régime permanent (les effets transitoires ne sont pas étudiés), cet objet bidimensionnel est caractérisé par sa permittivité relative (par rapport à la permittivité du vide) complexe $\epsilon_{rel}(r)$, $r \in \mathcal{D}$, avec :

$$\epsilon_{rel}(r) = \epsilon'_{rel}(r) + i\epsilon''_{rel}(r) \quad r \in \mathcal{D} \quad (2.26)$$

où la partie réelle $\epsilon'_{rel}(r)$ est la permittivité diélectrique relative classique (réelle) et la partie imaginaire $\epsilon''_{rel}(r)$ est proportionnelle à la conductivité σ (en $S.m^{-1}$; Siemens par mètre) du milieu :

$$\epsilon''_{rel}(r) \propto \frac{\sigma(r)}{\omega \epsilon_0} \quad (2.27)$$

avec ϵ_0 permittivité du vide (en $F.m^{-1}$; Farad par mètre), et contient aussi toutes les autres pertes (dues à des effet termiques, des vibrations...).

Par la suite, on utilisera plutôt la valeur du contraste $c(r)$ de $\epsilon_{rel}(r)$ par rapport à ϵ_{ext} :

$$\begin{cases} c(r) = \epsilon_{rel}(r) - \epsilon_{ext} & \text{si } r \in \mathcal{D} \\ c(r) = 0 & \text{si } r \notin \mathcal{D} \end{cases} \quad (2.28)$$

Géométrie du problème

La géométrie utilisée est montrée figure 2.8. L'objet à reconstruire est entouré d'une ceinture circulaire composée de M récepteurs placés tout autour de lui. Ces récepteurs sont situés sur une courbe fermée \mathcal{S} encerclant l'objet \mathcal{D} . L'objet est alors illuminé par une onde électromagnétique e_l^{inc} issue d'un émetteur placé dans une position particulière, qu'on indicera par la lettre l . Nous parlerons aussi d'angle d'incidence l car nous supposons (approximation) que l'onde incidente est plane. Cette onde est polarisée Transverse Magnétique (TM), c'est-à-dire que le champ électrique est perpendiculaire au plan de l'objet. Ainsi l'équation de propagation vectorielle du champ électrique \vec{e} se simplifie en une équation scalaire.

Les récepteurs mesurent la valeur du champ diffracté e_l^S pour cette excitation l , et le champs total est donné par :

$$e_l = e_l^{inc} + e_l^S \quad (2.29)$$

Les grandeurs e représentent des champs électriques (en Volt par mètre).

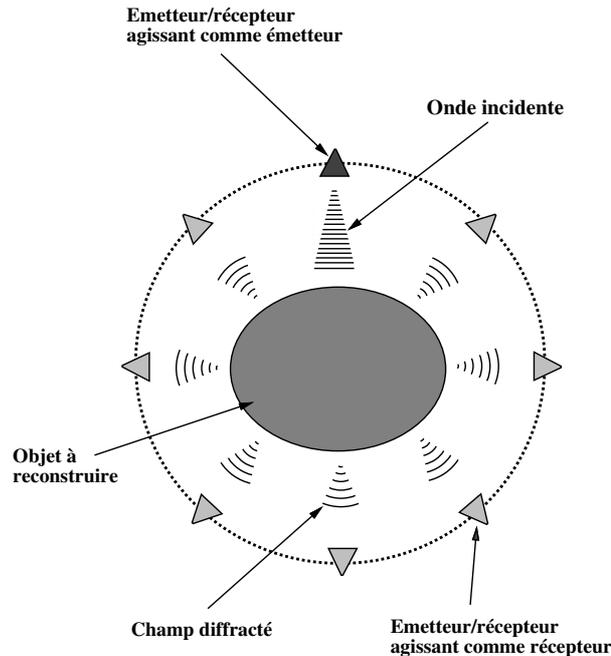


FIG. 2.8 – Géométrie du problème

En prenant un ensemble de L positions différentes de la source ou directions d'incidence (onde plane) pour l'onde e_l^{inc} , on dispose d'une certaine quantité d'informations. A partir des $L.M$ données mesurées, on cherche à reconstruire le profil du contraste $c(r)$ de l'objet. *A priori*, les positions des M récepteurs peuvent varier pour chaque direction d'incidence l . C'est pourquoi on indicera par $s_{l,m}$ chaque point de mesure correspondant au récepteur m et à la vue l .

Dans la figure 2.8, nous avons schématisé des récepteurs tout autour de l'objet et avons supposé que chaque récepteur agit tour à tour comme un émetteur. C'est le cas pour certains résultats que nous présentons. Ainsi, les données acquises sont réparties autour de l'objet et l'objet est éclairé dans des directions r' réparties sur 2π . Nous ne sommes pas limité à ce type de configuration et pouvons avoir des positions d'émetteur et/ou de récepteurs sur des arcs de cercles répartis de manière uniforme ou non.

A partir des équations de Maxwell et des équations de propagation (voir par exemple une description dans [Pichot, 1986, Lobel, 1996]), le problème direct de la diffraction peut être reformulé uniquement en fonction du champ électrique $e \in L^2(\mathcal{D})$ et du contraste $c \in L^\infty(\mathcal{D})$ (le champ magnétique peut être directement calculé à partir du champ électrique et n'apporte pas d'information supplémentaire dans la géométrie 2D considérée) :

$$\boxed{e_l(r) = e_l^{inc}(r) + \int_{\mathcal{D}} k_0^2 c(r') e_l(r') G(r - r') dr' , r \in \mathbb{R}^2} \quad (2.30)$$

où k_{ext} est la constante de propagation du milieu extérieur ($k_{ext} = \frac{\omega}{V}$, où ω est la fréquence angulaire de l'onde incidente et V la vitesse de propagation de la lumière dans le milieu extérieur considéré), k_0 est la constante de propagation dans le vide, G est la fonction de Green donnée pour tout r, r' par :

$$G(r - r') = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_{ext}|r - r'|) \quad (2.31)$$

avec $H_0^{(1)}$ est la fonction de Hankel d'ordre zéro et de première espèce.

L'équation (2.30) appliquée en $r \in \mathcal{D}$ nous donne une caractérisation du champ total à l'intérieur de l'objet \mathcal{D} par l'équation intégrale :

$$\boxed{e_l(r) = e_l^{inc}(r) + \int_{\mathcal{D}} k_0^2 c(r') e_l(r') G(r - r') dr' , r \in \mathcal{D}} \quad (2.32)$$

D'après (2.29) et (2.30), la valeur du champ diffracté en chaque point de mesure $s_{l,m}$ est donnée par l'intégrale :

$$\boxed{e_l^S(s_{l,m}) = \int_{\mathcal{D}} k_0^2 c(r') e_l(r') G(s_{l,m} - r') dr' , s_{l,m} \in \mathcal{S}} \quad (2.33)$$

Ces deux équations (2.32) et (2.33) constituent le système reliant les données observées (champ diffracté e^S) à la grandeur cherchée (contraste c). Pour pouvoir retrouver c à partir de e^S , il faudra aussi chercher l'inconnu e (champ total).

Discrétisation du problème direct

En discrétisant par la méthode des moments et de collocation, on obtient les équations linéaires :

$$e_l(r_i) = e_l^{inc}(r_i) + \sum_{n=1}^N k_0^2 c(r_n) e_l(r_n) \int_{R_n} G(r_i - r') dr', \quad \forall i \in [1, N] \quad (2.34)$$

et :

$$e_l^S(s_{l,m}) = \sum_{n=1}^N k_0^2 c(r_n) e_l(r_n) \int_{R_n} G(s_{l,m} - r') dr' \quad (2.35)$$

où i est l'indice des cellules discrétisant la variable r dans \mathcal{D} . L'objet (ou le domaine \mathcal{D}) a été discrétisé en N cellules identiques, avec $N = N_{lig} \cdot N_{col}$.

A partir de (2.34) et (2.35), on introduit le système matriciel :

$$\begin{cases} \mathbf{E}^{inc} &= (\mathbf{I} - \mathbf{G}^D \mathbf{C}) \mathbf{E} \\ \mathbf{E}^S &= \mathbf{G}^S \mathbf{C} \mathbf{E} \end{cases} \quad (2.36)$$

- ◇ \mathbf{C} est la matrice du contraste de l'objet à reconstruire. C'est une matrice diagonale de taille $N \times N$, et $\mathbf{C}_{n,n} = c_n, \forall n \in [1, N]$.
- ◇ \mathbf{G}^S est la matrice de fonctions de Green intégrées Objet-Récepteur, de taille $M \times N$.
- ◇ \mathbf{G}^D est la matrice de fonctions de Green intégrées Objet-Objet, de taille $N \times N$.
- ◇ \mathbf{E} est la matrice du champ total régnant dans l'objet. C'est une matrice de taille $N \times L$.
- ◇ \mathbf{E}^I est la matrice du champ incident. C'est une matrice de taille $N \times L$.
- ◇ \mathbf{E}^S est la matrice du champ mesuré sur les capteurs. C'est une matrice de taille $M \times L$.

Chacune des matrices \mathbf{E} , \mathbf{E}^I et \mathbf{E}^S est formée par L vecteurs colonne notés respectivement \mathbf{e}_l , \mathbf{e}_l^{inc} et \mathbf{e}_l^S . Chacun des vecteurs colonne représente les valeurs respectives du champ total, du champ incident et du champ diffracté, et ce, pour une position de la source ou un angle d'incidence particulier (cas de l'onde plane) $l, l \in [1, L]$.

La résolution de ce système revient à retrouver les valeurs des matrices \mathbf{C} et \mathbf{E} , les autres matrices composant ce système étant connues.

Existence, Unicité et stabilité de la solution

On peut représenter les deux formulations intégrales (2.32) et (2.33) par l'équation fonctionnelle suivante :

$$e^S = \mathcal{F}(c) \quad (2.37)$$

où e^S est le vecteur contenant les valeurs du champ diffracté mesuré sur chacun des M capteurs et sous chacune des L incidences.

Le problème posé ici, est de retrouver les valeurs du profil de la permittivité complexe d'un objet soumis à une onde électromagnétique, les valeurs du champ diffracté mesuré étant connues sur un certain nombre de capteurs et selon un certain nombre d'illuminations. Ce problème appartient à la classe des problèmes inverses mal-posés au sens d'Hadamard [Hadamard, 1923, Kirsch, 1996].

Bien que le problème physique admette toujours une solution, la résolution du problème inverse se heurte, en pratique, à des problèmes de bruits de mesures. L'existence l'unicité et la stabilité de la solution ne sont donc pas assurées. Nombre d'articles concernant ce sujet

sont parus. Il existe des résultats d'unicité de la solution en 1D [Päivärinta et Somersalo, 1987] et en 3D [Colton et Kress, 1992, Colton et Päivärinta, 1992, Hähner, 1993, Wolf et Habashy, 1993, Ramm, 1995] si l'on suppose que l'on connaît le champ électrique pour une infinité d'angles d'incidence et de capteurs, ainsi que pour une pulsation ω donnée. A notre connaissance aucun résultat théorique n'existe en 2D. Sous conditions expérimentales réelles (mesures discrètes), les hypothèses d'unicité ne sont plus vérifiées.

L'instabilité a été étudiée dans [Isakov, 1993a] et une étude expérimentale sur ces problèmes a été menée dans [Franchois, 1993] et conclut entre autres que l'instabilité augmente avec la finesse de discrétisation du maillage de l'objet.

Le lecteur désirant des informations plus complètes pourra, en outre, se référer à des recueils tels [Colton et Kress, 1992] ou [Isakov, 1993b].

Méthodes de résolution quantitatives

En faisant apparaître chacune des L vues, le système des deux équations constitutives présentées en (2.36) devient :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_l^{inc} &= \mathbf{e}_l - \mathbf{G}^D \mathbf{C} \mathbf{e}_l \\ \mathbf{e}_l^S &= \mathbf{G}^S \mathbf{C} \mathbf{e}_l \end{cases} \quad \forall l \in [1, L] \quad (2.38)$$

L'approche la plus fréquente est de chercher \mathbf{C} et \mathbf{e}_l , par minimisation de l'erreur résiduelle

$$\sum_{l=1}^L \left\| \mathbf{e}_l^S - \mathbf{G}^S \mathbf{C} \mathbf{e}_l \right\|^2 \quad (2.39)$$

Comme \mathbf{e}_l dépend de \mathbf{C} de manière non linéaire, la plupart des méthodes de reconstruction utilisent deux principes : une linéarisation de cette dépendance non linéaire, et une régularisation du problème d'optimisation. Ce processus est effectué itérativement : si on connaît \mathbf{e}_l^{n-1} , on détermine \mathbf{C}^n en minimisant $\sum_{l=1}^L \left\| \mathbf{e}_l^S - \mathbf{G}^S \mathbf{C} \mathbf{e}_l^{n-1} \right\|^2$ en utilisant une certaine forme de régularisation, et on met à jour \mathbf{e}_l^{n-1} en résolvant l'équation $\sum_{l=1}^L \left\| \mathbf{e}_l^{inc} - \mathbf{e}_l + \mathbf{G}^D \mathbf{C}^n \mathbf{e}_l \right\|^2$. La valeur initiale est souvent choisie par $\mathbf{e}_l^0 = \mathbf{e}_l^{inc}$ (approximation de Born).

Parmi ces méthodes, citons celles dites de *Born distordu* [Chew et Wang, 1990, Caorsi et al., 1994], des méthodes d'optimisation globale du type du *recuit simulé* [Franchois, 1993] ou par *algorithme génétique* [Elissalt, 1995] qui ont fait l'objet d'études expérimentales.

Algorithme du gradient modifié (GM)

Une autre méthode, sur laquelle nous aurons l'occasion de revenir quand nous parlerons de régularisation non quadratique, est celle du *gradient modifié* introduite par Kleinman et Van der Berg [Kleinman et van den Berg, 1992, Kleinman et van den Berg, 1993]. Cette méthode consiste à minimiser une fonctionnelle constituée de la somme des deux erreurs résiduelles :

$$F_{MG}(\mathbf{C}, \mathbf{e}_l) = \frac{\sum_{l=1}^L \left\| \mathbf{e}_l^{inc} - \mathbf{e}_l + \mathbf{G}^D \mathbf{C} \mathbf{e}_l \right\|_{\mathcal{D}}^2}{\sum_{l=1}^L \left\| \mathbf{e}_l^{inc} \right\|_{\mathcal{D}}^2} + \frac{\sum_{l=1}^L \left\| \mathbf{e}_l^S - \mathbf{G}^S \mathbf{C} \mathbf{e}_l \right\|_S^2}{\sum_{l=1}^L \left\| \mathbf{e}_l^S \right\|_S^2} \quad (2.40)$$

Les deux variables inconnues (contraste \mathbf{c} et champ total \mathbf{e}_l) sont calculées par un algorithme de descente de type SOR (Successive over relaxation) :

$$\begin{cases} \mathbf{c}^i &= \mathbf{c}^{i-1} + \alpha^i \mathbf{d}^i \\ \mathbf{e}_l^i &= \mathbf{e}_l^{i-1} + \beta_l^i \mathbf{v}_l^i \end{cases} \quad (2.41)$$

Les deux facteurs d'échelle α^i et β_l^i sont calculés de façon à minimiser $F_{MG}(\mathbf{C}^i, \mathbf{e}_l^i)$, et les directions de descente \mathbf{d}^i et \mathbf{v}_l^i sont choisies du type de Polak-Ribière [Polak et Ribière, 1969].

La linéarisation est effectuée implicitement par le fait d'optimiser par rapport aux deux variables séparément et de considérer le gradient à l'itération précédente.

Pour notre part, nous nous sommes intéressés au problème de la résolution de (2.36), en considérant ce système comme une seule équation non linéaire à résoudre. Avant de présenter cette méthode, nous décrivons l'algorithme de Newton-Kantorovitch appliqué pour ce problème de diffraction inverse par C. Pichot et A. Francois dans [Joachimowicz *et al.*, 1991, Francois, 1993, Francois et Pichot, 1997] qui linéarise l'équation, et par rapport auquel nous avons effectué aussi des comparaisons.

Algorithme de Newton-Kantorovitch (NK)

On représente le système non linéaire (2.36) par l'équation :

$$F(\mathbf{c}) = \mathbf{e}^S \quad (2.42)$$

où \mathbf{c} et \mathbf{e}^S désignent respectivement le vecteur du contraste (de taille $N \times 1$) et le vecteur du champ diffracté (de taille $M.L \times 1$). En fait, on a $\mathbf{c} = \text{vect}(\mathbf{C})$ et $\mathbf{e}^S = \text{vect}(\mathbf{E}^{S^t})$.

L'idée consiste alors à approcher $F(\mathbf{c})$ par un modèle linéaire $M(\mathbf{c})$ autour de l'itéré courant \mathbf{c}^i à l'itération i ,

$$M(\mathbf{c}) = F(\mathbf{c}^i) + \mathbf{D}(\mathbf{c} - \mathbf{c}^i) \quad (2.43)$$

puis à choisir la solution \mathbf{c}^{i+1} du système linéaire :

$$M(\mathbf{c}^{i+1}) = \mathbf{e}^S \quad (2.44)$$

comme itéré suivant. La matrice complexe \mathbf{D} de taille $LM \times N$ est le Jacobien de F par rapport à \mathbf{c} . Elle contient les dérivées de premier ordre $[\mathbf{D}]_{p,q} = \frac{\partial F_p(\mathbf{c}^i)}{\partial \mathbf{c}_q}$ ou encore $\mathbf{D} = (\nabla F_1, \nabla F_2, \dots, \nabla F_{LM})^t$. En notant :

$$\Delta \mathbf{c} = \mathbf{c}^{i+1} - \mathbf{c}^i \quad (2.45)$$

et

$$\Delta \mathbf{e}^S = \mathbf{e}^S - F(\mathbf{c}^i) \quad (2.46)$$

le système (2.43) devient :

$$\Delta \mathbf{e}^S = \mathbf{D} \cdot \Delta \mathbf{c} \quad (2.47)$$

En appliquant la méthode des moindres carrés, la fonctionnelle à minimiser est alors donnée par :

$$\|\Delta \mathbf{e}^S - \mathbf{D} \cdot \Delta \mathbf{c}\|_S^2 \quad (2.48)$$

Cela revient à résoudre l'équation :

$$D^*D.\Delta c = D^*.\Delta e^S \quad (2.49)$$

où D^* est la matrice adjointe de D . On en déduit alors directement c^{i+1} en fonction de c^i :

$$c^{i+1} = c^i + (D^*D)^{-1}D^*.\Delta e^S \quad (2.50)$$

Calcul du Jacobien D

En réécrivant le système (2.36) de façon à faire apparaître séparément les L différentes vues, on obtient :

$$\begin{cases} e_l^{inc} = (I - G^D C) e_l & \forall l \in [1, L] \\ e_l^S = G^S C e_l \end{cases} \quad (2.51)$$

Si on applique une faible variation sur C , le système (2.51) devient alors :

$$\begin{cases} \Delta e_l = G^D \Delta(C e_l) & \forall l \in [1, L] \\ \Delta e_l^S = G^S \Delta(C e_l) \end{cases} \quad (2.52)$$

Si, de plus, on se restreint à une approximation au premier ordre,

$$\Delta(C e_l) = \Delta C . e_l + C . \Delta e_l, \quad (2.53)$$

et en utilisant (2.52), on a :

$$\Delta(C e_l) = \Delta C . e_l + C G^D . \Delta(C e_l) \quad (2.54)$$

On peut alors écrire :

$$\Delta(C e_l) = (I - C G^D)^{-1} \Delta C . e_l \quad (2.55)$$

En réinjectant ce résultat dans (2.52), on obtient :

$$\Delta e_l^S = G^S (I - C G^D)^{-1} \Delta C . e_l, \quad \forall l \in [1, L] \quad (2.56)$$

ΔC étant une matrice diagonale et e_l étant un vecteur, on peut alors écrire que :

$$\Delta C . e_l = E_l . \Delta c \quad (2.57)$$

où $E_l = \text{diag}(e_l)$ et $\Delta c = \text{vect}(\Delta C)$. En introduisant la matrice D_l donnée par :

$$D_l = G^S (I - C G^D)^{-1} E_l \quad (2.58)$$

l'équation (2.56) devient finalement :

$$\Delta e_l^S = D_l . \Delta c, \quad \forall l \in [1, L] \quad (2.59)$$

On passe alors aisément à la notation (2.47) incluant toutes les vues. En effet, de même que le vecteur e^S est issu d'un empilement des L vecteurs e_l^S , D est, en fait, la matrice issue de l'empilement des L matrices D_l . On a :

$$\begin{pmatrix} \Delta e_1^S \\ \Delta e_2^S \\ \vdots \\ \Delta e_L^S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_L \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta c \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

$$\begin{matrix} \Delta e^S & D & \Delta c \\ (M.L \times 1) & (M.L \times N) & (N \times 1) \end{matrix}$$

Problème du mauvais conditionnement de la matrice D^*D

La matrice D^*D est en fait mal conditionnée. Son nombre de conditionnement défini par :

$$\eta = \sqrt{\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}} \quad (2.61)$$

où λ_{max} et λ_{min} sont respectivement la plus grande valeur et la plus petite valeur propre de D^*D (en valeur absolue), est très grand. Cela est dû, principalement au fait que les valeurs propres de D^*D sont très faibles (très proches de zéro), ce qui fait que l'inversion directe de cette matrice est très difficile. C'est pourquoi, la méthode de Newton-Kantorovitch ne peut être appliquée directement. Il faut lui ajouter une technique de régularisation permettant de la rendre opérationnelle. Les techniques de régularisation sont présentées au paragraphe suivant.

Exemple numérique Dans cet exemple numérique, nous illustrons dans le tableau 2.1 page 24, une évolution du λ_{min} et du nombre de conditionnement de la matrice D^*D , suivant les valeurs du contraste C de l'objet à reconstruire. On y voit que le conditionnement de D^*D devient de plus en plus mauvais au fur et à mesure que les valeurs du contraste C augmentent, la valeur de λ_{min} devenant de plus en plus faible.

Pour traiter cet exemple numérique, nous avons pris la même configuration que celle présentée dans la partie résultats du chapitre 3 pour les profils formés de deux parallélépipèdes séparés disposés face-à-face (profil P1). Le domaine \mathcal{D} est choisi comme étant un domaine carré de taille $3\lambda \times 3\lambda$, où λ est la longueur d'onde correspondant à une fréquence de 2.45 GHz. \mathcal{D} est discrétisé en 19×19 cellules carrées, et nous avons pris une ceinture circulaire de récepteurs formant le domaine \mathcal{S} , de rayon 9λ . Sur cette ceinture sont uniformément répartis 19 récepteurs qui recueillent selon 19 angles d'incidence différents le champ diffracté ($L = M = 19$).

L'objet original est composé de deux plots carrés se faisant face, et de coté $\frac{4}{5}\lambda$. Ils sont séparés de $\frac{1}{2}\lambda$. Nous avons alors calculé D^*D ainsi que ses valeurs propres, à partir d'un contraste constant dont nous avons fixé la valeur.

Valeur du contraste C	λ_{min} de D^*D	Nombre de conditionnement de D^*D
0.0	$4.38 \cdot 10^{-3}$	$5.92 \cdot 10^9$
10.0	$1.95 \cdot 10^{-5}$	$3.11 \cdot 10^{11}$
100.0	$2.56 \cdot 10^{-29}$	$8.20 \cdot 10^{28}$
1000.0	$7.83 \cdot 10^{-34}$	$2.30 \cdot 10^{29}$

TAB. 2.1 – Conditionnement de la matrice D^*D

Algorithme du gradient conjugué (GC)

La méthode que nous avons développée consiste à inclure la première équation du système (2.36) dans la deuxième, à travers l'écriture explicite de l'inversion, et de minimiser une seule fonctionnelle (moindres carrés sur la deuxième équation). Cette minimisation

est ensuite faite par un algorithme de gradient conjugué [Lobel *et al.*, 1995b, Lobel *et al.*, 1996b].

Le double système (2.36) peut s'écrire sous forme d'une seule équation non linéaire :

$$\mathbf{E}^S = \mathbf{G}^S \mathbf{C} \left(\mathbf{I} - \mathbf{G}^D \mathbf{C} \right)^{-1} \mathbf{E}^I \quad (2.62)$$

Si on fait alors apparaître séparément chacune des L vues, on obtient :

$$\mathbf{e}_l^S = \mathbf{G}^S \mathbf{C} \mathcal{L}(\mathbf{C}) \mathbf{e}_l^{inc}, \quad \forall l \in [1, L] \quad (2.63)$$

avec

$$\mathcal{L}(\mathbf{C}) = (\mathbf{I} - \mathbf{G}^D \mathbf{C})^{-1} \quad (2.64)$$

En notant :

$$\rho_l(\mathbf{C}) = \mathbf{e}_l^S - \mathbf{G}^S \mathbf{C} \mathcal{L}(\mathbf{C}) \mathbf{e}_l^{inc} \quad (2.65)$$

nous en déduisons la fonctionnelle $J(\mathbf{C})$ à minimiser :

$$J(\mathbf{C}) = \sum_{l=1}^L \|\rho_l(\mathbf{C})\|_S^2 \quad (2.66)$$

L'idée est alors d'utiliser un processus itératif afin de calculer les estimées successives de \mathbf{C} . On pose :

$$\mathbf{C}^{i+1} = \mathbf{C}^i + \alpha^i \mathbf{X}^i \quad (2.67)$$

A chaque étape de l'algorithme, on calcule une direction privilégiée symbolisée par la matrice diagonale \mathbf{X}^i . C'est le long de cette direction qu'évoluera \mathbf{C}^i . On notera par convention \mathbf{x}^i le vecteur formé par la diagonale de \mathbf{X}^i . Quant au coefficient α^i , il représente le facteur d'échelle optimum pour la minimisation du critère (2.66).

Calcul du facteur d'échelle α^i

Il est choisi de façon à minimiser le critère J de (2.66). Ce minimum est obtenu en annulant sa dérivée, soit :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha^i} \sum_{l=1}^L \|\rho_l(\mathbf{C}^i + \alpha^i \mathbf{X}^i)\|_S^2 = 0 \quad (2.68)$$

Avec une approximation du premier ordre, on a (cf [Lobel, 1996], annexe (A.4)) :

$$\rho_l(\mathbf{C}^{i+1}) = \rho_l(\mathbf{C}^i) - \alpha^i V_l(\mathbf{C}^i) \quad (2.69)$$

avec :

$$V_l(\mathbf{C}^i) = \mathbf{G}^S \left(\mathbf{I} - \mathbf{C}^i \mathbf{G}^D \right)^{-1} \mathbf{X}^i \left(\mathbf{I} - \mathbf{G}^D \mathbf{C}^i \right)^{-1} \mathbf{e}_l^{inc} \quad (2.70)$$

on obtient l'équation (voir [Lobel, 1996], annexe (D.3)) :

$$\frac{\partial \|\rho_l(\mathbf{C}^i + \alpha^i \mathbf{X}^i)\|_S^2}{\partial \alpha^i} = 2\alpha^i \|V_l(\mathbf{C}^i)\|_S^2 - 2 \langle \rho_l(\mathbf{C}^i), V_l(\mathbf{C}^i) \rangle_S \quad (2.71)$$

Ce qui donne :

$$\alpha^i = \frac{\sum_{l=1}^L \langle \rho_l(\mathbf{C}^i), V_l(\mathbf{C}^i) \rangle_S}{\sum_{l=1}^L \|V_l(\mathbf{C}^i)\|_S^2} \quad (2.72)$$

Calcul de la direction d^i

Nous avons développé 3 directions de descente différentes :

- Rétroprojection simple de l'erreur :

$$\mathbf{x}^i = \sum_{l=1}^L \mathbf{G}^{\mathcal{S}^*} \rho_l(\mathbf{C}^i) \quad (2.73)$$

où $\mathbf{G}^{\mathcal{S}^*}$ est la matrice adjointe de $\mathbf{G}^{\mathcal{S}}$.

- Gradient simple :

$$\mathbf{x}^i = \mathbf{g}_i = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{C}^i} J(\mathbf{C}^i) \quad (2.74)$$

- Gradient conjugué de type Polak-Ribière [Polak et Ribière, 1969]

$$\mathbf{x}^i = \mathbf{g}_i + \frac{\langle \mathbf{g}_i, \mathbf{g}_i - \mathbf{g}_{i-1} \rangle_{\mathcal{D}}}{\|\mathbf{g}_{i-1}\|_{\mathcal{D}}^2} \mathbf{x}^{i-1} \quad (2.75)$$

Les deux dernières directions sont plus robustes, en terme de convergence, que la direction donnée par la rétroprojection. De plus, la direction du gradient conjugué est celle qui permet de converger le plus rapidement. C'est pourquoi nous l'avons systématiquement choisie dans toutes les reconstructions que nous avons menées.

Calcul du gradient de la fonctionnelle

D'après la définition de la dérivée directionnelle, et en notant $\nabla J(\mathbf{C}^i)$ le gradient de J , on peut écrire :

$$\langle \nabla J(\mathbf{C}^i), \mathbf{x}^i \rangle_{\mathcal{D}} = \sum_{l=1}^L \left. \frac{\partial \|\rho_l(\mathbf{C}^i + \alpha^i \mathbf{X}^i)\|_{\mathcal{S}}^2}{\partial \alpha^i} \right|_{\alpha^i=0} \quad (2.76)$$

D'après les calculs effectués en annexe (A.5) puis (D.1) de [Lobel, 1996], on a :

$$\begin{aligned} \langle \nabla J(\mathbf{C}^i), \mathbf{x}^i \rangle_{\mathcal{D}} &= -2 \sum_{l=1}^L \langle \rho_l(\mathbf{C}^i), V_l(\mathbf{C}^i) \rangle_{\mathcal{S}} \\ &= -2 \sum_{l=1}^L \left\langle \rho_l(\mathbf{C}^i), \mathbf{G}^{\mathcal{S}} \left(\mathcal{L}(\mathbf{C}^i) \right)^t \mathbf{X}^i \mathcal{L}(\mathbf{C}^i) \mathbf{e}_l^{inc} \right\rangle_{\mathcal{S}} \\ &= -2 \sum_{l=1}^L \left\langle \overline{\mathcal{L}(\mathbf{C}^i)} \mathbf{G}^{\mathcal{S}^*} \rho_l(\mathbf{C}^i), \mathbf{X}^i \mathcal{L}(\mathbf{C}^i) \mathbf{e}_l^{inc} \right\rangle_{\mathcal{D}} \end{aligned} \quad (2.77)$$

Or \mathbf{X}^i est une matrice diagonale et $(\mathcal{L}(\mathbf{C}^i) \mathbf{e}_l^{inc})$ est un vecteur. On peut donc écrire :

$$\mathbf{X}^i \mathcal{L}(\mathbf{C}^i) \mathbf{e}_l^{inc} = \text{diag} \left(\mathcal{L}(\mathbf{C}^i) \mathbf{e}_l^{inc} \right) \mathbf{x}^i \quad (2.78)$$

L'équation (2.77) devient :

$$\langle \nabla J(\mathbf{C}^i), \mathbf{x}^i \rangle_{\mathcal{D}} = -2 \sum_{l=1}^L \left\langle \overline{\text{diag} \left(\mathcal{L}(\mathbf{C}^i) \mathbf{e}_l^{inc} \right) \mathcal{L}(\mathbf{C}^i) \mathbf{G}^{\mathcal{S}^*} \rho_l(\mathbf{C}^i)}, \mathbf{x}^i \right\rangle_{\mathcal{D}} \quad (2.79)$$

Par identification, on obtient donc la valeur de $\nabla J(\mathbf{C}^i)$:

$$\boxed{\nabla J(\mathbf{C}^i) = -2 \sum_{l=1}^L \overline{\text{diag} \left(\mathcal{L}(\mathbf{C}^i) \mathbf{e}_l^{inc} \right) \mathcal{L}(\mathbf{C}^i) \mathbf{G}^{\mathcal{S}^*} \rho_l(\mathbf{C}^i)}} \quad (2.80)$$

Il est important de noter que ce calcul est exact. Aucune approximation n'a été nécessaire pour obtenir ce résultat.

Rapprochement entre les algorithmes NK et GC

Si on rapproche les écritures (2.42) et (2.62), on peut écrire :

$$F_l(\mathbf{C}) = \mathbf{G}^{\mathcal{S}} \mathbf{C} \mathcal{L}(\mathbf{C}) \mathbf{e}_l^{inc} \quad (2.81)$$

où l'indice l , $l \in [1, L]$ spécifie une vue quelconque. Or, si on pose :

$$J(\mathbf{C}) = \sum_{l=1}^L \left\| \mathbf{e}_l^{\mathcal{S}} - F_l(\mathbf{C}) \right\|_{\mathcal{S}}^2 \quad (2.82)$$

on peut déduire que :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} J(\mathbf{C}) = \sum_{l=1}^L \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} F_l(\mathbf{C}) \right)^* (F_l(\mathbf{C}) - \mathbf{e}_l^{\mathcal{S}}) \right\} \quad (2.83)$$

Or, d'après la définition même de \mathbf{D}_l , on a l'équivalence :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} J(\mathbf{C}) = -2 \sum_{l=1}^L \{ \mathbf{D}_l^* \rho_l(\mathbf{C}) \} \quad (2.84)$$

ce qui revient à poser :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_l &= \left(\overline{\text{diag} \left(\mathcal{L}(\mathbf{C}^i) \mathbf{e}_l^{inc} \right) \mathcal{L}(\mathbf{C}^i) \mathbf{G}^{\mathcal{S}^*}} \right)^* \\ &= \left(\overline{\text{diag}(\mathbf{e}_l) \mathcal{L}(\mathbf{C}^i) \mathbf{G}^{\mathcal{S}^*}} \right)^* \\ &= \mathbf{G}^{\mathcal{S}} \left(\mathcal{L}(\mathbf{C}^i) \right)^t \mathbf{E}_l \\ &= \mathbf{G}^{\mathcal{S}} \left(I - \mathbf{C} \mathbf{G}^{\mathcal{D}} \right)^{-1} \mathbf{e}_l \end{aligned} \quad (2.85)$$

avec

$$\mathbf{E}_l = \text{diag} \left(\left(I - \mathbf{G}^{\mathcal{D}} \mathbf{C} \right)^{-1} \mathbf{e}_l^{inc} \right) \quad (2.86)$$

On retrouve bien ainsi l'équation (2.58). Si, maintenant, on essaye de comparer les deux séquences itératives des algorithmes NK et GC (plus précisément, c'est l'algorithme de descente avec la direction du gradient simple (et non conjugué) dont nous parlons ici), on a :

- Newton-Kantorovitch

$$\mathbf{c}^{i+1} = \mathbf{c}^i - (\mathbf{D}^* \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^* (F(\mathbf{c}^i) - \mathbf{e}^{\mathcal{S}}) \quad (2.87)$$

- Gradient simple

$$\mathbf{c}^{i+1} = \mathbf{c}^i - 2\alpha^i \sum_{l=1}^L \{D_l^*(F_l(\mathbf{c}^i) - \mathbf{e}_l^S)\} \quad (2.88)$$

Dans un soucis d'améliorer la vitesse de convergence des algorithmes, nous nous sommes intéressés à des méthodes de calcul de l'estimée initiale autres que celle correspondant au contraste nul généralement employée. Nous avons donc calculé des solutions initiales par rétroprojection filtrée. Cela devait permettre de faire démarrer nos algorithmes itératifs à partir d'une solution initiale plus "proche" de la solution finale que ne l'est le contraste nul par exemple. Malheureusement, le gain en nombre d'itérations escompté n'a pas réellement été significatif pour la suite des calculs (cf [Lobel, 1996]).

Les résultats obtenus seront montrés comparativement entre la méthode du gradient conjugué (régularisée ou non) et la méthode de Newton-Kantorovitch (toujours régularisée). Ces résultats sont donc tous regroupés dans le chapitre suivant sur la régularisation.

Chapitre 3

Régularisation de problèmes inverses

Le principe de la régularisation consiste à ne plus essayer d'inverser l'opérateur \mathcal{H} pour l'appliquer aux observations o mais plutôt de chercher une approximation de \mathcal{H}^{-1} qui soit stable et de chercher une solution dans un ensemble de solutions admissibles. En prenant en compte le bruit explicitement, l'observation devient o^δ telle que $\|o - o^\delta\| \leq \delta$. Dans ce cas, il n'est pas raisonnable de chercher une solution f^δ telle que $\mathcal{H}f^\delta = o^\delta$ mais plutôt de chercher une solution dans l'ensemble des solutions admissibles $\{f / \|\mathcal{H}f - o^\delta\| \leq \delta\}$. La solution est alors choisie suivant différents critères selon la méthode de régularisation, le principe étant toujours d'obtenir la stabilité de l'opérateur inverse, c'est-à-dire une solution f^δ proche du f idéal.

Nous rappelons, dans un premier paragraphe, la théorie de la régularisation linéaire suivie d'un bref aperçu des méthodes les plus classiques. De nombreux travaux ont été publiés dans le domaine dont quelques livres ou articles de synthèse comme par exemple [Demoment, 1989, Kirsch, 1996, Louis, 1992b, Marroquin *et al.*, 1987, Mol, 1991, Poggio *et al.*, 1985, Stark, 1987, Terzopoulos, 1986], cette liste n'étant pas exhaustive. Il est toutefois peu usuel de trouver une présentation conjointe des méthodes déterministes et stochastiques, ce que nous essayons de faire.

Nous développons ensuite le travail que nous avons effectué en régularisation non linéaire. Les résultats principaux de cette partie ont été obtenus au cours de la thèse de Pierre Charbonnier [Charbonnier, 1994], soutenue en septembre 1994, et dont une grande partie des résultats sont rapportés dans le papier [Charbonnier *et al.*, 1997] joint en annexe sous la référence [IEEE IP-97]. Ce travail est resitué dans ce document à la fois par rapport aux travaux par approche variationnelle, mais aussi par EDP et par champs de Markov. Ces trois domaines ont été très actifs en traitement d'image non linéaire cette dernière décennie.

Enfin, dans la dernière partie de ce chapitre, nous présentons quelques résultats issus de différentes publications concernant les applications précédemment présentées.

3.1 Principe théorique de la régularisation

On se place dans le cas où l'opérateur \mathcal{H} est linéaire de \mathcal{E} dans \mathcal{O} . Le but de la régularisation linéaire est de construire des opérateurs *linéaires bornés* R_α tels que :

$$R_\alpha : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{E}, \alpha > 0 \text{ et } \lim_{\alpha \rightarrow 0} R_\alpha \mathcal{H}f = f, \forall f \in \mathcal{E} \quad (3.1)$$

La solution $f^{\alpha,\delta}$ est alors donnée par $f^{\alpha,\delta} = R_\alpha o^\delta$. Le réel α est un paramètre à régler appelé paramètre de régularisation. Evaluons l'erreur d'approximation entre la solution $f^{\alpha,\delta}$ ainsi calculée et la vraie solution f du problème non bruité $o = \mathcal{H}f$:

$$\|f^{\alpha,\delta} - f\| \leq \|R_\alpha o^\delta - R_\alpha o\| + \|R_\alpha o - f\| \quad (3.2)$$

$$\|f^{\alpha,\delta} - f\| \leq \|R_\alpha\| \|o^\delta - o\| + \|(R_\alpha \mathcal{H} - I)f\| \quad (3.3)$$

L'erreur totale résulte de deux termes de comportement différent. Le premier correspond à la norme de l'opérateur inverse multiplié par δ , qui, lorsque α tend vers zéro, tend vers $\|\mathcal{H}^{-1}\|\delta$ qui est très grand lorsque le problème est mal posé ($\simeq \text{Cond}(\mathcal{H})$); le second est l'erreur d'approximation de \mathcal{H}^{-1} par R_α , qui tend vers zéro quand α tend vers zéro.

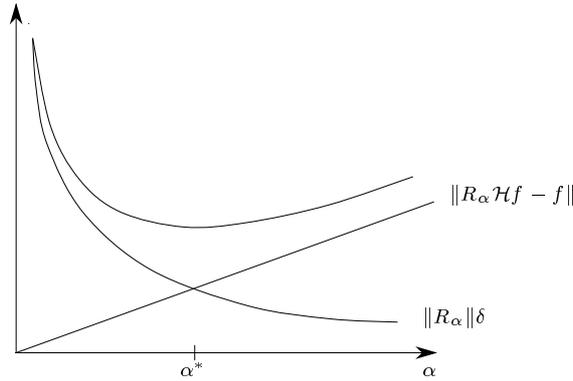


FIG. 3.1 – Comportement de l'erreur totale $\|R_\alpha\|\delta + \|(R_\alpha \mathcal{H} - I)f\|$.

Comme le schématise la figure 3.1, le paramètre de régularisation α contrôle le compromis entre l'amplification du bruit lorsqu'il n'y a pas de régularisation et l'erreur d'approximation entre R_α et \mathcal{H}^{-1} due à la régularisation. Le choix de α en régularisation est une question difficile et prépondérante pour la qualité des solutions. Ce choix dépend bien sûr, en premier lieu, du niveau de bruit δ . On appelle stratégie de régularisation l'application qui à δ fait correspondre $\alpha(\delta)$. Une stratégie de régularisation est admissible si

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \alpha(\delta) = 0 \quad (3.4)$$

$$\text{et } \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \sup_{\{f/\|\mathcal{H}f-o\| \leq \delta\}} \|R_{\alpha(\delta)} o^\delta - f\| \right\} = 0 \quad (3.5)$$

En d'autres termes, lorsque le bruit sur les données s'atténue, le paramètre de régularisation doit tendre vers zéro. D'autre part, l'ensemble des solutions admissibles $\{f/\|\mathcal{H}f - o\| \leq \delta\}$ se réduit à la solution du problème non bruité et la solution calculée par régularisation doit se rapprocher de celle-ci.

La construction d'un filtre de régularisation est basée sur une décomposition en valeurs singulières (SVD) de l'opérateur \mathcal{H} . Notons μ_j les valeurs singulières, $f_j \in \mathcal{F}$ et $o_j \in \mathcal{O}$ le système de vecteurs orthogonaux tel que $\mathcal{H}f_j = \mu_j f_j$ et $\mathcal{H}^* o_j = \mu_j f_j$. On rappelle que tout $f \in \mathcal{F}$ se décompose en

$$f = f_0 + \sum_j (f, f_j) f_j, \quad f_0 \in \mathcal{N}(\mathcal{H}) \quad (3.6)$$

que $\mathcal{H}f$ se décompose en

$$\mathcal{H}f = \sum_j \mu_j (f, f_j) o_j \quad (3.7)$$

et que l'équation $\mathcal{H}f = o$ peut être résolue si et seulement si :

$$o \in \mathcal{N}(\mathcal{H}^*)^\perp \quad (3.8)$$

$$\text{et } \sum_j \frac{1}{\mu_j^2} |(o, o_j)|^2 < +\infty \quad (3.9)$$

On remarque que pour que la série converge (condition (3.9)), il faut que les hautes fréquences sur o c'est-à-dire $|(o, o_j)|^2$ décroissent plus rapidement que μ_j^2 . La solution est alors donnée par :

$$f = \sum_j \frac{1}{\mu_j} (o, o_j) f_j \quad (3.10)$$

Le filtre de régularisation est défini de manière à amortir la forte croissance des coefficients $\frac{1}{\mu_j}$. Un filtre de régularisation est une application $q :]0, +\infty[\times [0, \|\mathcal{H}\|] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$q(\alpha, \mu) \leq 1 \quad (3.11)$$

$$\forall \alpha > 0, \exists c(\alpha) \text{ tel que } |q(\alpha, \mu)| \leq c(\alpha)\mu \quad \forall \mu \in [0, \|\mathcal{H}\|] \quad (3.12)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} q(\alpha, \mu) = 1 \quad (3.13)$$

$$(3.14)$$

Alors l'application $R_\alpha : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{F}$ définie par :

$$R_\alpha o = \sum_j \frac{q(\alpha, \mu_j)}{\mu_j} (o, o_j) f_j \quad (3.15)$$

est une stratégie de régularisation avec $\|R_\alpha\| \leq c(\alpha)$. Un choix $\alpha = \alpha(\delta)$ est admissible si

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \alpha(\delta) = 0 \quad (3.16)$$

$$\text{et } \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta c(\alpha(\delta)) = 0 \quad (3.17)$$

Le filtre q est un filtre de régularisation pour \mathcal{H} . Les méthodes décrites dans le paragraphe 3.2 ci-dessous vérifient ces critères théoriques de régularisation.

3.2 Quelques méthodes linéaires de régularisation

Les grandes classes de méthodes de régularisation linéaire classique sont schématiquement la TSVD ("Truncated Singular Value Decomposition" en anglais), l'arrêt de méthodes itératives d'inversion, les méthodes de projection, et les méthodes par introduction d'information a priori. Nos recherches se situent dans cette dernière classe. Cependant, les méthodes plus classiques mentionnées ci-dessus ont été très utilisées jusqu'à il y a une dizaine d'année en imagerie, et sont toujours d'actualité dans certains domaines des sciences de l'ingénieur. C'était le cas, par exemple, des méthodes utilisées en en héliosismologie pour l'inversion de la rotation du soleil à l'observatoire de Nice. Nous avons collaboré avec ces chercheurs astronomes et introduit un modèle nouveau dans leur domaine [Corbard *et al.*, 1998, Corbard et Blanc-Féraud and G. Bertomieu and J. Provost, 1999]. Nous rappelons

brièvement les idées générales des méthodes classiques.

Le principe de la TSVD est simple. L'idée est de reconstruire la solution f à partir de (3.10) mais avec une somme tronquée aux coefficients qui soit telle que les valeurs singulières μ_j soient supérieures à une valeur $\alpha > 0$. Ainsi les valeurs singulières trop faibles sont éliminées, la reconstruction n'est que partielle mais l'amplification du bruit est évitée.

Dans le cas d'un système à inverser à grand volume de données, la solution des moindres carrés donnée par l'équation $H^*Hf = H^*o$ est calculée par un algorithme itératif de descente de type gradient, gradient conjugué, Gauss-Seidel [Ciarlet, 1990]... La stratégie de régularisation mise en œuvre consiste à stopper l'algorithme avant convergence (ou plutôt divergence !), à une itération m telle que

$$\|Hf^{m,\delta} - o^\delta\| \leq r\delta, \quad r > 1 \quad (3.18)$$

Cette stratégie correspond en fait à la TSVD mais pour des systèmes de très grande taille rendant difficile le calcul des valeurs singulières. Il s'agit effectivement d'une stratégie de régularisation et des majorations de l'erreur d'approximation peuvent être données [Kirsch, 1996, Stark, 1987].

La difficulté consiste à régler le seuil déterminant l'itération d'arrêt. En fait, cette méthode est utilisée en général avec des algorithmes itératifs d'inversion à convergence lente. Par exemple, on utilise l'algorithme du gradient à pas fixe (méthode de Landweber [Kirsch, 1996, Stark, 1987]) ou un algorithme de gradient de type multiplicatif, *i.e.* un algorithme dont le but est de résoudre l'équation $o = Hf$ lorsque les données sont dégradées par un bruit de Poisson et non plus gaussien (cf. partie 2.3.2 du chapitre 2). C'est le cas de données à faible flux comme le comptage de photons, que l'on retrouve en médecine nucléaire pour l'application SPECT présentée au paragraphe 2.3.2 (l'algorithme est déduit de l'algorithme EM [Dempster *et al.*, 1977]) ou en astrophysique (l'algorithme porte alors le nom de Richardson-Lucy [Richardson, 1972, Lucy, 1974]). On rappelle que dans le cas additif, l'itération m de l'algorithme de gradient est

$$f^{m+1} = f^m + aH^*(o - Hf^m) \quad (3.19)$$

et dans le cas multiplicatif

$$f^{m+1} = f^m \cdot H^*(o/(Hf^m)) \quad (3.20)$$

où les caractères '.' et '/' symbolisent des opérations entre vecteurs effectuées point à point. Ces algorithmes sont à convergence lente c'est-à-dire que s'il n'y a pas de bruit sur les observations, il faut beaucoup d'itérations pour avoir une bonne précision sur les données. Lorsqu'il y a du bruit, l'algorithme doit être arrêté avant que le bruit ne soit amplifié, mais la plage des itérations admissibles est grande. L'itération d'arrêt est fixée de manière arbitraire. Ceci ne peut être fait avec un algorithme d'inversion à convergence plus rapide comme le gradient conjugué par exemple car le bruit est amplifié très rapidement et l'algorithme devient très sensible au choix de l'itération d'arrêt. A titre d'exemple, les figures 3.2 et 3.3 montrent des résultats sur des données réelles de reconstruction tomographique du cerveau en imagerie nucléaire. Il s'agit de reconstruction SPECT ("Single Photon Emission Computed Tomography" en anglais). Les données de projection ont été acquises au centre Antoine Lacassagne de Nice. La reconstruction est obtenue en inversant l'équation linéaire $o = Hf$ où H représente la transformée de Radon, transformant l'image de coupe f à reconstruire en ses projections sous différents angles o . L'évolution de l'image par l'algorithme EM étant lente, l'algorithme est peu sensible à l'itération d'arrêt (figure 3.3), contrairement au gradient conjugué (figure 3.2).

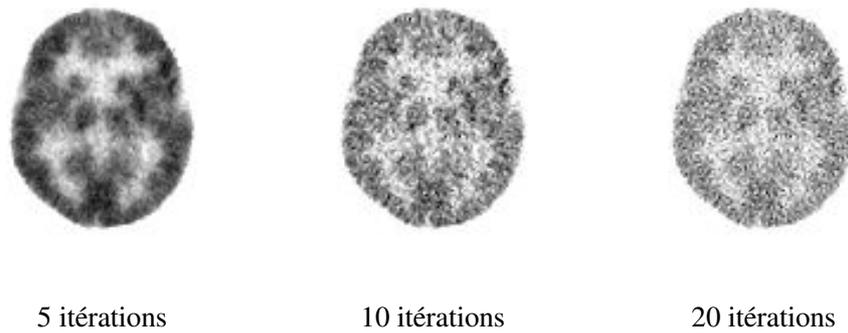


FIG. 3.2 – Inversion par l’algorithme du gradient conjugué.

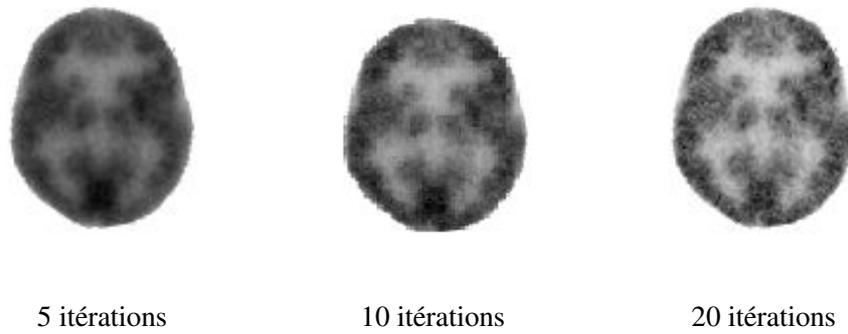


FIG. 3.3 – Inversion par l’algorithme EM.

Notons aussi que l’on obtient des stratégies de régularisation par l’opération de discrétisation elle-même. Le principe général vient de l’étude des méthodes de projection dont font partie les méthodes de discrétisation. On distingue deux grandes familles : les méthodes de Galerkin et les méthodes de collocation (comme la méthode des moments) [Kirsch, 1996, Stark, 1987]. On peut montrer que ces méthodes correspondent sous certaines hypothèses à des stratégies de régularisation. Cependant les hypothèses sont rarement vérifiées dans des cas réels et la méthode de discrétisation seule ne permet pas une régularisation suffisante pour trouver une solution correcte.

3.2.1 Régularisation par introduction d’information a priori

Une classe importante de méthodes de régularisation consiste à fixer a priori des informations sur la solution, c’est-à-dire à introduire des contraintes dans le processus d’inversion. La solution régularisée est le résultat de l’interaction entre deux processus : un premier processus qui relie la solution aux données observées à travers le modèle de formation des données (terme de rappel aux données) ; un second processus qui régularise cette solution par l’introduction d’information a priori sur la solution (terme de contrainte).

Certaines contraintes comme la contrainte de positivité du signal f ou des contraintes

sur la forme du support de l'objet peuvent ainsi être introduites. On en verra une application pour la reconstruction SPECT 3D dans le paragraphe 3.4.2. On parle dans ce cas de contraintes "dures". Si ce type de contraintes apporte une régularisation dans le processus d'inversion, elles ne suffisent pas en général. Différentes méthodes linéaires de régularisation ont été introduites en traitement d'image, selon que l'on considère l'approche déterministe ou l'approche stochastique.

Approche déterministe

La classe la plus importante dans la régularisation déterministe linéaire est sans doute celle introduite en 1963 par Tikhonov [Tikhonov, 1963, Tikhonov et Arsenin, 1977]. La solution régularisée est définie comme étant le minimum d'une fonctionnelle qui comprend deux termes : un premier terme qui attire la solution vers la solution des moindres carrés, c'est le terme de rappel aux données ; un second terme qui régularise cette solution en minimisant la norme de la solution ou la norme d'une de ses dérivées, ou la somme de plusieurs de ses dérivées. Pour le seul terme dérivée première, cette fonctionnelle s'écrit :

$$J_\lambda(f) = \|\mathcal{H}f - o\|^2 + \lambda^2 \|\nabla f\|^2 \quad (3.21)$$

ou de manière équivalente

$$J_\lambda(f) = \int_\Omega |\mathcal{H}f - o|^2 + \lambda^2 \int_\Omega |\nabla f|^2. \quad (3.22)$$

On rappelle que dans cette approche, f est une fonction de Ω ouvert de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} (donc à variables continues). Cette fonctionnelle a un minimum unique (si le noyau de \mathcal{H} ne contient pas les solutions constantes), qui est solution de l'équation d'Euler

$$\lambda^2 \nabla^* \nabla f + \mathcal{H}^* \mathcal{H} f = \mathcal{H}^* o \quad (3.23)$$

avec les conditions aux bords de Ω , $\frac{\partial f}{\partial n} = 0$, où n est le vecteur normal extérieur au bord de Ω .

Le paramètre positif λ^2 est le paramètre de régularisation. C'est le paramètre noté α dans le paragraphe précédent ($\alpha = \lambda^2$). Lorsqu'on remplace le terme $\|\nabla f\|^2$ par $\|f\|^2$ (on minimise la norme de la solution), on montre que R_α défini par (3.15) est $R_\alpha = (\mathcal{H}^* \mathcal{H} + \alpha I)^{-1}$ est une stratégie de régularisation avec

$$q(\alpha, \mu) = \frac{\mu^2}{\alpha + \mu^2} \text{ et } c(\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}. \quad (3.24)$$

Les valeurs propres de $\mathcal{H}^* \mathcal{H}$ peuvent être très proches de zéros alors que celles de $\mathcal{H}^* \mathcal{H} + \alpha I$ sont minorées par α . Des majorations de l'erreur sur la solution régularisée peuvent être obtenues. On renvoie pour cela le lecteur à des références comme par exemple [Kirsch, 1996, Stark, 1987]. Le choix du paramètre de régularisation α est fait a priori ici et est souvent réglé par l'opérateur. De nombreuses méthodes d'estimation de ce paramètre de régularisation ont été proposées dans le cas linéaire de la régularisation de Tikhonov (se référer par exemple à [Fortier *et al.*, 1993, Galatsanos et Katsaggelos, 1991, Galatsanos et Katsaggelos, 1992, Katsaggelos et Lay, 1991, Lagendijk *et al.*, 1988, Lagendijk *et al.*, 1989, Reeves et Mersereau, 1990, Thompson *et al.*, 1991, Johnson *et al.*, 1991] et à leurs références pour de plus amples détails).

Lien avec le traitement d'image par EDP (linéaire)

Les Equations aux Dérivées Partielles (EDP) ont été introduites pour la restauration d'image bruitée dès 84 par les travaux de Koenderink [Koenderink, 1984]. Dans cette approche, on considère une suite d'images $f(x, t)$ paramétrée par un paramètre extérieur t (le temps ou l'échelle "scale" en anglais) et l'on définit l'équation d'évolution en f en fonction du temps. La première équation de diffusion appliquée aux images, connue sous le nom d'équation de la chaleur, est l'EDP parabolique linéaire suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \Delta f(x, t) \\ \frac{\partial f}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \\ f(x, 0) = o(x). \end{cases} \quad (3.25)$$

$\partial\Omega$ représente le bord de Ω et n un vecteur normal extérieur à $\partial\Omega$. Le système (3.25) permet la restauration d'une image bruitée o (il n'y a pas d'opérateur de convolution) par une diffusion isotrope de f , l'intensité de l'image. En effet, rappelons que le Laplacien s'écrit $\Delta f = f_{n_1 n_1} + f_{n_2 n_2} \quad \forall n_1, n_2$ deux vecteurs normés orthogonaux. L'image est ainsi lissée. Koenderink rappelle que ce processus de diffusion de l'intensité de l'image revient à utiliser un opérateur de convolution linéaire Gaussien sur l'image observée bruitée o . En effet, la fonction de Green associée à cette équation est une fonction Gaussienne de variance $2t$. Autrement dit la solution de (3.25) au temps t est (si $o \in L^2(\mathbb{R}^2)$) :

$$f(x, t) = (G_t * o)(x) \quad \text{avec} \quad G_t(x) = \frac{1}{4\pi t} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4t}\right) \quad (3.26)$$

L'avantage d'une formulation par EDP est que le paramètre de temps peut être considéré comme un paramètre d'échelle. $f(x, t)$ peut être interprété comme une nouvelle image où l'information à l'échelle t et aux échelles plus fines sont floues mais les informations aux échelles plus grossières sont préservées.

L'équation $\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \Delta f(x, t)$ peut être interprétée comme une descente de gradient associée à la minimisation en f de la fonctionnelle $\int_{\Omega} |\nabla f|^2$. Le minimum de $\int_{\Omega} |\nabla f|^2$ est atteint pour $f(x) = \text{constante}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Si on considère $f(x, t)$ satisfaisant (3.25), lorsque $t \rightarrow \infty$, $f(x, t)$ tend vers une constante qui est la moyenne de la condition initiale o . Le processus de diffusion doit être stoppé pour un certain t_f à déterminer. Le choix de ce t_f correspond au degré de lissage que l'on veut sur la solution finale, et correspond au choix du paramètre de régularisation λ^2 dans (3.21) pour le cas $\mathcal{H} = Id$. Pour éviter que la solution ne converge vers une solution constante à l'infini, et pour pouvoir tenir compte du processus de dégradation \mathcal{H} , on considère l'EDP « biaisée » suivante [N. Nordström, 1990] :

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \mathcal{H}^*(o(x) - \mathcal{H}f(x, t)) + \Delta f(x, t) \\ \frac{\partial f}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (3.27)$$

L'état stationnaire de cette équation d'évolution correspond à la solution qui annule le membre de gauche de cette égalité, autrement dit la solution de l'équation d'Euler (3.23) associée à la régularisation de Tikhonov (3.21). Cette équation d'évolution correspond en fait à une descente de gradient à pas constant du critère (3.21) puisque (3.27) se réécrit :

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = -\nabla J_{\alpha}(f) \quad (3.28)$$

Approche stochastique

Dans l'approche stochastique en traitement d'images, le signal à reconstruire est considéré directement de manière discrète. Chaque échantillon est une variable aléatoire et le signal résultat est une réalisation de la variable aléatoire multidimensionnelle. Comme indiqué au paragraphe notations, le signal discret est noté \mathbf{f} et correspond à $\mathbf{f}(m, n) = f(m\Delta x, n\Delta y)$. $F(m, n)$ ou de manière équivalente $F_{m,n}$ désigne la variable aléatoire au pixel (m, n) , $\mathbf{f}(m, n)$ en est une réalisation. De même, \mathbf{o} est la version discrète de o et O est la variable aléatoire multidimensionnelle associée. Rappelons que par simplification, on note souvent $P(\mathbf{f})$ pour $P(F = \mathbf{f})$. On suppose en général que les échantillons du signal cherché se répartissent autour d'une valeur moyenne avec une certaine loi de probabilité, certains types de réalisations étant plus probables que d'autres. La solution est calculée en utilisant des estimateurs statistiques et les contraintes sont introduites sur la loi de probabilité de F .

- **Filtre de Wiener**

Une des méthodes les plus connues parmi les méthodes classiques est sans doute le filtre de Wiener [Jain, 1989]. Si \mathbf{f} représente le vrai signal que l'on cherche, le principe du filtre de Wiener est de chercher la solution $\hat{\mathbf{g}}$ qui minimise l'erreur quadratique moyenne $E[(\mathbf{f} - \mathbf{g})^*(\mathbf{f} - \mathbf{g})]$ c'est-à-dire $\hat{\mathbf{g}} = E[\mathbf{f}/\mathbf{g}]$ parmi les solutions qui s'écrivent linéairement par rapport à l'observation soit $\mathbf{g} = L\mathbf{o}$ où L est la matrice à déterminer. La solution est donnée par :

$$\hat{\mathbf{f}} = (H^*H + R_{FF}^{-1}R_{VV})^{-1}H^*\mathbf{o} \quad (3.29)$$

où R_{ZZ} est la matrice d'autocorrélation du signal stationnaire Z . Le signal F et le bruit N sont supposés stationnaires et les matrices de corrélation sont des matrices de Toeplitz. Cette méthode est linéaire, l'a priori sur le signal (à travers la matrice R_{FF}) est global, dû à l'hypothèse de stationnarité. Elle fait partie des méthodes classiques de régularisation globale.

- **Filtre de Kalman**

Le filtre de Kalman consiste à calculer récursivement la solution du filtre de Wiener, c'est-à-dire la solution $\hat{\mathbf{g}}$ à variance d'erreur minimale [Jain, 1989]. Le calcul de la solution est effectué récursivement par rapport aux indices, c'est-à-dire qu'il faut définir un sens de lecture arbitraire sur l'image. Si la notion de causalité est naturelle sur un signal temporel (par rapport à un échantillon présent, les échantillons passés et futurs sont naturellement définis), il n'en est pas de même pour une image. Une notion de causalité arbitraire est définie par rapport au sens de lecture des pixels (sens lexicographique). Par rapport à un pixel présent, les pixels déjà parcourus forment le demi-plan (supérieur) asymétrique passé, les autres pixels le demi-plan (inférieur) asymétrique futur [Woods et Radewan, 1977, Jain, 1989]. L'information a priori sur le signal cherché est introduite par l'intermédiaire d'un modèle linéaire autorégressif causal, semi-causal ou non causal, suivant que le support du modèle est dans la partie du passé uniquement ou non. La difficulté de mise œuvre en 2D est due à la très grande taille du vecteur d'état du système dynamique ainsi formé par l'équation du modèle autorégressif et par l'équation d'observation $\mathbf{o} = H\mathbf{f} + \mathbf{v}$. Cette dimension est en effet proportionnelle au nombre de points d'une ligne de l'image. Des versions simplifiées [Angwin et Kaufman, 1989, Woods et Ingle, 1981] ou des versions rapides par décorrélation du système dynamique dans l'espace de Fourier [Biemond *et al.*, 1983, Blanc-Féraud *et al.*, 1988] ont été proposées. On peut montrer que la

solution finale se met sous la forme :

$$\hat{\mathbf{f}} = [H^*H + \frac{\sigma_v^2}{\sigma_f^2}(I - A)^*(I - A)]^{-1}H^*\mathbf{o} \quad (3.30)$$

A est la matrice formée à partir des coefficients du modèle autorégressif. L'équation (3.30) est du même type que les équations (3.21),(3.29). L'avantage de la formulation récursive du filtre de Kalman est la possibilité de rendre adaptatif le calcul de la solution (et casser ainsi la linéarité) afin de prendre en compte l'aspect non stationnaire du signal image. C'est ce qui est fait avec les modèles de Markov ou les modèles variationnels présentés dans le paragraphe 3.3.

- **Maximum a Posteriori (MAP)**

Un estimateur très répandu est sans doute l'estimateur du MAP (Maximum A Posteriori) car il correspond à une solution régularisée. La probabilité a posteriori est la fonction de densité de probabilité $P(\mathbf{f}/\mathbf{o})$. Maximiser $P(\mathbf{f}/\mathbf{o})$ en \mathbf{f} consiste à chercher la solution \mathbf{f} qui a la plus grande probabilité de donner les observations \mathbf{o} mesurées. En utilisant la règle de Bayes :

$$P(\mathbf{f}/\mathbf{o}) = \frac{P(\mathbf{o}/\mathbf{f})P(\mathbf{f})}{P(\mathbf{o})} \quad (3.31)$$

l'estimateur du MAP s'écrit encore :

$$\text{Max}_{\mathbf{f}} \{P(\mathbf{o}/\mathbf{f})P(\mathbf{f})\} \quad (3.32)$$

La distribution de probabilité $P(\mathbf{f})$ reste à définir. Elle permet d'introduire des contraintes sur la solution et donc de la régulariser. Une loi de probabilité très simple à manipuler est sans doute la loi gaussienne. Si l'on suppose que le signal à reconstruire se répartit autour de sa moyenne suivant une loi gaussienne, on a :

$$P(\mathbf{f}) = \frac{1}{K} \exp[-\frac{1}{2}\mathbf{f}^*R_{FF}^{-1}\mathbf{f}] \quad (3.33)$$

et l'estimateur du MAP revient à minimiser le critère

$$J(\mathbf{f}) = \|\mathbf{o} - H\mathbf{f}\|^2 + \lambda^2\|\mathbf{f}\|_{R_{FF}}^2 \quad (3.34)$$

qui n'est autre que le filtre de Wiener. La minimisation de ce critère fait aussi partie des méthodes de régularisation proposées par Tikhonov [Tikhonov, 1963, Tikhonov et Arsenin, 1977].

Conclusion

Les méthodes de régularisation présentées dans cette partie, qu'elles soient déterministes (variationnelles ou par EDP) ou stochastiques, sont des méthodes où la régularisation est la même partout sur l'image. La contrainte étant un lissage global sur toute l'image, les contours sont bien évidemment rendus flous à cause de la régularisation. Cette régularisation est dite linéaire, car les équations à résoudre sont linéaires (dérivées de fonctionnelles ou d'énergies quadratiques). Nous présentons dans le paragraphe suivant les travaux récents concernant la régularisation non linéaire.

3.3 Régularisation avec préservation de discontinuité

Ce travail a principalement été conduit lors de la thèse de Pierre Charbonnier (en 1994), en collaboration avec le pr G. Aubert Du laboratoire J-A. Dieudonné de l'UNSA et le Pr M. Barlaud du laboratoire I3S.

L'article [IEEE IP-97] en fin de document (référéncé [Charbonnier *et al.*, 1997]) présente une partie de ce travail. La régularisation présentée permet principalement de préserver des sauts ou des grandes variations dans le signal régularisé que l'on reconstruit, ce qui est impossible avec les méthodes de régularisation classiques. Contrairement à l'article [IEEE IP-97], le modèle est présenté ici sous sa forme variationnelle (comme nous l'avons fait dans [Blanc-Féraud *et al.*, 1995]), ce qui permet une écriture plus synthétique et une analyse un peu différente. Ce travail est restitué dans le cadre plus général du traitement d'image par équations aux dérivées partielles (EDP) et par approche bayésienne avec des champs de Markov.

De nombreux travaux novateurs ont été effectués ces dix dernières années concernant la régularisation de problèmes inverses notamment en traitement d'image. Les efforts ont principalement porté sur la définition des termes de régularisation non quadratique, seul moyen d'éviter le lissage des contours de l'image en même temps que le lissage du bruit. Les recherches ont consisté à proposer d'autres termes de régularisation que ceux proposés par Tikhonov [Tikhonov, 1963]. L'idée maîtresse est de ne plus utiliser la norme $L^2(\Omega)$ qui introduit des contraintes fortes globalement sur le signal à reconstruire, mais d'essayer de préserver les discontinuités de la solution là où elles existent, tout en lissant ailleurs. En traitement d'image la motivation est forte car il s'agit de préserver les contours, c'est-à-dire de reconstruire des images régularisées qui ne soient pas floues. Ces techniques peuvent bien évidemment s'appliquer à d'autres signaux que des images en niveaux de gris ou en couleur. On distingue deux grandes approches : l'approche déterministe et l'approche stochastique. Toutes deux ont donné lieu à de nombreux travaux et au développement de nouveaux termes de régularisation, ainsi qu'à de nouveaux algorithmes d'estimation.

3.3.1 Approche variationnelle, en variables discrètes

Norme $\|\cdot\|_1$

L'idée consiste à considérer la régularisation introduite par Tikhonov (3.21), qui, en variables discrètes, peut s'écrire :

$$J(\mathbf{f}) = \|\mathbf{o} - H\mathbf{f}\|_2^2 + \lambda^2 \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \{(D_x \mathbf{f})_{i,j}^2 + (D_y \mathbf{f})_{i,j}^2\}, \quad (3.35)$$

et définir un nouveau terme de régularisation en changeant la norme quadratique, notée $\|\cdot\|_2^2$, sur le gradient de \mathbf{f} par un terme de régularisation qui permette de fortes variations du signal. Avec la norme quadratique, les grands gradients sont fortement pénalisés et donc lissés. Pour que leur poids soit moindre dans le processus de régularisation, il faut utiliser par exemple la norme $\|\cdot\|_1$, et minimiser un critère du type

$$J(\mathbf{f}) = \|\mathbf{o} - H\mathbf{f}\|_2^2 + \lambda^2 \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} |(D_x \mathbf{f})_{i,j}| + |(D_y \mathbf{f})_{i,j}| \quad (3.36)$$

En figure 3.4, nous avons schématisé un exemple en dimension 1 pour lequel les deux valeurs extrêmes du signal sont fixes (0 et 4) et les valeurs intermédiaires doivent être fixées

par minimisation soit de la norme $\|\cdot\|_2^2$, soit de la norme $\|\cdot\|_1$. Pour la norme $\|\cdot\|_2^2$, la configuration où le signal est interpolé linéairement donne une valeur minimale par rapport aux autres configurations proposées (cas 3 de la figure 3.4), alors que pour la norme $\|\cdot\|_1$, les trois premières configurations génèrent la même norme. Bien sûr, la quatrième configuration, qui est oscillante, n'est minimale dans aucun des deux cas.

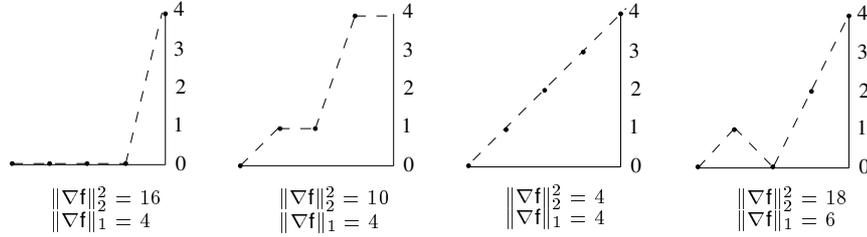


FIG. 3.4 – Comparaison des normes $\|\cdot\|_2^2$ et $\|\cdot\|_1$.

Remarque 1 :

Les solutions présentées figure 3.4 ne sont que des exemples qui ne permettent pas d'affirmer, en toute rigueur, que la configuration 3 est la solution optimale pour la norme $\|\cdot\|_2^2$, et que les configurations 1,2 et 3 sont des solutions optimales pour la norme $\|\cdot\|_1$. Ceci peut toutefois être montré. Un moyen très simple de s'en convaincre est de le vérifier en réduisant le nombre d'inconnues à une seule, en considérant le problème suivant :

$$\min_{f_1} \sum_{i=0}^1 (f_{i+1} - f_i)^2 \quad \text{ou} \quad \min_{f_1} \sum_{i=0}^1 |f_{i+1} - f_i| \quad \text{où} \quad f_0 = 0 \quad \text{et} \quad f_2 = M > \text{cst.}$$

Pour la norme $\|\cdot\|_2^2$, on vérifie qu'il n'y a qu'une seule solution optimale $f_1 = \frac{M}{2}$, et pour la norme $\|\cdot\|_1$, qu'il y a un ensemble de solutions $f_1 \in [0, M]$.

Remarque 2 :

La norme $\|\cdot\|_2$ (sans le carré), ne permet pas non plus de préserver les discontinuités. Ceci reste valable aussi en variables continues (voir paragraphe suivant).

Fonctions φ

Plus généralement, les termes de régularisation avec prise en compte de discontinuités, en variables discrètes, prennent la forme suivante [Bouman et Sauer, 1993, Geman et Reynolds, 1992, Geman et Yang, 1995, Geman et Clure, 1985, Geman et Geman, 1984, Green, 1990, Hebert et Leahy, 1989, Lange, 1990] :

$$J(\mathbf{f}) = \|\mathbf{o} - H\mathbf{f}\|_2^2 + \lambda^2 \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \varphi \left(\frac{|(D_x \mathbf{f})_{i,j}|}{\delta} \right) + \varphi \left(\frac{|(D_y \mathbf{f})_{i,j}|}{\delta} \right) \quad (3.37)$$

où φ est une fonction paire définie sur \mathbb{R} , croissante sur \mathbb{R}^+ appelée fonction de régularisation et δ un paramètre. Dans l'approche stochastique, cette fonction est la fonction potentiel de l'énergie de Gibbs du modèle de Markov (cf. paragraphe 3.3.6). Toutes les fonctions φ ainsi définies ne sont pas des fonctions de régularisation avec prise en compte de discontinuités. En effet si $\varphi(t) = t^2$, on obtient la norme $\|\cdot\|_2^2$ correspondant à la régularisation de

Tikhonov, qui lissent les fortes variations du signal. Si $\varphi(t) = t$, on obtient la norme $\|\cdot\|_1$, qui pénalise moins les forts gradients.

Remarque :

Dans l'approche discrète, les auteurs considèrent souvent des termes de régularisation séparés sur les composantes du gradient : $\varphi(\frac{\partial f}{\partial x_i})$ alors qu'en variables continues, le terme considéré est $\varphi(|\nabla f|)$. L'analyse qui permet de définir les propriétés de φ pour que le terme de régularisation préserve les discontinuités est la même dans les deux cas de figure. Par contre dans le premier cas, le terme de régularisation met en évidence des directions privilégiées et n'est pas isotrope.

Une autre fonction de régularisation φ bien connue est la fonction correspondant au modèle de membrane décrit par Blake et Zisserman [Blake et A.Zisserman, 1987], définie par

$$\varphi(t) = \min\{t^2, 1\}.$$

Le paramètre δ de l'équation (3.37) permet alors de régler les gradients par rapport au point de changement de comportement de la fonction φ entre la fonction quadratique et la fonction constante. Lorsque $\frac{|(D_x f)_{i,j}|}{\delta} < 1$, l'image f est lissée dans la direction x , et ce de manière quadratique. Dès que le module de la dérivée dépasse δ la pénalité attribuée est 1. Donc à partir d'un certain seuil, tous les gradients engendrent la même pénalité.

La manière d'introduire ce type de fonction de régularisation est intéressante. Blake et Zisserman obtiennent cette fonction en ayant d'abord introduit une variable booléenne (ou un couple de variables, une dans chaque direction (x, y)), $\mathbf{b} = (\mathbf{b}^x, \mathbf{b}^y)$ définies sur la grille $I \times J$, telles que la valeur 1 pour $\mathbf{b}_{i,j}^x$ marque la régularité de l'image au point i, j dans la direction x et la valeur 0 marque au contraire la présence d'une discontinuité de f au point i, j dans la direction x (idem suivant y). Ainsi cette variable, autrement appelée "*line process*" dans les travaux de S. Geman et D. Geman en 1984 [Geman et Geman, 1984], marque les contours de l'image (dans le sens horizontal et vertical dans notre cas de figure), en supposant que ceux-ci correspondent aux discontinuités de f . Le modèle d'image est celui d'une fonction régulière par morceaux, et s'écrit, avec les paramètres λ et δ que nous avons précédemment introduits :

$$J(\mathbf{f}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{o} - H\mathbf{f}\|_2^2 + \frac{\lambda^2}{\delta^2} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \left\{ \mathbf{b}_{i,j}^x \frac{|(D_x f)_{i,j}|^2}{\delta} + \mathbf{b}_{i,j}^y \frac{|(D_y f)_{i,j}|^2}{\delta} \right\} + \lambda^2 \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} (2 - \mathbf{b}_{i,j}^x - \mathbf{b}_{i,j}^y) \quad (3.38)$$

Lorsqu'un coefficient \mathbf{b} est nul, il anihile totalement le terme de lissage de f . La valeur λ^2 est alors le prix à payer pour l'introduction d'un contour à cet endroit. En minimisant le critère $J(\mathbf{f}, \mathbf{b})$ en \mathbf{b} , variables booléennes, il vient naturellement

$$\min_{\mathbf{b} \in \{0,1\}^2} J(\mathbf{f}, \mathbf{b}) = J(\mathbf{f}) \quad (3.39)$$

avec $J(\mathbf{f})$ défini en (3.37) où $\varphi(t) = \min\{t^2, 1\}$. Ainsi la préservation des forts gradients est effectuée de manière équivalente soit implicitement, soit explicitement.

D'autres fonctions de régularisation ont été proposées et de nombreux auteurs que ce soit dans l'approche variationnelle [Aubert et Vese, 1997, Blake et A.Zisserman, 1987,

Blanc-Féraud *et al.*, 1995, Charbonnier *et al.*, 1997, N. Nordström, 1990, Romeny, 1994, You *et al.*, 1996] ou bien stochastique [Bouman et Sauer, 1993, Geman et Reynolds, 1992, Geman et Yang, 1995, Geman et Clure, 1985, Geman et Geman, 1984, Green, 1990, Hebert et Leahy, 1989, Lange, 1990] utilisent le modèle des fonctions φ (cf. partie 3.3.6). Ce choix est effectué de manière ad hoc le plus souvent.

Un aspect de notre travail a été de définir une classe de fonctions φ visant à régulariser le signal tout en préservant les discontinuités et de montrer que la prise en compte des contours peut être, de manière équivalente, implicite ou explicite. Ce travail est présenté en variables discrètes dans l'article [Charbonnier *et al.*, 1997] (**IEEE IP-97**) joint en annexe). Nous avons choisi dans ce document de rappeler les grandes lignes de la démarche en variables continues (cf. paragraphe suivant).

3.3.2 Approche variationnelle, en variables continues

Norme L_1

Le critère à minimiser s'écrit :

$$J(f) = \|o - \mathcal{H}f\|^2 + \lambda^2 \int_{\Omega} |\nabla f| \quad (3.40)$$

$|\nabla f|$ = est le module euclidien de ∇f en un point $x \in \mathbb{R}^n$ quelconque et est défini par $|\nabla f(x)| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|^2}$.

La fonctionnelle $J(f)$ est définie a priori dans l'espace

$$V(\Omega) = \{\mathcal{H}f \in L^2(\Omega); \nabla f \in L^1(\Omega)^n\}. \quad (3.41)$$

Le gradient est entendu au sens des distributions. L'espace V est analogue à l'espace de Sobolev $W^{1,1}(\Omega) = \{f \in L^1(\Omega); \nabla f \in L^1(\Omega)^n\}$, la différence étant l'espace de définition de f , mais l'espace de ∇f est le même. Cet espace définit des fonctions trop régulières pour modéliser des images formées de régions régulières séparées par des contours qui correspondent à des discontinuités. En effet, pour $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, les fonctions dont le gradient est dans $L^1(\Omega)^2$ ne peuvent admettre des points de discontinuité sur des courbes (voir les propriétés fines des fonctions de $W^{1,1}(\Omega) = \{f \in L^1(\Omega); \nabla f \in L^1(\Omega)^n\}$ dans [Evans et Gariepy, 1992]). C'est pourquoi, nous considérons l'espace BV des fonctions à variations bornées.

Variation totale

La minimisation de la variation totale d'une fonction à des fins de régularisation a beaucoup été étudiée du point de vue mathématique [Ambrosio, 1989, Aubert et Kornprobst, 1999, Chambolle et Lions, 1997, Kornprobst *et al.*, 1999]. Le critère à minimiser s'écrit :

$$J(f) = \|o - \mathcal{H}f\|^2 + \lambda^2 \int_{\Omega} |Df| \quad (3.42)$$

où $\int_{\Omega} |Df|$ est la variation totale du gradient de f . Le gradient est défini au sens des distributions. Ainsi Df est une mesure dont on calcule la variation totale par

$$\int_{\Omega} |Df| = \sup \left\{ \int_{\Omega} f \operatorname{div}(g) \quad / \quad g \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad \|g(x)\|_{\infty} \leq 1 \quad \text{pour} \quad x \in \Omega \right\}$$

Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n , $C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des fonctions continûment différentiables de Ω dans \mathbb{R}^n à support compact dans Ω . Si $f \in C^1(\Omega)$ alors $\int_{\Omega} f \operatorname{div}(g) = - \int_{\Omega} \nabla f \cdot g$ et $\int_{\Omega} |Df| = \int_{\Omega} |\nabla f|$. Nous reviendrons sur les fonctions de l'espace BV au chapitre suivant et nous renvoyons à [Ambrosio, 1998, Braides, 1998, Evans et Gariepy, 1992, Giusti, 1984] pour des définitions et propriétés.

La solution f du problème inverse est cherchée dans l'espace BV ("Bounded Variation" en anglais) des fonctions à variations bornées, défini par :

$$\mathbf{BV} = \{f \in L^1 \mid \int_{\Omega} |Df| < +\infty\} \quad (3.43)$$

Les fonctions de BV peuvent être discontinues à travers des hypersurfaces, ce qui n'est pas le cas de l'espace de Sobolev $W^{1,1}(\Omega)$ ou l'espace V . Ainsi, permet-on des solutions discontinues à travers des courbes (pour $\Omega \subset \mathbb{R}^2$), ce qui correspond bien à la définition d'un contour dans une image homogène par morceaux. La difficulté est de savoir comment appréhender une solution dans BV d'un point de vue pratique. En particulier, nous ne disposons pas d'équation d'Euler sur BV. Nous verrons des tentatives de solutions dans le chapitre 4.

Fonctions φ

Dans ce chapitre, nous ne considérons que des solutions dans V défini équation (3.41). Ces fonctions sont plus régulières que celles de BV. Ceci est fait par nombre d'auteurs en traitement d'image [Acar et Vogel, 1994, Rudin *et al.*, 1992, Vogel et Oman, 1998], même s'ils affirment parfois minimiser la variation totale.

Nous essayons de définir un terme de régularisation qui ne lisse pas trop les discontinuités de l'image. La fonctionnelle considérée s'écrit de manière générale sous la forme suivante :

$$J(f) = \int_{\Omega} |o - \mathcal{H}f|^2 + \lambda^2 \int_{\Omega} \varphi\left(\frac{|\nabla f|}{\delta}\right), \quad f \in V. \quad (3.44)$$

où φ est, comme dans le cas discret, une fonction paire définie sur \mathbb{R} , croissante sur \mathbb{R}^+ , appelée fonction de régularisation et δ un paramètre d'échelle, et V défini par l'équation (3.41). Pour simplifier l'écriture, on supposera pour l'instant que $\delta = 1$. $|\nabla f|$ représente, comme dans l'équation (3.40), le module euclidien du gradient. Comme dans le cas discret, toutes les fonctions φ ainsi définies ne sont pas des fonctions de régularisation avec prise en compte de discontinuités. Là encore, si $\varphi(t) = t^2$, on obtient la norme L^2 correspondant à la régularisation de Tikhonov, qui lissent trop les fortes variations du signal. Si $\varphi(t) = t$, on obtient la norme L^1 . Comment choisir la fonction de régularisation φ , autrement dit quelles propriétés doit-elle avoir ? Nous cherchons à reconstruire une image qui soit régulière par morceaux. Pour régulariser le problème inverse, il faut lisser les petites variations de l'image afin d'éviter l'amplification du bruit lors de l'inversion de $o - \mathcal{H}f$. Nous voulons aussi préserver les contours de l'image, donc ne pas trop pénaliser les gradients de module élevé. Pour définir une telle classe de fonctions, on analyse formellement la dérivée de $J(f)$ lorsque f est assez régulière (au moins dans V). L'équation d'Euler satisfaite par le minimum de (3.44) s'écrit de manière formelle :

$$\mathcal{H}^*(\mathcal{H}f - o) - \lambda^2 \operatorname{div} \left(\frac{\varphi'(|\nabla f|)}{2|\nabla f|} \nabla f \right) = 0 \quad (3.45)$$

avec les conditions aux bords de Ω :

$$\frac{\varphi'(|\nabla f|)}{2|\nabla f|} \frac{\partial f}{\partial n} = 0 \quad (3.46)$$

où n est un vecteur normal à $\partial\Omega$. \mathcal{H}^* représente l'opérateur adjoint de \mathcal{H} .

La fonction $\frac{\varphi'(t)}{2t}$ avec $t = |\nabla f|$ joue un rôle important dans la procédure de régularisation. Cette fonction pondère localement le Laplacien de f . Si $\frac{\varphi'(|\nabla f|)}{2|\nabla f|}$ est constante (de valeur 1), l'équation (3.45) devient :

$$\mathcal{H}^*(\mathcal{H}f - o) - \lambda^2 \Delta f = 0 \quad (3.47)$$

où Δf est le Laplacien de f et le lissage est quadratique comme dans la régularisation de Tikhonov avec $\varphi(t) = t^2$. Si la fonction $\frac{\varphi'(|\nabla f|)}{2|\nabla f|}$ est nulle, il n'y a pas de lissage et donc pas de régularisation. Finalement, trois conditions permettent de définir la classe des fonctions φ de régularisation telles que nous les avons définies ci-dessus :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi'(t)}{2t} = 1 : \text{lissage dans les zones homogènes (à faibles gradients)} \quad (3.48)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi'(t)}{2t} = 0 : \text{préservation des forts gradients} \quad (3.49)$$

$$\frac{\varphi'(t)}{2t} \text{ strictement décroissante} : \text{cohérence du modèle} \quad (3.50)$$

Les fonctions de régularisation qui vérifient ces trois conditions ont un comportement quadratique autour de zéro et linéaire ou sous-linéaire à l'infini. De nombreuses fonctions différentes ont été proposées et nous renvoyons au tableau 3.7 et aux références [Aubert et Vese, 1997, Blake et A.Zisserman, 1987, Bouman et Sauer, 1993, Deriche et Faugeras, 1996, Geman et Reynolds, 1992, Geman et Yang, 1995, Geman et Clure, 1985, Geman et Geman, 1984, Green, 1990, Hebert et Leahy, 1989, Lange, 1990, N. Nordström, 1990, You *et al.*, 1996].

Question d'existence de solution

Ces fonctions peuvent être convexes ou non. Si la fonction φ est **strictement convexe**, la fonctionnelle à minimiser l'est aussi (si \mathcal{H} n'annule pas les constantes). Supposons la donnée $o \in L^2$. Le problème de minimisation est a priori posé dans V mais il est mal posé dans V , car V n'est pas réflexif. On plonge alors V dans l'espace des fonctions $\{\mathcal{H}f \in L^2 \text{ et } f \in \text{BV}\}$ et le terme $\int_{\Omega} \varphi(|\nabla f|)$ est remplacé par $\int_{\Omega} \varphi(|Df|)$. Le terme $\varphi(|Df|)$, si φ est convexe, est bien défini comme une fonction convexe de mesure. On peut montrer alors qu'il y a existence et unicité d'une solution au problème de minimisation dans $\{\mathcal{H}f \in L^2 \text{ et } f \in \text{BV}\}$ [Chambolle et Lions, 1997, Lázaro-Vese, 1996] (sous certaines hypothèses sur \mathcal{H} , du type : \mathcal{H} est un opérateur linéaire continu sur $L^2(\Omega)$ qui n'annule pas les constantes). On utilise par exemple la fonction $\varphi(t) = \sqrt{1+t^2} - 1$ proposée dans [Blanc-Féraud *et al.*, 1995] et [Charbonnier *et al.*, 1997], en annexe sous la référence [IEEE IP-97].

Cependant, comme nous cherchons une solution en résolvant l'équation d'Euler (3.45, 3.46), l'espace sur lequel nous travaillons est V et non $\{\mathcal{H}f \in L^2 \text{ et } f \in \text{BV}\}$. Il est donc intéressant d'avoir un résultat d'existence d'une solution dans V . Un tel résultat a été montré dans [Aubert et Vese, 1997], sous l'hypothèse supplémentaire que la donnée o soit plus régulière que simplement dans $L^2(\Omega)$. Pour avoir existence (et unicité) d'une solution dans V il est nécessaire que $o \in W^{1,\infty}(\Omega)$ où $W^{1,\infty}(\Omega)$ représente les fonctions définies sur Ω telles que la fonction et ses dérivées partielles à l'ordre un (au sens des distributions) appartiennent à L^∞ .

Si la fonction φ est **non convexe**, et si l'asymptote à l'infini est constante, comme pour la fonction $\varphi(t) = \frac{t^2}{1+t^2}$ proposée dans [Geman et Clure, 1985], alors le problème d'existence du minimum de (3.44) est vain. Considérons en effet le problème de minimisation avec $\mathcal{H} = Id$ et $\varphi(t) = \frac{t^2}{1+t^2}$,

$$\inf_{f \in V} J(f) \quad \text{où} \quad J(f) = \int_{\Omega} |o - f|^2 + \lambda^2 \int_{\Omega} \varphi\left(\frac{|\nabla f|}{\delta}\right). \quad (3.51)$$

Si o est constante par morceaux (étagée), il est possible de trouver une suite minimisante $f_n \in C(\Omega)$ telle que $J(f_n) \rightarrow 0$. Par densité des fonctions étagées pour la topologie forte dans L^2 , on a $\inf_{f \in V} J(f) = 0$ pour tout $o \in L^2(\Omega)$. Ainsi, si le problème de minimisation (3.51) a une solution \hat{f} , alors nécessairement $\int_{\Omega} |o - \hat{f}|^2 = \lambda^2 \int_{\Omega} \varphi\left(\frac{|\nabla \hat{f}|}{\delta}\right)$ (pour $\varphi \geq 0$ et $\varphi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$). On en déduit que $\hat{f} = o$ et $\nabla \hat{f} = 0$ p.p. A moins que o soit constante par morceaux, il n'y a aucune chance d'avoir l'existence d'un minimum.

Ce raisonnement ne peut être reproduit dans le cas où φ est à limite infinie en l'infini. Pour de telles fonctions, si elles sont non convexes, comme par exemple $\varphi(t) = \log(1+t^2)$, le problème de l'existence et de l'unicité du minimum de (3.44) est ouvert.

La fonctionnelle (3.44) avec φ non convexe, une fois discrétisée, peut toutefois être minimisée, mais on ne peut espérer atteindre une solution optimale qu'en utilisant un algorithme de relaxation stochastique (cf. partie 3.3.6). Les algorithmes de minimisation déterministes sont sous-optimaux dans le cas non convexe, et il ne sera pas possible de montrer mieux qu'une convergence vers un minimum local. Notons qu'une analyse fine du comportement d'un minimum de la fonctionnelle discrète peut être trouvé dans [Chipot *et al.*, 1999]. Ce comportement est analysé en fonction du pas de discrétisation et par rapport à la fonctionnelle continue.

Choix de la fonction φ

La fonction de régularisation φ est choisie au cas par cas. On peut toutefois dégager certaines tendances en analysant géométriquement le terme de lissage, en le développant sous forme de dérivées secondes dans la direction du gradient et dans la direction tangente. On obtient formellement en 2D [Blanc-Féraud *et al.*, 1995] :

$$\mathcal{H}^*(\mathcal{H}f - o) - \lambda^2 \left\{ \frac{\varphi'(|\nabla f|)}{2|\nabla f|} f_{\mathcal{T}\mathcal{T}} + \varphi''(|\nabla f|) f_{\mathcal{N}\mathcal{N}} \right\} = 0 \quad (3.52)$$

où $f_{\mathcal{N}\mathcal{N}}$ est la dérivée seconde dans la direction $\mathcal{N} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ du gradient et $f_{\mathcal{T}\mathcal{T}}$ la dérivée seconde dans la direction \mathcal{T} orthogonale à \mathcal{N} , tangente à la courbe de niveau de f en x . Une version 3D de (3.52) est proposée dans l'article [IEEE IP-98] joint en annexe (référéncé [Teboul *et al.*, 1998]). Ainsi lorsque φ est quadratique, les coefficients devant les deux dérivées secondes $f_{\mathcal{T}\mathcal{T}}$ et $f_{\mathcal{N}\mathcal{N}}$ sont égaux, le lissage est isotrope. Lorsque φ est une des fonctions convexes (par exemple $\varphi(t) = \sqrt{1+t^2}$ ou $\varphi(t) = \log \cosh(t)$), on vérifie :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)} = 0 \quad (3.53)$$

et le terme de lissage dans la direction du gradient est négligeable devant le terme de lissage dans la direction du contour, ce qui permet de lisser en préservant le contour. Par contre, lorsque φ est une des fonctions non convexes que nous utilisons, (par exemple $\varphi(t) = \frac{t^2}{1+t^2}$ ou $\varphi(t) = \log(1+t^2)$), alors la limite infinie du rapport (3.53) est constante, les deux

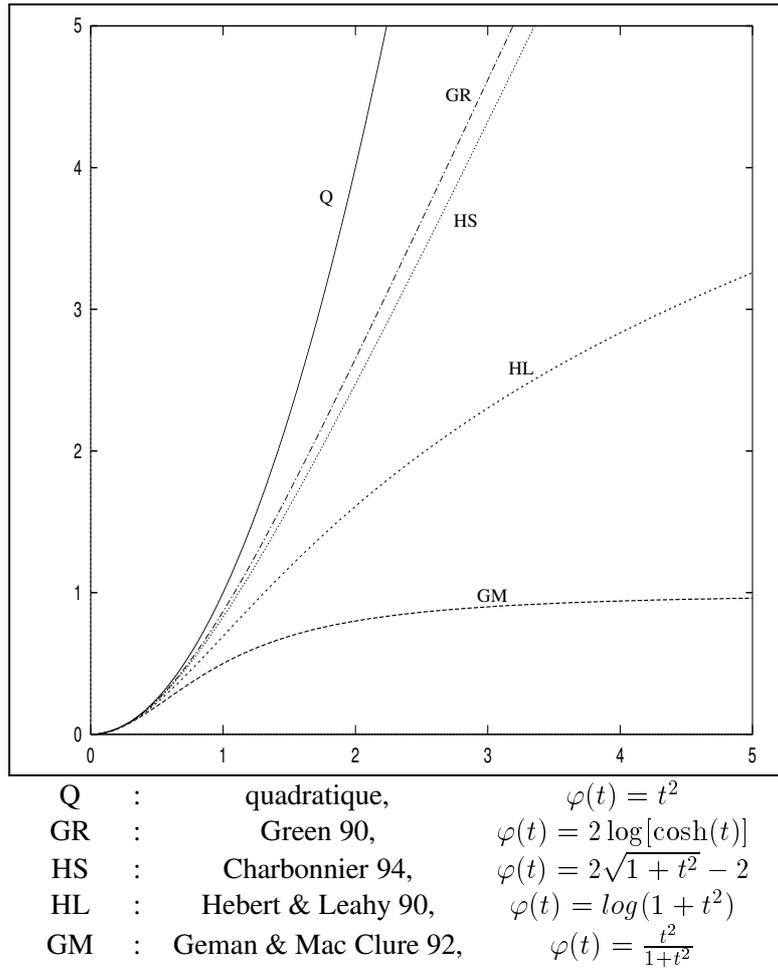
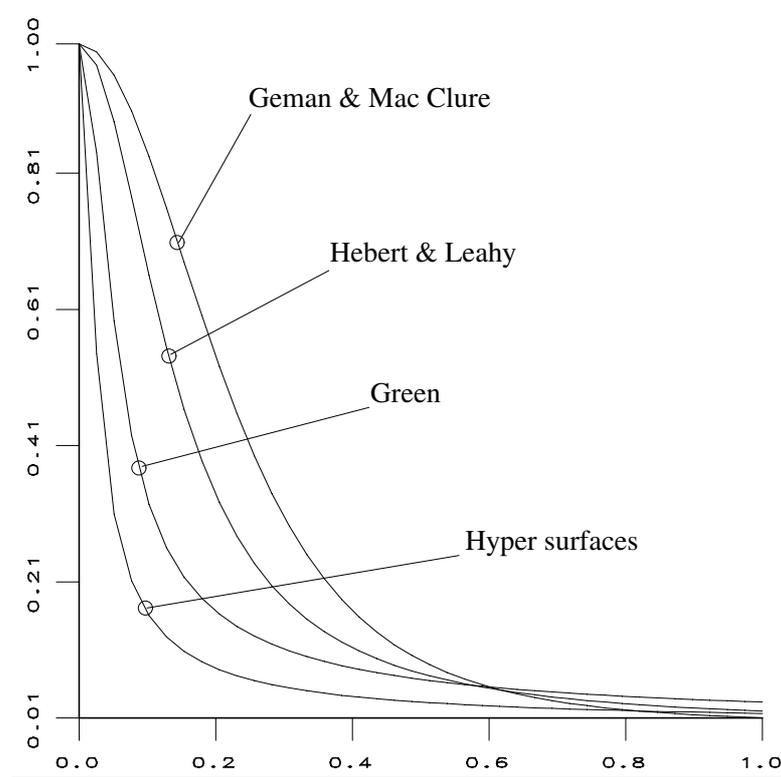


FIG. 3.5 – Exemple de fonctions de régularisation.

FIG. 3.6 – Fonctions de pondération $\frac{\varphi'(t)}{2t}$.

Nom	Convexité	$\varphi(u)$	$\varphi'(u)/2u$	Conditions (3.48-3.50)
φ_Q Quadratique	oui	u^2	1	non
φ_{L^1} Norme L^1	oui	$ u $	$1/ u $	non
φ_{BS} Bouman & Sauer	oui	$t^\alpha, 1 \leq \alpha \leq 2$	$\alpha t^{\alpha-2}/2$	non
φ_{PM} Perona & Malik	non	$1 - \exp(-t^2)$	$\exp(-t^2)$	oui
φ_{QT} Quadratique tronquée	non	$\min(u^2, 1)$	1 si $u < 1$, 0 si $u \geq 1$	oui
φ_{GM} Geman & McClure	non	$u^2/1 + u^2$	$1/(1 + u^2)^2$	oui
φ_{HL} Hebert & Leahy	non	$\log(1 + u^2)$	$1/(1 + u^2)$	oui
φ_{GR} Green	oui	$2 \log(\cosh(u))$	$\tanh(u)/u$	oui
φ_{HS} Hyper Surfaces	oui	$2\sqrt{1 + u^2} - 2$	$1/\sqrt{1 + u^2}$	oui

FIG. 3.7 – Description de quelques fonctions de régularisation.

termes ont même influence. Cependant on remarque qu'à l'infini, on est dans la partie non convexe de la courbe avec $\varphi''(t) < 0$. Ce terme rehausse les contours de l'image mais de manière instable. Cela correspond à inverser l'équation de la chaleur dans cette direction ce qui est un problème mal posé. Ainsi, une fonction non convexe reconstruit en général des discontinuités plus franches et abruptes. Cependant la minimisation est plus délicate. De plus, les résultats sont plus sensibles au réglage du paramètre de discontinuité. Ce paramètre a été fixé à 1 pour l'instant par souci de clarté. La fonctionnelle réellement utilisée pour des applications pratiques est celle définie en (3.44) où le paramètre δ permet de régler les valeurs de $|\nabla f|$ par rapport au comportement quadratique ou non de la fonction φ . Il définit une valeur en dessous de laquelle les valeurs de $|\nabla f|$ sont dans la partie quadratique et donc lissées et au dessus de laquelle elles sont dans la partie linéaire ou sous-linéaire et donc préservées. Lorsque le rapport signal sur bruit est faible, un fort gradient peut provenir d'un pic de bruit ou d'un gradient du signal. Le réglage du paramètre δ devient critique. Les résultats y sont d'autant plus sensibles que l'asymptote de la fonction de régularisation φ à l'infini est proche d'une fonction constante.

On remarque que ce paramètre n'a pas lieu d'être lorsqu'on utilise la norme L^1 (3.40) ou la fonction t^α avec $1 < \alpha < 2$ proposée dans [Bouman et Sauer, 1993]. En effet, leur comportement est le même en zéro et l'infini. Cependant, la norme L^1 correspond à $\varphi(t) = t$ donc $\varphi''(t) = 0$. La diffusion est totalement stoppée dans la direction du gradient, ce qui permet de bien préserver les contours mais ne lisse pas bien les zones à faible gradient. La fonction t^α avec $1 < \alpha < 2$, elle, a les mêmes coefficients de diffusion dans les deux directions à un facteur constant ($\alpha - 1 < 1$) près. Ainsi la diffusion est toujours plus faible dans la direction orthogonale au gradient.

Un résultat important sur les fonctions de régularisation φ définies équations (3.48-3.50) du paragraphe 3.3.2 est l'écriture semi-quadratique du critère. On montre que le modèle défini par (3.44) qui prend en compte les discontinuités du signal à travers la fonction φ est équivalent à un modèle où les discontinuités sont explicites. C'est le développement semi-quadratique des fonctions φ présenté au paragraphe suivant.

3.3.3 Régularisation semi-quadratique

Un résultat important sur les fonctions φ de régularisation avec prise en compte des discontinuités est l'écriture semi-quadratique du critère que ce soit dans l'approche variationnelle ou stochastique. On montre que le modèle des fonctions définies équations (3.48-3.50) du paragraphe 3.3.2 qui prennent en compte les discontinuités du signal est équivalent à un modèle où les discontinuités sont explicites. Les critères semi-quadratiques sont présentés dans le formalisme de l'approche déterministe mais s'appliquent de la même façon dans l'approche stochastique.

Première extension semi-quadratique

On montre que les fonctions de régularisation φ paires, croissantes qui vérifient les conditions (3.48-3.50) du paragraphe 3.3.2 (plus quelques hypothèses techniques supplémentaires vérifient (cf. [Charbonnier *et al.*, 1997] ([IEEE IP-97])) :

$$\forall t, \varphi(t) = \underset{b \in]0,1]}{\text{Min}} \{bt^2 + \psi(t)\} \quad \text{et} \quad b_{inf} = \frac{\varphi'(t)}{2t} \quad (3.54)$$

où ψ est une fonction strictement convexe définie explicitement à partir de φ .

Ce résultat est une extension du théorème donné par Geman et Reynolds [Geman et Rey-

Nom	$\varphi(\mathbf{u})$	$\psi(\mathbf{b})$	$\psi'(\mathbf{b})$
φ_{PM} Perona & Malik	$1 - \exp(-u^2)$	$b \log b - b + 1$	$\log b$
φ_{GM} Geman & McClure	$u^2 / (1 + u^2)$	$(\sqrt{b} - 1)^2$	$1 - \frac{1}{\sqrt{b}}$
φ_{HL} Hebert & Leahy	$\log(1 + u^2)$	$b - \log b - 1$	$1 - \frac{1}{b}$
φ_{HS} Hyper Surfaces	$2\sqrt{1 + u^2} - 2$	$b + \frac{1}{4b} - \frac{5}{4}$	$1 - \frac{1}{4b^2}$

FIG. 3.8 – Fonctions de régularisation φ et fonctions ψ associées.

nolds, 1992] qui est restreint aux fonctions telles que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) < \infty$$

En appliquant ce résultat à (3.44), la minimisation de $J(f)$ en f est équivalente à la minimisation de $J^*(f, b)$ en (f, b) sur $\Omega \times \Omega$:

$$J^*(f, b) = \int_{\Omega} |o - \mathcal{H}f|^2 + \lambda^2 \left(\int_{\Omega} b |\nabla f|^2 + \int_{\Omega} \psi(b) \right) \quad (3.55)$$

La variable b ainsi introduite représente les discontinuités du signal f : si b est proche de 1 il n'y a pas de discontinuité, la régularisation est quadratique ; si b est proche de zéro, il y a une discontinuité, le terme en $|\nabla f|^2$ disparaît. Le critère augmenté doit être minimisé par rapport aux deux variables (f, b) . Cependant, on remarque que lorsque b est fixé, le critère est quadratique en f , sa minimisation revient à la résolution d'une équation linéaire. Par ailleurs, lorsque f est fixé, le minimum en b est donné par l'expression analytique $\hat{b} = \frac{\varphi'(|\nabla f|)}{2|\nabla f|}$ (cf. 3.54). On parle dans ce cas de *régularisation semi-quadratique*. Les discontinuités sont explicites dans (3.55) alors qu'elles sont implicites dans (3.44).

Le critère augmenté doit être minimisé par rapport aux deux variables (f, b) . Cependant, on remarque que lorsque b est fixé, le critère est quadratique en f , sa minimisation revient à la résolution d'une équation linéaire. Par ailleurs, lorsque f est fixé, le minimum en b est donné par l'expression analytique $\hat{b} = \frac{\varphi'(|\nabla f|)}{2|\nabla f|}$ (cf. 3.54). On parle dans ce cas de *régularisation semi-quadratique*. Les discontinuités sont explicites dans (3.55) alors qu'elles sont implicites dans (3.44).

Deuxième extension semi-quadratique

Une autre extension semi-quadratique a été développée à partir des résultats obtenus par Geman et Yang [Geman et Yang, 1995]. Dans la thèse de Pierre Charbonnier [Charbonnier, 1994] et l'article [Charbonnier *et al.*, 1997] ([**IEEE IP-97**]), il est montré que la même classe de fonctions φ définie au paragraphe 3.3.2 vérifie :

$$\forall t, \varphi(t) = \text{Min}_{b \in \mathbb{R}^+} \left\{ (t - b)^2 + \xi(b) \right\} \quad \text{et} \quad b_{inf} = t - \frac{1}{2} \varphi'(t) \quad (3.56)$$

où ξ est une fonction strictement convexe définie à partir de φ . Contrairement à la première extension semi-quadratique nous n'avons pas d'expression analytique de ξ . La fonction ξ est, dans ce cas, définie par :

$$\forall b, \xi(b) = \underset{u \in \mathbb{R}}{\text{Min}} \{ \varphi(u) - (u - b)^2 \} \quad (3.57)$$

En appliquant l'extension semi-quadratique à (3.44), la minimisation de $J(f)$ en f est équivalente à la minimisation de $J^\#(f, b)$ avec (f, b) défini sur $\Omega \times \Omega$:

$$J^\#(f, b) = \int_{\Omega} |o - \mathcal{H}f|^2 + \lambda^2 \left(\int_{\Omega} (|\nabla f| - b)^2 + \int_{\Omega} \xi(b) \right) \quad (3.58)$$

Nous verrons au paragraphe suivant que l'expression analytique de ξ n'est pas nécessaire pour l'algorithme de minimisation proposé. On parle là encore de *régularisation semi-quadratique*. Les discontinuités sont explicites dans (3.55) et (3.58) alors qu'elles sont implicites dans (3.44).

3.3.4 Algorithmes de minimisation

Une des difficultés de la régularisation non quadratique est que la dérivée de J par rapport à f n'est pas linéaire.

Minimisations alternées [IEEE IP-97]

Les extensions semi-quadratiques permettent de linéariser cette dérivée, en fixant la variable auxiliaire b . On a alors recours à une méthode itérative, qui minimise la fonctionnelle J^* ou $J^\#$ de manière alternée sur f et b . Pour $\bar{J} = J^*$ ou $J^\#$, on a l'algorithme suivant :

$$\begin{array}{l} k = 1 \\ \text{Faire} \\ \left| \begin{array}{l} b^k \text{ tel que } \frac{\partial \bar{J}}{\partial b}(f^{k-1}, b^k) = 0 \\ f^k \text{ tel que } \frac{\partial \bar{J}}{\partial f}(f^k, b^k) = 0 \\ k = k + 1 \end{array} \right. \quad (3.59) \\ \text{jusqu'à convergence} \end{array}$$

Dans le cas convexe, la convergence de cet algorithme a été prouvée [Charbonnier *et al.*, 1997] ([IEEE IP-97]) et [Aubert et Vese, 1997]. Il s'agit d'un algorithme où la linéarisation est faite grâce à la variable de discontinuité b .

Dans le cas non-convexe, sous l'hypothèse que les points critiques sont isolés, la preuve de la convergence de l'algorithme est valide [Delaney et Bresler, 1998, Nosmas, 1999]. Le point de convergence peut n'être, dans ce cas, qu'un minimum local.

Dans le cas d'un problème standard de reconstruction, nous utilisons l'extension semi-quadratique J^* (3.55). L'algorithme déterministe associé est nommé ARTUR (pour "Algebraic Reconstruction Technique Using Regularization") [Charbonnier *et al.*, 1997] et est donné par :

$$\begin{array}{l} k = 1 \\ \text{Faire} \\ \left| \begin{array}{l} b^k = \frac{\varphi'(|\nabla f^{k-1}|)}{2|\nabla f^{k-1}|} \\ f^k \text{ est solution de : } \mathcal{H}^*(\mathcal{H}f - o) - \text{div}(b^k \nabla f) = 0 \\ k = k + 1 \end{array} \right. \quad (3.60) \\ \text{jusqu'à convergence} \end{array}$$

Cet algorithme est très proche de l'algorithme développé par Vogel [Vogel et Oman, 1998] dans le cas d'une régularisation par minimisation de la norme L^1 du gradient de f . Les travaux de Y. Bresler [Delaney et Bresler, 1998] sur les algorithmes de minimisation pour des régularisations par fonctions φ reprennent le principe de cet algorithme. Il y a plus longtemps a été proposé l'algorithme RLS ("Reweighted Least Square" en anglais) développé dans le cadre de l'estimation robuste [Huber, 1981] (utilisation de fonction φ sur le terme d'attache aux données), dont le principe est encore le même.

Algorithme rapide pour la déconvolution [RRest-98]

L'extension semi-quadratique $J^\#$ (cf. équation (3.58)) permet, dans le cas du problème de la déconvolution, de diminuer de manière significative les temps de calcul de l'algorithme ARTUR. En effet, l'opération de convolution coûte cher et il est intéressant de passer dans le plan de Fourier pour la remplacer par un produit simple. Pour pouvoir diagonaliser la partie quadratique en f , il est nécessaire que celle-ci ne dépendent pas de b comme dans (3.55). C'est pourquoi Geman et Yang [Geman et Yang, 1995] ont développé cette seconde extension semi-quadratique. L'algorithme d'estimation qu'ils utilisent est un recuit simulé utilisant une chaîne de Markov échantillonnant alternativement f à b fixé (dans le plan de Fourier) et inversement. Dans le cadre de nos travaux sur l'estimation des paramètres du modèle de régularisation pour un problème de déconvolution, nous avons développé un algorithme rapide d'échantillonnage suivant la loi a posteriori $P(f/o)$ (cf. chapitre 6). Ce travail a été effectué durant le stage de DEA d'André Jalobeanu et les résultats sont reportés dans [Jalobeanu *et al.*, 1998a], que nous joignons en annexe sous la référence [RRest-98]. De cet algorithme est déduit un algorithme déterministe rapide d'estimation de f , dans le plan des fréquences. Le critère que l'on considère est

$$J(f) = \|o - Hf\|^2 / 2\sigma^2 + \lambda^2 \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \varphi \left(\frac{|(D_x f)_{i,j}|}{\delta} \right) + \varphi \left(\frac{|(D_y f)_{i,j}|}{\delta} \right) \quad (3.61)$$

c'est-à-dire un critère en variables discrètes et avec une régularisation séparée dans les directions x et y . On rappelle les notations D_x et D_y qui sont les opérateurs discrets de dérivation sur des images discrètes, par rapport aux colonnes et aux lignes : $(D_x f)_{i,j} = f_{i+1,j} - f_{i,j}$ et $(D_y f)_{i,j} = f_{i,j+1} - f_{i,j}$. Ce sont des matrices de dimension $IJ \times IJ$ où IJ représente la taille d'une image f . On rappelle aussi que suivant le contexte, f peut être considéré comme une matrice de dimension $I \times J$ ou comme un vecteur de dimension $1 \times IJ$. Avec le deuxième développement semi-quadratique (3.56), on obtient

$$J(f) = \inf_{b^x, b^y} J^\#(f, b^x, b^y) \quad (3.62)$$

où

$$J^\#(f, b^x, b^y) = \frac{1}{2\sigma^2} \|o - Hf\|^2 + \lambda^2 (\|D_x f / \delta - b^x\|^2 + \|D_y f / \delta - b^y\|^2) + \sum_{i,j} \xi(b_{i,j}^x) + \xi(b_{i,j}^y), \quad (3.63)$$

qui peut se mettre sous la forme, en négligeant les termes constants indépendant de f ,

$$J^\#(f, b^x, b^y) = f^t \left[\frac{1}{2\sigma^2} H^t H + \frac{\lambda^2}{\delta^2} (D_x^t D_x + D_y^t D_y) \right] f + 2 \left[\frac{1}{2\sigma^2} H^t o + \frac{\lambda^2}{\delta} (D_x^t b^x + D_y^t b^y) \right]^t f. \quad (3.64)$$

L'algorithme de minimisations alternées comporte donc deux étapes :

- Une étape de minimisation en $(\mathbf{b}^x, \mathbf{b}^y)$ à \mathbf{f} fixé, donnée par le théorème semi-quadratique :
 $\mathbf{b}_{ij}^x = (D^x \mathbf{f})_{ij} / \delta - \frac{1}{2} \varphi'((D^x \mathbf{f})_{ij} / \delta)$, idem en y .
- La minimisation en \mathbf{f} à $(\mathbf{b}^x, \mathbf{b}^y)$ fixés, par minimisation de (3.64), c'est-à-dire par la résolution de

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{2\sigma^2} H^t H + \frac{\lambda^2}{\delta^2} (D_x^t D_x + D_y^t D_y) \right] \mathbf{f} + \\ & 2 \left[\frac{1}{2\sigma^2} H^t \mathbf{o} + \frac{\lambda^2}{\delta} (D_x^t \mathbf{b}^x + D_y^t \mathbf{b}^y) \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Cette résolution s'effectue de manière rapide dans l'espace de Fourier. En effet, si les conditions aux bords de l'image pour la convolution sont périodiques, les matrices H , $H^t H$, $D_x^t D_x$ et $D_y^t D_y$ sont circulantes par bloc circulant et donc diagonalisables par transformation de Fourier 2D. Nous préférons utiliser une transformée en cosinus discrète (DCT) à la place d'une transformée de Fourier (comme dans [Geman et Yang, 1995]) afin d'avoir des conditions de symétrie aux bords de l'image plutôt que des conditions périodiques qui peuvent engendrer des discontinuités artificielles et produire ensuite des phénomènes de Gibbs à l'inversion. Les conditions de symétrie induisent de plus des dérivées nulles dans la direction normale aux bords de Ω . Ce sont les conditions qui apparaissent naturellement lors du calcul de l'équation d'Euler associée à (3.55) ou (3.58) (conditions de Neumann).

La DCT équivaut à symétriser l'image \mathbf{f} sur les deux axes, et à calculer sa Transformée de Fourier 2D de dimension $2IJ \times 2IJ$. Nous détaillons ce point en dimension 1 par simplification d'écriture, et considérons un signal \mathbf{f} de dimension N , convolué par un filtre \mathbf{h} . Le produit de convolution $\mathbf{h} * \mathbf{f} = \mathbf{g}$ s'écrit matriciellement $\mathbf{g} = H\mathbf{f}$ où H est de dimension $N \times N$. Quand les conditions aux bords du signal \mathbf{f} sont périodiques, H est circulante. Alors si \mathcal{W} représente la matrice unitaire de transformation de Fourier discrète de dimension $N \times N$, $\mathcal{T}\mathcal{F}(\mathbf{f}) = \mathcal{W}\mathbf{f}$, le produit de convolution dans Fourier devient un produit simple $\mathcal{T}\mathcal{F}(\mathbf{g}) = \mathcal{W}H\mathcal{W}^{-1}\mathcal{T}\mathcal{F}(\mathbf{f})$. La matrice $\mathcal{W}H\mathcal{W}^{-1}$ est diagonale et ses valeurs propres sont calculées par simple transformée de Fourier de dimension N de la première colonne de H , qui est constituée des coefficients du filtre \mathbf{h} et de zéros et que nous notons \mathbf{h}_N . Pour pouvoir remplacer les conditions de périodicités aux bords du signal par des conditions de symétries tout en diagonalisant le système, nous utilisons une DCT. Une procédure similaire avait déjà été proposé dans des travaux effectués lors de ma thèse de doctorat [Blanc-Féraud *et al.*, 1988]. La Transformée en Cosinus Discrète (DCT) de dimension N est définie par :

$$\begin{aligned} \text{DCT}_N[\mathbf{f}]_k &= \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{f}_j \cos\left(\frac{\pi k(j + \frac{1}{2})}{N}\right) \\ \text{DCT}_N^{-1}[\mathbf{f}]_j &= \frac{\mathbf{f}_0}{N} + \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \mathbf{f}_k \cos\left(\frac{\pi k(j + \frac{1}{2})}{N}\right) \end{aligned}$$

On montre qu'à un déphasage près, la DCT est la transformée de Fourier ($\mathcal{T}\mathcal{F}$) du même signal, symétrisé, de dimension $2N$, notée \mathbf{f}_{2N} :

$$\text{DCT}_N[\mathbf{f}]_k = e^{-ik\pi/2N} \mathcal{T}\mathcal{F}_{2N}[\mathbf{f}_{2N}]_k.$$

On en déduit la propriété suivante permettant de calculer $\mathbf{g} = H\mathbf{f}$ sur des vecteurs symétriques de dimension $2N$ dans le plan des fréquences :

$$\text{DCT}_N[\mathbf{g}]_k = \text{DCT}_N[\mathbf{f}]_k \cdot \mathcal{T}\mathcal{F}_{2N}[\mathbf{h}_{2N}]_k \quad \forall k = 0 \dots N - 1$$

où h_{2N} est l'extension de h à la dimension $2N$ par ajout de zéros. Une condition essentielle pour que cette propriété soit valable est la symétrie de h , sans laquelle le produit de convolution ne peut être symétrique.

La propriété reste la même pour les transformées bidimensionnelles. Le noyau de convolution h est supposée symétrique (c'est le cas du noyau fourni par le CNES). Il en est de même pour les générateurs des opérateurs $D_x^t D_x$ et $D_y^t D_y$, et donc de leur extension. Ainsi (3.65) devient dans le domaine de la DCT

$$\text{WDCT}[f] = \frac{\lambda^2}{\delta} \text{DCT} [D_x^t \mathbf{b}^x + D_y^t \mathbf{b}^y] + \frac{1}{2\sigma^2} \mathcal{TF}[h_{2I \times 2J}] \text{DCT}[\mathbf{o}] \quad (3.66)$$

où D_x^t et D_y^t sont les transposés des opérateurs de dérivation, utilisés dans le domaine **spatial** et W est définie par

$$W = \left(\frac{\lambda^2}{\delta^2} (|\mathcal{F}[d_{2I \times 2J}^x]|^2 + |\mathcal{TF}[d_{2I \times 2J}^y]|^2) + \frac{1}{2\sigma^2} |\mathcal{TF}[h_{2I \times 2J}]|^2 \right) \quad (3.67)$$

$h_{2I \times 2J}$ est le vecteur de dimension $2I \times 2J$ formé du noyau de h et de zéros (et égal à la première colonne de la matrice de convolution par h appliquée à l'image symétrisée dans les deux directions), de même pour $d_{2I \times 2J}^x$ et $d_{2I \times 2J}^y$ formés à partir des noyaux de dérivation d^x et d^y .

L'algorithme est donc le suivant

- INITIALISATION : $\mathbf{f}^0 = \mathbf{o}$; Calcul de $\mathcal{TF}[h_{2I \times 2J}]$, $\text{DCT}[\mathbf{o}]$, et W (3.67).

Itérer

- MINIMISATION en $(\mathbf{b}^x, \mathbf{b}^y)$ à f fixé, donnée par le théorème semi-quadratique : $\mathbf{b}_{ij}^x = (D^x \mathbf{f})_{ij} / \delta - \frac{1}{2} \varphi'((D^x \mathbf{f})_{ij} / \delta)$, idem en y .
- MINIMISATION en f à $(\mathbf{b}^x, \mathbf{b}^y)$ fixés, par

$$\mathbf{f} = \text{DCT}^{-1} \left[W^{-1} \left(\frac{\lambda^2}{\delta} \text{DCT} [D_x^t \mathbf{b}^x + D_y^t \mathbf{b}^y] + \frac{1}{2\sigma^2} \mathcal{TF}[h_{2I \times 2J}] \text{DCT}[\mathbf{o}] \right) \right] \quad (3.68)$$

La minimisation en f se fait donc en une seule étape, dans le domaine fréquentiel. La convergence est généralement obtenue en 3 à 10 itérations, comme on peut le voir sur la figure 3.9 au paragraphe 3.4.1 sur les résultats d'applications en restauration. Ce nombre varie selon le type d'image, la dégradation qu'elle a subie et la valeur des paramètres.

Coût de l'algorithme

La DCT est calculée grâce à une transformée de Fourier rapide (FFT). La FFT à 1 dimension de n pixels est en $n \log_2 n / 2$ opérations, à 2 dimensions on effectue $2n$ FFT à 1 dimension, soit environ $5 \log_2 n$ opérations par pixel. Il faut compter environ 15 opérations supplémentaires pour la DCT. 2 DCT sont nécessaires à chaque itération, ainsi que 10 à 20 opérations pour les calculs effectués sur \mathbf{b} (dépend de la fonction φ utilisée).

Tout ceci donne environ $50 + 10 \log_2 n$ opérations pour chaque itération, auxquelles il faut ajouter l'initialisation (FFT de h et \mathbf{o} , etc.) soit environ $10 + 10 \log_2 n$ opérations.

Pour l'image du CNES (512×512) on doit effectuer environ 140 opérations par pixel et par itération plus 100 opérations par pixel à l'initialisation. Si les hyperparamètres sont

fixés, et si l'on traite une série d'images ayant les mêmes hyperparamètres optimaux, il est possible d'effectuer la restauration à bord du satellite, car l'algorithme est rapide. De plus, la DCT qu'il utilise est particulièrement bien adaptée à certains algorithmes de compression, pouvant être utilisés en aval.

D'autres algorithmes déterministes ou stochastiques peuvent être utilisés. On renvoie pour les principaux aux références [Rudin *et al.*, 1992, Vogel et Oman, 1998] pour la variation totale, [Blake et A.Zisserman, 1987] pour le GNC (Graduated Non Convexity), [Besag, 1986] pour l'ICM (Iterated Conditional Mode), [Geiger et Girosi, 1991] pour le MFA (Mean Field Annealing), [Geman et Reynolds, 1992, Geman et Yang, 1995] pour des algorithmes stochastiques en semi-quadratique.

3.3.5 Diffusion anisotrope par EDP

Les travaux utilisant le calcul des variations sont en relation étroite avec le filtrage anisotrope d'image [Alvarez *et al.*, 1992, Catta *et al.*, 1992, Deriche et Faugeras, 1996, Nitzberg et Shiota, 1992]. Rappelons que dans cette approche on considère une famille d'images $f(x, t)$, paramétrée par la variable de temps t , et on étudie l'évolution de f en fonction de t à travers une EDP. La première EDP anisotrope de l'image, c'est-à-dire prenant en compte les contours, est celle introduite par Perona et Malik en 90 [Perona et Malik, 1990]. La diffusion est favorisée dans les zones de gradients faibles (correspondant aux zones homogènes), tout en préservant les zones de gradients forts (correspondant aux contours). Cette diffusion anisotrope est formalisée de la manière suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} &= \operatorname{div}(c(|\nabla f(x, t)|)\nabla f(x, t)) \\ \frac{\partial f}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} &= 0 \\ f(x, 0) &= o(x). \end{cases} \quad (3.69)$$

Le coefficient de conduction $c(\cdot)$ est égal à 1 dans les zones homogènes (à faibles gradients) et tend vers zéro dans les zones de contours (forts gradients). La diffusion est ainsi retardée (presque stoppée au niveau des contours). L'image finale est une image obtenue au terme d'un temps t_f à déterminer. Ce temps est usuellement fixé par l'utilisateur par essai et erreur. En introduisant, comme le propose Nordstrom [N. Nordström, 1990], un terme d'attache aux données, la solution reste proche de l'image bruitée, ce qui permet de partir d'une condition initiale $f(x, 0)$ quelconque et de laisser converger l'équation jusqu'à un état stationnaire (contrairement au système (3.25) ou (3.69)) :

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} &= \mathcal{H}^*(o(x) - \mathcal{H}f(x, t)) + \lambda^2 \operatorname{div}(c(|\nabla f(x, t)|)\nabla f(x, t)) \\ \frac{\partial f}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} &= 0. \end{cases} \quad (3.70)$$

Cette équation dynamique est à rapprocher de l'EDP (3.45). L'état stationnaire de (3.70) vérifie (3.45) avec $c(t) = \frac{\varphi'(t)}{2t}$ et inversement une méthode pour résoudre (3.45) consiste à plonger l'image $f(x)$ dans un schéma dynamique $f(x, t)$ et de la faire évoluer par une descente de gradient, ce qui correspond à (3.70), toujours pour $c(t) = \frac{\varphi'(t)}{2t}$. L'analyse de la diffusion en fonction du comportement du coefficient de conduction $c(\cdot)$ est la même

que celle faite au paragraphe 3.3.2 avec la fonction φ . Le lien entre (3.45) et la diffusion anisotrope (3.69) est moins direct. Comme le font remarquer Morel et Solimini [Morel et Solimini, 1994] pour le cas linéaire, en prenant une approximation par différence rétrograde de la dérivée en temps en 0 de (3.69), on obtient pour t petit :

$$f(x, t) - o(x) = t \operatorname{div} (c(|\nabla f(x, t)|) \nabla f(x, t)) \quad (3.71)$$

$f(x, t)$ est solution du problème variationnel :

$$\operatorname{Inf}_f \left\{ \int_{\Omega} (f - o)^2 dx + t \int_{\Omega} \varphi(|\nabla f|) dx \right\} \quad (3.72)$$

où $\frac{\varphi'(t)}{2t} = c(t)$. Le temps t apparaît comme étant le facteur de régularisation. Ainsi l'équivalent de la résolution de (3.69) dans un schéma implicite consiste à résoudre successivement les problèmes variationnels :

$$J_n(f) = \int_{\Omega} (f - f^n)^2 dx + t \int_{\Omega} \varphi(|\nabla f|) dx \quad (3.73)$$

Nous n'avons pas étudié cette suite de critères mais il serait intéressant de le faire, à la fois d'un point de vue théorique et pratique.

Les fonctions proposées par Perona et Malik sont :

$$c(t) = \exp -t^2 \quad \text{et} \quad c(t) = \frac{1}{1 + t^2} \quad (3.74)$$

qui correspondent respectivement aux fonctions φ :

$$\varphi(t) = 1 - \exp(-t^2) \quad \text{et} \quad \varphi(t) = \ln(1 + t^2) \quad (3.75)$$

La deuxième fonction φ a aussi été proposée par Hebert et Leahy [Hebert et Leahy, 1989] pour la régularisation d'un problème de reconstruction en imagerie médicale dans une approche stochastique.

Les coefficients de conduction, proposés par Malik et Perona, correspondent à des processus de diffusion instables, car la condition $sc(s)$ croissante n'est pas vérifiée par les fonctions proposées en (3.74). En effet, $\exists s$ tel que $sc'(s) + c(s) < 0$ ce qui correspond à $\varphi''(s) < 0$. Ainsi les fonctions φ correspondantes ne sont pas convexes. En de tels points, le processus de diffusion dans la direction du gradient est l'inverse de l'équation de la chaleur (voir le développement de la divergence équation (3.52)). Une solution proposée en même temps dans [Catte *et al.*, 1992] et [Nitzberg et Shiotu, 1992] pour stabiliser le processus de diffusion (3.69), consiste à remplacer le coefficient $c(|\nabla f|)$ par $c(|\nabla G_{\sigma} * f|)$, ce qui revient à régulariser l'image avant de calculer son gradient. Ceci a pour effet de rendre l'équation bien posée et les résultats stables.

Une nouvelle équation de diffusion anisotrope (3.69) a ensuite été proposée par Alvarez, Lions et Morel dans [Alvarez *et al.*, 1992] :

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} &= c(|\nabla G_{\sigma} * f|) |\nabla f| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{|\nabla f|} \right) \\ \frac{\partial f}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega} &= 0 \\ f(x, 0) &= o(x). \end{cases} \quad (3.76)$$

où c est une fonction du même type que dans (3.69).

En développant la divergence, l'équation devient : $\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = c(|\nabla G_\sigma * f|) f_{\mathcal{T}\mathcal{T}}$ où $f_{\mathcal{T}\mathcal{T}}$ désigne comme précédemment la dérivée seconde dans la direction tangentielle à une ligne de niveau de f , soit $\{x \in \Omega / f(x) = \text{constante}\}$. Ainsi la diffusion ne s'effectue que dans la direction tangente aux contours. Cependant dans les zones homogènes, le lissage est le même, c'est-à-dire directionnel et non plus isotrope. Afin d'améliorer ce point, une seconde version est proposée dans [Alvarez *et al.*, 1992] :

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = c(|\nabla G_\sigma * f|) ((1 - h(|\nabla f|)) \Delta f + h(|\nabla f|) |\nabla f| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{|\nabla f|} \right)) \\ \frac{\partial f}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega} = 0 \\ f(x, 0) = o(x). \end{cases} \quad (3.77)$$

où h est une fonction régulière non décroissante telle que $h(|\nabla f|) = 0$ si $|\nabla f| \leq e$, $h(|\nabla f|) = 1$ si $|\nabla f| \geq 2e$. e est un paramètre lié au paramètre de contraste qui intervient dans la fonction g (équivalent du paramètre δ) et qui marque la borne inférieure sur $|\nabla f|$ au dessus de laquelle la diffusion est freinée.

Pour compléter, on peut rappeler les travaux de Nitzberg et Shiota [Nitzberg et Shiota, 1992] dans lesquels une attention particulière est portée à la restauration des angles et des jonctions multiples et renvoyer au livre de Bart Romeny ([Romeny, 1994]) dans lequel un certain nombre de travaux sur les EDP par différents auteurs sont présentés. Nous citons aussi la thèse de Pierre Kornprobst [Kornprobst, 1998] dans laquelle un formalisme général, commun à de nombreuses méthodes par minimisation de fonctionnelles ou EDP est adopté. Dans ce formalisme, un terme de réaction permet d'englober les filtres de chocs que nous n'avons pas décrits ici. Plusieurs méthodes sont présentées et comparées numériquement sur un exemple de restauration d'images.

3.3.6 Approche stochastique

Le critère variationnel précédent (cf. équation (3.44)) peut être interprété dans l'approche stochastique. Afin d'utiliser des contraintes locales et non globales sur le signal, ce qui introduit inévitablement un effet de lissage dû à la régularisation, les frères Geman en 1984 [Geman et Geman, 1984], puis beaucoup d'autres auteurs par la suite ont introduit l'utilisation des champs de Markov pour le traitement d'image [Bouman et Sauer, 1993, Geman et Reynolds, 1992, Geman et Yang, 1995, Geman et Clure, 1985, Green, 1990, Hebert et Leahy, 1989, Lange, 1990].

• Champ de Markov

On rappelle que l'image est modélisée comme étant un champ aléatoire F échantillonné. f représente une configuration possible de la variable aléatoire multidimensionnelle F . On rappelle également que l'on note souvent $P(f)$ pour $P(F = f)$.

L'hypothèse de Markov sur F est :

$$\forall s \in S, \quad P(\mathbf{f}_s) > 0 \quad (3.78)$$

$$\forall s \in S, \quad P(\mathbf{f}_s / \mathbf{f}_r, r \neq s) = P(\mathbf{f}_s / \mathbf{f}_r, r \in V_s) \quad (3.79)$$

où V_s est un voisinage du point s . On appelle un système de voisinages, un ensemble de

parties V_s de S qui vérifient :

$$s \notin V_s \quad (3.80)$$

$$s \in V_t \implies t \in V_s \quad (3.81)$$

La première condition (3.78) exprime le fait que toutes les configurations possibles sont probables, et la seconde (3.79) que la connaissance du voisinage de s suffit à définir la probabilité conditionnelle de f_s connaissant les autres points. C'est le théorème de Hammersley-Clifford qui permet d'utiliser les champs de Markov de manière concrète pour l'introduction de contraintes de régularisation. L'énoncé de ce théorème est le suivant [Geman et Geman, 1984] :

Le champs f est un champ de Markov relativement au système de voisinages V si et seulement si $P(f)$ a une distribution de Gibbs relativement à V , soit :

$$P(f) = \frac{1}{Z} \exp\left[-\frac{1}{T} J_{reg}(f)\right] \quad (3.82)$$

où J_{reg} est défini par

$$J_{reg} = \sum_{c \in C} \xi(f_c) \quad \xi = \text{fonction de potentiel} \quad (3.83)$$

Z est la constante de normalisation de la probabilité, appelée fonction de partition. Par analogie à la physique statistique, T est un paramètre de température et J_{reg} est une énergie. Cette énergie est définie à partir de l'ensemble C qui est l'ensemble des cliques associées au système de voisinages V_s . Une clique $c \in C$ est soit un point seul, soit un ensemble de points tels que : $\forall s, t \in c \quad s \neq t \implies s \in V_t$. A chaque type de voisinage correspond un ensemble de cliques. Pour une régularisation sur un signal, on utilise souvent la différence entre deux points voisins, c'est-à-dire que les cliques utilisées sont constituées uniquement de deux points voisins. ξ est une fonction de potentiel à définir. Par exemple, ξ peut être une des fonctions φ définies au paragraphe précédent. J_{reg} peut être alors, pour une régularisation avec prise en compte de discontinuités, définie par :

$$J_{reg} = \lambda^2 \sum_{s \in S} \varphi\left(\frac{|f_{s+(1,0)} - f_s|}{\delta}\right) + \varphi\left(\frac{|f_{s+(0,1)} - f_s|}{\delta}\right) \quad (3.84)$$

D'après le théorème d'Hammersley-Clifford, si le bruit d'observation est blanc gaussien et le modèle sur les données est de Markov, l'estimateur du MAP est :

$$\text{Max}_f \{P(\mathbf{o}/f)P(f)\} \iff \text{Min}_f \|\mathbf{o} - Hf\|^2 + J_{reg} \quad (3.85)$$

L'énergie du modèle de Markov correspond au terme de régularisation. L'équivalent continu du terme de régularisation (3.84), si les approximations des dérivées sont des différences finies au premier ordre, est :

$$J_{reg} = \lambda^2 \int_{\Omega} \varphi\left(\frac{|D_x f|}{\delta}\right) + \varphi\left(\frac{|D_y f|}{\delta}\right) \quad (3.86)$$

Notons que la version utilisée dans l'approche variationnelle

$$J_{reg} = \lambda^2 \int_{\Omega} \varphi\left(\frac{|\nabla f|}{\delta}\right) \quad (3.87)$$

est aussi un champs de Markov. Le fait de considérer le problème de minimisation en continu comme dans l'approche variationnelle conduit à l'utilisation d'un seul processus de ligne isotrope, contrairement à l'approche discrète qui biaise les transitions de la solution vers les deux directions x et y . Ceci corrobore l'assertion formulée par Geiger et Yuille [Geiger et Yuille, 1990] "Il vaut mieux en général formuler une fonction d'énergie dans un espace continu car elle ne dépend pas de la discrétisation particulière de l'espace". De nombreux auteurs ont proposé l'utilisation de champs de Markov avec des fonctions φ diverses [Bouman et Sauer, 1993, Geman et Reynolds, 1992, Geman et Yang, 1995, Geman et Clure, 1985, Geman et Clure, 1985, Green, 1990, Hebert et Leahy, 1989, Lange, 1990]. Les critères de régularisation avec prise en compte de discontinuités peuvent ainsi être considérés indifféremment dans l'approche déterministe ou dans l'approche stochastique.

Replacer l'estimation dans un cadre stochastique utilisant des champs de Markov permet d'avoir à notre disposition de nombreux résultats théoriques, tant sur l'utilisation des différents estimateurs possibles (MAP ou autre) que sur les algorithmes de minimisation associés (algorithme de recuit simulé avec Metropolis ou Gibbs), ou sur les méthodes d'estimation de paramètre de ces modèles. Le problème de l'estimation des paramètres est abordé dans le chapitre 6 de ce rapport. Nous avons développé des méthodes d'estimation des paramètres du modèle variationnel utilisant les fonctions φ .

En ce qui concerne la minimisation, les algorithmes stochastiques de relaxation basés sur le principe du recuit simulé permettent d'assurer la convergence en probabilité vers le minimum global d'une énergie non convexe [Geman et Geman, 1984, Kirkpatrick *et al.*, 1983, Laarhoven et Aarts, 1987, Metropolis *et al.*, 1953]. Calculer le minimum global d'une fonction non convexe est un problème difficile. Les algorithmes déterministes cités au paragraphe 3.3.4 sont des algorithmes relativement rapides mais sous-optimaux, c'est-à-dire convergents vers un minimum local. Ce minimum dépend souvent de l'estimée initiale. Pour converger vers l'optimum global, il faut utiliser un algorithme de relaxation stochastique. La convergence théorique est toutefois obtenue en un temps infini et une bonne estimation demande très souvent un temps de calcul très long.

3.4 Applications

3.4.1 Restauration

Nous présentons d'abord des résultats sur une image synthétique, un damier avec deux formes géométriques (un cercle et un triangle, cf. figure 3.9). Cette image a été dégradée avec la fonction de floue spécifiée par le CNES et présentée figure 2.1 du paragraphe 2.3.1 au chapitre 2. Un bruit blanc gaussien d'écart type 1,35 a été ajouté (même niveau de bruit que l'image de Nîmes dégradée par CNES figure 2.3 du paragraphe 2.3.1 au chapitre 2). La régularisation utilisée est la régularisation avec prise en compte de discontinuités avec la fonction convexe $\varphi(t) = \sqrt{1 + t^2} - 1$. L'algorithme rapide est celui utilisant le passage en fréquence par la transformée en Cosinus du paragraphe 3.3.4 de ce chapitre. La minimisation en f se fait donc en une seule étape, dans le domaine fréquentiel. La convergence est obtenue pour cette image en moins de 10 itérations. Les résultats de la figure 3.9 sont issus de [Jalobeanu *et al.*, 1998a].

L'exemple de déconvolution de l'image de Nîmes proposé par le CNES a été présenté au chapitre 2 paragraphe 2.3.1. Nous ne présentons ici que l'image restaurée avec la fonction

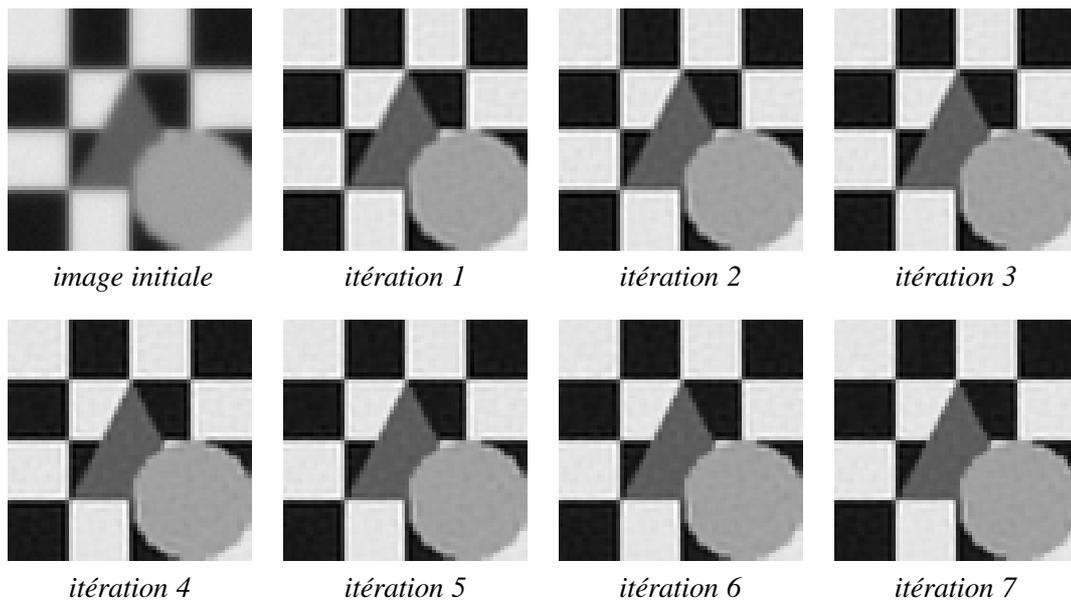


FIG. 3.9 – Résultat de la déconvolution par régularisation semi-quadratique dans le plan de la DCT ($\lambda = 0.2$, $\delta = 2.5$).

convexe $\varphi(t) = \sqrt{1 + t^2} - 1$ dans le domaine des fréquences par l'algorithme rapide. L'image entière est présentée figure 3.10 et un extrait agrandi est présentée figure 3.11, comparativement à une régularisation avec une fonction quadratique. Nous observons que l'image restaurée avec une régularisation semi-quadratique présente moins de bruit dans les zones homogènes, pour une restauration au niveau des stries formées par le toit de l'usine à peine inférieure. Le compromis déconvolution/bruit est meilleur.

Nous montrons ensuite des résultats de déconvolution de l'image de Saturne prise par le satellite Hubble lorsque sa lentille avait un défaut. La fonction de défocalisation a été mesurée et est donnée sur 53×53 points. On présente l'image floue, une image restaurée avec un filtre de Wiener et une avec une régularisation non linéaire. L'image des contours (variable b) est aussi présentée. Ces résultats sont issus de [Blanc-Féraud et Barlaud, 1996].

3.4.2 Reconstruction SPECT

Nous proposons ensuite des résultats en reconstruction tomographique, problème introduit au paragraphe 2.3.2 du chapitre 2. Nous avons par ailleurs déjà présenté dans ce présent chapitre des résultats de reconstruction sur des données réelles acquises au centre A. Lacassagne de Nice en collaboration avec le Pr J. Darcourt. Ces résultats sont présentés en figures 3.2 et 3.3 du paragraphe 3.2 et sont obtenus par inversion non régularisée, soit en supposant un bruit gaussien (algorithme de gradient conjugué), soit supposant un bruit de Poisson (algorithme EM). Nous rappelons que ces algorithmes non régularisés divergent, mais que l'algorithme EM est plus long, donc diverge plus tard dans les itérations et plus lentement. Nous montrons en figure 3.13 les résultats obtenus sur ces mêmes données avec une régularisation semi-quadratique qui prend en compte les discontinuités du signal, pour un bruit gaussien. Le résultat est obtenu avec l'algorithme ARTUR. Evidemment cet algorithme régularisé converge, et l'image obtenue semble mieux résolue que celle obtenue par l'algorithme EM non régularisé.

Dans [Koulibaly *et al.*, 1996], nous avons aussi présenté un résultat obtenu avec l'algorithme



FIG. 3.10 – Nîmes, image restaurée avec $\lambda = 0.49$, $\delta = 10$ (SNR = 21.54 dB)

EM (prenant en compte la statistique de Poisson du bruit sur le comptage de photons), avec la même régularisation semi-quadratique. Les résultats sont à peu près équivalents à ceux obtenus par l'algorithme ARTUR, ce qui signifie qu'au taux de comptage utilisé en routine clinique, l'approximation du bruit de Poisson par un bruit gaussien est correct. L'algorithme EM étant plus long, il ne nous semble finalement pas utile de l'utiliser.

Nous avons aussi considéré le cas 3D. Nous renvoyons à un papier joint en annexe à ce manuscrit sous la référence **[PMB-98]** [Laurette *et al.*, 1998]. Le problème considéré ici est la reconstruction d'objet volumique à partir de projections acquises par une caméra à collimateurs coniques et à trajectoire circulaire. L'application considérée ici est l'examen de la thyroïde, pour la recherche de nodules. Comme présenté au paragraphe 2.3.2 du chapitre 2, la reconstruction 3D est un problème inverse hautement mal posé, du fait des données manquantes dues à une trajectoire circulaire de la caméra. La régularisation que nous avons développée est formée de plusieurs termes, qui sont la somme de contraintes introduites sur l'objet à reconstruire.

Le premier terme est le même qu'en 2D et correspond au lissage du bruit en même temps que la prise en compte des discontinuités possibles de l'objet à reconstruire. Ce terme s'exprime par $\int_{\Omega} \varphi(|\nabla f|)$ où f désigne l'objet 3D reconstruit.

La deuxième contrainte consiste à imposer des valeurs positives à la solution reconstruite. Cette contrainte est vraie pour toutes nos applications, mais nous n'avons pas besoin en général de l'imposer, car elle est naturellement vérifiée par les solutions. Ici, il est nécessaire de l'imposer explicitement. Ceci est obtenu par la minimisation d'un terme du type $\int_{\Omega} \varphi^+(f)$ où $\varphi^+(s) = s^2$ si $s < 0$ et $\varphi^+(s) = 0$ si $s \geq 0$.

La troisième contrainte tente de pallier les effets du problème des données manquantes par l'introduction d'une information de support. Nous savons que l'objet a un support compact, sur un fond nul. Cependant, comme nous ne connaissons pas à l'avance l'endroit de ce support, nous introduisons la contrainte en supposant que lorsque les valeurs reconstruites sont faibles, elles appartiennent au fond et doivent donc être nulles, et lorsque ces valeurs sont suffisamment élevées, elles appartiennent à l'objet, et doivent être préservées. Cette



Extrait de l'image Nîmes originale
(CNES)



Image dégradée (CNES)
 H et bruit σ , SNR = 16.1 dB).

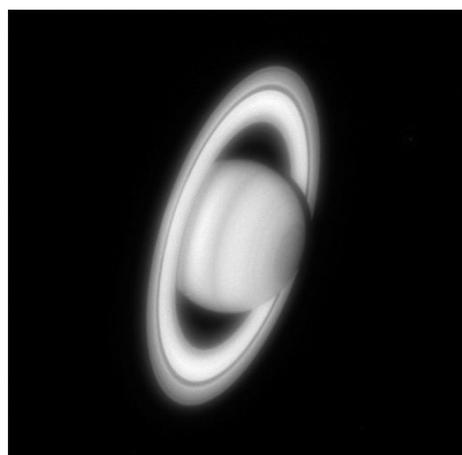


Restaurée avec une régularisation quadratique

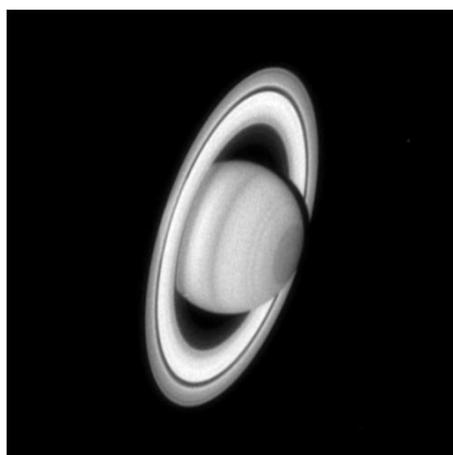


Restaurée avec une régularisation
par fonction φ , $\lambda = 0.49$, $\delta = 10$.

FIG. 3.11 – Comparaison sur un extrait agrandi de l'image Nîmes



Saturne



Régularisation par filtrage de Wiener

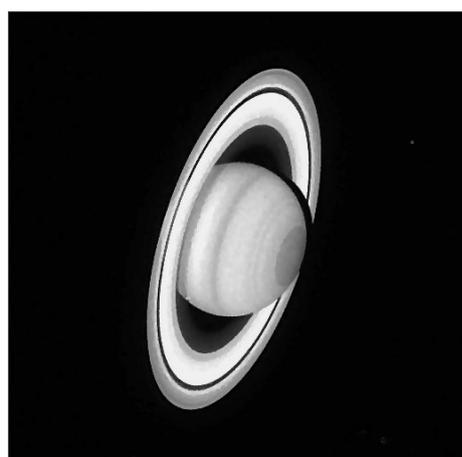
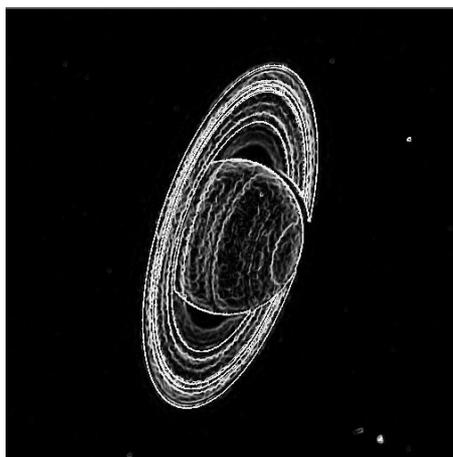
Régularisation semi-quadratique
(algorithme ARTUR)Contours de l'image (variable b)

FIG. 3.12 – Restauration d'image floue provenant du télescope Hubble.

information est introduite sous la forme d'une autre fonction φ , appliquée directement sur l'intensité $\int_{\Omega} \varphi(|f|)$. Dans ce cas, la variable auxiliaire du développement semi-quadratique de la fonction φ est une variable d'appartenance au support de l'objet.

Nous renvoyons au papier [Laurette *et al.*, 1998] joint en annexe sous la référence [PMB-98] pour le critère complet et les résultats correspondant sur données synthétiques (fantôme d'un cœur en plexiglass) et sur données réelles (thyroïde).

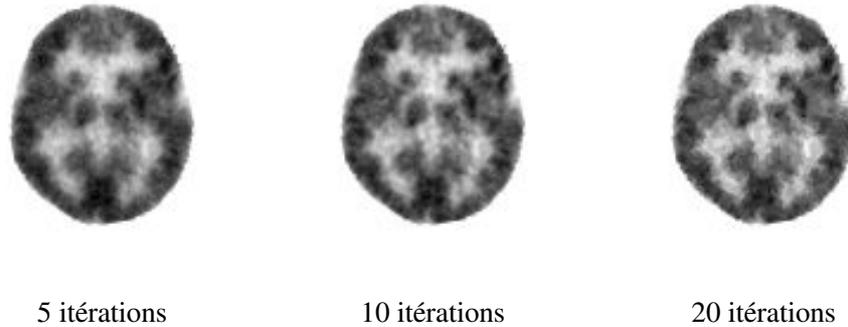


FIG. 3.13 – Reconstruction SPECT sur données réelles de cerveau acquises au centre A. Lacassagne (Algorithme ARTUR).

3.4.3 Diffraction inverse

Tous les résultats présentés dans cette partie sont issus de la thèse de Pierre Lobel [Lobel, 1996].

Nous proposons de résoudre le problème non linéaire de la diffraction inverse présenté au paragraphe 2.3.3 du chapitre 2 par la méthode Gradient Conjugué (notée GC), aussi présentée au paragraphe 2.3.3. Nous proposons d'appliquer une régularisation avec préservation des contours (notée EP) introduite dans le gradient conjugué. Les valeurs des parties réelle et imaginaire du contraste pouvant être tout à fait différentes, nous avons appliqué séparément la régularisation sur le gradient de la partie réelle et sur celui de la partie imaginaire. On trouve une description et des résultats à partir de données bruitées, synthétiques ou expérimentales dans [Lobel *et al.*, 1995a, Lobel *et al.*, 1996a, Lobel *et al.*, 1996d, Lobel *et al.*, 1997] par exemple. Cette méthode est comparée à la méthode de Newton Kantorovitch (notée NK) décrite aussi au paragraphe 2.3.3 du chapitre 2, utilisée avec une régularisation quadratique (type Tikhonov avec l'opérateur identité et notée TK). Notons que la méthode du gradient modifiée développée par Kleinman and Van der Berg [Kleinman and van den Berg, 1992] (cf. paragraphe 2.3.3 du chapitre 2), a aussi été sensiblement améliorée par l'ajout d'une régularisation sur le gradient du contraste par norme $\|\cdot\|_1$ [van den Berg et Kleinman, 1995].

Objet synthétique 1

Description de l'objet à reconstruire. Le domaine \mathcal{D} est choisi comme étant un domaine carré de taille $3\lambda \times 3\lambda$, où λ est la longueur d'onde correspondant à une fréquence de 2.45 GHz. \mathcal{D} est discrétisé en 19×19 cellules carrées, et nous avons pris une ceinture circulaire de récepteurs formant le domaine \mathcal{S} , de rayon 9λ . Sur cette ceinture sont uniformément répartis

19 récepteurs qui recueillent selon 19 angles d'incidence différents le champ diffracté ($L = M = 19$).

L'objet original (ou profil) est montré figure 3.14a. Il est composé de deux plots carrés se faisant face, et de coté $\frac{4}{5}\lambda$. Ils sont séparés de $\frac{1}{2}\lambda$, et ont chacun une permittivité $\epsilon_r = 1.8$.

Reconstructions menées à partir de données non bruitées. Nous présentons figure 3.14b, la reconstruction obtenue en appliquant l'algorithme NK (régularisation TK), et figure 3.14c celle obtenue avec l'algorithme GC (sans régularisation). Nous remarquons que les deux méthodes donnent toutes deux des solutions très satisfaisantes, mais si l'on regarde la comparaison entre l'évolution de l'erreur sur les champs diffractés, pour les deux algorithmes (figure 3.15a), on s'aperçoit que l'algorithme NK converge beaucoup plus vite que l'algorithme GC.

Reconstructions menées à partir de données bruitées. Nous avons ici bruité les données du champ diffracté par un bruit blanc Gaussien. Le niveau de ce bruit s'élève à 10% des valeurs maximum des parties réelle et imaginaire du champ diffracté. Nous présentons figure 3.14d, la reconstruction obtenue en appliquant l'algorithme NK (régularisation TK), et figure 3.14e, celle obtenue avec l'algorithme GC (sans régularisation). On remarque alors que l'instabilité de l'algorithme NK+TK est supérieure à celle de GC. Cela est confirmé lorsqu'on regarde l'évolution de l'erreur sur les champs diffractés, pour les deux algorithmes (figure 3.15b).

Comparaison des différents résultats. Tout d'abord, nous précisons qu'étant donné la similitude au niveau de la complexité des algorithmes NK et GC, nous pouvons raisonnablement comparer leur vitesse de convergence, par rapport à leur nombre d'itérations (en temps de calcul, une itération avec l'algorithme NK est équivalente à une itération avec l'algorithme GC).

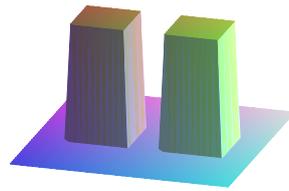
Figure 3.15a, on peut voir que les deux algorithmes convergent vers la solution originale. Cependant, l'intérêt de l'algorithme NK est sa rapidité de convergence : il atteint son but à partir de l'itération 30, alors qu'il faut à l'algorithme GC plus de 150 itérations pour y parvenir.

Par contre avec les données bruitées, nous voyons figure 3.15b que l'algorithme NK diverge au bout de la quatrième itération, alors que l'algorithme GC converge toujours.

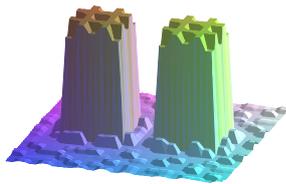
Objet synthétique 2

Description de l'objet à reconstruire. Nous utilisons dans les deux exemples suivant, les mêmes objets géométriques que ceux décrits dans [van den Berg et Kleinman, 1995]. Le domaine \mathcal{D} est pris comme étant un carré $3\lambda \times 3\lambda$, où λ est la longueur d'onde correspondant à une fréquence de 2.45 GHz. \mathcal{D} est discrétisé en 29×29 cellules carrées, et la couronne circulaire de récepteurs définissant \mathcal{S} possède un rayon de longueur 9λ . Sur cette ceinture sont uniformément répartis 29 récepteurs qui recueillent selon 29 angles d'incidence différents le champ diffracté ($L = M = 29$).

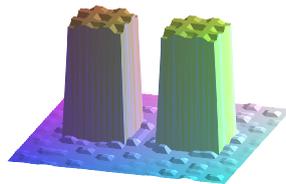
L'objet original (ou profil) est montré figure 3.16. Il est composé de deux plots carrés disposés en biais l'un par rapport à l'autre, et de coté $\frac{1}{4}\lambda$. Ils sont séparés de $\frac{1}{4}\lambda$, et ont chacun une permittivité $\epsilon_r = 1.8$. Nous avons de plus bruité les données du champ diffracté par un bruit blanc Gaussien. Le niveau de ce bruit s'élève à 10% des valeurs maximum des parties réelle et imaginaire du champ diffracté.



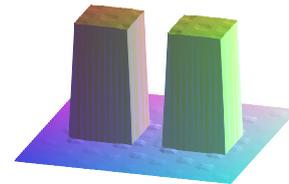
(a): Profil original



Itération 5

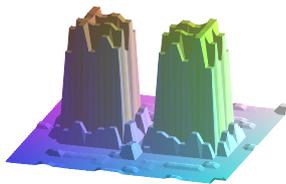


Itération 10

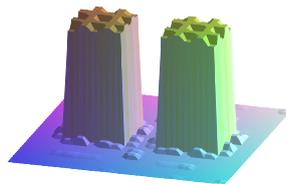


Itération 20

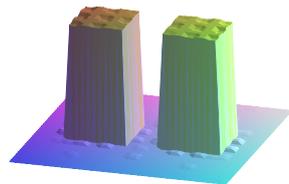
(b): Méthode NK (opérateur identité) sur données non bruitées



Itération 10

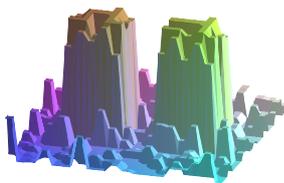


Itération 50

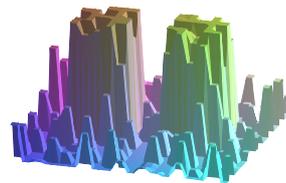


Itération 100

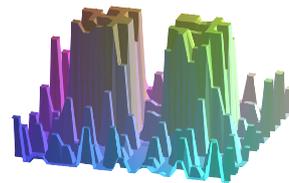
(c): Méthode GC sur données non bruitées



Itération 3

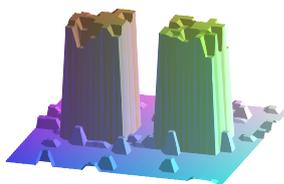


Itération 13

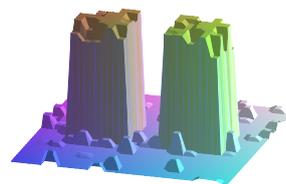


Itération 20

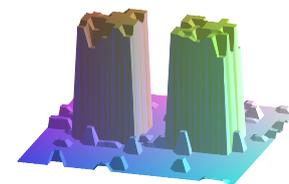
(d): Méthode NK (opérateur identité) sur données bruitées



Itération 10



Itération 100



Itération 200

(e): Méthode GC sur données bruitées

FIG. 3.14 – Reconstructions de l'objet synthétique 1.

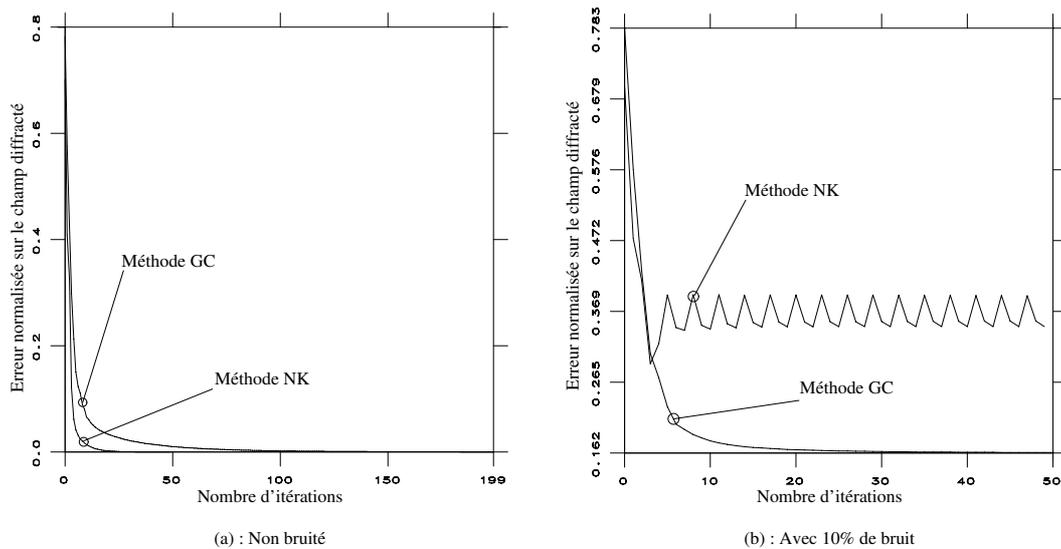


FIG. 3.15 – Comparaison des convergences pour les méthodes NK+TK et GC (objet synthétique 1).

Reconstructions avec l’algorithme GC. Nous montrons figure 3.16 les reconstructions obtenues avec l’algorithme GC sans régularisation, puis avec une régularisation TK, et enfin avec une régularisation avec prise en compte des discontinuités. Nous avons représenté tous ces résultats à 150 itérations. Une comparaison de l’erreur sur les champs diffractés est donnée figure 3.17. On remarque tout d’abord que la reconstruction obtenue sans régularisation est assez bruitée. Le bruit est lissé lorsqu’on régularise avec TK, mais les contours sont eux aussi lissés, si bien que la solution obtenue est rendue très floue. La régularisation EP permet de reconstruire parfaitement cet objet : les zones homogènes sont lissées tandis que les contours sont parfaitement préservés et reconstruits. La fonction de régularisation employée dans cet exemple est celle de Geman et Mac Clure : $\varphi(t) = t^2/(1 + t^2)$ [Geman et Clure, 1985].

Si l’on s’intéresse maintenant plus particulièrement à la courbe figure 3.17, on remarque que l’erreur correspondant à l’algorithme GC seul et celle correspondant à l’algorithme GC+EP sont quasiment identiques. Cela s’explique par le fait que nous comparons le champ diffracté calculé au champ bruité (et non au champ non bruité). Ce type de courbe nous renseigne plus sur la convergence des algorithmes que sur la qualité des reconstructions. La cassure très nette que l’on observe pour l’algorithme GC+EP vers l’itération 20 correspond à un recalcul de la variable auxiliaire b .

Objet synthétique 3

Description de l’objet à reconstruire. Le troisième objet présenté dans cette section provient lui aussi de [van den Berg et Kleinman, 1995]. La configuration utilisée est la même que celle de l’objet 2. L’objet 3 représente deux plots carrés imbriqués l’un dans l’autre (figure 3.18). Le plus large a un côté de longueur 2λ et une permittivité $\epsilon_r = 1.3 + 0.4i$, tandis que le plus petit a un côté de longueur λ et une permittivité $\epsilon_r = 1.6 + 0.2i$. Comme pour l’objet 2, les données du champ diffracté ont été bruitées par un bruit blanc Gaussien. Le niveau du bruit s’élève à 10% des valeurs maximum des parties réelle et imaginaire du champ diffracté.

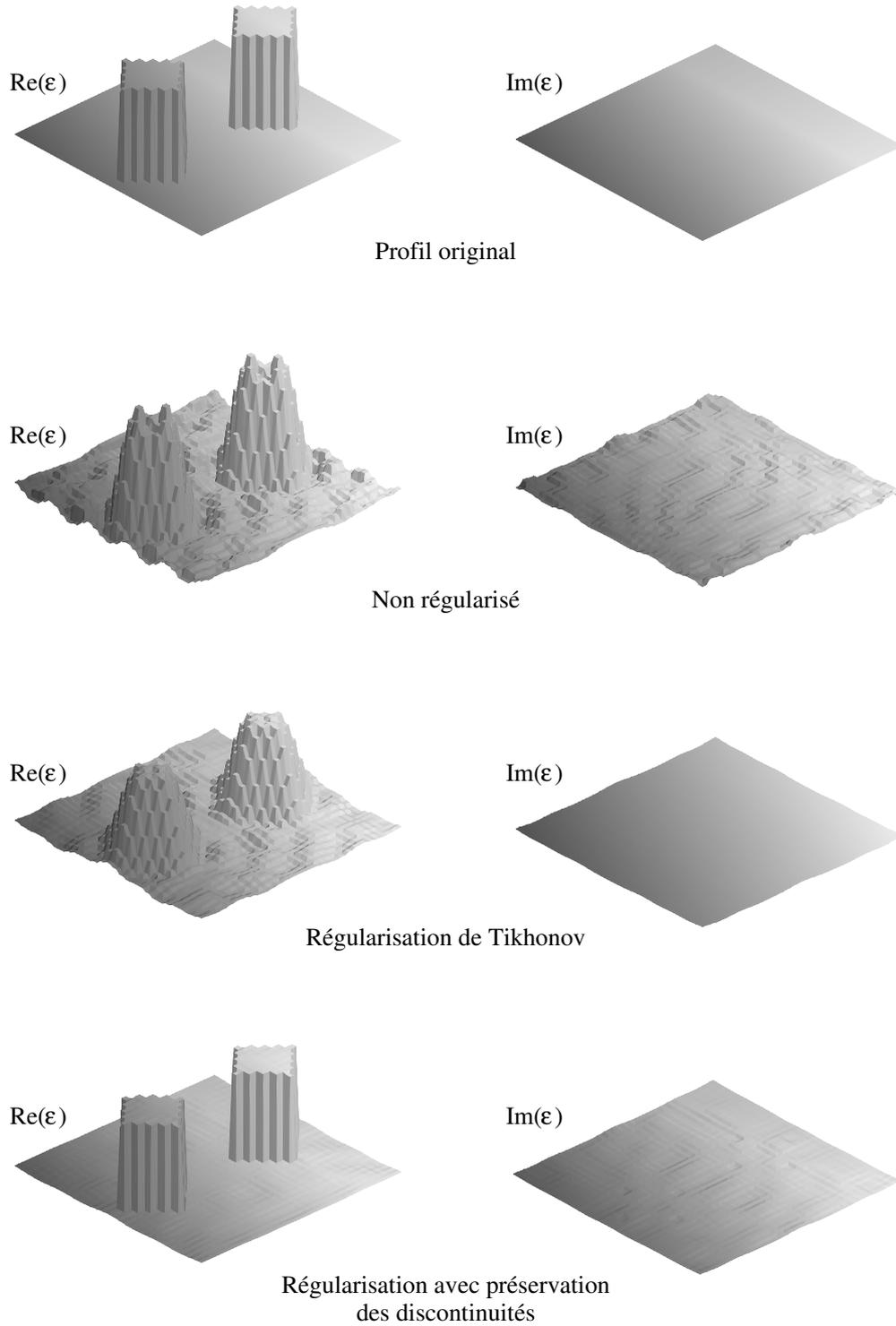


FIG. 3.16 – Reconstructions de l'objet synthétique 2.

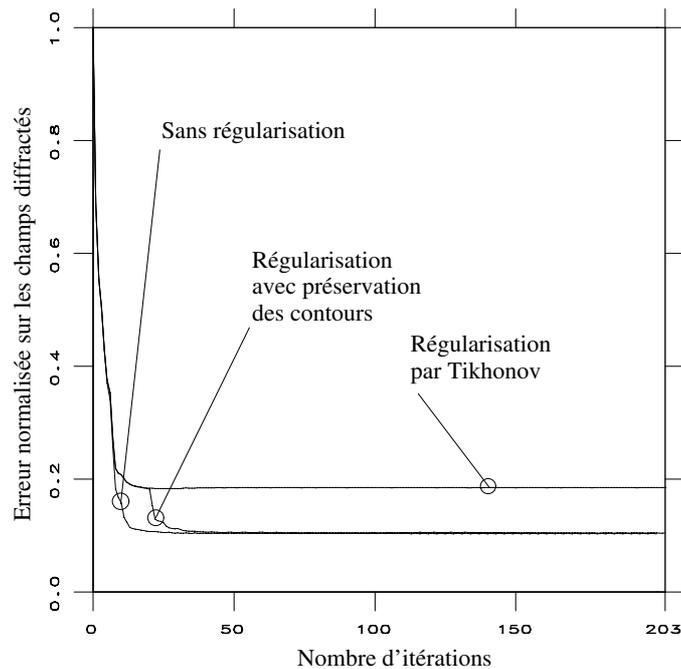


FIG. 3.17 – Convergences comparées des différentes régularisations agissant sur l’algorithme GC (objet synthétique 2).

Reconstructions avec l’algorithme GC. Nous montrons figure 3.18 les reconstructions obtenues avec l’algorithme GC sans régularisation, puis avec une régularisation TK, et enfin avec une régularisation EP. Nous avons représenté tous ces résultats à 370 itérations. La fonction de pondération employée ici est la fonction de Hebert et Leahy $\varphi(t) = \log(1 + t^2)$ [Hebert et Leahy, 1989]. Là encore, la régularisation avec prise en compte des discontinuités permet de réduire le bruit présent dans la reconstruction obtenue sans régularisation, sans toutefois induire un flou comme avec la régularisation TK.

L’évolution de l’erreur sur les champs diffractés est présentée figure 3.19.

Objets réels

Conditions d’expérimentation. Les reconstructions présentées ici ont été calculées à partir de données réelles connues sous le nom de “données d’Ipswich”, mesurées et mises à disposition par le Rome Laboratory¹. Les mesures expérimentales ont été effectuées avec une configuration en *champ lointain*, c’est-à-dire que les récepteurs sont disposés loin de l’objet. Dans ce cas, il est possible de simplifier le calcul du champ diffracté. Cette simplification, appelée approximation en champ lointain, est présentée en [Lobel, 1996]. Le montage expérimental avec lequel les mesures ont été effectuées est représenté figure 3.20. Une description plus complète du système expérimental est donnée dans [Coté, 1992].

Calibration. De façon à adapter les mesures expérimentales à notre configuration, nous avons dû recalibrer toutes ces données. Le facteur de calibration a été calculé pour que les données expérimentales puissent correspondre “le mieux possible” aux données issues d’un calcul numérique. Si l’on connaît l’objet à reconstruire (cas de l’objet réel 1), nous pouvons simuler et calculer de manière entièrement numérique le champ diffracté. Le coefficient de

¹Rome Laboratory, Electromagnetics & Reliability Directorate, 31 Grenier Street, Hanscom AFB, MA 01731-3010.

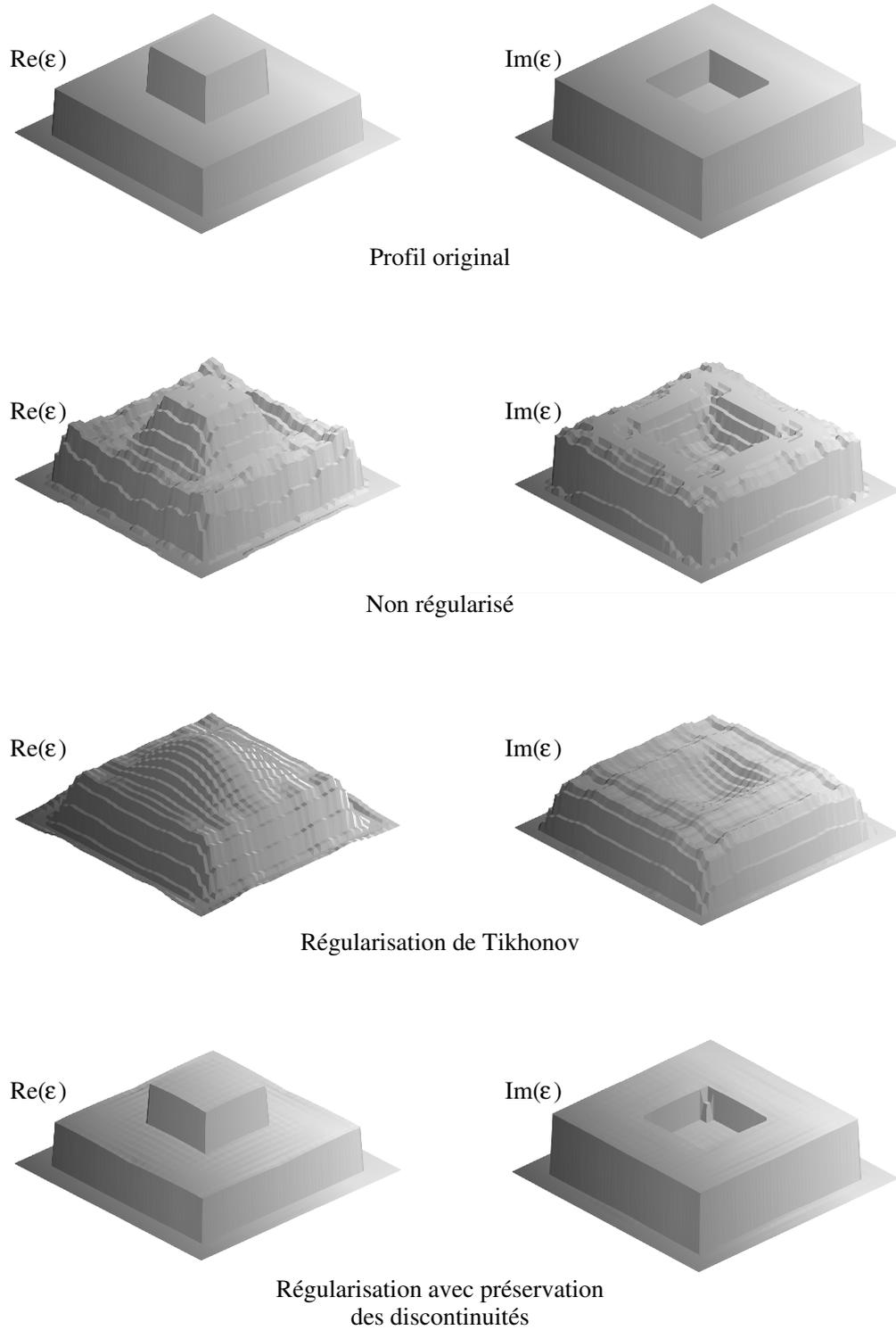


FIG. 3.18 – Reconstructions de l'objet synthétique 3.

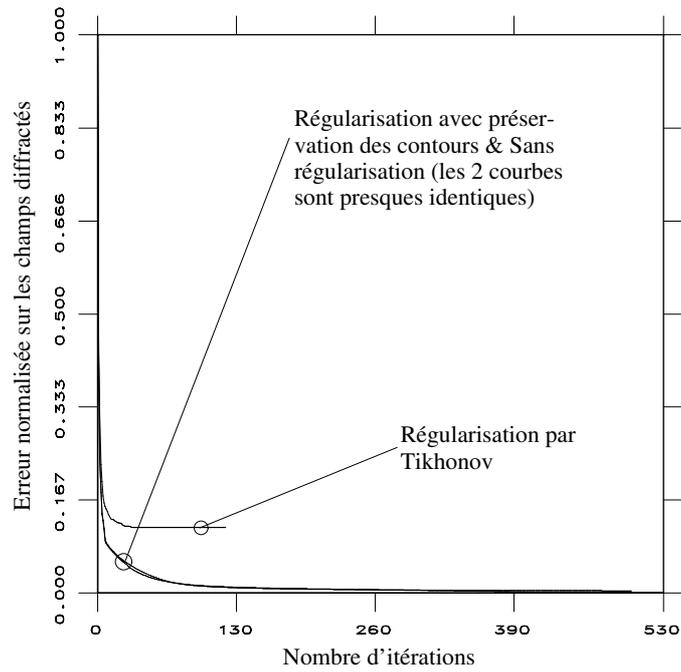


FIG. 3.19 – Convergences comparées des différentes régularisations agissant sur l'algorithme GC (objet synthétique 3).

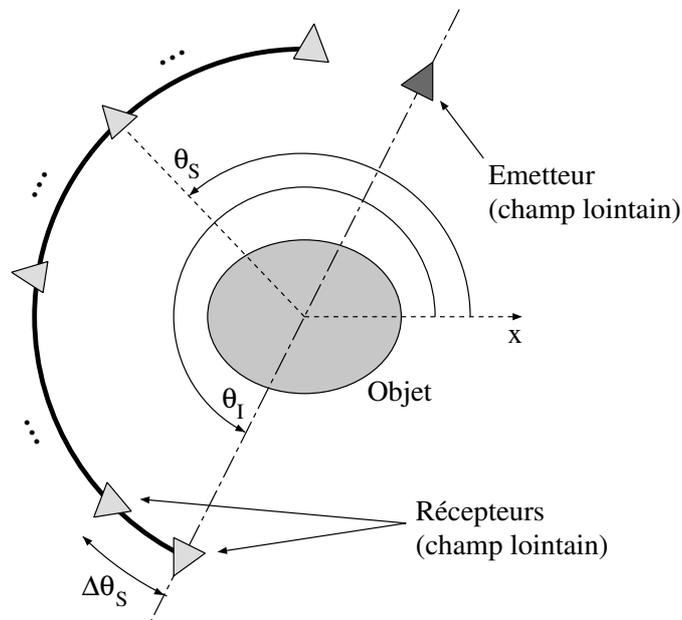


FIG. 3.20 – Montage expérimental utilisé pour les objets diélectriques

calibration \mathcal{C} dépend des valeurs des champs diffractés réel (E_r^S) et simulé (E_s^S) de la façon suivante :

$$\mathcal{C} = \frac{\sum_{l=1}^L \langle (E_s^S)_l, (E_r^S)_l \rangle_S}{\sum_{l=1}^L \|(E_r^S)_l\|_S^2} \quad (3.88)$$

Si l'on ne connaît pas l'objet à reconstruire (cas des objets réels 2 et 3), nous devons mener une série de tests "en aveugle" de façon à trouver un coefficient de calibration acceptable. Les reconstructions que nous proposons ici sont donc obtenues à partir de coefficients non optimums.

Dans l'article [Lobel *et al.*, 1996b] joint en annexe sous la référence [IEEE APM-96], nous présentons certains résultats sur données réelles, pour des objets métalliques. Nous présentons ici la reconstruction d'autres types d'objet.

Objet réel 1 (Carré de polystyrène)

Description de l'objet. Le premier objet réel nous présentons est un objet diélectrique (c'est un carré de polystyrène). Sa permittivité est de $\epsilon_r = 1.03$, et ses côtés mesurent 11.2 cm. Le domaine \mathcal{D} est quant à lui divisé en 29×29 pixels de $5.3 \times 5.3 \text{ mm}^2$. Pour cet objet, six directions d'illumination ont été choisies et se répartissent selon des angles d'incidence θ_I de $\{0^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 300^\circ\}$. Les récepteurs ont été répartis sur un secteur circulaire dont l'angle d'observation θ_S est tel que $\theta_I + 180^\circ \leq \theta_S \leq \theta_I + 355^\circ$, l'espacement entre chaque récepteur étant de $\Delta\theta_S = 0.5^\circ$.

Nous disposions au départ, pour cet objet, d'un ensemble de 351 mesures par vue mesures qui étaient dépendantes de l'angle d'incidence θ_I (voir le schéma du montage présenté figure 3.20). En prenant en compte la symétrie de l'objet, nous avons considéré 701 mesures par vue. Nous avons de plus utilisé les propriétés géométriques de l'objet, en contraignant à chaque itération la solution à être symétrique.

Reconstruction du carré de polystyrène. La reconstruction obtenue avec l'algorithme GC est montrée figure 3.21. Nous y présentons une comparaison entre la solution donnée avec l'algorithme GC sans régularisation, celle donnée avec une régularisation de type TK, et celle donnée avec une régularisation EP (nous avons utilisé ici la fonction d'Hebert et Leahy comme fonction de régularisation, $\varphi(t) = \log(1 + t^2)$ [Hebert et Leahy, 1989]). Nous avons choisi pour ces trois reconstructions de démarrer notre algorithme avec une estimée initiale nulle. Enfin, en ce qui concerne la valeur du polystyrène, aucune borne supérieure n'a été appliquée.

On peut voir aisément que le résultat très bruité obtenu sans régularisation est amélioré tout d'abord par la régularisation TK. L'image ainsi reconstruite est cependant très floue, et le gain apporté par la régularisation EP est sans conteste bien meilleur. Le lissage des zones homogènes de l'image a permis de faire disparaître complètement le bruit, tandis que les contours sont eux parfaitement conservés. De plus, la valeur moyenne du polystyrène trouvée après la régularisation EP se situe à 1.029 : le lissage appliqué ici n'a pas dégradé la valeur à trouver. On note cependant que les quatre coins du carré n'ont pu être reconstruits. Ces défauts sont sans doute dus au fait que ces coins sont formés par des diagonales, que

numériquement nous ne prenons en compte que les horizontales et les verticales, ajouté au fait qu'il y a un fort bruit de mesure.



FIG. 3.21 – Reconstruction de l'objet réel 1 (carré de polystyrène).

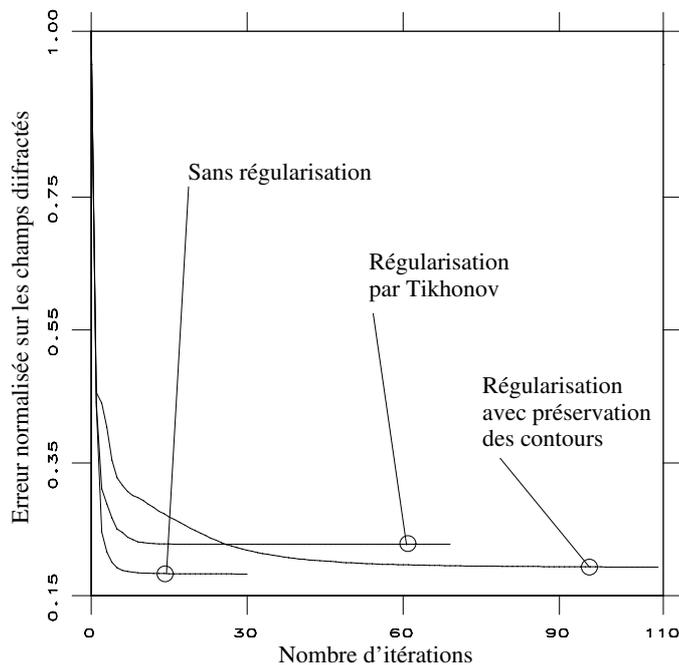


FIG. 3.22 – Evolution de l'erreur normalisée pour la reconstruction du carré de polystyrène

Objets réels 2 et 3 (mystérieux).

Les deux derniers objets présentés, sont des “objets mystérieux”, c'est-à-dire que leurs formes ainsi que leurs compositions nous étaient inconnues ; le but étant de confronter les résultats obtenus par les différentes équipes de recherche lors d'une session spéciale d'IEEE AP-S'96 [Morris *et al.*, 1996a, Lobel *et al.*, 1996c]. Pour ces deux objets, le champ diffracté a été mesuré selon 36 directions d'illuminations différentes d'angle $0^\circ \leq \theta_I \leq 350^\circ$, uniformément choisis tous les 10° . Les récepteurs ont été répartis sur un secteur circulaire dont l'angle d'observation θ_S est tel que $\theta_I \leq \theta_S \leq \theta_I + 170^\circ$, l'espacement entre chaque récepteur étant de $\Delta\theta_S = 10^\circ$. Seul nous était communiqué le diamètre du plus petit cercle pouvant entourer l'objet.

Reconstruction des objets mystérieux. N'ayant aucune information *a priori* sur les niveaux des deux objets mystérieux, nous avons décidé d'appliquer dans un premier temps l'algorithme GC sans aucune régularisation.

Les reconstructions des deux objets mystérieux (2 et 3) sont représentées figures 3.23 et 3.24. En vis-à-vis de chaque reconstruction est schématisé la forme et la texture du véritable objet. Les deux objets 2 et 3 sont à peu près reconstruits convenablement dans leur forme, mais il reste du bruit et les niveaux ne sont pas bien restitués (objet 3). Avec un meilleur calibrage, et l'introduction d'une régularisation, ces résultats doivent pouvoir être améliorés.

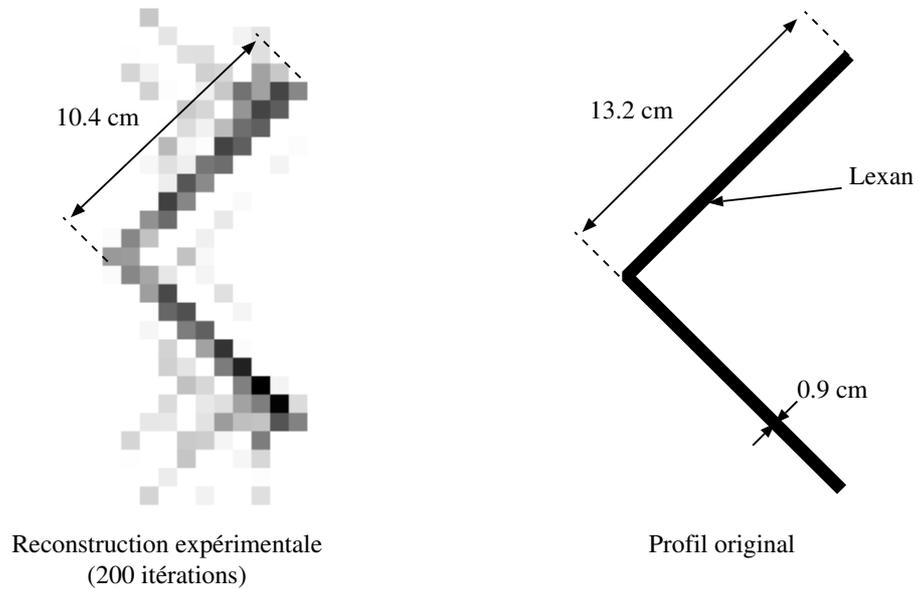


FIG. 3.23 – Reconstruction de l'objet réel 2.

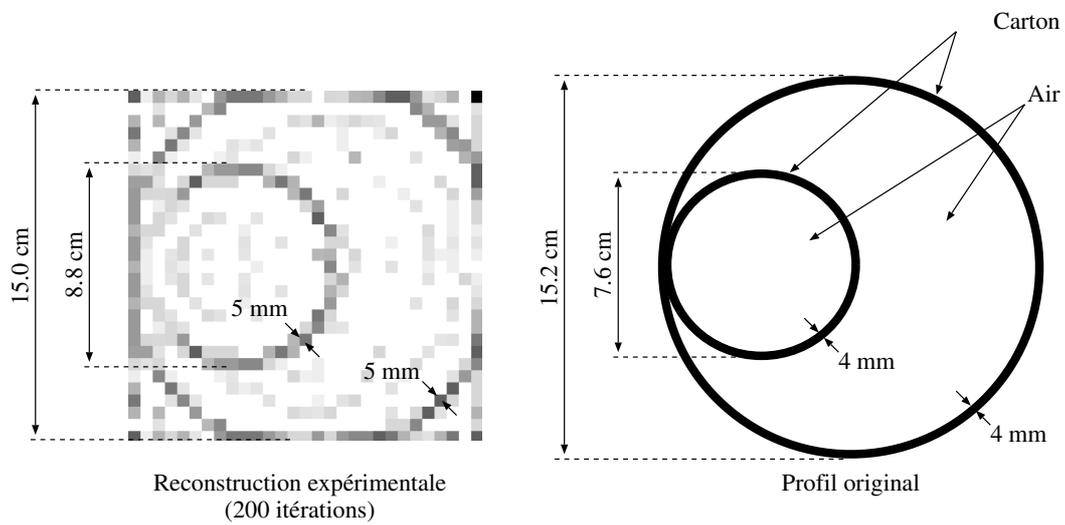


FIG. 3.24 – Reconstruction de l'objet réel 3.

Chapitre 4

Régularisation et segmentation

Les résultats présentés dans ce chapitre ont été obtenus au cours de la thèse de S. Teboul (en 1999) en collaboration avec le Pr G. Aubert du laboratoire J-A. Dieudonné de l'UNSA et le Pr M. Barlaud du laboratoire I3S.

4.1 Fonctionnelle de Mumford et Shah

Un problème de base de la vision est de calculer une description d'une image en termes de régions homogènes et d'éléments caractéristiques, principalement les contours. C'est ce que l'on appelle la segmentation d'image. Les contours étant localisés aux lieux de transition entre deux zones homogènes différentes, il convient de les calculer simultanément. Une formalisation mathématique consiste à définir le problème de la segmentation sous la forme d'un problème de minimisation global qui combine des mesures appropriées pour les régions et les contours de l'image.

Dans une synthèse récente des travaux de recherche sur la segmentation d'image, Morel et Solimini [Morel et Solimini, 1994] montrent que la grande majorité des méthodes tendent à minimiser explicitement ou non, la fonctionnelle, notée J_{MS} dans ce document, qui a été explicitée en 1989 par Mumford et Shah [Mumford et Shah, 1989] pour le problème de la segmentation d'image :

$$J_{MS}(f, \Gamma) = \int_{\Omega} (f - o)^2 dx + \lambda^2 \int_{\Omega \setminus \Gamma} |\nabla f|^2 dx + \alpha \mathcal{H}^{n-1}(\Gamma) \quad (4.1)$$
$$f \in W^{1,2}(\Omega \setminus \Gamma), \Gamma \subset \Omega, \text{ fermé dans } \Omega.$$

où Γ représente l'ensemble des bords des régions sur lesquelles f est homogène, $W^{1,2}(\Omega \setminus \Gamma) = \{f \in L^2(\Omega \setminus \Gamma); \nabla f \in L^2(\Omega \setminus \Gamma)\}$ couramment noté $H^1(\Omega \setminus \Gamma)$ et \mathcal{H}^{n-1} est la mesure de Hausdorff de dimension $n - 1$ pour $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2$ ou 3 . La mesure de Hausdorff représente l'extension naturelle de la notion de longueur pour des courbes non régulières.

Le premier terme mesure l'écart entre l'approximation lisse par morceaux f et les données d'entrée o , le second terme oblige la solution à être lisse en dehors de l'ensemble Γ , et le troisième impose que la longueur des contours Γ soit minimale. Cette fonctionnelle de segmentation est dite fondamentale dans le sens où les trois termes sont nécessaires mais ils peuvent chacun être remplacés par un autre terme d'effet comparable [Morel et Solimini, 1994].

Pour $n = 2$, Mumford et Shah ont émis la conjecture stipulant qu'il existe au moins un minimum (f, Γ) avec $f \in C^1(\Omega \setminus \Gamma)$ et où Γ est formé d'une union finie d'arcs réguliers C^1

(avec des jonctions triples à 120° , pas de jonctions d'ordre supérieur à trois, et des contours qui rencontrent les bords du domaine $\partial\Omega$ à 90° , avec impossibilité d'avoir deux contours qui rencontrent un bord au même point). Cette fonctionnelle a donné lieu à de très nombreux travaux dans le domaine de la recherche mathématique tant pour démontrer les propriétés dont les auteurs ont fait la conjecture que pour définir des méthodes d'approximation d'un minimum de cette fonctionnelle. Jusqu'à présent, il a été prouvé qu'il existe des minima (f, Γ) avec $f \in C^1(\Omega \setminus \Gamma)$ et Γ une courbe rectifiable, et qu'il existe une suite minimisante (f_n, Γ_n) convergeant vers un minimum (f, Γ) ($\Gamma_n \rightarrow \Gamma$ au sens de la mesure de Hausdorff) avec Γ_n formé d'un nombre fini d'arcs Lipschitz continus et Γ est inclus dans une seule courbe régulière (Lipschitz continue). Nous renvoyons au livre de Morel et Solimini [Morel et Solimini, 1994] où les définitions nécessaires sont explicités. Alexis Bonnet [Bonnet, 1995a, Bonnet, 1995b] a montré que si (f, Γ) est un minimum global de J_{MS} tel que Γ est connexe (et pour les perturbations préservant la connexité), alors la solution (f, Γ) ne peut être qu'une des 4 possibilités suivantes :

- Γ est vide et f est constante,
- Γ est une droite définissant 2 demi-plans sur chacun desquels f =constante,
- Γ est l'union de 3 demi-droites se coupant en un point avec des angles de 120° et f est constante sur chaque région,
- Γ est une demi droite et f s'exprime en coordonnées polaires $f(r, \theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{r} \cos(\frac{\theta}{2})$ et Γ est la demi-droite définie par $\theta = 0$. Cette configuration est appelée dans la littérature anglosaxone "crash-tip".

Remarques 1 : Il n'y a pas de résultat sur les solutions telles que les contours sont non connexes. Les résultats sont donnés en dimension 2. Il n'y a pas non plus de résultats sur le type de singularités de Γ en dimension 3, malgré l'intérêt applicatif en imagerie volumique (en imagerie médicale par exemple).

Remarque 2 : En considérant la fonctionnelle plus simple

$$\int_{\Omega \setminus \Gamma} (f - o)^2 dx + \alpha \mathcal{H}^{n-1}(\Gamma) \quad (4.2)$$

f constante par morceaux sur Ω , $\Gamma \subset \Omega$, fermé dans Ω .

il y a d'avantage de résultats de régularité. Morel et Solimini [Morel et Solimini, 1994] ont montré que si o est mesurable borné sur Ω , un minimum existe et que les ensembles de bords Γ minimaux sont tels que soit les points de Γ sont réguliers C^1 avec une courbure bornée $cost(\sup(o) - \inf(o))$, soit ce sont des points singuliers de deux types : jonctions triples à 120° ou point de Γ rencontrant le bord de Ω à 90° . Les résultats de régularité des contours Γ minimaux de (4.2) sont donc supérieurs à ceux des solutions de J_{MS} (4.1). Pour la fonctionnelle (4.2), l'analyse mathématique est complète et Morel et Solimini ont proposé un algorithme multiéchelle de calcul d'un minimum par fusion de régions.

Nous nous sommes intéressés à la fonctionnelle de segmentation de Mumford et Shah car elle définit une approximation de l'image o très proche de celle que nous cherchons à obtenir par la régularisation avec les φ -modèles, développés pour la régularisation de problèmes inverses mal posés en image. Imposer explicitement à la solution d'être une fonction régulière sur des zones homogènes qui sont séparées par des éléments de contours,

eux-mêmes régularisés par minimisation de leur longueur est une information a priori sur la solution qui définit une contrainte forte.

4.2 J_{MS} et les fonctionnelles de régularisation

4.2.1 Décomposition dans BV et espace SBV

Nous rappelons quelques propriétés essentielles des fonctions de BV et renvoyons aux références [Ambrosio, 1998, Braides, 1998, Evans et Gariepy, 1992, Giusti, 1984] pour des définitions et propriétés plus complètes.

Pour f dans BV, on définit les valeurs $f^+(x)$ et $f^-(x)$, dites valeur supérieure approchée et valeur inférieure approchée par

$$f^+(x) = \inf \left\{ t \in [-\infty, +\infty] : \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{\{f > t\} \cap B_\rho(x)}{\rho^n} = 0 \right\} \quad (4.3)$$

$$f^-(x) = \sup \left\{ t \in [-\infty, +\infty] : \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{\{f < t\} \cap B_\rho(x)}{\rho^n} = 0 \right\} \quad (4.4)$$

où $B_\rho(x)$ est la boule de centre x et de rayon ρ .

On définit alors S_f , l'ensemble des sauts, c'est-à-dire l'ensemble des points x où la valeur supérieure approchée $f^+(x)$ est différente de la valeur inférieure approchée $f^-(x)$, ce qui correspond, à un ensemble \mathcal{H}^{n-1} -près, à l'ensemble des points de discontinuités de f .

Toute fonction f dans BV est telle que sa dérivée au sens des distributions peut être décomposée en la somme d'une partie absolument continue (le gradient dans L^1), et d'une partie singulière formée d'une partie sauts (les discontinuités) et d'une partie Cantor, soit

$$Df(\Omega) = \nabla f \cdot dx + (f^+ - f^-)n_f d\mathcal{H}_{S_f}^{n-1} + C(f) \quad (4.5)$$

$$\int_{\Omega} |Df| = \int_{\Omega} |\nabla f| dx + \int_{S_f} (f^+ - f^-) d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{\Omega \setminus S_f} |C(f)| \quad (4.6)$$

\mathcal{H}^{n-1} est la mesure de Hausdorff de dimension $n - 1$ ($n = 2$, extension naturelle de la notion de **longueur** pour des courbes non régulières), et $n_f(x)$, ($x \in S_f$) est la normale orientée vers la plus grande valeur de f . Le terme $\int_{S_f} (f^+ - f^-) d\mathcal{H}^{n-1}$ de (4.6) représente la longueur, pondérée par l'amplitude des sauts, des courbes sur lesquelles f est discontinue.

L'ensemble des fonctions de BV pour lesquelles la partie Cantor est nulle, est appelé l'espace SBV, ensemble des fonctions Spéciales à Variations Bornées. Pour $f \in SBV$, la variation totale de f se décompose alors en

$$\int_{\Omega} |Df| = \int_{\Omega} |\nabla f| dx + \int_{S_f} (f^+ - f^-) d\mathcal{H}^{n-1} \quad (4.7)$$

Considérons la fonctionnelle de régularisation définie sur SBV

$$\int_{\Omega} (f - o)^2 + \lambda^2 \int_{\Omega} \varphi(|Df|) \text{ avec } f \text{ dans SBV} \quad (4.8)$$

et avec $\varphi(t) = t$ ou φ quadratique au voisinage de zéro et linéaire à l'infini comme défini au paragraphe 3.3.2. Grâce au résultat de décomposition de fonctions de mesures pour

des fonctions linéaires à l'infini et convexes, le terme de régularisation de (4.8) peut être décomposé en :

$$\int_{\Omega} \varphi(|Df|) = \int_{\Omega} \varphi(|\nabla f|) + \varphi^{\infty}(0) \int_{S_f} (f^+ - f^-) d\mathcal{H}^{n-1}, \quad f \in \text{SBV}. \quad (4.9)$$

La fonction φ^{∞} , dite fonction de récession, est définie à partir de φ par $\varphi^{\infty}(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\varphi(st)}{s}$.

4.2.2 Lien entre J_{MS} et la régularisation dans SBV

La minimisation de la fonctionnelle $J_{MS}(f)$ pour $f \in W^{1,2}(\Omega \setminus \Gamma)$ est souvent remplacée par une formulation faible qui consiste à minimiser

$$J_{MS}(f) = \int_{\Omega} (f - o)^2 dx + \lambda^2 \int_{\Omega} |\nabla f|^2 dx + \alpha \mathcal{H}^{n-1}(S_f), \quad (4.10)$$

$$f \in \text{SBV}.$$

La formulation faible $J_{MS}(f)$ (4.10) est utilisée pour l'étude théorique de J_{MS} en particulier pour les problèmes d'existence de minima [Ambrosio, 1989, Giorgi *et al.*, 1989, Morel et Solimini, 1994]. En effet, il est montré dans [Giorgi *et al.*, 1989] que tout couple (f, S_f) tel que $f \in \text{SBV}$ est minimum de $J_{MS}(f)$ défini par (4.10), est aussi un minimum de $J_{MS}(f, \Gamma)$ défini par (4.1) et réciproquement, avec $\Gamma = \dot{S}_f \cup N$ où N est un ensemble \mathcal{H}^{n-1} négligeable (par exemple, $\Gamma = \bar{S}_f$).

L'existence de solutions de $J_{MS}(f)$ (cf. (4.10)) reposant sur des résultats fins de compacité et semi-continuité, a été montré par Ambrosio [Ambrosio, 1989]. On trouve aussi des résultats sur les solutions de (4.10) dans [Morel et Solimini, 1994].

Si l'on considère maintenant la minimisation de la fonctionnelle (4.8) et sa décomposition (4.9), on voit cette minimisation revient à chercher une fonction qui soit une approximation des données o , telle que $\int_{\Omega} \varphi(|\nabla f|)$ soit le plus faible possible et telle que la longueur $\mathcal{H}^{n-1}(S_f)$ pondérée par l'amplitude des sauts $(f^+ - f^-)$ soit faible également.

Ainsi, peut-on rapprocher la minimisation de la fonctionnelle de Mumford et Shah, qui peut s'exprimer par (4.10), et la minimisation de la fonctionnelle régularisée (4.8) utilisant la décomposition (4.9). On note deux différences : la pondération par $(f^+ - f^-)$ de la longueur des contours, et l'utilisation d'une fonction de régularisation φ à la place de la fonction quadratique.

Ce qui nous importe plus, au delà de ces différences, est de savoir appréhender les solutions minimales. Minimiser l'équation (4.8) est difficile numériquement. De ce fait, les auteurs considèrent plutôt la minimisation

$$\text{Min}_{f \in V(\Omega)} \int_{\Omega} (f - o)^2 + \int_{\Omega} \varphi(|\nabla f|) \quad (4.11)$$

($V(\Omega)$ défini en (3.41)) du chapitre 3, car on ne sait pas écrire d'équation d'Euler dans SBV. Pour mieux tenir compte des discontinuités numériquement, on préfère utiliser la version

semi-quadratique équivalente introduite au chapitre précédent en (3.55) :

$$J^*(f, b) = \int_{\Omega} (f - o)^2 + \lambda^2 \left\{ \int_{\Omega} b |\nabla f|^2 + \int_{\Omega} \psi(b) \right\} \quad (4.12)$$

où b est une variable définie sur Ω à valeurs dans $]0, 1]$ car les contours de l'image sont représentés explicitement par b (il y a présence d'un contour pour $b \approx 0$ et d'une zone homogène pour $b \approx 1$). Nous verrons au paragraphe 4.3.5 comment modifier (4.12) pour obtenir une approximation de la fonctionnelle J_{MS} .

Cependant, il s'avère que la modélisation des contours par une telle variable b n'est pas satisfaisante numériquement, car elle laisse en particulier la possibilité d'avoir des points isolés dus au bruit considérés comme des contours, ou des contours bruités, voire des contours ouverts qui ne peuvent en aucun cas correspondre à ceux d'une segmentation (partition) de l'image. Notre motivation a donc été de chercher une meilleure modélisation des contours de l'image, et d'adopter un terme régularisant issu du problème de la segmentation. Deux approches ont été développées :

- La première a consisté à introduire un terme supplémentaire de régularisation sur la variable b afin d'éviter les points isolés dus au bruit. Cette contrainte est l'équivalent du terme de longueur sur les contours, qui manque dans (4.12). En introduisant les coefficients ϵ et $\frac{1}{\epsilon}$ de manière adéquate, nous retrouvons [Teboul *et al.*, 1998] de manière naturelle la suite de fonctionnelles proposée par Ambrosio et Tortorelli pour approcher la fonctionnelle J_{MS} par " Γ -convergence". Ces travaux ont fait l'objet de l'article [IEEE IP-98] joint en annexe, de référence [Teboul *et al.*, 1998].
- La seconde approche a consisté à utiliser un modèle de contours par ensemble de niveaux d'une fonction, ce qui évite, du fait du modèle, la possibilité de contours d'objet discontinus (plusieurs morceaux de contours), et qui limite les problèmes de bruit sur les contours car ils sont traités explicitement (ces travaux ont donné lieu aux communications IEEE ICIP'97 [Teboul *et al.*, 1997a] et GRETSI'97 [Teboul *et al.*, 1997b]). Plus qu'une méthode de régularisation, il s'agit d'une méthode où restauration (ou reconstruction) et segmentation d'objets sont traitées simultanément.

Ces deux méthodes sont présentées successivement dans ce chapitre. La présentation de la première méthode est insérée dans une description plus large des méthodes d'approximation de J_{MS} par des suites de fonctionnelles. Ces travaux font appel à des résultats de Γ -convergence que nous décrivons succinctement afin de mieux comprendre le lien qu'il peut y avoir entre la minimisation des fonctionnelles régularisées avec des fonctions φ et J_{MS} . La deuxième méthode fait appel à l'utilisation des contours actifs dont nous donnerons une brève description ainsi que la mise en œuvre par ensemble de niveau. Nous présenterons dans ce chapitre le travail que nous avons fait sur la question de l'équivalence entre la fonctionnelle des contours actifs *classique* [Kass *et al.*, 1987] et la fonctionnelle des contours actifs *géodésique* [Caselles *et al.*, 1997], qui a fait l'objet d'une publication [Aubert et Blanc-Féraud, 1999], en annexe sous la référence **IJCV**.

4.3 Segmentation par Γ -convergence

La difficulté dans le calcul numérique d'un minimum de J_{MS} est le manque de propriété de convexité et le très grand nombre d'ensembles Γ admissibles. En 1977, De Giorgi [Giorgi, 1977] introduisit un nouveau type de convergence variationnelle pour des suites

de fonctionnelles, appelée Γ -convergence ou épi-convergence [Attouch, 1984, Maso, 1993] (le terme Γ -convergence n'a pas de lien avec l'appellation Γ de l'ensemble des contours). Grâce à l'introduction de cette convergence, il est possible de montrer que des mesures sur des hypersurfaces de dimension $n - 1$ (comme la longueur des contours dans \mathbb{R}^2) peuvent être obtenues par Γ -convergence de fonctionnelles régulières elliptiques définies dans \mathbb{R}^n . Donnons dès à présent la définition de la Γ -convergence, pour une suite de fonctionnelles J_ϵ de $L^1(\Omega, \mathbb{R})$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n ($n = 2, 3$) muni de la topologie forte (les résultats restent vrais si on considère la topologie faible).

Définition 1 $J_\epsilon(f)$ Γ -converge vers $J_0(f)$ si $\forall g \in L^1(\Omega)$

- $\forall f_\epsilon \rightarrow g \quad \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} J_\epsilon(f_\epsilon) \geq J_0(g)$
- $\exists f_\epsilon \rightarrow g \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} J_\epsilon(f_\epsilon) = J_0(g)$

Si J_ϵ Γ -converge vers J_0 , alors nous avons les propriétés suivantes :

Propriété 1 Supposons les fonctionnelles J_ϵ équicoercives (c'est-à-dire $\lim_{\|f\|_{L^1} \rightarrow \infty} J_\epsilon(f) = \infty$ uniformément en ϵ) et supposons que J_0 admette un minimum. Si f_ϵ^* est une suite convergente de minimum de $J_\epsilon(f)$ dans $L^1(\Omega)$ alors la limite $f^* = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon^*$ est un minimum de $J_0(f)$.

Propriété 2 Toute suite f_ϵ telle que $J_\epsilon(f_\epsilon) \leq cste < \infty \quad \forall \epsilon$, admet une sous-suite convergente dans $L^1(\Omega)$.

Ces propriétés sont celles utilisées pour l'approximation de minima de fonctionnelles telles que J_{MS} . En effet, grâce au résultat de compacité de la propriété 2, en calculant successivement chaque minimum de $J_\epsilon(f)$ pour $\epsilon \searrow 0$, et si $J_\epsilon(f_\epsilon) < +\infty \quad \forall \epsilon$, alors f_ϵ admet une sous-suite convergente dans $L^1(\Omega)$. Pour cette sous-suite convergente vers f_0 , la propriété 1 nous indique que la limite f_0 est solution du problème de minimisation J_0 .

Une inconnue reste à déterminer, comment construire une suite de fonctionnelles J_ϵ telle que la minimisation de chaque J_ϵ à ϵ fixé soit plus simple que J_{MS} et telle que $J_\epsilon \xrightarrow{\Gamma^-} J_{MS}$? Un grand nombre de suite de fonctionnelles différentes ont été proposées pour l'approximation. Nous en proposons ici une revue non exhaustive et renvoyons au livre récent de Braides [Braides, 1998] pour plus de détails et la présentation d'autres suites approximantes.

4.3.1 Fonctionnelles proposées par Ambrosio et Tortorelli

Ambrosio et Tortorelli ont proposés en 90 [Ambrosio et Tortorelli, 1990], puis 92 [Ambrosio et Tortorelli, 1992] deux familles de fonctionnelles elliptiques qui approchent au sens de la Γ -convergence la fonctionnelle de segmentation. Nous ne présentons que la deuxième formulation, plus simple à manipuler numériquement. L'idée de base est d'introduire une nouvelle variable b définie de Ω dans \mathbb{R} qui contrôle l'ensemble inconnu S_f .

La suite de fonctionnelles paramétrée par ϵ est définie par

$$J_{AT}^\epsilon(f, b) = \beta \int_{\Omega} (f - o)^2 + \lambda^2 \int_{\Omega} (b^2 + o_\epsilon) |\nabla f|^2 + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} (b - 1)^2 + \epsilon \alpha \int_{\Omega} |\nabla b|^2, \quad (4.13)$$

où $\epsilon > 0$ est un paramètre qui tend vers 0, $o_\epsilon > 0$ une quantité infinitésimale qui décroît vers 0 plus vite que ϵ .

Il est montré dans [Ambrosio et Tortorelli, 1992] que $J_{AT}^\epsilon \xrightarrow{\Gamma^-} J_{MS}$ quand $\epsilon \rightarrow 0$. Ainsi

un minimum de J_{MS} , où interagissent des mesures sur des fonctions définies sur \mathbb{R}^2 et des mesures géométriques sur des contours (difficile à appréhender numériquement), peut être approché par une suite de minimiseurs de fonctionnelles elliptiques (beaucoup plus simple à calculer numériquement).

o_ϵ est en fait un paramètre technique qui assure que les minima de J_{AT}^ϵ sont des fonctions continûment différentiables. La suite des fonctionnelles J_{AT}^ϵ avec $o_\epsilon = 0$ définit aussi une approximation de J_{MS} mais le minimum de J_{AT}^ϵ peut être atteint par une fonction moins régulière qu'une fonction C^1 . Ce paramètre peut être négligé dans les simulations numériques.

Dans le paragraphe suivant, nous allons voir comment par des considérations bien différentes, nous avons abouti à la minimisation de fonctionnelles proches de J_{AT}^ϵ . Il est évident que le rôle joué par b dans J_{AT}^ϵ est le même que celui de la variable auxiliaire dans $J^*(f, b)$ (3.55), c'est-à-dire de marquer les contours, ou encore de modéliser S_f . Il est intéressant de remarquer que ce type de variable auxiliaire est apparue indépendamment dans des théories très différentes, celles des champs de Markov avec les travaux de Geman et Geman [Geman et Geman, 1984] et celle de la Γ -convergence avec les travaux d'Ambrosio et Tortorelli [Ambrosio et Tortorelli, 1992]. Ce lien apparaît clairement dans le paragraphe suivant.

4.3.2 Régularisation de l'intensité et des contours

Les résultats présentés dans ce paragraphe ont été obtenus au cours de la thèse de Sylvie Teboul soutenue en Avril 1999 [Teboul, 1999] et sont présentés dans l'article [IEEE IP-98] [Teboul *et al.*, 1998] joint en annexe.

Ce travail a consisté à rajouter une contrainte de lissage sur b afin d'améliorer le modèle de contours induit par l'utilisation d'une fonction φ . Ce modèle est basé sur un seuil (réglé par le paramètre δ) qui agit sur $|\nabla f|$. On suppose qu'un contour correspond à un module de ∇f grand et qu'une petite valeur de $|\nabla f|$ correspond à du bruit sur f . Ce modèle est bien sûr très simpliste. Afin de mieux discriminer le bruit des contours, nous avons proposé de rajouter une contrainte de lissage sur la variable de contours b . Les résultats de restauration avec une fonction φ montrent en effet que b manque de régularité. Par exemple, si l'on considère l'image synthétique constante par morceaux présentée en figure 4.1a, bruitée à 15db (cf. figure 4.1c), nous voyons sur les résultats de la figure 4.2 que soit les contours sont bien préservés et il reste du bruit dans les zones homogènes (visibles en particulier sur la variable auxiliaire b de la figure 4.2c), soit les zones homogènes sont bien lissées mais on perd aussi de l'information (cf. figures 4.2d,e,f).

Il suffit donc de rajouter un terme en $\int_\Omega \varphi_r(|\nabla b|)$ au critère semi-quadratique (première extension décrite au paragraphe 3.3.3, issue des travaux de Geman et Reynolds). φ_r est dans la classe des fonctions définies par les conditions (3.48-3.50) et peut être différente de la fonction φ appliquée sur f . Nous obtenons :

$$J_r(f, b) = \int_\Omega |o - \mathcal{H}f|^2 + \lambda^2 \left(\int_\Omega b |\nabla f|^2 + \int_\Omega \psi(b) + \alpha \int_\Omega \varphi_r \left(\frac{|\nabla b|}{\delta_b} \right) \right) \quad (4.14)$$

La deuxième version semi-quadratique (cf. paragraphe 3.3.3, dérivée des travaux de Geman et Yang) n'a pas été utilisée car elle ne fournit pas d'expression analytique de la fonction de coût $\xi(b)$ (analogue du $\psi(b)$). Cependant, l'écriture de J_r en (4.14) est inexploitable car l'équation d'Euler associée fait intervenir un terme en $\psi'(b)$ dans l'expression de $\frac{\partial J_r}{\partial b}$ et, comme le montre le tableau présenté en figure 4.3 pour quelques fonctions ψ , $\psi'(b)$ présente une singularité en $b = 0$: $\lim_{b \rightarrow 0} \psi'(b) = -\infty$. Ce manque de dérivabilité en zéro est

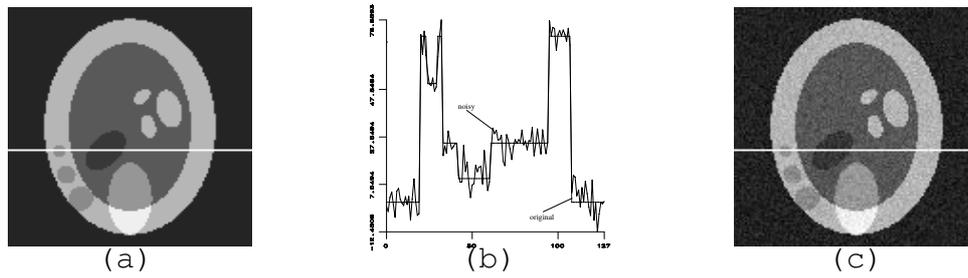


FIG. 4.1 – Image synthétique constante par morceaux : (a) image originale, (b) coupes des images originale et bruitée, (c) image bruitée (15 dB).

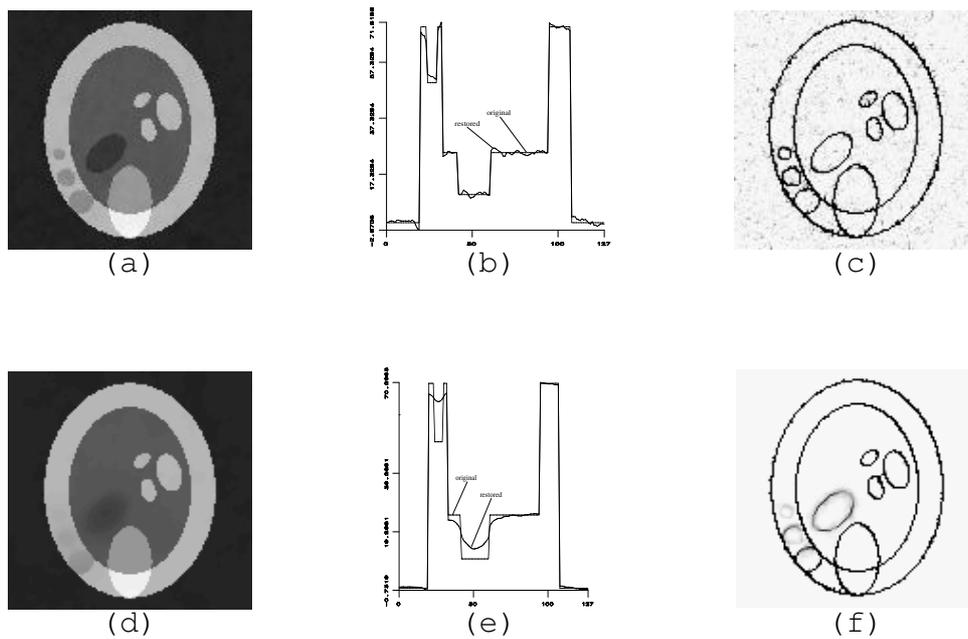


FIG. 4.2 – Résultats de la régularisation semi-quadratique (algorithme ARTUR). Paramètres $\lambda = 30$ et $\delta = 15$: (a) image restaurée (SNR= 27.4 dB), (b) coupes des images originale et restaurée, (c) contours (variable auxiliaire b). Paramètres $\lambda = 50$ et $\delta = 10$: (d) image restaurée (SNR= 24.5 dB), (e) coupes des images originale et restaurée, (f) contours (variable auxiliaire b).

vérifié par toutes les fonctions ψ associées à des fonctions φ vérifiant les conditions (3.48-3.50) du paragraphe 3.3.2 [Teboul, 1999].

En considérant la fonction $\psi(b) = (1 - \sqrt{b})^2$ associée à la fonction $\varphi(t) = \frac{1+t^2}{t^2}$, il est immédiat qu'en effectuant le changement de variable $b \rightarrow b^2$, on obtient la fonction $(1 - b)^2$ dont la dérivée ne présente plus de singularité. Le critère que l'on considère est le suivant :

$$J_r(f, b) = \int_{\Omega} |o - \mathcal{H}f|^2 + \lambda^2 \left(\int_{\Omega} b^2 |\nabla f|^2 + \int_{\Omega} (1 - b)^2 + \alpha \int_{\Omega} \varphi_r \left(\frac{|\nabla b|}{\delta_b} \right) \right) \quad (4.15)$$

Une solution est cherchée en résolvant le système formé des équations d'Euler.

Nom de la fonction φ	$\varphi(t)$	$\psi(b)$	$\psi'(b)$
Perona & Malik	$-\exp(-t^2) + 1$	$b \log b - b + 1$	$\log b$
Geman & McClure	$\frac{t^2}{1 + t^2}$	$(\sqrt{b} - 1)^2$	$1 - \frac{1}{\sqrt{b}}$
Hebert & Leahy	$\log(1 + t^2)$	$b - \log b - 1$	$1 - \frac{1}{b}$
Hyper Surfaces	$\sqrt{1 + t^2} - 1$	$b + \frac{1}{4b} - \frac{5}{4}$	$1 - \frac{1}{4b^2}$

FIG. 4.3 – Fonctions ψ correspondant aux fonctions de potentiel φ .

4.3.3 Définition d'une suite de fonctionnelles

Il suffit de rapprocher les critères J_r en (4.15) et J_{AT}^ϵ en (4.13) pour voir que, à ϵ fixé, il s'agit des mêmes termes, pourvu que l'on définisse $\varphi_r(t) = t^2$. Aussi avons-nous défini la suite de fonctionnelles

$$J_r^\epsilon(f, b) = \int_{\Omega} |o - \mathcal{H}f|^2 + \lambda^2 \left(\int_{\Omega} b^2 |\nabla f|^2 + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} (1 - b)^2 + \alpha \epsilon \int_{\Omega} \varphi_r \left(\frac{|\nabla b|}{\delta_b} \right) \right) \quad (4.16)$$

et mis en œuvre l'algorithme qui consiste à résoudre successivement pour $\epsilon \rightarrow 0$, le système des équations d'Euler associées.

Les résultats obtenus montrent l'efficacité de cet algorithme, comparé au modèle simple du lissage de f par une fonction φ (cf. figure 4.4).

Nous avons expérimentalement remarqué deux phénomènes :

- les résultats avec $\varphi_r(|\nabla b|) = |\nabla b|^2$, qui correspondent théoriquement à la suite qui permet de calculer une approximation de J_{MS} par Γ -convergence, sont très médiocres (cf. figures 4.5a-b-c). En utilisant une fonction avec préservation des contours et convexe ($\varphi(t) = \sqrt{1 + t^2} - 1$, cf. figures 4.5d-e-f) les résultats sont améliorés. Ils le sont encore plus, sur cet exemple, si la fonction est non convexe ($\varphi(|\nabla b|) = \frac{|\nabla b|^2}{1 + |\nabla b|^2}$, cf. figure 4.4).

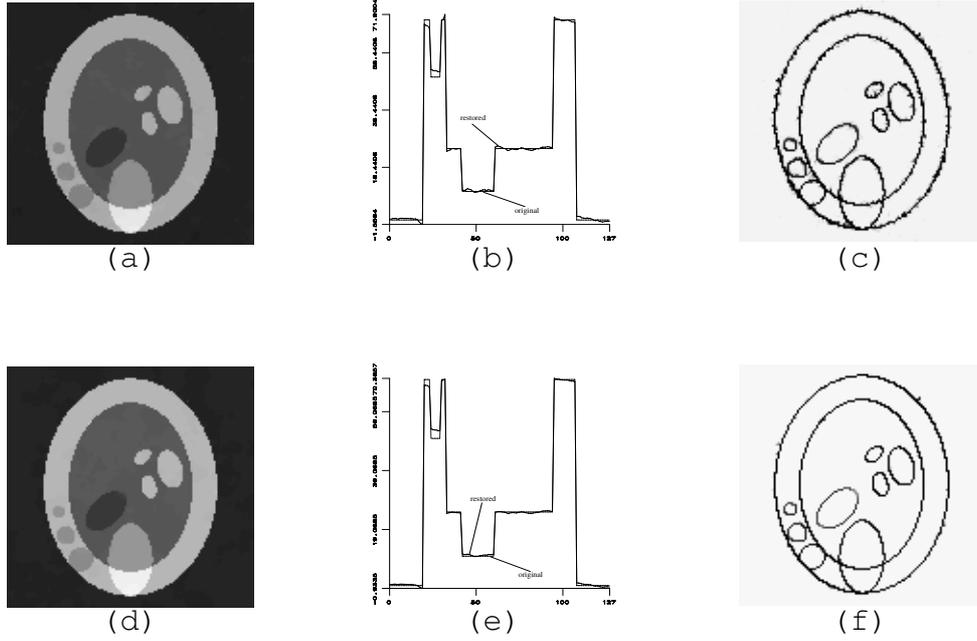


FIG. 4.4 – Résultats de segmentation et restauration par minimisation de $J_r^\epsilon(f, b)$ avec φ_r non convexe. A la première itération $\epsilon = 1$: (a) image restaurée (SNR= 28.4 dB), (b) coupe des images originale et restaurée, (c) contours (variable b). A l'itération 5, $\epsilon = \frac{1}{5}$ (d) image restaurée (SNR= 31.7 dB), (e) coupe des images originale et restaurée, (f) contours (variable b).

- l'algorithme doit être stoppé à un certain $\epsilon_f > 0$, l'image calculée devenant très lisse en dessous de cette valeur (cf. figure 4.6).

Ces deux phénomènes proviennent, à notre sens, de l'étape de discrétisation.

4.3.4 Du discret au continu

Une approximation aux différences finies de la fonctionnelle $J_r(f, b)$ en 1D, au pas h est donnée par (pour $\mathcal{H} = Id$) :

$$h \sum_i (f_i - o_i)^2 + \sum_i h b_i^2 \left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h} \right)^2 + \frac{h}{\epsilon} \sum_i (1 - b_i)^2 + \alpha \epsilon h \sum_i \varphi \left(\frac{b_{i+1} - b_i}{h} \right) \quad (4.17)$$

Considérons le terme $\frac{h}{\epsilon} \sum_i (1 - b_i)^2$. Si h reste fixé, quand $\epsilon \rightarrow 0$, comme la somme sur i est finie, il est nécessaire, pour que ce terme soit fini, que $b_i \rightarrow 1, \forall i$. Ceci a pour effet de faire disparaître les bords. Ce phénomène est aggravé lorsqu'on choisit un lissage quadratique sur b car ce lissage a tendance à remonter les valeurs minimales de b_i de 0 vers 1, ce qui entraîne une décroissance de $|\nabla f|^2$. Ainsi f est plus lisse, ce qui entraîne à nouveau une augmentation de b vers 1.

Nous retardons ce phénomène au cours de l'algorithme par l'utilisation d'une fonction non quadratique pour la régularisation de la variable b . Lorsque les contours commencent à disparaître, nous arrêtons les itérations sur ϵ .

Dans Richardson [Richardson, 1990], c'est la première formulation d'Ambrosio et Tortorelli (non présentée dans ce manuscrit) qui est utilisée. Les auteurs proposent une dis-

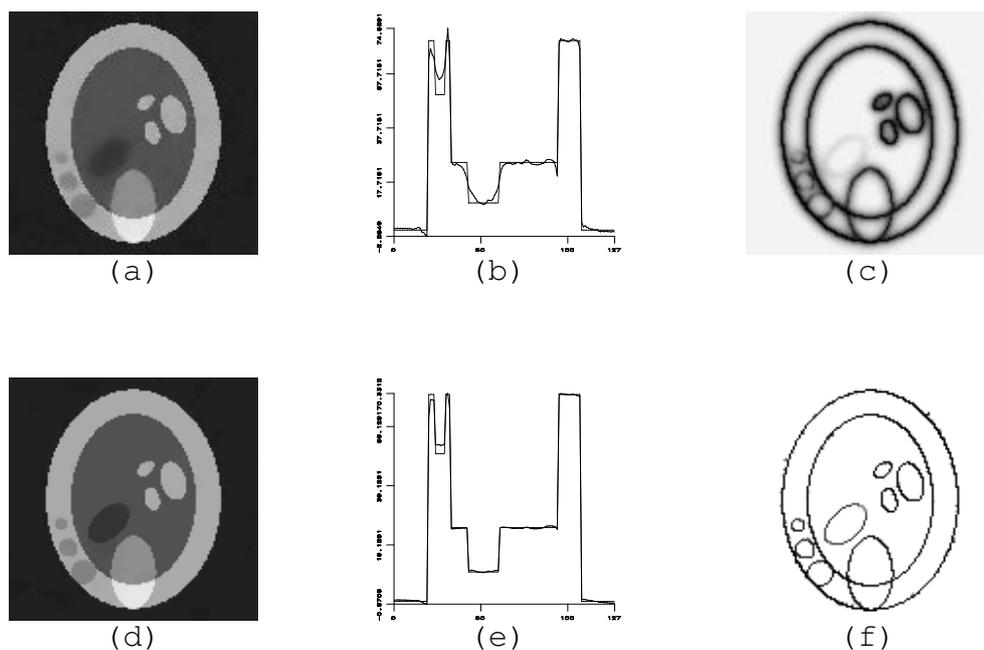


FIG. 4.5 – Résultats de segmentation et restauration par minimisation de $J_r^\epsilon(f, b)$, avec φ_r quadratique ($\epsilon_f = \frac{1}{4}$) : (a) image restaurée (SNR= 25.2 dB), (b) coupe des images originale et restaurée, (c) contours (variable b) ; avec φ_r convexe ($\varphi_r(t) = \sqrt{1+t^2}-1$, $\epsilon_f = \frac{1}{5}$) : (d) image restaurée (SNR= 30.8 dB), (e) coupe des images originale et restaurée, (f) contours (variable b).

crétisation avec des variables différentes pour les gradients en ligne et en colonne (comme les processus ligne de Geman et Geman [Geman et Geman, 1984]) et montrent, par des arguments heuristiques, que certains paramètres doivent évoluer en même temps que ϵ . Ces paramètres sont en particulier le pas de gradient dans l'algorithme de descente (en $\epsilon^{\frac{3}{2}}$) et le coefficient devant le terme d'attache aux données (en $\frac{1}{\epsilon}$).

Afin de mieux comprendre ces phénomènes, nous nous sommes intéressés aux résultats de Γ -convergence de critères discrets vers J_{MS} (en variables continues).

4.3.5 Discrétisation et paramètre de Γ -convergence

Dans Bourdin [Bourdin,] ainsi que Belletini et Coscia [Belletini et Coscia, 1994], c'est la deuxième formulation d'Ambrosio et Tortorelli [Ambrosio et Tortorelli, 1992] qui est considérée, donc celle qui correspond à notre suite de critères (4.16), mais pour φ_b quadratique, *i.e.* J_{AT}^ϵ en (4.13). Les auteurs considèrent une approximation discrète par éléments finis linéaires et montrent que si le pas de discrétisation h est en $o(\epsilon)$ alors la suite de fonctionnelles discrètes Γ -converge avec ϵ vers J_{MS} pour la topologie forte dans L^2 .

Il apparaît donc clairement que le pas de discrétisation doit diminuer en même temps que le paramètre de Γ -convergence ϵ . Dans ce cas précis, la convergence de h est même plus rapide que celle de ϵ , puisque les auteurs supposent que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{h}{\epsilon} = 0$. Pour un pas fixé, comme nous l'avons considéré, il est normal que l'évolution de ϵ doive être stoppée.

Pour mieux comprendre le problème de la discrétisation, nous décrivons plus en détails

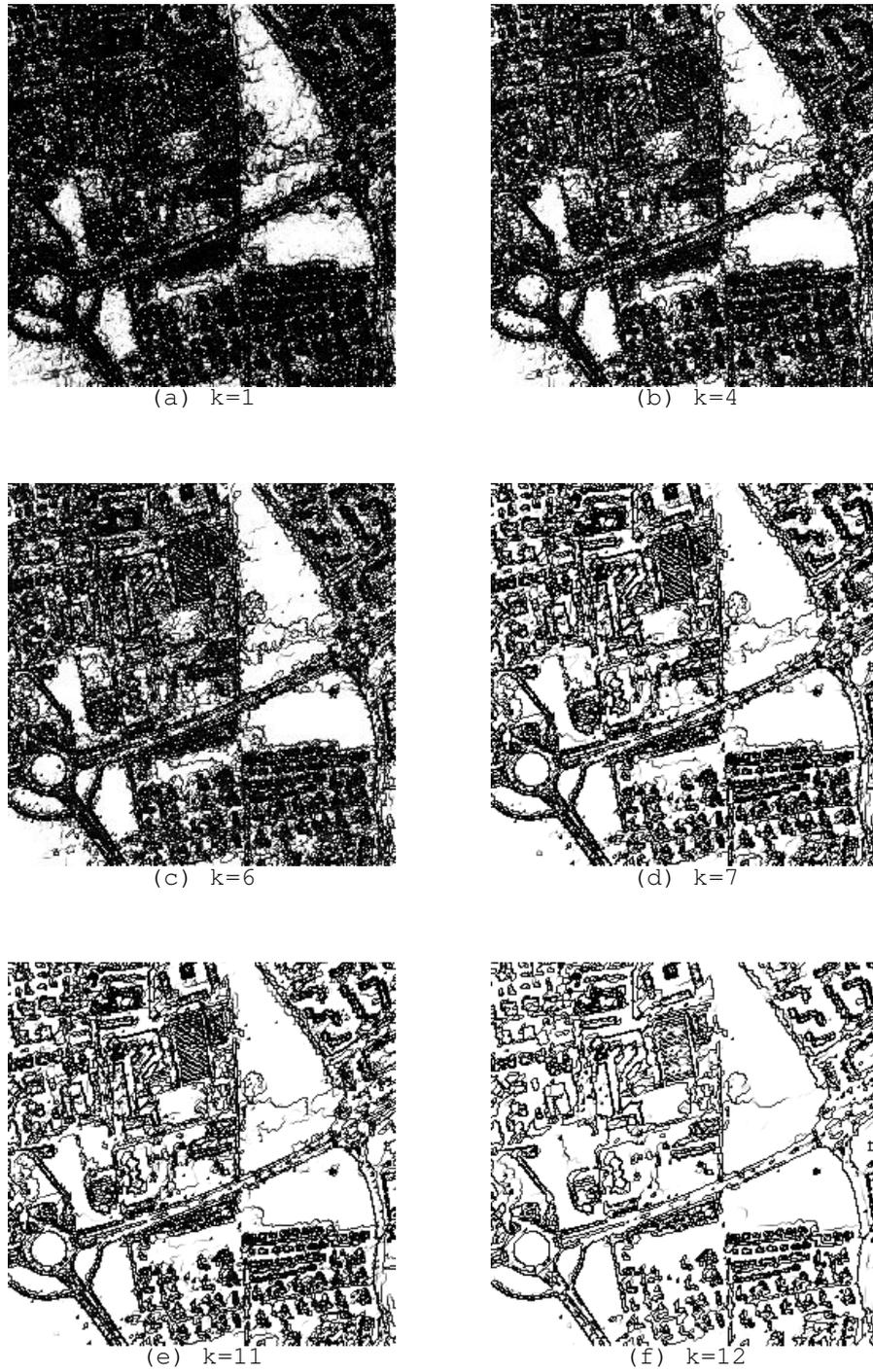


FIG. 4.6 – Résultats des contours (variable b) de segmentation et restauration sur l'image de Nîmes (CNES), uniquement bruitée (de $\text{SNR} = 15\text{dB}$). Evolution en fonction des itérations k , $\epsilon = \frac{1}{k}$.

les travaux les plus récents, c'est-à-dire ceux de Chambolle et Dal Maso en 98 [Chambolle et Maso, 1998]. Ces résultats sont plus généraux que ceux obtenus auparavant par Chambolle en 95 [Chambolle, 1995] puis Rosati en 97 [Rosati, 1997]. Dans [Chambolle et Maso, 1998], les auteurs considèrent une approximation par éléments finis, au travers d'une triangulation de Ω paramétrée par ϵ , tel que le maillage se raffine quand ϵ tend vers 0. Ils considèrent des fonctions u continues de $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ pour lesquelles il existe une triangulation telle que u est affine sur tous les triangles. Cet ensemble de fonctions est noté $V_\epsilon(\Omega)$. La donnée d'une fonction dans $V_\epsilon(\Omega)$ est équivalente à la donnée d'une fonction discrète sur la maille définie par la triangulation, dans le sens où à ϵ fixé, une fonction de $V_\epsilon(\Omega)$ dépend d'un nombre fini de données.

Chambolle et Dal Maso cherchent une approximation des deux termes de la fonctionnelle de Mumford et Shah :

$$E(u) = \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx + \mu \mathcal{H}^1(S_u) \quad u \in \text{GSBV}(\Omega) \quad (4.18)$$

L'ensemble $\text{GSBV}(\Omega)$ des fonctions Généralisées Spéciales à Variations Bornées est défini pour toute fonction f de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R}^m . $f \in \text{GSBV}(\Omega)$ si pour tout $g \in C^1(\mathbb{R}^m)$ tel que le support de ∇g est compact, la composition $g \circ f$ appartient à $\text{SBV}_{loc}(\Omega)$. Les fonctions de $\text{GSBV}(\Omega)$ peuvent apparaître comme la limite de suite de fonctions de $\text{SBV}(\Omega)$ lorsqu'on n'impose pas de borne sur la norme L^∞ des éléments de la suite. Nous renvoyons à la remarque 4.9 p. 222 de la référence [Ambrosio, 1998] pour plus de précisions et à la remarque 4.36 p. 245 pour un exemple. Chambolle et Dal Maso définissent la suite

$$E_\epsilon(u) = \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} \theta(\epsilon |\nabla u(x)|^2) dx, \quad u \in V_\epsilon(\Omega) \quad (4.19)$$

où $\theta(t) = \varphi(\sqrt{t})$ avec φ telles qu'elles ont été définies au paragraphe 3.3.2, restreintes aux fonctions φ ayant une asymptote finie en l'infini ($\varphi(t) < \infty, \forall t \in [0, +\infty[$).

Les auteurs montrent que la suite de fonctionnelles E_ϵ Γ -converge vers E quand $\epsilon \rightarrow 0$. Ainsi il y a Γ -convergence de fonctionnelles discrètes vers une fonctionnelle continue.

Remarque 1 : Pour $\epsilon \rightarrow 0$, la fonction $\frac{1}{\epsilon} \varphi(\sqrt{\epsilon} |\nabla f(x)|) \sim |\nabla f|^2$.

En effet $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi'(t)}{2t} = 1$ donc, au voisinage de 0, $\varphi(t) \sim t^2$ et pour $\epsilon \rightarrow 0$, $\frac{1}{\epsilon} \varphi(\sqrt{\epsilon} t) \sim t^2$.

L'ensemble des discontinuités est rejeté en $t = \infty$. Ceci semble raisonnable car le pas de discrétisation de f diminue avec ϵ ($f \in V_\epsilon(\Omega)$). Ainsi $|\nabla f|$ est borné pour $f \in V_\epsilon(\Omega)$ par une constante $M(\epsilon) > 0$ telle que $M(\epsilon) \rightarrow +\infty$ quand $\epsilon \rightarrow 0$ (ceci n'entraînant pas forcément que la suite des gradients explose).

En conséquence, un moyen de préserver les discontinuités en discret, est d'utiliser une fonction φ à asymptote horizontale en l'infini.

Remarque 2 : Lorsqu'on utilise des différences finies dans les directions x et y pour la discrétisation, comme nous le faisons dans nos expérimentations, la fonctionnelle limite n'est plus la fonctionnelle de Mumford et Shah mais une fonctionnelle où la mesure de Hausdorff 1D est remplacée par une mesure 1D non invariante par rotation. En effet, l'énergie discrète (utilisant une discrétisation du type $|\nabla f| = \sqrt{(f_{i+1,j} - f_{i,j})^2 + (f_{i,j+1} - f_{i,j})^2}$), ne tient compte que des projections d'un contour le long des axes horizontaux et verticaux. Un contour est en quelque sorte représenté par une succession de segments élémentaires horizontaux et verticaux. La mesure de la longueur totale des contours ne sera en conséquence pas invariante par rotation. La mesure des contours dans la fonctionnelle limite sera

donc une mesure de Hausdorff 1D non isotrope, du type “cab driver length” [Chambolle, 1995, Rosati, 1997].

4.3.6 Conclusion

Bien que les résultats de Γ -convergence qui existent (en continu [Ambrosio et Tortorelli, 1992] ou en discret [Bellettini et Coscia, 1994, Bourdin,]) utilisent une fonction $\varphi_r(t) = t^2$, il n’est pas aberrant qu’il faille utiliser une fonction φ ayant une asymptote finie en l’infini pour la variable auxiliaire lors de la discrétisation des fonctionnelles d’Ambrosio et Tortorelli J_{AT}^ϵ décrites en (4.13).

La difficulté dans la discrétisation est que lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, $b \rightarrow 1$ p.p (l’ensemble dont la mesure de Lebesgue est nulle contient les points tels que $|\nabla f|$ est infini, c’est-à-dire les discontinuités de f). Ceci ne peut être atteint *numériquement* avec la présence du terme $\epsilon \int_{\Omega} |\nabla b|^2$ qui lisse la variable et contribue à ce que $b \rightarrow 1$ partout sur Ω (car nous utilisons des variables discrètes).

En conclusion il nous semble qu’une “bonne” discrétisation de la fonctionnelle J_{AT}^ϵ définie en (4.13) (qui devrait converger vers J_{MS} ou J_{MS} avec une mesure de Hausdorff 1D non isotrope) serait de chercher des fonctions discrètes f, b dont le pas de discrétisation tend vers zéro avec ϵ et de remplacer le dernier terme de J_{AT}^ϵ par $\frac{\alpha}{\epsilon} \int_{\Omega} \varphi(\sqrt{\epsilon} |\nabla b|)$ avec $\varphi < +\infty$ à l’infini, par analogie avec (4.19). Nous étudions ce problème en collaboration avec Riccardo March du CNR à Rome dans le cadre d’une collaboration Galilée.

Il existe de nombreux autres travaux utilisant la Γ -convergence, pour approcher des fonctionnelles comportant à la fois des termes de surfaces et des termes de longueur d’interface entre deux régions [Braides, 1998, Baldo, 1990, Modica, 1987, Sternberg, 1991]. Nous décrivons dans le chapitre 5 sur la classification d’images ceux issus de la théorie de Cahn-Hilliard [Cahn et Hilliard, 1958] développés en mécanique des fluides. Avant de clôturer cette partie, remarquons que Alicandro, Braides et Shah [Alicandro *et al.*, to appear, Braides, 1998] ont étudié la convergence des fonctionnelles

$$J^\epsilon(f, b) = \int_{\Omega} (f - o)^2 + \int_{\Omega} b^2 |\nabla f| + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} (b - 1)^2 + \epsilon \int_{\Omega} |\nabla b|^2, \quad (4.20)$$

et montré que la Γ -limite est

$$\begin{aligned} J(f, b) &= \int_{\Omega} (f - o)^2 + \int_{\Omega} |\nabla f| + \int_{S_f} \frac{2|f^+ - f^-|}{2 + |f^+ - f^-|} d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{\Omega \setminus S_f} |C(f)| \quad \text{pour } b=1 \text{ p.p.} \\ J(f, b) &= +\infty \quad \text{ailleurs.} \end{aligned}$$

où f^+ et f^- sont les valeurs respectivement supérieure approchée (4.3) et inférieure approchée (4.4) de f et $C(f)$ désigne la partie Cantor de la décomposition de Df . La partie régularisation de la fonctionnelle limite est, en remplaçant le terme $\frac{2|f^+ - f^-|}{2 + |f^+ - f^-|}$ par $(f^+ - f^-)$, la variation totale de f .

4.4 Segmentation par contours actifs

4.4.1 Introduction

Nous avons vu dans le paragraphe 4.3 précédent, comment obtenir une décomposition d’une image en zones homogènes et contours au moyen de la théorie de la Γ -convergence.

La caractéristique essentielle est d’appréhender l’ensemble des contours par la limite de fonctionnelles elliptiques, définies sur des fonctions à valeurs sur l’ensemble Ω , le support de l’image. Ce paragraphe est dédié à l’utilisation de modèles de contours par des courbes (en 2D) ou surfaces (en 3D), donc de support de dimension $n - 1$ par rapport aux observations de dimension n . De nombreux travaux ont été effectués en traitement d’image ces dernières années concernant la segmentation d’objets dans une image. Il s’agit, non plus de définir une partition de l’image en différentes zones homogènes, mais de détecter automatiquement les contours d’un objet d’intérêt dans une image. Ceci permet des mesures par exemple en imagerie médicale, ou permet le suivi d’objets dans une séquence d’images. Les objets d’intérêt ne sont pas nécessairement des zones homogènes, mais nous pouvons disposer d’informations concernant la forme, la taille ou encore la distribution d’intensité à l’intérieur de l’objet. Une vaste catégorie des méthodes de détection d’objets suppose un changement d’intensité important entre le fond de la scène et l’objet, définissant un gradient grand en module. Un contour fermé initial englobant l’objet est alors déformé suivant une certaine vitesse afin de venir coller à l’objet. Ce sont les méthodes dites par contours actifs. L’introduction récente en traitement d’image de modèles de courbes planes (respectivement des surfaces) représentées par des ensembles de niveau (zéro par exemple) de fonctions 2D (resp. 3D) a donné un nouvel essor aux méthodes par contours actifs. En effet, le modèle par ensembles de niveau s’utilise facilement et n’a pas les inconvénients des courbes représentées par une suite de points pour lesquels il faut gérer “manuellement” l’échantillonnage (nombre de points sur la courbe, pas de l’échantillonnage) qui évolue en même temps que la courbe bouge, ainsi que le nombre de courbes si celui-ci est différent à l’initialisation et à convergence. Tout ceci est géré automatiquement par les ensembles de niveau. Mon travail dans ce cadre comprend deux aspects :

- D’une part j’ai travaillé d’un point de vue théorique sur la question de l’équivalence entre les contours actifs classiques introduits par Kass et al. en 1987 et les contours actifs géodésiques introduits par Caselles et al. en 1997. En collaboration avec Gilles Aubert [Aubert et Blanc-Féraud , 1999], nous avons défini les différents sens possibles que l’on peut donner au mot équivalence de deux problèmes de minimisation et avons établi un résultat d’équivalence dans un certain sens. Ce travail a donné lieu à une publication acceptée dans le journal **IJCV** (*International Journal of Computer Vision*) ([Aubert et Blanc-Féraud , 1999]) qui est jointe en annexe sous la référence [IJCV-99] et dont nous rappellerons les grandes lignes.
- D’autre part, j’ai introduit un modèle de contour actif pour la régularisation de problèmes inverses, ce qui est original dans le domaine de la résolution de problèmes inverses. J’ai abordé, en particulier, la restauration d’images et la reconstruction tomographique en médecine nucléaire, sous la forme de la résolution de deux EDP couplées, correspondant à la minimisation de deux fonctionnelles, une à minimiser par rapport à l’image cherchée (utilisant l’information des contours lors de la régularisation) et l’autre par rapport aux contours (utilisant l’information image pour leur localisation). Ces travaux ont donné lieu à deux communications dans des conférences, nous en donnons le principe dans ce document.

J’ai développé, plus récemment, une fonctionnelle pour le problème de la classification d’images qui est définie directement sur les ensembles de niveaux modélisant les différentes classes. Ces travaux sont présentés dans le paragraphe suivant dédié à la classification. Le principe en est toutefois présenté dans le paragraphe suivant car il nous semble général et pertinent.

4.4.2 Brève présentation des contours actifs

Nous présentons tout d'abord quelques notations et hypothèses. On supposera pour simplifier cette présentation que l'on travaille sur des données de \mathbb{R}^2 et que l'on cherche des courbes. La plupart des éléments présentés ici s'étendent sans difficulté au cas de surface dans \mathbb{R}^3 . On note Γ l'ensemble des contours de l'image. On suppose que $\Gamma = \bigcup_{j \in J} C_j$, J est fini et dénombrable, C_j est C^1 par morceau.

On note I l'intensité de l'image. On suppose que $I : \Omega \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$(x, y) \rightarrow |\nabla I(x, y)| \in C^0(\Omega - \Gamma) \quad (4.21)$$

$$\lim_{d((x,y),\Gamma) \rightarrow 0} |\nabla I(x, y)| = +\infty \quad (4.22)$$

où d est la fonction distance.

En traitement d'image, un contour est défini par des points (x, y) tels que " $|\nabla I(x, y)| = +\infty$ ". Afin de spécifier des contours par des valeurs nulles plutôt que par des valeurs infinies, on définit une fonction $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}_*^+$ telle que :

$$g(0) = 1 \quad (4.23)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0 \quad (4.24)$$

$$g(\cdot) \text{ est régulière monotone décroissante} \quad (4.25)$$

Un exemple de fonction g est donné par $g(t) = \frac{1}{1+t^2}$. Pour éviter les fausses détections dues au bruit sur l'image, on utilise souvent un terme en $g(|\nabla \hat{I}|)$ où \hat{I} est une version lissée de l'image d'origine I , soit par un filtre gaussien, soit par un filtre anisotrope. \mathcal{C} est l'ensemble des contours sur lequel les problèmes de minimisation sont définis :

$$\begin{aligned} \mathcal{C} = \{ & C : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad C \text{ est } C^1 \text{ par morceau,} \\ & C' \text{ est non identiquement nulle, } C \notin \Gamma \} \end{aligned} \quad (4.26)$$

avec a et b réels, $a < b$.

Contours actifs classiques de type "Snakes"

La détection des bords d'objets dans une image a été étudiée par Kass et al. [Kass *et al.*, 1987] en 1987. Le principe est de calculer une courbe définissant les bords de l'objet par la minimisation d'une fonctionnelle d'énergie du type :

$$J_1(C) = \alpha \int_a^b |C'(q)|^2 dq + \beta \int_a^b |C''(q)|^2 dq + \lambda \int_a^b g(|\nabla I(C(q))|)^2 dq \quad (4.27)$$

où g est une fonction qui définit un détecteur de contours, comme en (4.23 - 4.25).

Les deux premiers termes de (4.27) contrôlent la régularité de la courbe. Le dernier terme définit ce qu'on appelle l'énergie externe, il est minimal lorsque la courbe se situe sur les gradients élevés de l'image I . En fait, un seul terme de régularité suffit à définir une fonctionnelle de segmentation d'objets et nous ne considérerons, par la suite, que le premier terme de rigidité de la courbe (dérivée d'ordre 1), en prenant $\beta=0$ pour le terme d'élasticité (dérivée d'ordre 2). Notons (\mathcal{P}_1) le problème de minimisation des "snakes" :

$$(\mathcal{P}_1) \quad \inf_{C \in \mathcal{C}} \alpha \int_a^b |C'(q)|^2 dq + \lambda \int_a^b g(|\nabla I(C(q))|)^2 dq \quad (4.28)$$

Une solution est calculée par résolution de l'équation d'Euler-Lagrange associée à (4.28) :

$$-\alpha C''(q) + \lambda \nabla g(C(q)) = 0 \quad (4.29)$$

avec les conditions aux bords (sur q) qui permettent d'assurer que la courbe est fermée périodique, i.e. $C(a) = C(b)$. Cette équation discrétisée constitue un système non linéaire à résoudre qui est mal conditionné. La résolution consiste alors à faire dépendre la courbe du temps et à la déformer selon une direction et une vitesse données par l'équation d'Euler de l'équation (4.28)

$$\begin{cases} \frac{\partial C(q,t)}{\partial t} = \alpha C''(q,t) - \lambda \nabla g(C(q,t)) \\ C(q,0) = C_0(q) \end{cases} \quad (4.30)$$

avec les mêmes conditions aux bords que précédemment sur q , et où $C_0(q)$ est une courbe fermée initiale donnée. Cette évolution peut être interprétée comme une descente de gradient à pas constant (δt). Le contour devient "actif" dans le sens où il évolue en fonction du temps. Bien entendu, le résultat est extrêmement dépendant du contour initial, la fonctionnelle à minimiser (4.28) étant non convexe. Ceci constitue la difficulté principale de cette approche. En particulier, il est impossible de détecter plusieurs objets à partir d'une seule courbe initiale. De plus, l'équation d'Euler associée à (4.27) n'est pas une équation intrinsèque dans le sens où le résultat pourra être différent à partir d'une même courbe initiale paramétrée différemment.

Les autres inconvénients de cette approche sont liés à la gestion des échantillons lors de l'évolution de la courbe (nombre de points sur la courbe, pas de l'échantillonnage). Ces données évoluent en même temps que la courbe bouge. De plus l'échantillonnage ne reste pas régulier durant l'évolution de la courbe, il peut y avoir des zones de concentration de points et des zones de vide. Ceci peut créer des instabilités numériques et des fausses détections.

Contours actifs géométriques - Mise œuvre par ensemble de niveau

L'idée est de faire évoluer une courbe fermée dans le temps selon une EDP (qui ne provient pas forcément de la minimisation d'une fonctionnelle). D'une manière générale, cette évolution prend la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial C(q,t)}{\partial t} = F_1(q,t)\mathcal{T} + F_2(q,t)\mathcal{N} \\ C(q,0) = C_0(q) \end{cases} \quad (4.31)$$

où \mathcal{T} est la tangente unitaire à la courbe et \mathcal{N} la normale euclidienne rentrante. F_1 et F_2 sont respectivement les composantes tangentielle et normale de la vitesse d'évolution. Nous énonçons maintenant un résultat qui permet de simplifier l'équation (4.31) [Epstein et Gage, 1987] : si F_2 est une quantité *géométrique* de la courbe (c'est-à-dire qui ne dépend pas de la paramétrisation, comme la courbure par exemple) alors l'évolution de C ne dépend que de F_2 . La composante F_1 n'affecte que la paramétrisation. Il est alors toujours possible de trouver un changement de variable qui ramène (4.31) à

$$\begin{cases} \frac{\partial C(q,t)}{\partial t} = F(q,t)\mathcal{N} \\ C(q,0) = C_0(q) \end{cases} \quad (4.32)$$

Les contours évoluant selon (4.32) sont dits “géométriques”. L’intérêt de ces contours est d’être indépendants de la paramétrisation et de pouvoir ainsi être modélisés par un ensemble de niveau 0 d’une image u définie sur Ω . Cette modélisation a été introduite par Osher et Sethian [Osher et Sethian, 1988] et consiste à définir le contour $C(t)$ à partir d’une fonction $u(x, t)$ Lipschitz continue qui satisfait les conditions suivantes, en notant $\Omega_{C(t)}$ l’ensemble ouvert intérieur à la courbe $C(t)$:

$$\begin{cases} u(x, t) < 0 & \text{si } x \in \Omega_{C(t)} \\ u(x, t) = 0 & \text{si } x \in C(t) \\ u(x, t) > 0 & \text{si } x \in \Omega \setminus \overline{\Omega}_{C(t)} \end{cases} \quad (4.33)$$

Faire bouger l’interface est équivalent à faire évoluer u , ce qui peut être fait par résolution d’une équation du type

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H(x, \nabla u, t) = 0 \quad (4.34)$$

La fonction H est déterminée en considérant un point $x(t)$ sur la courbe $C(t)$. Ce point évolue avec la vitesse $\frac{\partial x}{\partial t}$, donnée par l’équation d’évolution de la courbe (4.32). Par définition on a $u(x(t), t) = 0$, et en différentiant par rapport à t , on obtient

$$\nabla u \cdot \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (4.35)$$

En utilisant (4.32) et sachant que \mathcal{N} est la normale rentrante à la courbe C , si l’on suppose que u est négative à l’intérieur de la courbe et positive à l’extérieur (convention de signe), on a $\mathcal{N} = -\frac{\nabla u}{|\nabla u|}$, alors (4.35) revient à

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F|\nabla u| \quad (4.36)$$

Cette équation (4.36) dépend en particulier du module du gradient, il convient que celui-ci soit bien défini et ne devienne pas trop grand ni trop petit au cours des itérations. Un cas favorable est de choisir u tel que $|\nabla u| = 1$, ce qui est réalisé si $u(x)$ est la distance signée du point x au contour C (de signe négatif sur Ω_C et positif sur $\Omega \setminus \overline{\Omega}_C$ suivant nos conventions de signe). L’équation d’évolution (4.36) n’est a priori valide que sur l’ensemble de niveau zéro de u définissant la courbe C . La solution communément adoptée est alors d’appliquer l’équation (4.36) à tout l’espace Ω , pas seulement sur l’ensemble de niveau zéro. C’est ce qui a été appliqué dans les premiers papiers sur les contours actifs géométriques [Caselles *et al.*, 1993, Malladi *et al.*, 1995] en traitement d’image et repris par nombre d’auteurs ensuite. Malheureusement, si u est une fonction distance signée au temps $t = 0$, elle n’a aucune raison de le rester au cours des itérations. Par exemple, si la vitesse F dépend de la courbure de C , alors il est évident qu’en un point particulier où la courbure est non nulle, les lignes de niveaux successives de u , fonctions distance à sa ligne de niveau 0, ne vont pas évoluer avec la même vitesse, la courbure étant différente d’une ligne de niveau à l’autre partout où elle n’est pas nulle. Ainsi la fonction u ne restera pas une fonction distance. En particulier, le terme $|\nabla u|$ peut devenir très grand ou très petit et entraîner des instabilités numériques. C’est pourquoi les itérations de (4.36) sont régulièrement stoppées, afin de réinitialiser u comme la fonction distance à la courbe de niveau 0. A un instant \bar{t} , ceci peut être effectué

- soit en extrayant la courbe de niveau 0 et en recalculant la fonction distance (par un algorithme de distance de Chamfer ([Borngfors, 1988]) par exemple),

- soit en faisant évoluer u selon l'équation de la distance [Sussman *et al.*, 1994]

$$\begin{cases} \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = S(v_0)(1 - \sqrt{v_{x_1}^2 + v_{x_2}^2}) \\ v_0(x) = v(x, 0) = u(x, \bar{t}) \end{cases} \quad (4.37)$$

où S est la fonction signe. D'un point de vue numérique, il est plus approprié d'utiliser une version lissée

$$S_\epsilon(v_0) = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + \epsilon^2}} \quad (4.38)$$

L'avantage de l'équation (4.37) pour recalculer la distance est qu'elle laisse la courbe de niveau 0 invariante et que la solution est la fonction distance signée.

Une approche différente et certainement plus justifiée consiste à définir une extension de la vitesse des points de la courbe à l'ensemble des points de Ω , qui conserve la distance. L'équation (4.36) n'est utilisée que sur l'ensemble de niveau zéro. L'idée est d'appliquer en un point x n'appartenant pas à la courbe, la même vitesse qu'en $x - u\nabla u$ définissant le point le plus proche sur $C(t)$. Ainsi, les courbes de niveaux bougeant toutes à la même vitesse, elles conservent leur distance relative, donc u reste une image de distance. On retrouve ces idées dans [Gomes et Faugeras, 1999, Peng *et al.*, 1998, Zhao *et al.*, 1996]. Certains des résultats utilisés dans ces travaux ont été justifiés théoriquement au cours du stage de première année de l'ENS Cachan de Jean-François Aujol [Aujol, 1999].

D'un point de vue numérique, on se rend vite compte que réactualiser u sur tout Ω est très coûteux et que seule une bande autour de la courbe de niveau 0 est nécessaire pour calculer son évolution [Malladi *et al.*, 1995]. Le gain en temps de calcul est très appréciable. Cependant, il faut périodiquement réactualiser la bande autour de la courbe, afin que la bande suive l'évolution de la courbe. Le seul moyen pour réactualiser la bande est de recalculer la fonction distance grâce à (4.37) par exemple. Ainsi, en utilisant une bande, le gain de temps est très réduit, mais il faut réinitialiser. On peut s'interroger alors sur l'utilité *pratique* de l'extension de la vitesse de propagation qui conserve la fonction distance, bien que son intérêt théorique soit évident, dans la mesure où il faut périodiquement réinitialiser si l'on utilise une bande.

Minimisation de la longueur d'une courbe, écriture en fonction u

Une régularisation de la courbe souvent employée consiste à minimiser la longueur de la courbe :

$$L = \int_a^b \left| \frac{\partial C(q)}{\partial q} \right| dq \quad (4.39)$$

Afin de calculer l'équation d'évolution sur C qui fera décroître au plus vite sa longueur L , on fait dépendre la courbe C du temps en définissant une famille de courbes $\{C(q, t)\}_t$ fermées, paramétrées par $(q \in [a, b])$, telles que $C(a, t) = C(b, t)$ et $\frac{\partial C(a, t)}{\partial t} = \frac{\partial C(b, t)}{\partial t}$. La longueur à l'instant t est $L(t)$

$$L(t) = \int_a^b \left| \frac{\partial C(q, t)}{\partial q} \right| dq. \quad (4.40)$$

Pour minimiser la longueur, on dérive L en t

$$L'(t) = - \int_a^b \left\langle \frac{\partial C}{\partial t}, \kappa \mathcal{N} \right\rangle dq \quad (4.41)$$

Ainsi, la quantité $L(t)$ décroît localement le plus rapidement si son évolution est régie par [Kichenassamy *et al.*, 1996]

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \kappa \mathcal{N} \quad (4.42)$$

κ est la courbure locale de $C(q, t)$ et \mathcal{N} la normale rentrante. L'évolution de la courbe par (4.42) est connue sous le nom d'évolution par courbure moyenne ("mean curvature motion" en anglais). Elle est étudiée en particulier dans [Barles *et al.*, 1993, Evans et Spruck, 1991, Evans et Spruck, 1992] Cette équation rétrécit toute courbe fermée, même non convexe, en un point, sans développer de singularité. La courbe se rétrécit en se régularisant, devient convexe puis un cercle de plus en plus petit et disparaît en un point. Ceci n'est pas vrai en dimension supérieure. Une surface dans \mathbb{R}^3 fermée, lisse, non convexe qui évolue selon sa courbure moyenne peut développer des singularités. L'équation de courbure moyenne rétrécit toutes surfaces compactes et *convexes* en un point sphérique.

L'effet régularisant est dû au fait que les points de forte courbure évoluent plus vite et tendent à disparaître, laissant tous les points avec la même courbure moyenne. L'écriture de (4.42) sous forme d'ensemble de niveau de u est :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) |\nabla u| \quad (4.43)$$

Le terme $\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u(x)}{|\nabla u(x)|} \right)$ exprime la courbure de la courbe de niveau de u qui passe par le point x . Cette équation, malgré la présence du terme $\frac{1}{|\nabla u|}$ qui peut engendrer des singularités, a un effet diffusif et donc régularisant. Elle a été étudiée par exemple dans [Barles *et al.*, 1993, Evans et Spruck, 1991, Evans et Spruck, 1992].

Dans un travail récent sur la classification d'image effectué dans le cadre de la thèse de Christophe Samson (cf. le rapport de recherche [Samson *et al.*, 1999a], joint en annexe sous la référence [RR-99] et décrit au chapitre suivant), nous avons montré comment exprimer la longueur d'une courbe en utilisant sa formulation par ensemble de niveau, autrement dit comment exprimer la longueur de l'ensemble de niveau 0 d'une fonction u définie sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. La longueur est obtenue par

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_{\Omega} \delta_{\alpha}(u(x)) |\nabla u(x)| dx = \int_{u=0} ds = |C|. \quad (4.44)$$

où δ_{α} est une approximation de la distribution de Dirac définie pour $\alpha \in \mathbb{R}^+$ par

$$\delta_{\alpha}(s) = \begin{cases} \frac{1}{2\alpha} \left(1 + \cos\left(\frac{\pi s}{\alpha}\right) \right) & \text{if } |s| \leq \alpha \\ 0 & \text{if } |s| > \alpha \end{cases} \quad (4.45)$$

On a $\delta_{\alpha} \xrightarrow{\mathcal{D}'(\Omega)} \delta$ si $\alpha \rightarrow 0^+$ où $\mathcal{D}'(\Omega)$ est l'espace des distributions défini sur Ω .

La démonstration de (4.44) est basée sur la formule de la co-aire que nous rappelons.

Formule de la co-aire [Evans et Gariepy, 1992] Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction Lipschitz et $g \in L^1(\mathbb{R}^2)$, alors :

$$\int_{\mathbb{R}^2} g(x) |\nabla f(x)| dx = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{f=\rho} g(x) ds \right] d\rho \quad (4.46)$$

Nous renvoyons à [Samson *et al.*, 1999a] ([RR-99]) pour la preuve complète de (4.44).

L'évolution dynamique de u obtenue par l'équation d'Euler associée à la minimisation de $\int_{\Omega} \delta_{\alpha}(u(x)) |\nabla u(x)| dx$ est

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \delta_{\alpha}(u). \quad (4.47)$$

Cette équation est à rapprocher de l'équation (4.43). L'équation (4.47) provient de la minimisation d'une fonctionnelle en u , alors que (4.43) est la reformulation de l'EDP correspondant à la minimisation de la longueur d'un contour C à l'aide d'un ensemble de niveau d'une fonction u . L'équation (4.43) ne provient pas de la minimisation d'une fonctionnelle en u . A priori (4.43) n'est valide que sur l'ensemble de niveau 0 de u . Elle est étendue arbitrairement à tout l'espace Ω , du moins à une bande de travail autour de la courbe. L'équation (4.47) est mieux justifiée de ce point de vue car elle est la dérivée de l'intégrale approchant la longueur de la courbe de niveau 0. De plus si u est une fonction distance signée par rapport à la courbe de niveau 0, le terme en $\delta_{\alpha}(u)$ définit naturellement une bande autour de la courbe de niveau 0. Cependant il faudrait étudier l'EDP (4.47) à α fixé pour s'assurer de l'existence et de l'unicité d'une solution (au sens des solutions de viscosité). Ce type résultat existe lorsqu'on utilise $|\nabla u|$ à la place de $\delta_{\alpha}(u)$. Il faut ensuite étudier le comportement de l'EDP (4.47) quand $\alpha \rightarrow 0$.

Détection de contours par EDP géométriques

La détection de contours par évolution de courbe régie par une EDP géométrique a été introduite indépendamment par Caselles et al. [Caselles *et al.*, 1993] et par Malladi et al [Malladi *et al.*, 1995]. L'équation d'évolution sur C est

$$\frac{\partial C}{\partial t} = g(|\nabla I|) [\kappa + c] \mathcal{N}, \quad (4.48)$$

et exprimée en terme de courbe de niveau de u , l'équation d'évolution de la courbe devient

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(|\nabla I|) \left[\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + c \right] |\nabla u|. \quad (4.49)$$

g est une fonction détecteur de contours comme définie en (4.23 - 4.25). Elle joue le rôle de terme d'arrêt puisque g vaut 0 sur le contour de l'objet et 1 ailleurs. Ainsi, quand le contour actif atteint l'objet, son évolution s'arrête. Le terme en courbure est un terme régularisant et le terme en $c\mathcal{N}$ est défini pour c une constante. Nous avons vu que l'équation $\frac{\partial C}{\partial t} = \kappa \mathcal{N}$ est celle qui fait décroître la longueur de la courbe localement le plus vite. L'équation $\frac{\partial C}{\partial t} = c\mathcal{N}$ est celle qui fait décroître l'aire définie par la courbe localement le plus vite. Ce terme est l'analogue du terme de force ballon défini par L. Cohen pour les contours actifs classiques [Cohen, 1991]. Il définit une vitesse constante du front (terme de choc), qui suivant son signe, fait augmenter ou diminuer l'aire définie par la courbe. Lorsque l'aire augmente, la courbe se dilate, comme un ballon que l'on gonfle. Ce terme permet non seulement d'augmenter la vitesse de propagation du front, mais aussi de faire propager le front dans le sens inverse de la courbure. Avec nos conventions de signe, le terme $\kappa \mathcal{N}$ est orienté dans le sens intérieur à la courbe. Ainsi si $c > 0$, le terme $c\mathcal{N}$ permet de détecter des parties concaves d'un objet lorsque le contour actif se contracte autour de cet objet (voir la figure 4.7). c doit être choisi tel que $c + \kappa_{min} \geq 0$ pour κ_{min} la valeur négative minimale de la courbure du contour de l'objet à détecter. Inversement, si le contour est initialisé à l'intérieur de la courbe, il doit se dilater et il faut prendre $c < 0$.

L'existence et l'unicité de la solution de l'équation d'évolution (4.49) ont été montrées au sens des solutions de viscosité pour une courbe initiale donnée, Lipschitz continue, dans [Caselles *et al.*, 1993].

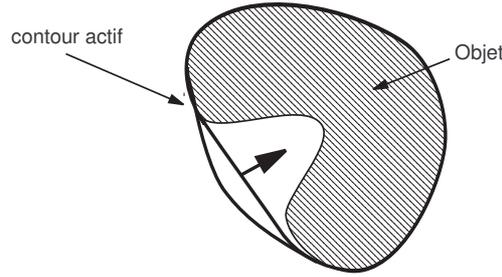


FIG. 4.7 – Détection d’un objet non convexe par contraction d’un contour actif.

Exemple de détection d’objet en mouvement. Nous avons considéré le problème de l’estimation et de la segmentation du flot optique, en vue de la détection d’objet en mouvement dans une séquence d’image à des fins de compression par exemple. Pour cela, nous avons mis en œuvre une méthode d’estimation du flot optique classique basée sur le calcul de la DFD ou “displaced frame difference” en anglais [Horn et Schunck, 1981], soit, en notant $I(x, y, t)$ l’intensité au point (x, y) de l’image au temps t et en supposant que l’on dispose des images au temps $t - 1$ et t :

$$DFD(x, y) = I(x, y, t) - I(x - u(x, y), y - v(x, y), t - 1) \quad (4.50)$$

où $(u(x, y), v(x, y))$ est le vecteur de déplacement du point (x, y) , entre le temps $t - 1$ et le temps t . Ce champs de vecteur est noté $\hat{V} = (u, v)$. Nous minimisons l’erreur quadratique de l’approximation au premier ordre de la DFD, avec un terme de régularisation par fonction de régularisation φ :

$$J(\hat{V}) = \int_{\Omega} (I_x u + I_y v + I_t)^2 + \int_{\Omega} \varphi(|\nabla \hat{V}|) \quad (4.51)$$

Nous montrons en figure 4.4.2a la première image de la séquence Parking Lot¹. La figure 4.4.2b montre le flot optique calculé par minimisation de (4.51). Les images de la figure (4.4.2, montrent les valeurs de la fonction d’arrêt $g(s) = \frac{1}{1 + (\frac{s}{\delta})^2}$ calculées en $|\nabla I|$, $|\nabla \hat{V}|$ et $\alpha_I |\nabla I| + \alpha_{\hat{V}} |\nabla \hat{V}|$, où α_I et $\alpha_{\hat{V}}$ sont des coefficients de normalisation. Enfin, nous présentons un résultat de segmentation par contour actif géométrique (cf. équation 4.48) où la fonction d’arrêt est calculée sur $\alpha_I |\nabla I| + \alpha_{\hat{V}} |\nabla \hat{V}|$. Les informations intensité et flot optique sont nécessaires pour la segmentation d’objet en mouvement, l’information intensité venant compléter celle du mouvement là où il n’est pas détectable (en particulier lorsque le vecteur mouvement est parallèle au contour, autrement dit perpendiculaire au gradient de l’intensité). En fait, la segmentation du flot optique par contour actif géométrique ne peut être obtenue pratiquement à partir du flot optique seul (fonction d’arrêt présentée figure 4.4.2b). Nous remarquons cependant que l’introduction de l’information intensité entraîne que le panneau “sens interdit” est lui aussi détecté, du fait de son niveau d’intensité très contrasté par rapport au fond. Les détails de la méthode et de ces expérimentations pourront être trouvés dans [Ciampini *et al.*, 1998a]. Ces travaux ont donné lieu à une communication à la conférence IEEE ICIP en 1998 [Ciampini *et al.*, 1998b].

¹Nous remercions Patrick Perez de l’Irisa pour avoir mis ces données à notre disposition.

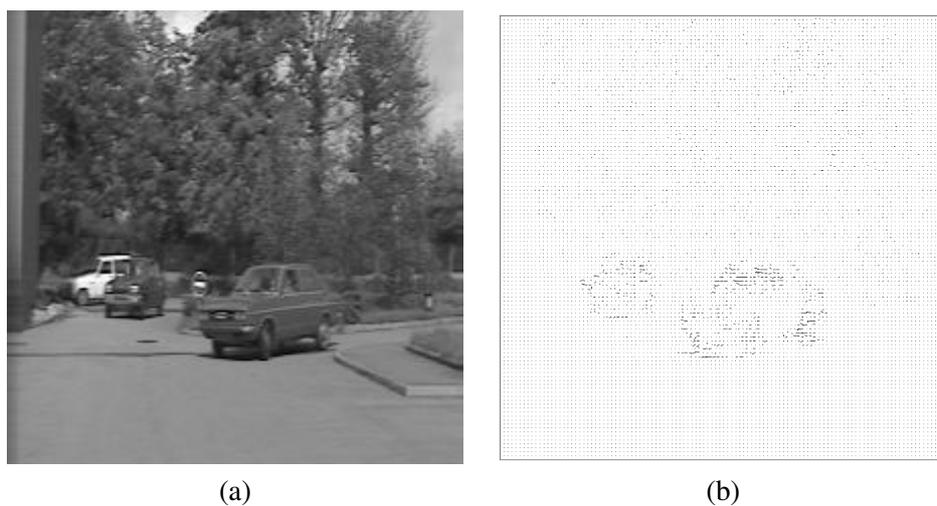


FIG. 4.8 – Première image d'intensité de la séquence Parking Lot (a) et flot optique associé (b).

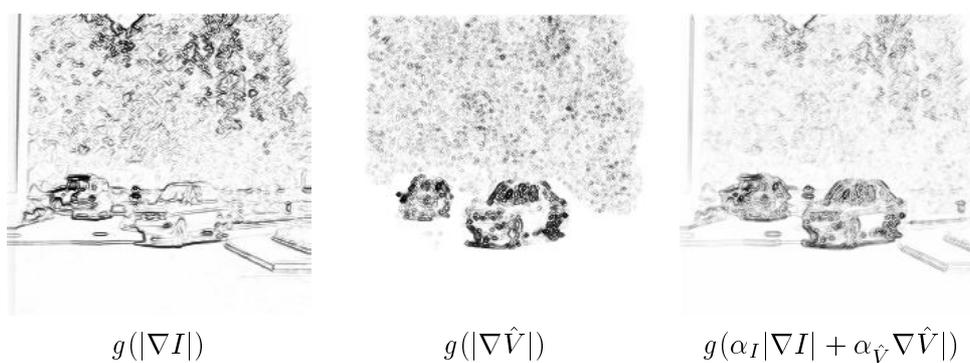


FIG. 4.9 – Valeurs de la fonction d'arrêt g calculées sur différentes données.

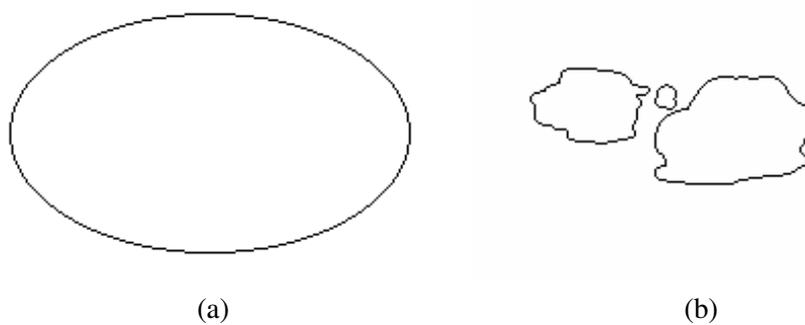


FIG. 4.10 – Contours actif initial (a) et final (b).

Détection de contours par EDP géodésiques

La longueur euclidienne d'une courbe fermée régulière C paramétrée est donnée par

$$L = \int_a^b \left| \frac{\partial C(q)}{\partial q} \right| dq \quad (4.52)$$

On rappelle que minimiser L revient à faire évoluer C dans le temps selon l'équation de la courbure moyenne (4.42). L'équation d'évolution des contours géodésiques introduite par Caselles et al. [Caselles *et al.*, 1997] est l'équation d'Euler associée à la minimisation de la longueur pondérée

$$L_R = \int_a^b g(|\nabla I(C(q))|) \left| \frac{\partial C(q)}{\partial q} \right| dq \quad (4.53)$$

L_R est une longueur dans une nouvelle métrique qui tient compte de l'image sur laquelle on veut détecter un objet. On appelle (\mathcal{P}_2) le problème de minimisation :

$$(\mathcal{P}_2) \quad \inf_{C \in \mathcal{C}} \int_a^b g(|\nabla I(C(q))|) \left| \frac{\partial C(q)}{\partial q} \right| dq \quad (4.54)$$

L'EDP d'évolution des contours actifs géodésiques est l'équation d'Euler de (4.53) à laquelle on rajoute la vitesse constante $c\mathcal{N}$ (pour les mêmes raisons qu'en (4.48)).

$$\frac{\partial C}{\partial t} = g(|\nabla I|)[\kappa + c]\mathcal{N} + (\nabla g(|\nabla I|) \cdot \mathcal{N})\mathcal{N} \quad (4.55)$$

en notant $g(|\nabla I|)$ à la place de $g(|\nabla I(C(q))|)$ pour simplifier les notations. En termes de courbe de niveau, cette équation s'écrit

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(|\nabla I|) \left[\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + c \right] |\nabla u| + \nabla g \cdot \nabla u \quad (4.56)$$

La différence avec l'équation d'évolution géométrique (4.49) réside donc dans le terme $\nabla g \cdot \nabla u$ qui attire la courbe vers le contour. En effet, le terme ∇g change de signe de chaque côté d'un contour de l'image I .

Des résultats d'existence et d'unicité de solutions de l'EDP (4.56) existent au sens des solutions de viscosité comme pour l'équation des contours actifs géométriques.

Remarque 1 : longueur pondérée en fonction de u .

Nous pouvons récrire cette longueur pondérée sous forme d'une intégrale dépendant directement de l'ensemble de niveau qui modélise la courbe, comme nous l'avons introduit pour la minimisation de la longueur (non pondérée) de la courbe. Nous rappelons le résultat sur la longueur d'une courbe C , modélisée par l'ensemble de niveau 0 d'une fonction u :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_{\Omega} \delta_{\alpha}(u(x)) |\nabla u(x)| dx = \int_{u=0} ds = |C|. \quad (4.57)$$

où δ_{α} est une approximation de la distribution de Dirac définie en (4.45). La longueur pondérée peut être approchée par la quantité

$$\int_{\Omega} \delta_{\alpha}(u(x)) g(|\nabla I(x)|) |\nabla u(x)| dx \quad (4.58)$$

L'évolution dynamique de u obtenue par l'équation d'Euler associée à la minimisation de (4.57) est alors

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = g(|\nabla I|) \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \delta_\alpha(u) + \nabla g \cdot \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \delta_\alpha(u) \quad (4.59)$$

Remarque 2 : aire pondérée.

L'équivalent de ce terme de longueur pondérée a été proposé par Siddiqi et al. [Siddiqi et al., 1998] pour le terme d'aire. L'aire pondérée est définie par

$$A_R = \int_a^b g(|\nabla I(C(q))|) \left\langle C, \begin{pmatrix} -y_q \\ x_q \end{pmatrix} \right\rangle dq \quad (4.60)$$

La composante normale du flot qui fait décroître le plus vite cette aire est

$$\frac{\partial C}{\partial t} = g(|\nabla I|) \mathcal{N} + \frac{1}{2} \langle C, \nabla g \rangle \mathcal{N} \quad (4.61)$$

De manière analogue à la longueur pondérée, on retrouve le terme constant en $g(|\nabla I|) \mathcal{N}$ déjà présent dans les contours actifs géométriques de Caselles ou Malladi [Caselles et al., 1993, Malladi et al., 1995], plus un nouveau terme.

4.4.3 Lien entre contours actifs classiques et contours actifs géodésiques

Dans [Caselles et al., 1997], Caselles et al. ont montré que le problème des contours actifs classiques (\mathcal{P}_1) (cf. équation (4.28)) pour α et $\lambda=1$, est équivalent au problème (\mathcal{P}_2) (cf. equation (4.54)) qui consiste à trouver une courbe géodésique dans espace Riemanien dont la métrique dépend de l'image I . Cette équivalence n'est montrée que pour des courbes en dimension 2, en utilisant le principe de Maupertuis de moindre action pour des systèmes dynamiques.

Dans un papier accepté dans la revue *International Journal of Computer Vision* [Aubert et Blanc-Féraud, 1999], co-signé avec Gilles Aubert, nous avons analysé en détails la preuve d'équivalence de Caselles et al. et avons montré que certains arguments devaient être corrigés. Nous avons proposé différentes définitions de l'équivalence de 2 problèmes de minimisations et avons montré l'équivalence de (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2) dans un certain sens, pour des courbes dans \mathbb{R}^2 et des surfaces dans \mathbb{R}^3 . Nous en résumons ici les grandes lignes, le détail pourra être trouvé dans le papier [Aubert et Blanc-Féraud, 1999] (joint en annexe sous la référence [IJCV-99]).

Nous avons dégagé 4 notions possibles d'équivalence entre deux problèmes de minimisation.

Définition 2 Deux problèmes de minimisation sont équivalents s'ils ont le même minimum global (s'il existe).

C'est certainement la notion la plus forte et la plus difficile à montrer. Cette notion est fautive concernant les problèmes (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2).

Définition 3 Deux problèmes de minimisation sont équivalents s'ils ont la même valeur à l'infimum.

Cette notion est extrêmement faible. De nombreux problèmes peuvent avoir la même valeur à l'infimum sans pour autant être reliés.

Cette propriété est satisfaite pour les problèmes de contours actifs, car montrer que $(\mathcal{P}_1) = (\mathcal{P}_2)$ est trivial. Il est possible de définir une suite C_n de courbes dans \mathcal{C} telle que C_n converge uniformément vers un point c de Γ , ensemble des contours de l'image. On a alors

$$0 \leq \mathcal{P}_2 \leq \mathcal{P}_1 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \int_a^b |C'_n(q)|^2 dq + \int_a^b g(|\nabla I(C_n(q))|)^2 dq \right\} = 0 \quad (4.62)$$

A ce niveau, il est intéressant de remarquer que le problème (\mathcal{P}_1) ne peut admettre que des suites minimisantes C_n qui dégènèrent en un point quand n tend vers l'infini (une courbe dégénérée est telle que $C'(q) = 0$ a.e. q), ce qui n'est pas le cas de (\mathcal{P}_2) .

Entre ces deux extrêmes, on peut définir des notions intermédiaires.

Définition 4 *Deux problèmes de minimisation sont équivalents s'ils ont les mêmes extrémales.*

C'est la notion considérée par Caselles et al. [Caselles *et al.*, 1997] à travers le principe de Mauperthuis. Après une étude détaillée de ce principe appliqué au problème (\mathcal{P}_1) , nous en déduisons que l'équivalence des problèmes (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2) n'est valide que pour des courbes de longueur fixée. Cette longueur est fixée par l'énergie qui apparaît dans le formalisme Hamiltonien. Nous pouvons considérer cette énergie nulle ou non. Dans les deux cas, les problèmes de minimisation sur des courbes de longueur fixée ne correspondent pas au problème de départ et ne présentent pas d'intérêt. Nous pensons donc que le formalisme Hamiltonien et le principe de Mauperthuis ne sont pas appropriés pour montrer l'équivalence au sens de la définition 4.

Définition 5 *Deux problèmes de minimisation sont équivalents si la direction qui fait localement décroître l'un le plus vite, fait aussi localement décroître l'autre, et vice versa.*

Cette notion a été introduite dans le papier [Aubert et Blanc-Féraud, 1999] ([IJCV-99]) afin de montrer une relation entre les deux problèmes (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2) , pour des courbes et des surfaces. Nous renvoyons à cet article pour les démonstrations.

4.4.4 Régularisation et contours actifs

EDP couplées proposées

Nous revenons, dans ce paragraphe, sur la question de la régularisation de problèmes inverses mal-posés, exposé au chapitre précédent. Nous avons vu que nombre de problèmes de traitement d'image peuvent être exprimés sous la forme de problèmes inverses et que ceux-ci sont toujours mal-posés par nature. Il faut donc inverser tout en régularisant la solution. Lorsque la solution est une image, il est important de la régulariser tout en conservant les contours nets. Pour cela, il faut savoir détecter les contours de l'image au cours de l'inversion afin de pouvoir les préserver. C'est l'idée développée avec la régularisation utilisant des fonctions de régularisation φ définies au paragraphe 3.3.2. Les algorithmes proposés pour minimiser une fonctionnelle avec une régularisation par fonction φ , utilisent une version semi-quadratique du terme de régularisation (cf. paragraphe 3.3.3), qui prend en compte explicitement les contours de l'image à travers une variable auxiliaire (notée b). Cette variable tend vers zéro sur un contour et est constante sur les zones régulières de l'image. En visualisant cette variable pour un problème de restauration d'image bruitée constante par morceau (cf. figures 4.1 et 4.2 du paragraphe 4.3.2), nous nous rendons compte que le bruit est aussi présent sur la variable de contour b . Pour des images comme celle présentée dans l'article, sans texture avec des objets simples, il est évident que les contours de l'image sont

des courbes fermées et doivent donc être modélisés par des courbes fermées. Ceci constitue un a priori fort que l'on injecte dans le modèle de régularisation. Ce modèle est un autre moyen que la Γ -convergence de suites de fonctionnelles pour approcher une solution du problème inverse régularisé dans l'espace SBV, c'est-à-dire modéliser une fonction régulière avec des discontinuités le long de courbes dans \mathbb{R}^2 ou de surfaces dans \mathbb{R}^3 . Notre travail a consisté à introduire dans le terme de régularisation un modèle de contours par contours actifs géodésiques.

Nous avons proposé de résoudre deux EDP couplées, l'une provenant du problème inverse régularisé en tenant compte du contour de l'objet, l'autre étant celle du contour actif géodésique qui permet de retrouver le contour de l'image issue de la première équation [Teboul *et al.*, 1997a, Teboul *et al.*, 1997b]). Le système se présente sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = \mathcal{H}^*(o - \mathcal{H}f) + \lambda^2 \operatorname{div}(h(u)\nabla f) \\ \frac{\partial u}{\partial t} = g(|\nabla f|) \left[\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) + c \right] |\nabla u| + \nabla g \cdot \nabla u \end{cases} \quad (4.63)$$

La fonction h est définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^+ , c'est une fonction paire, strictement croissante sur \mathbb{R}^+ et telle que $h(u)$ soit proche de 0 au contour, c'est-à-dire quand $u = 0$, et proche de 1 ailleurs. Un exemple est $h(u) = 1 - \exp(-u^4)$. Dans la pratique, la fonction h évolue au cours des résolutions successives des EDP définies en (4.63), de manière à ce que à l'initialisation, h soit proche de 1 même au niveau des contours car ceux-ci sont alors mal localisés. Au fur et à mesure des résolutions, h se creuse au niveau des contours ($u = 0$) pour avoir effectivement une régularisation anisotrope aux contours.

Un problème lié à cette approche est qu'elle est empirique et qu'il semble que des résultats d'existence de solution et de convergence de l'algorithme de résolutions alternées soient difficiles à obtenir.

Il est certain que, comme tout problème de contour actif, la solution dépend de l'initialisation. De plus, nous ne disposons que d'un ensemble de niveau, pouvant donc décrire des objets non inclus les uns dans les autres et non intersectants. L'application est limitée à des images particulières. Nous verrons au chapitre suivant concernant la classification d'images, des fonctionnelles dans lesquelles plusieurs contours actifs interagissent.

Résultats de reconstruction et segmentation. Nous présentons en figures 4.12 et 4.13 un résultat en reconstruction tomographique et segmentation simultanées. Après une acquisition réelle d'un fantôme de chez Picker simulant un cœur, nous avons reconstruit une coupe de cet objet. Comme la trajectoire de la caméra est passée très proche de l'objet, la reconstruction est de bonne qualité. La reconstruction à partir de coeur humain est beaucoup plus bruitée. Pour cette expérience, nous avons rajouté un bruit de Poisson sur l'image des projections (fig. 4.11) que nous avons créées à partir de la coupe du fantôme. Nous présentons les images reconstruites/segmentées (fig. 4.12) ainsi que les contours (calculés à partir de l'image u des distances : courbes de niveau zero de u) de l'image (fig. 4.13) à différents stades de l'algorithme. Cette approche sera utilisée pour la formation des cartes d'atténuation des objets, ce qui nécessite leur reconstruction et la segmentation de cette reconstruction.

Résultats de restauration de bruit et segmentation. Pour montrer l'efficacité de l'algorithme développé dans ce chapitre, nous l'appliquons à une image géométrique simple très bruitée : l'image constante par morceaux contenant deux carrés, bruitée par un bruit

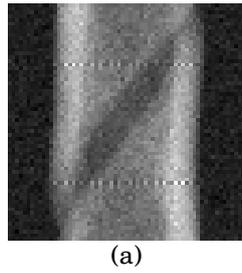


FIG. 4.11 – Projections bruitées par un bruit de Poisson.

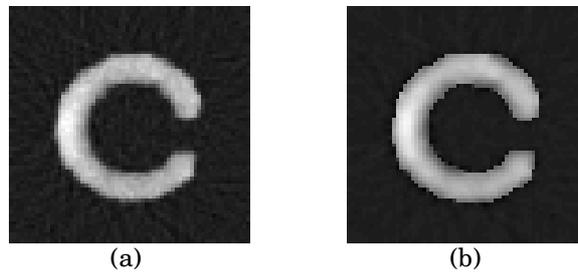


FIG. 4.12 – Images reconstruites/segmentées : (a) au cours du traitement, (b) à la fin du traitement.

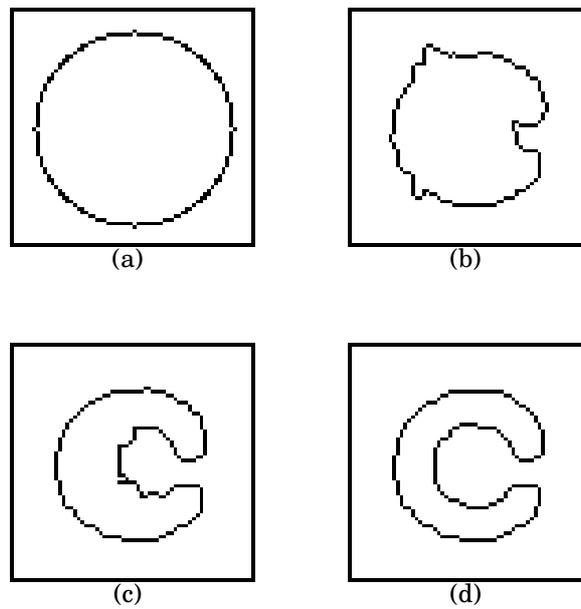


FIG. 4.13 – Images des contours : (a) courbe initiale, (d) courbe finale.

additif gaussien de telle sorte que le SNR entre l'image originale et l'image bruitée soit égal à $-6,6$ dB. Cette image est présentée en figure 4.14. Les résultats obtenus avec cet algorithme montrent que le snake se localise bien sur les contours des deux carrés sans les traverser (cf. figure 4.15). Le SNR entre l'image originale et l'image restaurée est égal à $23,4$ dB (cf. figure 4.16).

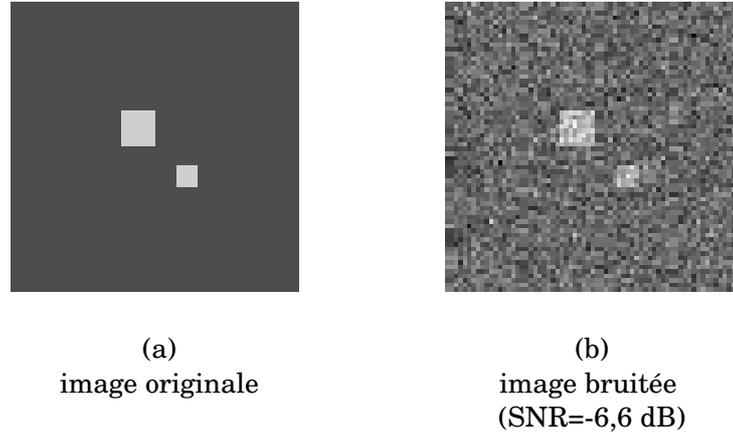


FIG. 4.14 – Image synthétique constante par morceaux.

Remarques :

- Un contour actif géodésique simple ne permet pas de segmenter l'image bruitée, même dans le cas où elle est auparavant lissée par un filtre de lissage gaussien (cf. figure 4.17 pour des résultats avec différents paramètres de la fonction d'arrêt $g(\frac{|\nabla I * G\sigma|}{\delta})$).
- Une restauration seule de l'image bruitée, en utilisant une fonction φ et l'algorithme ARTUR, ne permet pas non plus d'obtenir une image parfaitement reconstruite. En réglant au mieux les paramètres (manuellement), le SNR obtenu est égal à $12,3$ dB (cf. figure 4.18(a)), et les contours associés ne représentent pas bien les objets détectés (cf. figure 4.18(b)).

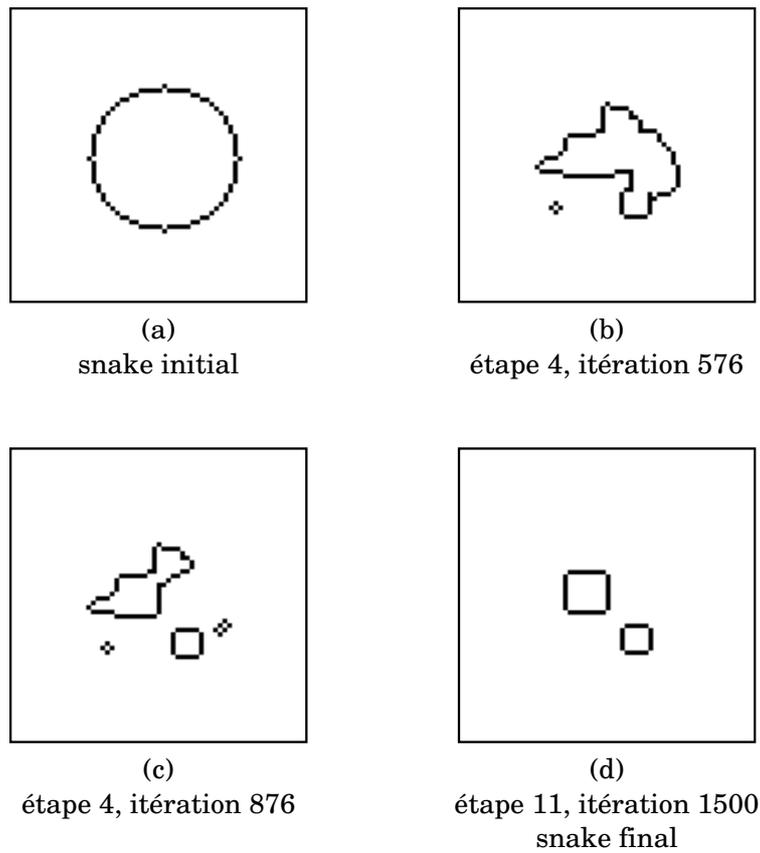
Autres travaux reliant régularisation et contours actifs

Nous décrivons d'abord brièvement les travaux de R. March et Dozio [March et Dozio, 1997]. Le but de leur travail est de proposer une approximation par Γ -convergence de la fonctionnelle

$$J_{MD}(f, \Gamma) = \int_{\Omega} (f - o)^2 dx + \lambda^2 \int_{\Omega \setminus \Gamma} |\nabla f|^2 dx + \int_{\Gamma} (\alpha + \beta \kappa^2) ds \quad (4.64)$$

$$(4.65)$$

où Γ représente l'ensemble des bords des régions sur lesquelles f est homogène, α et β sont des réels strictement positifs, s est l'abscisse curviligne le long de l'ensemble Γ , et κ est la courbure des points de Γ . Cette fonctionnelle est donc celle de Mumford et Shah (4.1), à laquelle est rajouté un terme de régularité sur l'ensemble des discontinuités, introduit par le terme de courbure. Ainsi le paramètre α contrôle l'élasticité des courbes correspondant aux contours de l'image f , et le paramètre β contrôle leur rigidité, de manière analogue au



$$\delta=2; \lambda=0,4; dt=0,11; c=1,1$$

FIG. 4.15 – Evolution du snake pendant le processus de restauration et segmentation appliqué à l'image bruitée.

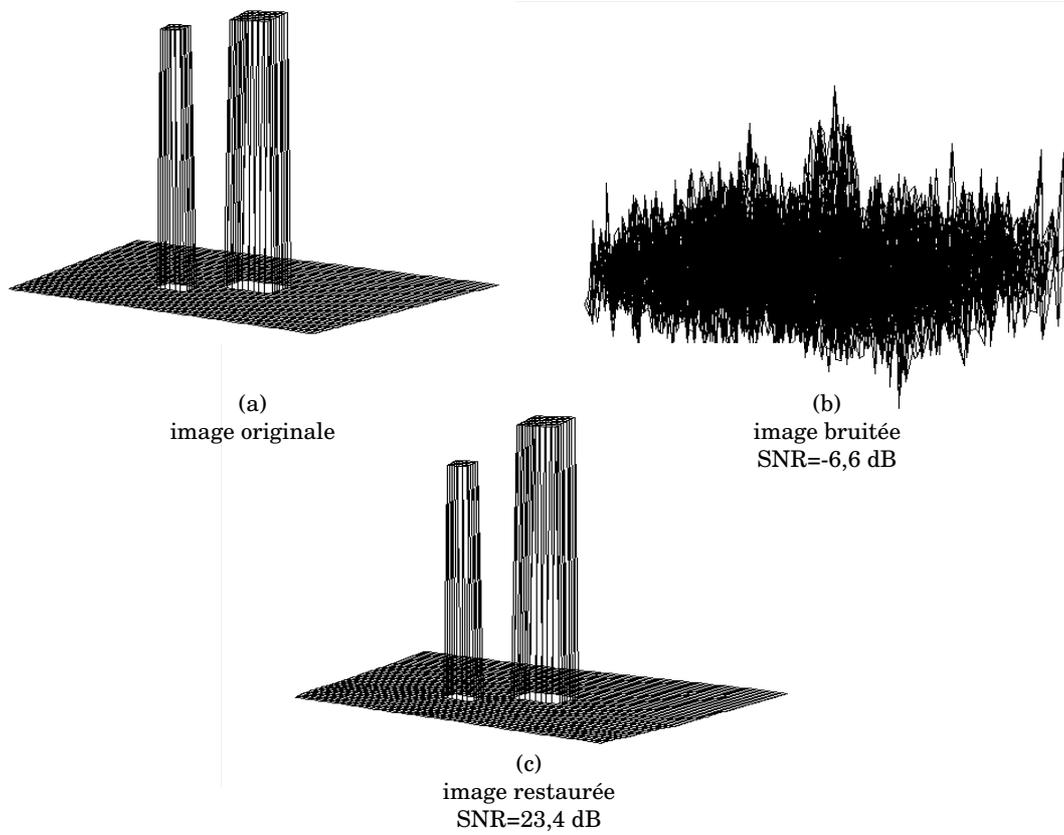


FIG. 4.16 – Profils des images originale, bruitée et restaurée avec l'algorithme de restauration et segmentation simultanées.

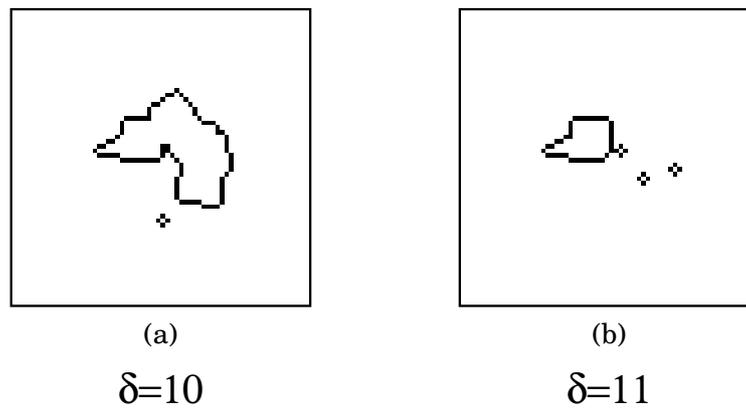


FIG. 4.17 – Résultats de segmentation de l'image bruitée par l'algorithme des snakes géométriques.

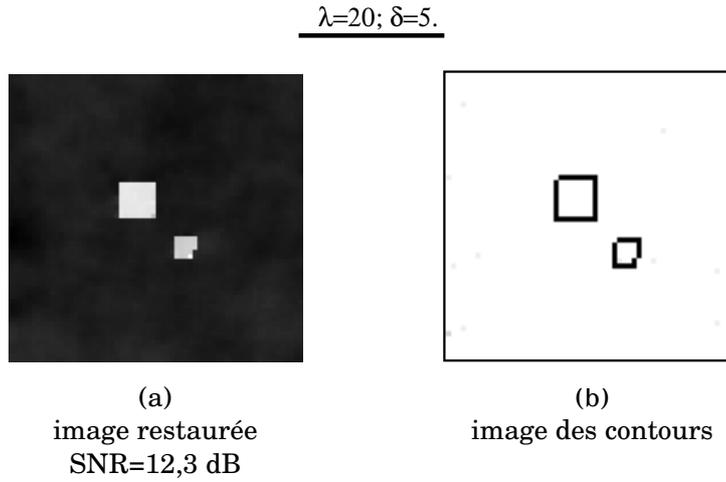


FIG. 4.18 – Restauration par l’algorithme ARTUR.

modèle des “snakes” classiques (cf. fonctionnelle (4.27) du paragraphe 4.4.2.

Pour pouvoir avoir une approximation au sens de la Γ -convergence, les auteurs utilisent une variable auxiliaire b pour modéliser l’ensemble Γ , de manière analogue à celle introduite par Ambrosio Tortorelli et à celle que nous utilisons. La différence est que cette variable n’est plus égale à 1 partout sauf aux endroits des contours où elle est nulle, mais elle est égale à 1 et -1 d’un côté et de l’autre d’un contour. Cette modification permet l’approximation du terme de rigidité au sens de la Γ -convergence.

- Le terme de longueur $\alpha \int_{\Gamma} ds$ est défini comme la Γ -limite (quand $\epsilon \rightarrow 0$) de la suite des fonctionnelles $F_1^\epsilon(b)$

$$F_1^\epsilon(b) = \frac{\alpha}{c_1} \int_{\Omega} \left[\epsilon |\nabla b|^2 + \frac{1}{\epsilon} W(b) \right] dx \quad (4.66)$$

où $W(b) = (b^2 - 1)^2$ est la fonction appelée *double-well potentiel* en anglais. Cette fonction est positive et ne s’annule qu’en -1 et +1. La fonction W est utilisée pour l’étude des transitions de phase en mécanique des fluides [Cahn et Hilliard, 1958] et nous l’utilisons dans le chapitre 5 pour la classification au paragraphe 5.2. c_1 est une constante positive.

- Le terme de rigidité $\beta \int_{\Gamma} \kappa^2 ds$ est défini comme la Γ -limite de la suite des fonctionnelles $F_2^\epsilon(b)$

$$F_2^\epsilon(b) = \frac{\beta}{c_2 \epsilon} \int_{\Omega} \left[2\epsilon |\Delta b| - \frac{1}{\epsilon} W'(b) \right]^2 dx \quad (4.67)$$

c_2 est une constante positive.

Le contour est modélisé par l’ensemble de niveau zéro de b , de manière analogue à la modélisation des contours actifs par ensemble de niveau, car b vaut ± 1 d’un côté et de l’autre du contour, de même que l’on définit une fonction distance positive ou négative dans les approches contours actifs. L’ensemble de niveau 0 ne forme pas une ligne de crête comme c’est le cas des fonctionnelles d’Ambrosio et Tortorelli et des variables auxiliaires que nous utilisons.

La fonctionnelle (4.64) est la Γ -limite de la suite

$$J_{MD}^\epsilon(f, b) = \int_{\Omega} (f - o)^2 dx + \lambda^2 \int_{\Omega} b^2 |\nabla f|^2 dx + F_1^\epsilon(b) + F_2^\epsilon(b) \quad (4.68)$$

En écrivant les équations d'Euler en f et b , associées à la fonctionnelle $J_{MD}^{\epsilon}(f, b)$, on trouve un système d'EDP couplées. La seconde équation régit l'évolution de la variable b , donc des contours de l'image, modélisés par l'ensemble de niveau 0 de b .

Notons pour terminer que la solution est très dépendante de l'estimée initiale, comme pour les contours actifs, et que tous les contours d'une image ne peuvent être modélisés ainsi. Seul les contours de certains objets pourront être détectés, ces objets dépendant de l'initialisation de la variable b . En effet, avec un seul ensemble de niveau, il est impossible de modéliser des jonctions triples par exemple.

Nous décrivons maintenant les travaux de J. Shah [Shah, 1996]. Pour cela, revenons sur la suite de fonctionnelles (4.20) mentionnées au paragraphe 4.3.6 et dont la convergence a été étudiée par Alicandro, Braides et Shah [Alicandro *et al.*, to appear, Braides, 1998]. Ces fonctionnelles sont

$$J^{\epsilon}(f, b) = \int_{\Omega} (f - o)^2 + \int_{\Omega} b^2 |\nabla f| + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} (b - 1)^2 + \epsilon \int_{\Omega} |\nabla b|^2, \quad (4.69)$$

C'est une suite particulière de celles initialement proposées par Shah en 1996 [Shah, 1996]. Shah s'est inspiré des modèles de contours actifs pour faire évoluer une courbe C vers les forts gradients de l'image, ou encore les 0 de la variable b , et a introduit un terme du type

$$\int_0^{L(C)} b^2(s) C(s) ds \quad (4.70)$$

s étant l'abscisse curviligne de C et $L(C)$ la longueur euclidienne. L'expression (4.70) n'est autre qu'une longueur pondérée de C , comme introduite dans les contours actifs géodésiques. Pour faire apparaître la courbe C_{ρ} sous la forme d'un ensemble de niveau d'une fonction u , il remarque que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{L(C_{\rho})} b^2(s) C_{\rho}(s) ds d\rho = \int_{\Omega} b^2(x) |\nabla u(x)| dx, \quad (4.71)$$

si les courbes C_{ρ} considérées sont les ensembles de niveaux ρ de u , soit $C_{\rho} = \{x/u(x) = \rho\}$. Il a ainsi remplacé le terme $\int_{\Omega} b^2 |\nabla f|^2$ de la fonctionnelle d'Ambrosio et Tortorelli définie en (4.13) [Ambrosio et Tortorelli, 1992], par le terme $\int_{\Omega} b^2 |\nabla f|$, issu des modèles de contours actifs. Le système des EDP couplées formé à partir des équations d'Euler associées à la minimisation des fonctionnelles définies par Shah est

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = (o - f) + \lambda^2 \operatorname{div} (b^2 \nabla f) = (o - f) + \lambda^2 \left(b^2 \operatorname{curv}(f) + 2b \nabla b \cdot \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \right) \\ \frac{\partial b}{\partial t} = 2b |\nabla f| + \frac{2\alpha}{\epsilon} (b - 1) + \alpha \epsilon \Delta b \end{cases} \quad (4.72)$$

La variable f joue le rôle de l'image et ses ensemble de niveaux évoluent selon des équations analogues à celles des contours actifs.

Ces deux approches nous semblent les plus représentatives des méthodes où contours actifs et régularisation se mêlent. Cette description n'est pas exhaustive et on assiste aujourd'hui à une volonté d'unifier toutes approches (cf. par exemple [Malladi et Sethian, 1996, Sapiro, 1996a, Sapiro, 1996b]).

4.5 Conclusion

Nous avons mis en évidence dans ce chapitre combien le problème de la segmentation d'image était lié au problème de régularisation d'image avec prise en compte des discontinuités. La fonctionnelle de Mumford et Shah en segmentation d'images fait explicitement intervenir les contours dans une image, la minimisation dans BV de fonctionnelles de régularisation revient à un modèle implicite des contours. La difficulté est d'appréhender des solutions dans BV ou SBV. Nous avons développé deux approches différentes pour cela. L'une est basée sur les fonctionnelles d'approximation par Γ -convergence. S'il reste des résultats à montrer (utilisation de fonction φ plutôt que la fonction quadratique par exemple), ce domaine est assez bien développé et cerné. La seconde est basée sur les contours actifs. Leur utilisation pour la segmentation d'image ou la régularisation en est aux balbutiements. Un grand nombre de questions restent ouvertes : quelle fonctionnelle, combien d'ensemble de niveaux sont nécessaires pour segmenter une image quelconque, quelle initialisation choisir,...

Chapitre 5

Classification d'images

Les résultats présentés dans ce chapitre ont été obtenus au cours de la thèse de C. Samson (soutenance en septembre 2000), en collaboration avec le Pr G. Aubert du laboratoire J-A. Dieudonné de l'UNSA et J. Zerubia, directeur de recherche à l'Inria.

5.1 Introduction

Dans le cadre de la thèse de Christophe Samson, débutée en octobre 97, je me suis intéressée au problème de la classification d'images satellitaires par approche variationnelle. La classification d'images satellitaires consiste à définir des classes symbolisant la nature du terrain imagé et à savoir définir une partition de l'image observée en fonction de ces classes. Il s'agit, par exemple à partir des niveaux de gris, de définir la nature d'une région (zone de forêt, zone urbaine...). Le facteur discriminant des classes entre elles est, sur des images type SPOT (10 m en panchromatique, 20 m en multispectral), le niveau d'intensité. En effet, à cette résolution les textures n'apparaissent pas significativement. Pour des résolutions plus faibles, (images type SPOT5), il est utile de faire intervenir des paramètres de texture pour la discrimination des zones urbaines par exemple [Lorette *et al.*, 1998]. Nous considérerons dans ce chapitre que le facteur discriminant est l'intensité, mais les méthodes présentées peuvent très bien s'adapter à d'autres facteurs, la seule hypothèse faite dans notre travail est la répartition gaussienne des valeurs à l'intérieur d'une classe.

Dans une image donnée, le nombre de classes est restreint, une dizaine ou une vingtaine, alors que le nombre de valeurs possibles de l'observation est beaucoup plus grand, (256 pour des images en niveau de gris codées sur 8 bits).

Les classes étant définies, il faut alors savoir attribuer automatiquement à tout point de l'image la classe à laquelle il appartient. Bien sûr on utilise pour cela, outre la proximité d'une observation à une classe (en tenant compte de la moyenne et de l'écart type de la classe), un critère d'homogénéité des régions ainsi obtenues, un point isolé d'une classe étant peu vraisemblable au milieu d'une classe différente.

L'ensemble des étapes de la classification (calcul du nombre de classes, calcul des éléments caractéristiques de chaque classe, attribution d'une classe en chaque point de l'image) est ce qu'on appelle la *classification non supervisée*. L'étape consistant à définir des classes pour une catégorie d'images (nombre et caractéristiques des classes) peut être automatique, ou effectuée par un opérateur. Nous avons dans ce travail considéré la problème de la *classification supervisée*, en supposant une étape préalable de définition des classes par un logiciel ou un expert. Le problème traité ici est donc celui du partitionnement de l'observation en fonction des classes prédéfinies.

De nombreux modèles de classification ont été développés dans l'approche structurale par

croissance de région par exemple [Pavlidis et Liow, 1988] ou par approche probabiliste (en particulier car la notion de classification est par nature discrète, puisqu'il s'agit d'attribuer une étiquette représentant une classe à chaque pixel de l'image) [Berthod *et al.*, 1996, Bolog *et al.*, 1995, Bouman et Shapiro, 1994, Descombes *et al.*, 1997a, Descombes *et al.*, 1997b, Kato, 1994, Lakshmanan et Derin, 1989]. Les modèles variationnels abordant ce sujet sont rares. Nous avons proposé deux modèles différents dans le cadre du calcul des variations et des EDP. Le premier modèle est constitué d'une fonctionnelle de restauration avec préservation des contours à laquelle nous rajoutons une contrainte de classe : la solution ne peut prendre ces valeurs que dans un ensemble discret, fini qui est fixé par les classes. Nous avons établi une analogie entre ce modèle et des travaux effectués dans le cadre des problèmes de transitions de phases en mécanique des fluides. Les modèles représentent dans ce cas les lois d'agencement stable de plusieurs fluides instables dans un domaine borné sous des conditions isothermiques. Les états de stabilité ont des propriétés intéressantes pour des images classifiées, en particulier des propriétés de régularité (longueur des interfaces minimales entre les différents fluides ou régions). Nous utilisons une suite de fonctionnelles elliptiques pour approcher un minimum d'une fonctionnelle limite par Γ -convergence, la fonctionnelle limite incluant une mesure sur une variété de co-dimension 1 (longueur des contours dans \mathbb{R}^2). La seconde approche utilise la technique des ensembles de niveau pour définir les régions non nécessairement connexes constituant la partition de l'image en fonction des classes. L'originalité de ces travaux réside dans l'utilisation simultanée de plusieurs ensembles de niveau (un par classe) évoluant conjointement pour former une partition de l'image observée. Ces deux approches, tout en reprenant les techniques développés dans le chapitre précédent concernant la régularisation et segmentation conjointe, sont novatrices dans le domaine du traitement d'image. Nous comparons ces approches à un modèle stochastique classique de classification d'image en terme de qualité de résultats et temps de calcul. Ces deux modèles ont donné lieu chacun à un rapport de recherche [Samson *et al.*, 1998] soumis à *IEEE trans. on Pattern Recognition and Machine Intelligence* et [Samson *et al.*, 1999a] soumis à *International of Journal of Computer Vision*, et des communications dans des conférences internationales (dont *CVPR'99* et *Scale Space'99*). Nous donnons en annexe les deux rapports de recherche, [Samson *et al.*, 1998] sous la référence [RR-98] et [Samson *et al.*, 1999a] sous la référence [RR-99].

Ces travaux ont été effectués en collaboration avec Christophe Samson actuellement en thèse et Gilles Aubert professeur de mathématiques au laboratoire J-A. Dieudonné de l'UNSA pour ce qui est de l'élaboration et de l'étude des modèles mathématiques. Pour la partie applicative et comparaison avec un modèle stochastique, nous avons travaillé en collaboration avec Josiane Zerubia, directeur de recherche à l'INRIA.

5.1.1 Hypothèses et notations

- $S = \{s\}_{s=1..N}$ l'ensemble des sites ou pixels de l'image discrète,
- L_s représente l'étiquette attribuée au pixel s ,
- Θ l'ensemble des étiquettes admissibles, $card\Theta = M$ et $L_s \in \Theta$,
- C_l est la l^{eme} classe caractérisée par une étiquette dans Θ .
- Chaque pixel est caractérisé par son niveau d'intensité \mathbf{o}_s ($o(x)$ en variable continue).
- La distribution est gaussienne à l'intérieur de chaque classe $C_{l;l=1..M}$, de moyenne μ_l et d'écart type σ_l . Nous utiliserons une notation vectorielle :

$$\mu = \{\mu_l\}_{l=1..M} \quad \text{et} \quad \sigma = \{\sigma_l\}_{l=1..M}.$$

- Le nombre M et les vecteurs de paramètres μ et σ des classes sont connus (i.e. classification *supervisée*).

Avant de présenter les modèles que nous avons développés dans l'approche déterministe, nous présentons un modèle simple et classique dans l'approche stochastique. Nous avons effectué des comparaisons entre nos modèles et ce modèle stochastique.

5.1.2 Description du modèle stochastique

Le modèle stochastique considéré est basé sur la théorie des champs de Markov (MRF en anglais) et a été utilisé par exemple dans [Berthod *et al.*, 1996, Descombes *et al.*, 1997a, Descombes *et al.*, 1997b]. Il consiste à associer à chaque pixel une étiquette qui représente une classe. Les différences principales avec les modèles variationnels sont : l'utilisation de variables discrètes plutôt que continues, la recherche d'étiquettes en chaque pixel (valeur arbitraire représentant une classe) à la place de valeurs d'intensité ou la recherche d'une partition de l'observation, et finalement l'algorithme de minimisation utilisé.

S et Θ sont définis comme précédemment et \mathcal{C} représente l'ensemble des cliques d'un modèle de Markov à l'ordre un (on considère des interactions entre un pixel et ses quatre plus proches voisins). Le problème posé est d'attribuer à chaque pixel ou site $s \in S$ une étiquette $L_s \in \Theta$. En utilisant la loi de Bayes et l'estimateur du Maximum a Posteriori (MAP, cf. paragraphe 3.2.1 du chapitre 3), on cherche

$$\begin{aligned} \hat{L} &= \arg \max_L P(L/\mathbf{o}) \stackrel{\text{Bayes}}{=} \arg \max_L P(\mathbf{o}/L)P(L) \\ &= \arg \min_L (-\ln P(\mathbf{o}/L)P(L)). \end{aligned} \quad (5.1)$$

\mathbf{o} sont les données observées et $P(\mathbf{o})$ est omis car il ne dépend pas de L . $P(\mathbf{o}/L)$ est telle que $P(\mathbf{o}/L) = \prod_s P(\mathbf{o}_s/L_s)$ car on suppose qu'il y a indépendance des observations conditionnellement aux étiquettes. La répartition des observations pour chaque classe suit une loi gaussienne, on a

$$P(\mathbf{o}_s/L_s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{L_s}} \exp\left[-\frac{(\mathbf{o}_s - \mu_{L_s})^2}{2\sigma_{L_s}^2}\right]. \quad (5.2)$$

La probabilité a priori suit un modèle de Potts défini par

$$\begin{aligned} P(L) &= \frac{1}{Z} \exp\left[-\frac{\beta}{T} \sum_{\{s,r\} \in \mathcal{C}} \delta(L_s, L_r)\right] \quad \text{avec } \beta > 0 \\ \text{et } \delta(a, b) &= \begin{cases} -1 & \text{si } a = b \\ +1 & \text{si } a \neq b \end{cases} \end{aligned} \quad (5.3)$$

T est le paramètre de température, Z le coefficient de normalisation de la distribution de probabilité (*fonction de partition*), β est le paramètre de régularisation. Plus β est grand, et plus les configurations de deux étiquettes voisines de valeurs différentes sont pénalisées. Elles sont donc peu probables sur l'image résultat qui sera formée de zones homogènes.

L'estimée \hat{L} au sens du MAP est obtenu par

$$\begin{aligned} \hat{L} &= \arg \min_L E(L), \quad \text{où } E \text{ est l'énergie définie par :} \\ E(L) &= \frac{1}{T} \left[\sum_{s=1}^N \left(\log(\sqrt{2\pi}\sigma_{L_s}) + \frac{(\mathbf{o}_s - \mu_{L_s})^2}{2\sigma_{L_s}^2} \right) + \beta \sum_{\{s,r\} \in \mathcal{C}} \delta(L_s, L_r) \right]. \end{aligned} \quad (5.4)$$

L'optimisation est obtenue par recuit simulé en utilisant l'algorithme de Metropolis par exemple. Les paramètres nécessaires, en plus des paramètres des classes, sont la température initiale, le facteur de décroissance de la loi de température, et la valeur de β . La température doit décroître lentement. La valeur de β dépend du niveau de bruit sur les données et du niveau d'homogénéité escompté des régions.

Afin de pouvoir comparer les résultats avec ceux des modèles variationnels de classification, les labels L_s sont représentés par les valeurs moyennes des classes $\{\mu_i\}_{i=1..M}$.

Le modèle considéré dans cette approche est très simple. D'autres modèles plus complexes et mieux adaptés au traitement d'image, qui prennent en compte la longueur des contours par exemple, peuvent être appliqués. La comparaison avec les modèles variationnels, dans lesquels nous tenons compte de la longueur des contours, serait alors plus adéquate. Cependant nous verrons que le temps de calcul pour l'estimation du modèle stochastique simple présenté, est bien plus élevé que le temps de calcul en variationnel, pour la première méthode variationnelle présentée en particulier. Cette différence de calcul serait accrue avec un modèle stochastique plus complexe.

5.2 Classification par minimisation de fonctionnelles

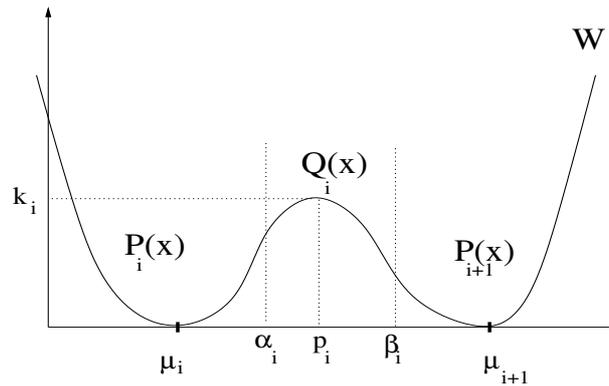
Ce travail est exposé dans le rapport de recherche joint en annexe intitulé *Image Classification Using a Variational Approach*, soumis depuis septembre 1998 à la revue *IEEE Trans. on PAMI* que nous référençons dans ce document [RR-98] et dont la référence est [Samson et al., 1998]. Il a été présenté à la conférence internationale *IEEE Conference on Computer Vision & Pattern Recognition* en juin 1999 [Samson et al., 1999b].

L'approche adoptée ici est totalement différente de l'approche stochastique utilisant le modèle de Potts. Non seulement le cadre est différent (variationnel/stochastique), mais les variables cherchées sont aussi différentes. Dans l'approche stochastique, la variable inconnue est l'étiquette en chaque pixel représentant la classe, dans l'approche variationnelle, la variable inconnue est l'intensité (ou tout autre paramètre discriminant les classes), que l'on cherche à ajuster par rapport aux données et par rapport aux moyennes des classes. Ainsi, la fonctionnelle de classification d'image a été construite à partir de la fonctionnelle de restauration d'image préservant les discontinuités (3.44) (avec $H = I$) à laquelle nous avons rajouté un terme de contrainte de classe et un paramètre ϵ de convergence

$$J_\epsilon^C(f) = \underbrace{\int_{\Omega} (f(x) - o(x))^2 dx}_{\text{attache aux données}} + \epsilon \lambda^2 \underbrace{\int_{\Omega} \varphi\left(\frac{|\nabla f(x)|}{\delta}\right) dx}_{\text{terme de restauration}} + \frac{\eta}{\epsilon} \underbrace{\int_{\Omega} W(f(x)) dx}_{\text{terme de contrainte de classe}} \quad (5.5)$$

La fonction $W : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ définit la contrainte de classe en attirant les valeurs de la solution $f(x)$ vers les moyennes μ_l des classes. W doit prendre en compte la propriété de distribution gaussienne à l'intérieur des classes. W a M minima sur les valeurs μ_l telles que $W(\mu_l) = 0, \forall l = 1..M$. Nous construisons W telle que $W \in C^1(\mathbb{R})$ et W est parabolique par morceaux. En particulier W est quadratique autour de ses minima et à croissance plus que linéaire à l'infini (cf. article [RR-98] en annexe). La forme de W est donnée en figure 5.1. Pour chaque ensemble de paramètres (μ, σ) , nous obtenons une fonction W différente.

La fonction φ est une fonction de régularisation avec préservation des discontinuités comme proposée au paragraphe 3.3.2 du chapitre 3. En fait, la fonction W permet d'introduire la contrainte de classe sous la forme d'une pénalité. Par analogie aux travaux effectués

FIG. 5.1 – Construction de la fonction W , parabolique par morceaux.

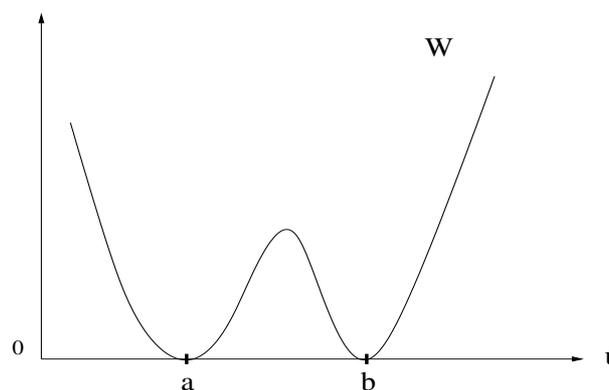
dans le domaine de la modélisation des transitions de phases en mécanique des fluides, nous avons introduit le paramètre ϵ et défini le problème d'estimation d'une fonction \tilde{f} solution de

$$\tilde{f} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\arg \min_f J_\epsilon^C(f) \right], \quad (5.6)$$

la limite étant prise au sens de la Γ -convergence.

5.2.1 Théorie des transitions de phases de Cahn-Hilliard

La théorie des transitions de phases de Cahn-Hilliard [Cahn et Hilliard, 1958] permet l'étude des états stables de systèmes mécaniques formés de phases instables liquides ou solides. Pour simplifier, nous présentons la théorie pour deux phases, l'extension à M phases pouvant être trouvée dans Baldo [Baldo, 1990]. Il peut s'agir de mélanges comme le fer et l'aluminium [Allen et Cahn, 1979], ou des mélanges de fluides [Modica, 1987]. Le problème commun de ces applications est de caractériser l'état stable des systèmes et d'analyser en particulier le comportement des interfaces entre les deux phases quand le système atteint son équilibre.

FIG. 5.2 – Fonction W à deux puits (*double-well potential*).

Considérons, par exemple, un système dynamique formé d'un seul fluide dont l'énergie libre de Gibbs par unité de volume est une fonction W de la distribution de densité u . $W : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction positive, continue, avec exactement deux minima a et

b ($a < b$) tels que $W(a) = W(b) = 0$, le fluide étant stable pour ces deux valeurs de densité. W est connue comme la fonction *double-well potential* (en anglais) (voir Fig. 5.2). On suppose que le fluide est sous conditions isothermes et contenu dans un domaine borné Ω . Le problème est de calculer les configurations stables du système. A stabilité, le fluide ne prendra que les deux valeurs minimales a et b , sous contrainte de masse totale conservée. Ce phénomène peut s'exprimer sous la forme d'une minimisation $\inf_u \int_{\Omega} W(u(x)) dx$ sous la contrainte $\int_{\Omega} u(x) dx = m$, où Ω est un ouvert Lipschitz de \mathbb{R}^n , et m est la masse totale du fluide. Ce problème a de multiples solutions. La théorie de Cahn-Hilliard [Cahn et Hilliard, 1958] a été développée afin de pallier ce problème de solutions multiples en ne sélectionnant que les solutions dont la répartition de densité u est régulière dans le sens où la longueur des interfaces entre les régions de valeur a ou b est minimale. Pour cela, un terme dit de *perturbation* $\epsilon |\nabla u|^2$ a été introduit avec ϵ petit. Avec notre vocabulaire, ce terme est plutôt appelé terme de régularisation. On considère alors la suite des problèmes variationnels P_{ϵ} (voir [Baldo, 1990, Bellettini *et al.*, 1991, Fonseca et Tartar, 1989, Modica, 1987, Sternberg, 1991, Sternberg et Zeimer, 1994]) :

$$P_{\epsilon} \begin{cases} \inf_u E_{\epsilon}(u), \\ E_{\epsilon}(u) = \int_{\Omega} \left[\epsilon |\nabla u(x)|^2 + \frac{1}{\epsilon} W(u(x)) \right] dx, \\ \text{et } u \text{ est soumis à la contrainte : } \int_{\Omega} u(x) dx = m, \end{cases} \quad (5.7)$$

W est supposée quadratique autour des valeurs minimales a et b , et est à croissance au moins linéaire à l'infini (voir par exemple [Fonseca et Tartar, 1989] pour des conditions explicites sur W). Les résultats sont encore valides pour $W : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^+$ (voir [Baldo, 1990, Fonseca et Tartar, 1989, Sternberg, 1991]). La suite des problèmes P_{ϵ} et ses solutions quand $\epsilon \rightarrow 0^+$, a été étudiée par différents auteurs [Bellettini *et al.*, 1991, Fonseca et Tartar, 1989, Modica, 1987, Sternberg, 1991] au sens de la Γ -convergence introduite par De Giorgi [Giorgi, 1978] (cf. paragraphe 4.3 du chapitre 4). Si Ω et W satisfont les conditions introduites précédemment, les principaux résultats sont :

- E_{ϵ} Γ -converge vers E_0 :

$$E_0(u) = \begin{cases} K \text{Per}_{\Omega}(R_1) & \text{si } u(x) \in \{a; b\} \text{ p.p.} \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $R_1 = \{x \in \Omega / u(x) = a\}$ et K est égal à :

$$K = 2 \inf_g \left\{ \int_{-1}^1 \sqrt{W(g(s))} |g'(s)| ds; \quad g \text{ est } C^1 \text{ par morceaux, } g(-1) = a, g(1) = b \right\}$$

$\text{Per}_{\Omega}(R_1)$ est le périmètre de l'ensemble R_1 dans Ω défini par la variation totale de la fonction indicatrice de R_1 .

- Si u_{ϵ} est une suite de minimiseurs de E_{ϵ} telle que u_{ϵ} converge vers u_0 dans $L^1(\Omega)$, alors u_0 est solution du problème :

$$\inf_u \text{Per}_{\Omega}(R_1) \quad \text{où} \begin{cases} u \in BV(\Omega), \\ W(u(x)) = 0 \text{ p.p.}, \\ \int_{\Omega} u(x) dx = m \end{cases}$$

- Toute suite (v_ϵ) , telle que $E_\epsilon(v_\epsilon) \leq \text{constant} < \infty \forall \epsilon$, admet une sous-suite convergente dans $L^1(\Omega)$ (compacité dans $L^1(\Omega)$).

Remarque

L'équation aux dérivées partielles associée à la minimisation de E_ϵ est l'équation de réaction-diffusion de Ginzburg-Landau :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \epsilon \Delta u - \frac{1}{\epsilon} W'(u), \quad \text{où } t \text{ est le paramètre de temps} \\ u(x, 0) &= u_0(x) \end{aligned} \quad (5.8)$$

Cette EDP a beaucoup été étudiée, de manière indépendante au problème de minimisation (5.7) (voir par exemple [Barles *et al.*, 1992, Caginalp, 1989, Rubinstein *et al.*, 1989]). Il est montré que la solution $u_\epsilon(x, t)$ de (5.8) quand $\epsilon \rightarrow 0$ est une fonction constante par morceaux ne prenant que les deux valeurs a et b . De plus l'évolution de l'interface entre les deux régions $\{x \in \Omega / u_\epsilon(x, t) = a\}$ et $\{x \in \Omega / u_\epsilon(x, t) = b\}$ suit une évolution par courbure moyenne [Allen et Cahn, 1979, Barles *et al.*, 1992, Kichenassamy *et al.*, 1996, Reitich et Soner, 1996, Rubinstein *et al.*, 1989], ce qui induit une certaine régularité de l'interface.

5.2.2 Analogie avec la classification d'image

Nous considérons la transposition de ces résultats au problème de la classification d'image tel qu'il a été défini en (5.5). Nous recherchons la répartition de l'intensité f sur Ω par analogie à la répartition de densité u en (5.7). Si l'image observée n'est composée que de deux types de régions caractérisées par une distribution gaussienne d'intensité autour de moyennes a et b , et que les observations sont dégradées par un bruit blanc, additif, gaussien, stationnaire, d'écart type σ_b , on considère alors le problème de minimisation

$$\tilde{P}_\epsilon \begin{cases} \min_f \tilde{E}_\epsilon(f), \\ \tilde{E}_\epsilon(f) = \int_\Omega \left[\epsilon |\nabla f(x)|^2 + \frac{1}{\epsilon} W(f(x)) \right] dx, \\ f \text{ soumis à la contrainte : } \int_\Omega (f(x) - o(x))^2 dx \leq \sigma_b^2 \end{cases} \quad (5.9)$$

La contrainte interdit à la solution de s'éloigner trop des observations en moyenne quadratique, la forme de W prend en compte la répartition gaussienne des valeurs autour des moyennes a et b . A ϵ fixé, la fonctionnelle $\tilde{E}_\epsilon(f)$ est composée de deux termes

$$\tilde{E}_\epsilon(f) = \int_\Omega \left[\underbrace{\epsilon |\nabla f|^2}_{\text{régularisation}} + \underbrace{\frac{1}{\epsilon} W(f)}_{\text{contrainte de niveau}} \right] dx \quad (5.10)$$

Le premier terme empêche la solution de développer des singularités en régularisant la solution (régularisation de type Tikhonov [Tikhonov et Arsenin, 1977], cf. paragraphe 3.2.1 du chapitre 3), en introduisant un lissage isotrope de la solution. Le second terme force la solution à ne prendre que les deux valeurs possibles a et b , caractérisant les deux types de régions de l'image. Ainsi, même si la régularisation est forte, la contrainte de niveau W oblige la solution à rester proche des valeurs a et b .

La convergence sur ϵ introduit une évolution sur les poids de chaque terme. Le paramètre ϵ est initialement non négligeable. Le processus de régularisation est au départ important. Quand $\epsilon \rightarrow 0^+$, le terme de niveau devient prépondérant et le terme de régularisation disparaît. On peut dire grossièrement que l'on commence par enlever le bruit des observations

puis, une fois la restauration effectuée, on classe l'image avec une confiance importante. Conformément aux résultats énoncés précédemment, quand $\epsilon \rightarrow 0^+$ la solution f de \tilde{P}_ϵ converge vers une fonction telle que $f(x) = a$ ou b p.p. et telle que l'interface entre ces deux régions soit de longueur minimale (donc régulière). Les contours de l'image solution sont donc abrupts (plus ϵ est faible, plus les contours sont abrupts). A convergence, on est en présence de discontinuités de f , formant des courbes régulières.

Le modèle que nous proposons pour la classification (5.5) consiste d'abord à introduire la contrainte des observations sous forme d'un terme de pénalité. Les résultats de Γ -convergence restent inchangés à une perturbation continue de la fonctionnelle [Giorgi, 1978]. On a le résultat suivant

$$\begin{aligned} \text{si} \quad & F_\epsilon(u) \xrightarrow{\Gamma} F_0(u) \quad \text{quand } \epsilon \rightarrow 0^+ \\ \text{alors} \quad & F_\epsilon(u) + \int_\Omega (u(x) - o(x))^2 dx \xrightarrow{\Gamma} F_0(u) + \int_\Omega (u(x) - o(x))^2 dx \\ & \text{quand } \epsilon \rightarrow 0^+ \end{aligned}$$

où $o : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ modélisant les observations. Ainsi les solutions auront les propriétés théoriques des minimiseurs que nous venons de décrire et tiendra aussi compte des observations o . Il y aura donc un compromis entre l'attache aux données et la régularité de la solution.

La deuxième modification est l'extension du modèle de deux puits à M puits de potentiels (M classes). Si la plupart des auteurs ont étudié le cas de deux puits, [Allen et Cahn, 1979, Barles *et al.*, 1992, Caginalp, 1989, Modica, 1987, Rubinstein *et al.*, 1989, Sternberg, 1991], quelques uns ont considéré le cas à trois puits [Reitich et Soner, 1996, Sternberg et Zeimer, 1994], et le cas général à M puits est présenté par Baldo [Baldo, 1990]. Baldo a étendu les résultats précédents au cas $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ et pour un potentiel $W : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}_+$ à M minima de valeurs zéro. La différence dans les résultats entre deux puits et M puits est que, lorsqu'il y a M puits, le terme de longueur dans la fonctionnelle limite est une longueur *pondérée* des interfaces. La longueur d'une transition particulière entre deux interfaces dépend de la différence des valeurs des deux phases concernées par cette transition [Baldo, 1990]. Ainsi, pour une fonction $W : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, la pondération du terme de longueur de l'interface entre deux phases μ_l et $\mu_{l'}$ dans la fonctionnelle limite est proportionnelle à la différence $|\mu_l - \mu_{l'}|$. Schématiquement, plus deux puits sont éloignés, et plus la longueur de l'interface entre la région μ_l et la région $\mu_{l'}$ sera pénalisée. Ceci se traduit, au niveau numérique, par l'introduction de classes intermédiaires à l'endroit de l'interface entre μ_l et $\mu_{l'}$, comme on peut le voir sur la figure 5.4 dans l'exemple de la fonction quadratique $\varphi(t) = t^2$. Le modèle classique (φ quadratique) donne des résultats numériques tout à fait corrects si l'on se restreint à deux classes. Pour plus de deux classes, il faudrait considérer un potentiel vectoriel $W : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^+$ qui permettrait de construire des fonctions W telles que les puits soient tous à la même distance les uns des autres. Ainsi toutes les longueurs seraient pondérées de la même manière. Nous n'avons pas envisagé d'utiliser de telles fonctions W pour deux raisons. La première est que la construction de la fonction W sur \mathbb{R}^{K-1} pour modéliser K classes et surtout la construction d'un critère de classification correspondant est un problème beaucoup plus difficile que celui que nous avons traité (construction de W sur \mathbb{R}). De plus, nous réservons l'extension vectorielle de W pour le traitement de données vectorielles (multispectrales, i.e. des observations et des moyennes dans \mathbb{R}^p).

La dernière modification apportée concerne le terme de perturbation quadratique, remplacé par un terme de régularisation utilisant une fonction φ . Ceci est motivé par le fait

MECANIQUE	→	TRAITEMENT D'IMAGES
contrainte dans le problème (5.7)	→	pénalité introduite dans la fonctionnelle (5.5)
potentiel à 2 puits	→	potentiel à M puits (classes)
terme de perturbation $\epsilon \nabla u ^2$	→	terme de régularisation $\epsilon\varphi(\nabla f)$

TAB. 5.1 – Des transitions de phases à la fonctionnelle de classification

que nous utilisons une fonction W définie sur \mathbb{R} avec un nombre de puits de potentiel supérieur à deux. Dans ce cas, nous avons apparition d'une classe intermédiaire entre deux classes de moyennes éloignées, car le terme de régularisation quadratique lisse le signal à la transition (cf. figure 5.4 avec $\varphi(t) = t^2$). Pour éviter cela, nous utilisons une fonction de régularisation qui ne lisse pas l'interface, soit une fonction φ de régularisation avec préservation des contours (cf. figure 5.4 pour les autres fonctions $\varphi(t)$). Dans [Owen et Sternberg, 1991], Owen et Sternberg présentent des résultats théoriques de Γ -convergence avec des termes perturbatifs plus généraux que la fonction quadratique. Cependant, le comportement du terme en $\epsilon|\nabla u|^2$ doit être au moins parabolique en l'infini. Ce n'est pas du tout le cas des fonctions φ et notre problème de minimisation (5.5-5.6) est un problème ouvert. Ce problème est discuté après les résultats au paragraphe 5.2.4.

Les transpositions effectuées entre les travaux en mécanique (5.7) pour lesquels les résultats théoriques sont valides et la classification d'images à travers le problème de minimisation défini par (5.5-5.6), sont résumés dans le tableau 5.1

5.2.3 Algorithme et résultats

L'algorithme est basé sur le développement semi-quadratique de la fonction φ et les minimisations alternées en f et la variable auxiliaire b (voir chapitre 3 paragraphe 3.3.4). A b fixé, le critère est localement linéaire car la fonction W est localement quadratique. Nous résolvons le système linéaire par un algorithme de descente de gradient.

Nous ne présentons ici que deux résultats sur des images synthétiques, des résultats sur données réelles satellitaires peuvent être trouvés dans le rapport [RR-98] en annexe. Tous les résultats sont obtenus sur une station à 166 MHz.

Remarque : "VC" représente les résultats de classification par la méthode variationnelle et "SC" par la méthode stochastique.

Les paramètres des classes (nombre de classes, moyennes et variances) sont soit pré-calculées par un algorithme de type nuées dynamiques, soit données par un expert (image satellitaire). Les autres paramètres nécessaires à l'algorithme sont ceux concernant les modèles et les algorithmes, que ce soit en variationnel ou en stochastique. Ceux-ci sont réglés expérimentalement. Comme en restauration d'image, nous utilisons dans la fonction φ un paramètre δ pour ré-échelonner, à notre convenance, le module du gradient de $f : \varphi\left(\frac{|\nabla f|}{\delta}\right)$

classe	moyenne μ_i	écart type σ_i
1 (carrés noirs)	85.0	12.85
2 (triangle)	115.0	12.85
3 (disque)	145.0	12.85
4 (carrés blancs)	175.0	12.85

TAB. 5.2 – Paramètres des 4 classes pour l'image "échiquier". L'écart type est le même pour toutes les classes, égal à celui du bruit additif.

(cf. paragraphe 3.3.1 du chapitre 3). L'initialisation est faite avec $f = o$ et $\epsilon = 1$. La loi de décroissance en ϵ est ad hoc, de même que celle de la température pour l'algorithme de recuit simulé dans l'approche stochastique. Nous avons aussi remarqué qu'il est important expérimentalement d'augmenter la pondération des deux derniers termes de la fonctionnelle (5.5) par rapport au premier terme, c'est-à-dire le terme de régularisation et le terme de contrainte de niveau, quand $\epsilon \rightarrow 0$ pour obtenir plus de stabilité numérique et éviter la réapparition de bruit quand le terme de restauration disparaît. Quand elle n'est pas précisée, la fonction φ utilisée est la fonction proposée par Geman et Mc Clure [Geman et Clure, 1985] ($\varphi(t) = \frac{t^2}{1+t^2}$).

Images synthétiques

La première image considérée est l'image "échiquier" de dimension 128x128 pixels avec 4 niveaux d'intensité. Nous avons ajouté un bruit blanc gaussien donnant une image observée de rapport signal sur bruit (SNR), en rapport de variance, égal à 10dB. Les paramètres des classes sont donnés dans le tableau 5.2. La fonction W a 4 puits de potentiel. La figure 5.3 montre les images en sortie de minimisation de (5.5-5.6) : l'image d'intensité restaurée f (SNR=27.9dB), l'image des contours b , l'image des classes VC obtenue en sélectionnant en chaque pixel la moyenne des classes la plus proche de l'image restaurée f , et enfin l'image des classe par SC. Le pourcentage de pixels mal classés pour VC est 0.23% et pour SC de 0.18%. Le temps de calcul est de 18 secondes pour VC et 78 secondes pour SC. Sur la figure 5.4, nous montrons l'influence du choix de la fonction de régularisation φ . Avec une régularisation quadratique, les contours de l'image sont trop lissés et nous voyons l'apparition de classes intermédiaires entre deux classes de moyennes éloignées. Ceci s'explique bien physiquement et aussi par les résultats de convergence sur des fonctionnelles à M puits de potentiel [Baldo, 1990]. Les meilleurs résultats sont obtenus pour la fonction de Geman et Mc Clure [Geman et Clure, 1985] à asymptote finie à l'infini, alors que la justification théorique de la suite des fonctionnelles dans ce cas est un problème ouvert.

La seconde image est une image synthétique de la base de données du groupement de recherche GdR-PRC ISIS (<http://www-isis.enst.fr>). Cette image ("gdr") a été créée pour tester des algorithmes de segmentation et classification d'images. Sa dimension est 256x256 pixels. La version bruitée est de rapport signal sur bruit (SNR) égal à 10dB. Cette image présente deux difficultés majeures : la première est constituée par la grande irrégularité du contour de la forme en bas à droite, la seconde difficulté est due au dégradé dans le rectangle en haut à droite. Nous présentons les résultats en choisissant 8 classes, ce qui permet de découper le dégradé en différentes classes (voir tableau 5.3 et figure 5.5). Les classes 6,7 et 8 sont pratiquement impossible à distinguer. Les résultats de classification sont présentés en figure 5.6. Le temps de calcul pour VC est de 101 secondes et pour SC de 671 secondes. Pour cette image difficile, les résultats par la méthode VC sont meilleurs et obtenus plus rapidement. Bien sûr, le modèle stochastique est moins élaboré que le modèle variation-

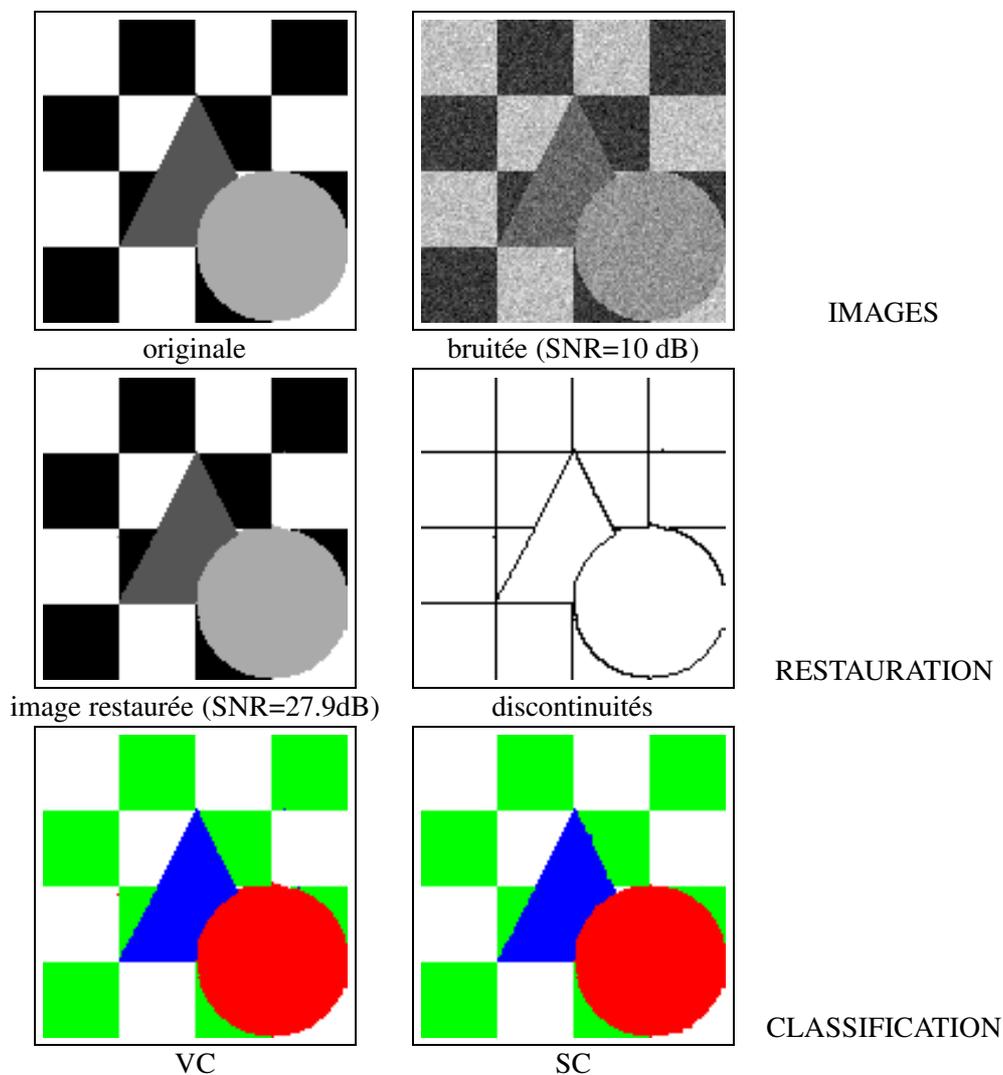
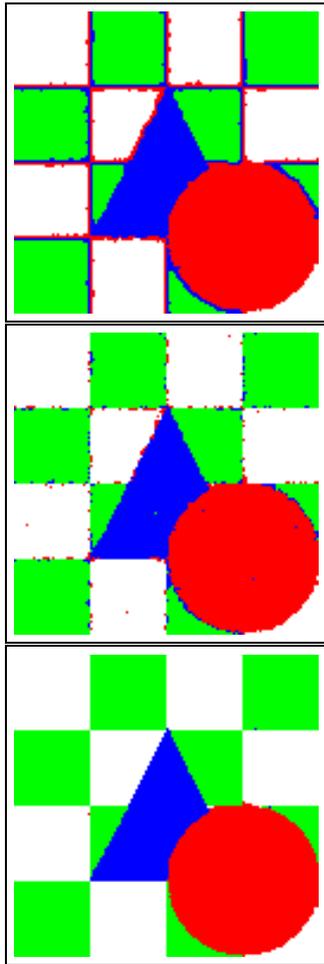


FIG. 5.3 – Résultats sur l'image "échiquier". Paramètre du modèle variationnel : $\lambda = 16$, $\delta = 15$, $\eta = 0.1$, 7 itérations sur ϵ . Paramètre du modèle stochastique : $\beta = 2.1$, 1000 itérations du recuit simulé. Temps de calcul : VC=18s, SC=78s.



$\varphi(t) = t^2$: convexe (Tikhonov)

$\varphi(t) = \log(\cosh(t))$: convexe (Green)

$\varphi(t) = \frac{t^2}{1+t^2}$: non convexe (Geman & McClure)

FIG. 5.4 – Classification de l'image “échiquier” avec différentes fonctions φ .

classe	moyenne μ_i	écart type σ_i
1	100.0	5.56
2	128.0	5.56
3	135.0	5.56
4	142.0	5.56
5	149.0	5.56
6	156.0	5.56
7	160.0	5.56
8	163.0	5.56

TAB. 5.3 – Paramètres des 8 classes de l’image “gdr”. L’écart type est le même pour toutes les classes, égale à celui du bruit additif sur l’observation.

nel, nous n’y avons pas fait apparaître en particulier de terme sur les contours définis par les classes, ce qui serait tout à fait faisable [Descombes *et al.*, 1997a, Descombes *et al.*, 1997b], mais augmenterait de manière significative le temps de calcul. Il est bien difficile de tirer quelques conclusions que ce soit à partir de ces résultats. Citons aussi les très bons résultats de classification obtenus sur cette image dans une approche stochastique et hiérarchique, présentés dans la thèse de Z. Kato [Kato, 1994]. L’aspect hiérarchique permet d’améliorer les performances des algorithmes en temps de calcul ou/et en qualité, que ce soit dans l’approche stochastique ou variationnelle.

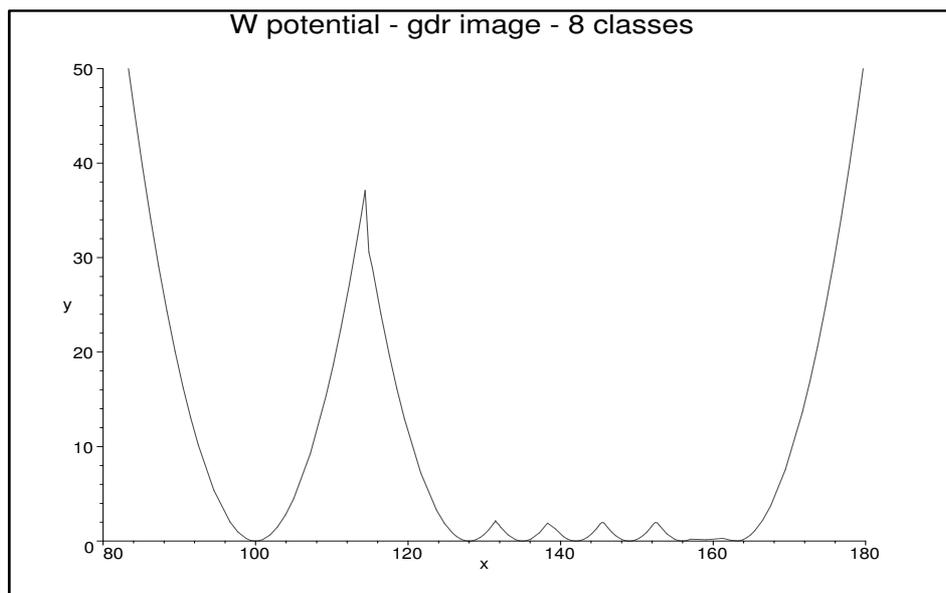


FIG. 5.5 – Fonction W pour l’image “gdr” avec 8 classes. Les classes de moyennes 156.0, 160.0 et 163.0 sont très difficiles à distinguer.

5.2.4 Discussion

Il est difficile de tirer des conclusions générales à partir des comparaisons de modèles présentées ici (voir aussi celles sur données réelles dans l’annexe [RR-98]). D’autres données réelles sont à l’étude dans le cadre d’une collaboration avec le professeur Yoram Bresler de l’Université de l’Illinois à Urbana-Champaign aux Etats-Unis (UIUC). Des données

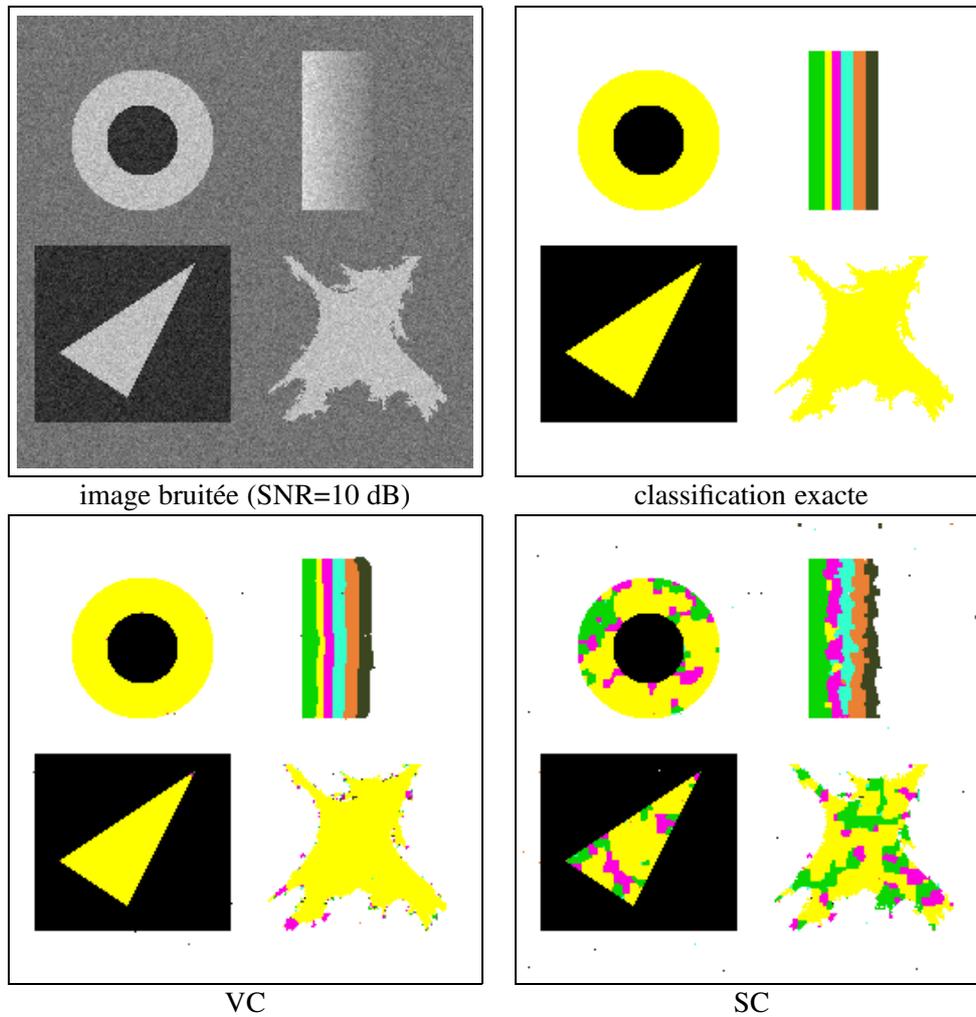


FIG. 5.6 – Résultats pour l'image bruitée "gdr" avec 8 classes. Paramètres du modèle variationnel : $\lambda = 60$, $\delta = 6$, $\eta = 0.05$, 35 itérations sur ϵ . Paramètres du modèle stochastique : $\beta = 1.3$, 2000 itérations de recuit simulé. Temps de calcul : VC=101s, SC=671s.

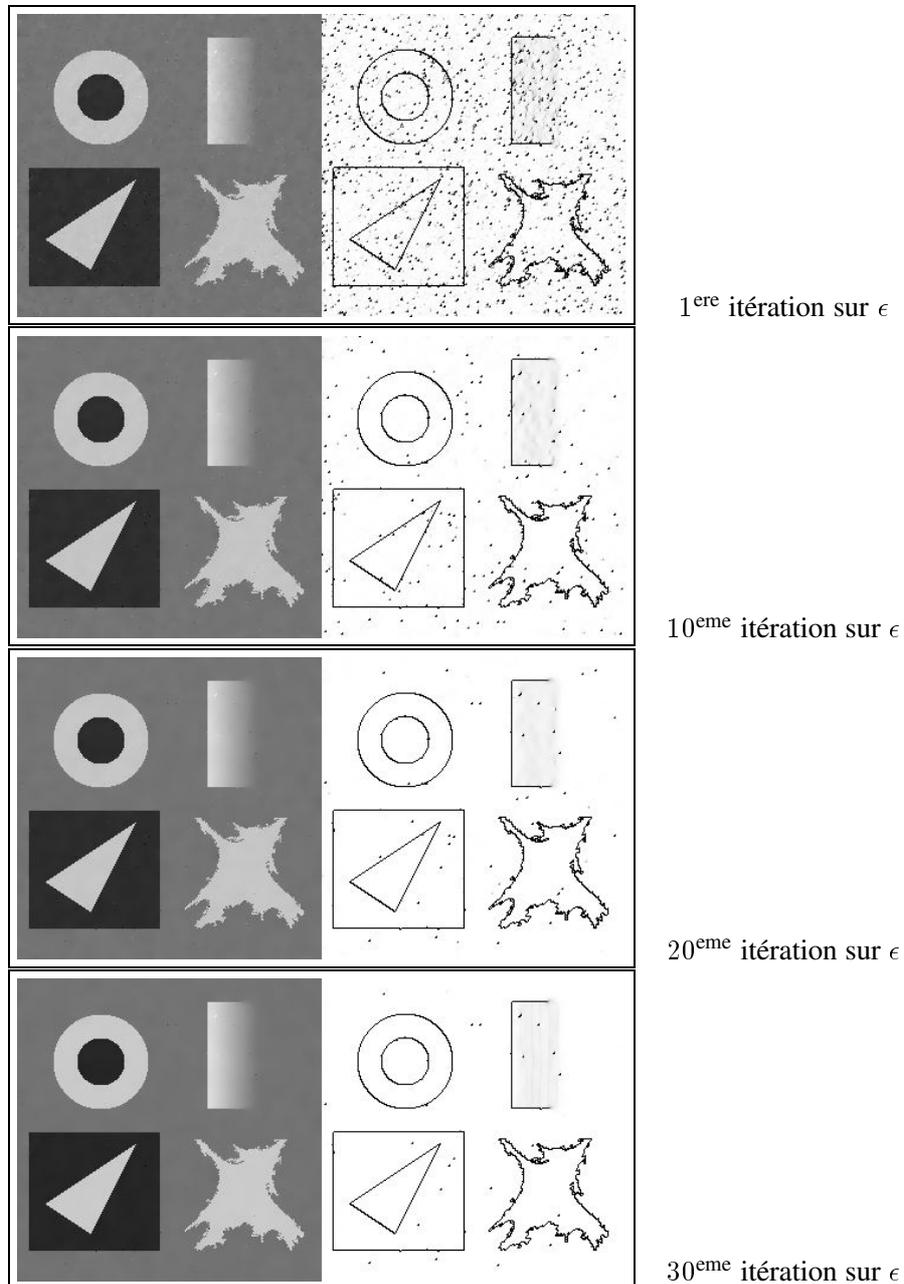


FIG. 5.7 – Solution f_ϵ (côté gauche) et contours associés b (côté droit) pour l'image "gdr" avec 8 classes quand ϵ décroît au cours des itérations. De l'itération 1 à 30, le terme de restauration est dominant, puis le terme de contrainte de classes devient prépondérant.

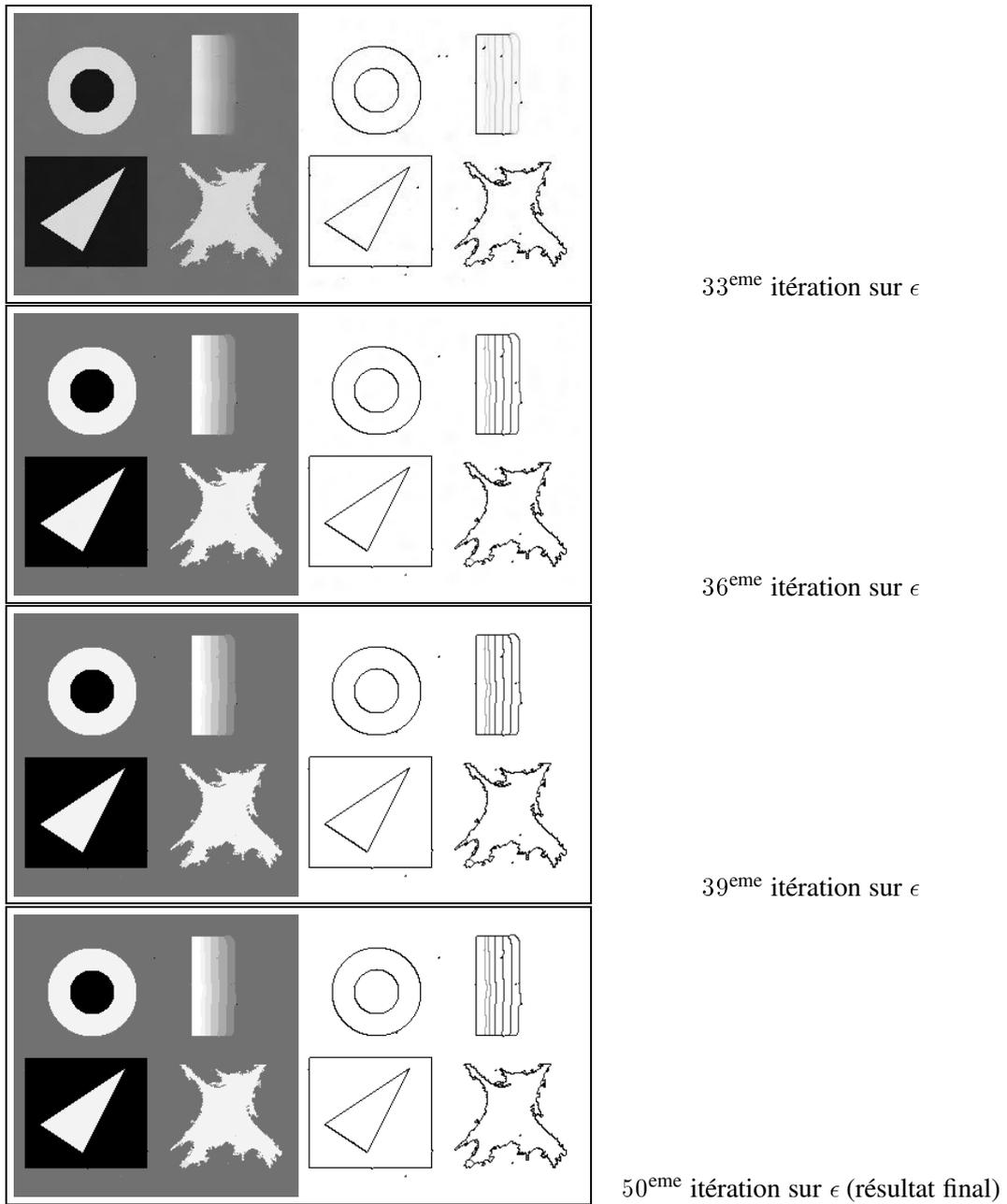


FIG. 5.8 – Suite de la fig. 5.7. Les classes commencent à se dessiner à partir de l'itération 30. Le résultat final est celui présenté (en couleur) en bas à gauche de la figure 5.6.

satellitaires et cartographiques de l'état de l'Illinois sont en cours de traitement. Cela étant, le parallèle stochastique/variationnel est délicat. Les modèles sont différents, en particulier le modèle de Potts choisi ici est assez rudimentaire, et ne prend pas en compte la longueur des contours. Cependant l'amélioration du modèle stochastique entraînerait certainement une augmentation du temps de calcul qui est déjà supérieur (cf. paragraphe 5.2.3). Nous aurions aussi envie de faire un rapprochement entre le paramètre ϵ et le paramètre de température T , dans le sens où leurs décroissances respectives conduisent à l'estimation d'un état de stabilité. Cependant nous n'avons pas pu, pour le moment, obtenir aucun parallèle précis de façon théorique.

Revenons à la justification théorique du modèle que l'on propose. Comme décrit dans [Baldo, 1990] et rappelé au paragraphe 5.2.2, la fonctionnelle limite (en supposant le terme de régularisation quadratique) est une longueur pondérée des interfaces en fonction des valeurs sur les deux régions (de part et d'autre de l'interface) et de la fonction W . Pour avoir la même pondération sur toutes les interfaces (ce qui revient à éliminer cette pondération), il faudrait construire W dans \mathbb{R}^p de manière à ce que la distance entre tous les puits deux à deux soit la même. Ceci complique le modèle et nous n'avons pas envisagé cette possibilité. Dans la partie suivante, nous avons développé un autre modèle dans lequel les pondérations sur les longueurs des interfaces sont explicites et peuvent toutes être fixées à la même valeur.

Les résultats montrent qu'il vaut mieux utiliser une fonction de régularisation φ non quadratique. Ceci serait peut être moins crucial si notre fonction W avait la propriété énoncée précédemment, à savoir l'équidistance entre tous les puits de W . Comme nous construisons W sur \mathbb{R} et non vectoriellement, il semble plus approprié d'utiliser une fonction de régularisation φ non quadratique. Pour la justification théorique de notre modèle dans ce cas, il faudra considérer une suite de fonctionnelles discrètes dont le pas de discrétisation tend vers 0 avec ϵ (nous renvoyons à la présentation des travaux de Chambolle et Dal Maso [Chambolle et Maso, 1998] du paragraphe 4.3.5 du chapitre 4, justifiant par le passage au discret l'utilisation de la fonction de régularisation à asymptote finie en l'infini $\varphi(t) = \frac{t^2}{1+t^2}$).

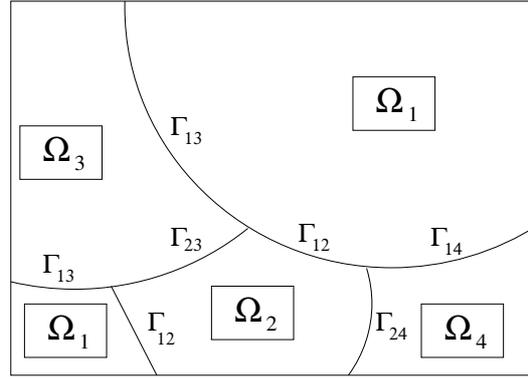
5.3 Classification par régions actives

Ce travail est exposé dans le rapport de recherche [Samson *et al.*, 1999a], joint en annexe, intitulé *Multiphase Evolution and Variational Image Classification*, soumis depuis juin 1999 à la revue *International Journal of Computer Vision* que nous référençons dans ce document [[RR-99]]. Ce travail a été présenté à la conférence internationale *Scale Space Theories in Computer Vision, Geometric flows, Nonlinear Diffusion, Functional Minimization, and Linear Scale-Space* en septembre 1999.

5.3.1 Le modèle de partitionnement

L'approche est totalement différente de la précédente. Le problème n'est plus posé sous la forme d'un problème de restauration sous contrainte de classe mais sous la forme d'un problème de partitionnement des données observées o en fonction des M classes prédéfinies de distributions $N(\mu_l, \sigma_l)$, $l = 1, \dots, M$. Notons Ω_l la région non nécessairement connexe définie par

$$\Omega_l = \{x \in \Omega / x \text{ appartient à la } l^{\text{eme}} \text{ classe}\}. \quad (5.11)$$

FIG. 5.9 – Une partition de Ω .

Le problème est alors de trouver les ensembles $\{\Omega_l\}_{l=1\dots M}$ tels qu'ils forment une partition de Ω (voir Fig. 5.9), c'est-à-dire vérifiant

$$\Omega = \bigcup_{l=1}^M \Omega_l \quad \text{et} \quad \Omega_l \cap \Omega_m = \emptyset. \quad (5.12)$$

En supposant gaussienne la distribution à l'intérieur d'une classe, la définition des ensembles Ω_l (5.11) peut se traduire par la minimisation de $F^D(\Omega_l)$ telle que

$$\min_{\Omega_l} F^D(\Omega_l) \quad \text{avec} \quad F^D(\Omega_l) = \sum_l \int_{\Omega_l} \left(\frac{o - \mu_l}{\sigma_l} \right)^2 \quad (5.13)$$

Enfin, nous ajoutons un terme de régularisation de la solution qui porte sur la longueur des interfaces entre deux classes. Nous minimisons également $F^L(\Omega_l)$

$$\min_{\Omega_l} F^L(\Omega_l) \quad \text{avec} \quad F^L(\Omega_l) = \sum_{l,m} \xi_{lm} |\Gamma_{lm}| \quad (\xi_{lm} \in \mathbb{R} \text{ sont fixés}). \quad (5.14)$$

On note $\Gamma_l = \partial\Omega_l \cap \Omega$ le bord de la région Ω_l (ne comptant pas les points communs à $\partial\Omega$), et l'interface entre Ω_l et Ω_m est notée

$$\Gamma_{lm} = \Gamma_{ml} = \Gamma_l \cap \Gamma_m \cap \Omega, \quad \forall l \neq m. \quad (5.15)$$

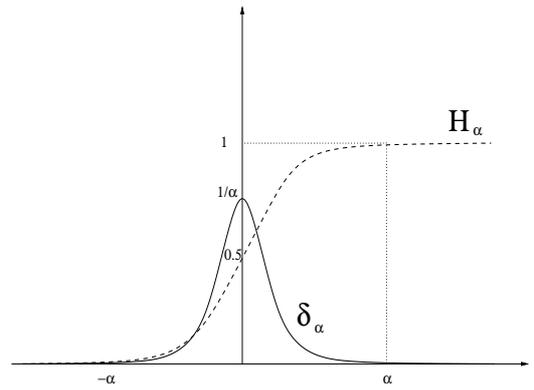
On a

$$\Gamma_l = \bigcup_{m \neq l} \Gamma_{lm}. \quad (5.16)$$

Notons que dans (5.15) et (5.16) on peut avoir $\Gamma_{lm} = \emptyset$. $|\Gamma_l|$ représente la mesure de Hausdorff de Γ_l qui vérifie

$$|\Gamma_l| = \sum_{m \neq l} |\Gamma_{lm}| \quad \text{et} \quad |\emptyset| = 0. \quad (5.17)$$

Le problème de la classification est ainsi posé en terme de minimisation par rapport à des ensembles. Ceci relève des techniques d'optimisation de domaines [Zolesio, 1990] que nous n'aborderons pas ici. Nous avons reformulé le problème en terme de minimisation d'une fonctionnelle. Le modèle proposé est inspiré des travaux de Zhao *et al.* sur l'évolution des phases multiples [Zhao *et al.*, 1996] et s'inscrit dans le cadre général des méthodes par

FIG. 5.10 – Approximations δ_α et H_α des distributions de Dirac et Heaviside.

contours actifs et représentation par ensembles de niveau, introduit au paragraphe 4.4 du chapitre 4. La fonctionnelle est obtenue en modélisant les ensembles Ω_l par ensembles de niveau de fonctions $\Phi_l : \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, Lipschitz, telles que

$$\begin{cases} \Phi_l(x; t) > 0 & \text{si } x \in \Omega_l \\ \Phi_l(x; t) = 0 & \text{si } x \in \Gamma_l \\ \Phi_l(x; t) < 0 & \text{ailleurs .} \end{cases} \quad (5.18)$$

Ainsi chaque région Ω_l est entièrement décrite par la donnée de Φ_l .

De même qu'au paragraphe 4.4.2 du chapitre 4 précédent, nous utiliserons une approximation de la distribution de Dirac définie en (4.45), ainsi que sa primitive

$$H_\alpha(s) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{s}{\alpha} + \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi s}{\alpha}\right) \right) & \text{si } |s| \leq \alpha \\ 1 & \text{si } s > \alpha \\ 0 & \text{si } s < -\alpha \end{cases} \quad (5.19)$$

qui approche la distribution de Heaviside. On a

$$\begin{cases} \delta_\alpha \xrightarrow{\mathcal{D}'(\Omega)} \delta & \text{quand } \alpha \rightarrow 0^+ \\ H_\alpha \xrightarrow{\mathcal{D}'(\Omega)} H & \text{quand } \alpha \rightarrow 0^+ \end{cases}$$

où $\mathcal{D}'(\Omega)$ est l'espace des distributions défini sur Ω .

Ainsi les ensembles Ω_l et leurs bords Γ_l intérieur à Ω sont donnés par

$$\Omega_l = \{x \in \Omega / \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} H_\alpha(\Phi_l(x; t)) = 1\} \quad (5.20)$$

$$\Gamma_l = \{x \in \Omega / \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \delta_\alpha(\Phi_l(x; t)) \neq 0\} \quad (5.21)$$

et la fonctionnelle à minimiser s'écrit

$$F_\alpha(\Phi_1, \dots, \Phi_M) = \frac{\lambda}{2} \int_\Omega \left(\sum_{l=1}^M H_\alpha(\Phi_l) - 1 \right)^2 dx + \sum_{l=1}^M e_l \int_\Omega H_\alpha(\Phi_l) \frac{(o - \mu_l)^2}{\sigma_l^2} dx + \sum_{l=1}^M \gamma_l \int_\Omega \delta_\alpha(\Phi_l) |\nabla \Phi_l| dx \quad (5.22)$$

Le premier terme de F_α exprime les conditions (5.12) de partitionnement, le second est le terme d'attache aux données approchant (5.13), c'est-à-dire exprimant (5.11), et le troisième est le terme de régularisation modélisant (5.14). Le lien entre ce dernier terme et la longueur des interfaces Γ_l est explicité au paragraphe 4.4.2 du chapitre 4, ainsi que dans le papier [RR-99] en annexe, et nous y renvoyons le lecteur.

Quand $\alpha \rightarrow 0^+$, l'ensemble solution $\{\Phi_l\}_l$ minimisant $F_\alpha(\Phi_1, \dots, \Phi_M)$, si il existe¹, définit (étant donné (5.18)) une classification de Ω formée de zones homogènes (les classes Ω_l) séparées par des contours (interfaces) réguliers.

5.3.2 Algorithme et résultats

L'algorithme est simplement obtenu en annulant les dérivées de F_α par rapport aux Φ_l (conditions nécessaires d'optimalité), en supposant que les Φ_l sont suffisamment réguliers. Les équations d'Euler associées à F_α donnent le système des M équations couplées

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial \Phi_l} = \delta_\alpha(\Phi_l) \left[e_l \frac{(o - \mu_l)^2}{\sigma_l^2} - \gamma_l \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \Phi_l}{|\nabla \Phi_l|} \right) + \lambda \left(\sum_{l=1}^M H_\alpha(\Phi_l) - 1 \right) \right] = 0, \quad l = 1 \dots M \quad (5.23)$$

avec les conditions de Neumann aux bords de Ω ($\frac{\partial \Phi_l}{\partial \vec{n}}(x) = 0, \forall x \in \partial\Omega$, où \vec{n} est la normale sortant aux bords de Ω). On remarque que les termes en $\delta'_\alpha(\Phi_l)$ s'annulent, et que l'on peut mettre $\delta_\alpha(\Phi_l)$ en facteur. Ce terme définit une bande étroite (de largeur donnée par α) autour du bord de Ω_l , dans la mesure où Φ_l est une image de distance signée par rapport à sa ligne de niveau zéro. On plonge (5.23) dans un schéma dynamique, c'est-à-dire que l'on suppose que les fonctions Φ_l dépendent du temps et que leur évolution en fonction du temps est donnée par

$$\Phi_l^{t+1} = \Phi_l^t - dt \delta_\alpha(\Phi_l) \left[e_l \frac{(o - \mu_l)^2}{\sigma_l^2} - \gamma_l \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \Phi_l}{|\nabla \Phi_l|} \right) + \lambda \left(\sum_{l=1}^M H_\alpha(\Phi_l) - 1 \right) \right], \quad (5.24)$$

où dt est le pas de temps. L'algorithme consiste à résoudre le système des M EDP couplées (5.24).

Il est intéressant d'analyser l'évolution des Ω_l localement. Pour cela, supposons qu'il n'y ait que deux classes. Alors une seule fonction Φ est nécessaire et la condition de partitionnement est inutile. Le critère s'écrit, si la région Ω_1 est définie par l'ensemble $\{x/\Phi(x) > 0\}$ (alors la région complémentaire $\Omega_2 = \Omega \setminus \overline{\Omega_1}$ est définie par l'ensemble $\{x/\Phi(x) < 0\}$)

$$\int_\Omega H_\alpha(\Phi) \left(\frac{o - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 + \int_\Omega (1 - H_\alpha(\Phi)) \left(\frac{o - \mu_2}{\sigma_2} \right)^2 + \gamma \int_\Omega \delta_\alpha(\Phi) |\nabla \Phi| \quad (5.25)$$

¹Les minimiseurs $\{\Phi_l\}_l$, s'ils existent, doivent être cherchés dans l'espace $\{\Phi_l : \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}/|\nabla \Phi_l| \in L^1(\Omega)\}$

L'équation d'évolution de Φ , déduite de l'équation d'Euler de (5.25) est

$$\Phi^{t+1} = \Phi^t - dt \delta_\alpha(\Phi) \left[\frac{(o - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{(o - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} - \gamma \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \Phi}{|\nabla \Phi|} \right) \right]. \quad (5.26)$$

Ainsi, si l'on considère un point a tel que $\Phi(a) = 0$, et tel que $o(a) \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$, i.e. a est dans la classe 1, comme sur la figure 5.11, en oubliant un moment le terme de régularisation défini par la courbure, alors la vitesse associée en a sera orientée comme sur la figure 5.11. Dès que le contour défini par $\Phi = 0$ arrive sur un point intérieur à la classe 2, alors le terme $\frac{(o - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{(o - \mu_2)^2}{\sigma_2^2}$ change de signe et la vitesse change donc de sens. Si le contour actif est sur Ω_1 alors le terme vaut $-\frac{(\mu_1 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2}$ et si le contour actif est sur Ω_2 , alors ce terme vaut $\frac{(\mu_1 - \mu_2)^2}{\sigma_1^2}$. Cette vitesse sera nulle lorsque le point a de l'ensemble de niveau 0 de Φ se trouve à la frontière entre les deux régions de classe 1 et 2, ainsi Ω_1 définit la classe 1 et Ω_2 définit la classe 2. Ce comportement est typique des contours actifs de *type région*, c'est-à-dire des contours actifs pour lesquels la vitesse est spécifiée par une donnée à l'intérieur (resp. l'extérieur) de la région [Paragios et Deriche, 1999, Ronfard, 1994, Zhu et Yuille, 1996a], à la différence des contours actifs introduits au chapitre précédent où la vitesse ne change pas de signe : le contour se dilate toujours ou se contracte toujours et s'arrête sur un potentiel nul (fonction $g(|\nabla I|)$) [Caselles *et al.*, 1993, Caselles *et al.*, 1997, Malladi *et al.*, 1995]. Nous nommons parfois les contours actifs *type région* des *régions actives*.

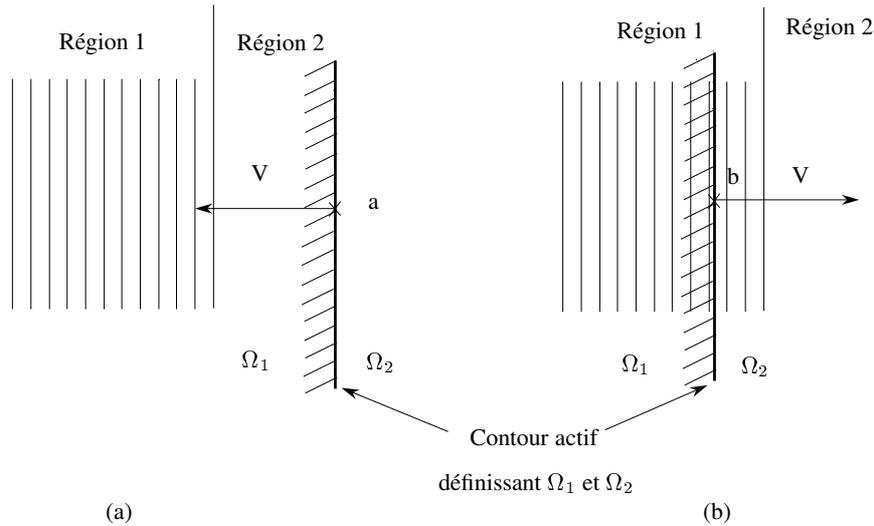


FIG. 5.11 – Etude locale de la vitesse du contour actif sur 2 régions. (a) Localement en a , $o(a) = \mu_2$ et la vitesse V est $(\mu_2 - \mu_1)^2 / \sigma_1^2$. (b) Localement en b , $o(b) = \mu_1$ et la vitesse V est $-(\mu_1 - \mu_2)^2 / \sigma_2^2$.

Cette différence est fondamentale à deux points de vue :

- du point de vue théorique, il y a des résultats d'existence et d'unicité aux EDP des contours actifs géométriques ou géodésiques (4.49) et (4.56) du chapitre 4. Il faut s'assurer que de tels résultats peuvent s'étendre aux EDP des régions actives (2 régions, une seule EDP), puis au système d'équations (5.23), d'abord avec un terme en $|\nabla \Phi_i|$ à la place de $\delta_\alpha(\Phi_i)$, puis avec le terme $\delta_\alpha(\Phi_i)$, ce qui change considérablement le cadre théorique.
- du point de vue de l'initialisation, avec une vitesse de signe constant, le contour initial doit englober totalement (ou être contenu totalement dans) l'objet à détecter. Avec des

régions actives, pour pouvoir détecter une région, il suffit qu'à l'initialisation un point au moins de la région initiale recouvre la région à détecter.

Ainsi, pour initialiser l'algorithme, nous calculons sur des bulles régulièrement réparties la moyenne de l'observation o , et assignons sur chaque bulle la classe dont la moyenne μ_l est la plus proche de la moyenne calculée. Il est alors évident que la taille des bulles initiales détermine approximativement la taille minimale d'une composante connexe d'une région que l'algorithme est capable de détecter. Cependant il ne faut pas choisir des bulles trop petites non plus car le calcul de la moyenne à l'intérieur des bulles devient alors très sensible au bruit. Typiquement, nous travaillons sur des fenêtres de taille 5x5. Nous présentons un résultat sur une partie de l'image du gdr, bruitée à 3.2 dB.

5.3.3 Discussion

La classification supervisée d'image est une application appropriée pour l'utilisation des régions actives avec mise en œuvre par ensembles de niveau. En effet, en supposant donnés le nombre de classes et les caractéristiques des classes, on définit a priori le nombre d'ensembles de niveau nécessaires, égal au nombre de classes. Par rapport aux contours actifs classiques en traitement d'image, notre modèle constitue une extension dans le sens où les contours actifs développés jusqu'alors n'utilisent qu'un seul ensemble de niveau, et sont donc limités à la détection d'un seul type d'objet ou de région. Dans le cas non connexe, pour les contours actifs classiques, les différentes composantes connexes ne doivent pas être concentriques. Avec notre modèle par approche région et l'utilisation conjointe de plusieurs ensembles de niveau, il est possible de détecter toutes les régions d'une image en même temps, quelque soit la configuration des composantes connexes des différentes régions. En particulier, il est possible de modéliser des jonctions triples, ce qui est impossible avec un seul ensemble de niveau.

Afin de mieux prendre en compte l'information contour contenue dans les observations, nous pourrions, comme proposé au chapitre 4, utiliser une longueur *pondérée* des contours (cf. équations 4.57 et 4.59)

$$\sum_{l=1}^M \gamma_l \int_{\Omega} \delta_{\alpha}(\Phi_l) g(|\nabla \hat{o}(x)|) |\nabla \Phi_l| dx \quad (5.27)$$

où \hat{o} serait une version lissée des observations o et g est une fonction d'arrêt utilisée dans les contours actifs (égale à 1 en 0, 0 en ∞ , et décroissante). Ceci permettrait de stabiliser les transitions entre deux régions au niveau des forts gradients de l'image.

Nous nous interrogeons sur l'extension possible de l'approche proposée dans cette partie au cas de la classification non supervisée, et par extrapolation l'utilisation de ce modèle pour le problème général de la segmentation d'image tel qu'il est posé par Mumford et Shah [Mumford et Shah, 1989]. Pour simplifier, imaginons que l'on fixe a priori un nombre de classes sur une image. Un critère qu'il serait possible d'étudier est

$$J_{\alpha}(\Phi_1, \dots, \Phi_M) = \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} \left(\sum_{l=1}^M H_{\alpha}(\Phi_l) - 1 \right)^2 dx + \sum_{l=1}^M \gamma_l \int_{\Omega} \delta_{\alpha}(\Phi_l) |\nabla \Phi_l| dx + \sum_{l=1}^M e_l \int_{\Omega} H_{\alpha}(\Phi_l) \{ \overline{o_{\Omega_l}} - o(x) \}^2 dx \quad (5.28)$$

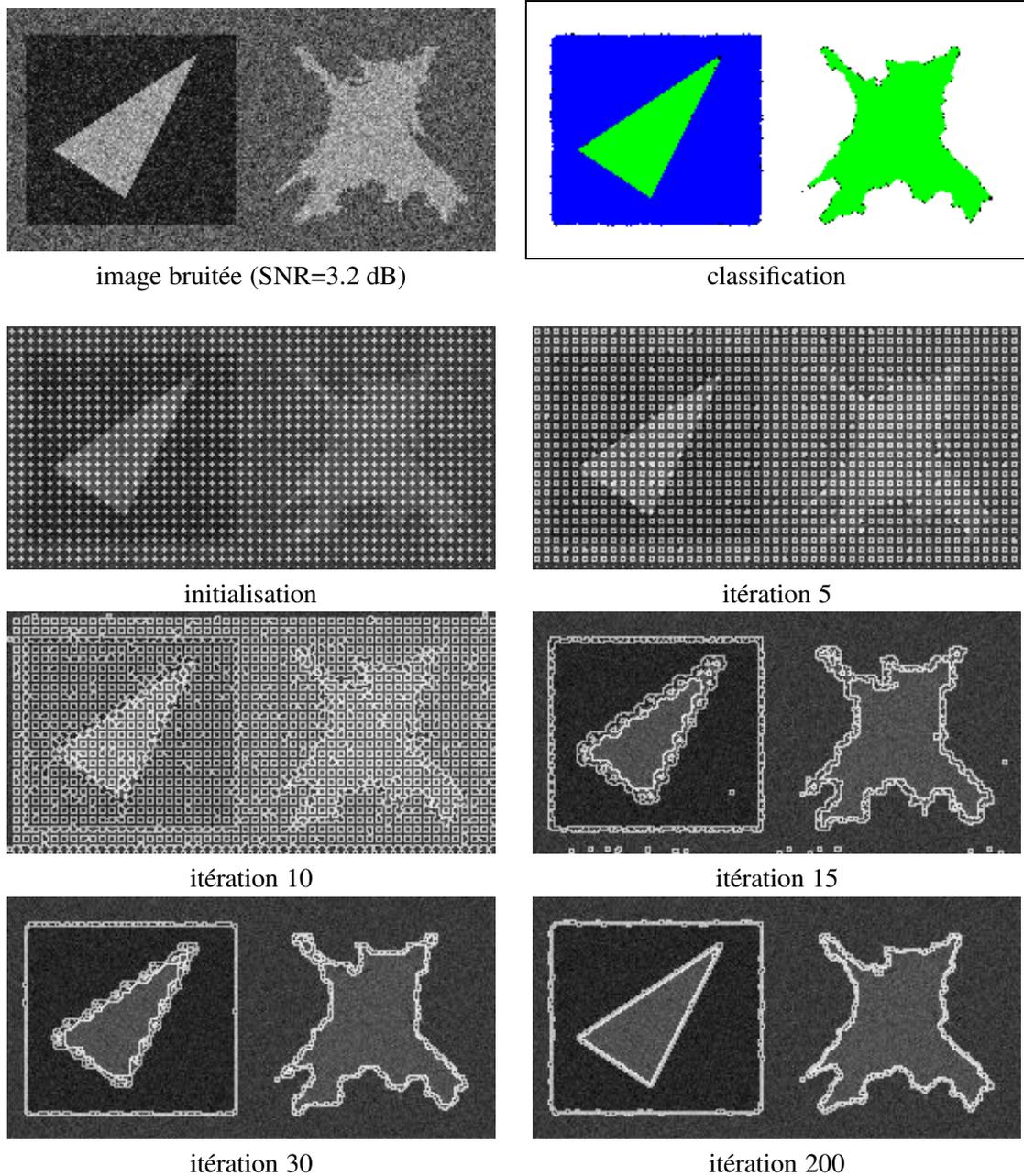


FIG. 5.12 – Données bruitées : version bruitée (SNR=3.2dB) d'une partie de l'image du GdrPRC ISIS. Evolution des contours des régions pour trois classes. Paramètres : $\lambda = 5.0$, $dt = 0.2$, et pour tout l on a $\gamma_l = 0.2$ et $e_l = 0.001$. L'image en fausses couleurs en haut à droite est le résultat de la classification (après 200 itérations) où la couleur noire représente les pixels non classés (région de vide).

où $\overline{o_{\Omega_l}}$ représente la moyenne de o sur la région Ω_l définie par

$$\overline{o_{\Omega_l}} = \frac{1}{\int_{\Omega} H_{\alpha}(\Phi_l(z)) dz} \int_{\Omega} H_{\alpha}(\Phi_l(z)) o(z) dz \quad (5.29)$$

Ce modèle doit vraisemblablement fonctionner correctement si les classes sont non connexes, mais ceci nous semble beaucoup moins sûr dans le cas de plusieurs composantes connexes. Dans tous les cas, il nous semble intéressant de mener des études précises sur cette approche.

5.4 Conclusion

Nous avons proposé deux modèles différents pour la classification supervisée d'images. Le premier, formé d'une suite de fonctionnelles à minimiser, donne un algorithme assez rapide. Cependant, la fonction W doit être définie pour chaque nouvel ensemble de classes. Nous réfléchissons en particulier à l'extension au cas de données multispectrales. Si la théorie s'étend au cas vectoriel, il reste qu'il faut définir correctement W de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R} pour des classes définies sur plusieurs bandes de fréquences (p). Le second modèle est moins performant du point de vue du temps de calcul, mais son extension vectorielle est directe. Cependant, le temps de calcul est lié au nombre de classes et peut être important pour certaines applications.

Il serait intéressant de mener une étude plus systématique de comparaison de ces deux méthodes, et de les comparer aussi à une approche stochastique. Le modèle stochastique que nous avons utilisé pour la comparaison dans la première partie (modèle de Potts) est trop simple, il ne contient pas de terme de contours en particulier comme les modèles variationnels que nous proposons. De plus il faut faire ces études sur des données réelles avec vérité terrain. Ce travail est en cours dans le cadre de la thèse de Christophe Samson.

Enfin pour ces deux modèles nous n'avons pas abordé le problème du réglage des paramètres, ni leur sensibilité aux changements de la zone imagée ou aux perturbations sur les observations. Leur estimation automatique doit être envisagée. Nous pourrions aussi envisager d'adapter automatiquement le réglage des paramètres des classes afin de suivre leurs variations d'une observation à l'autre. Par contre, l'estimation du nombre de classe est un problème difficile, et il nous semble que la première méthode proposée est peu adaptée à une telle estimation.

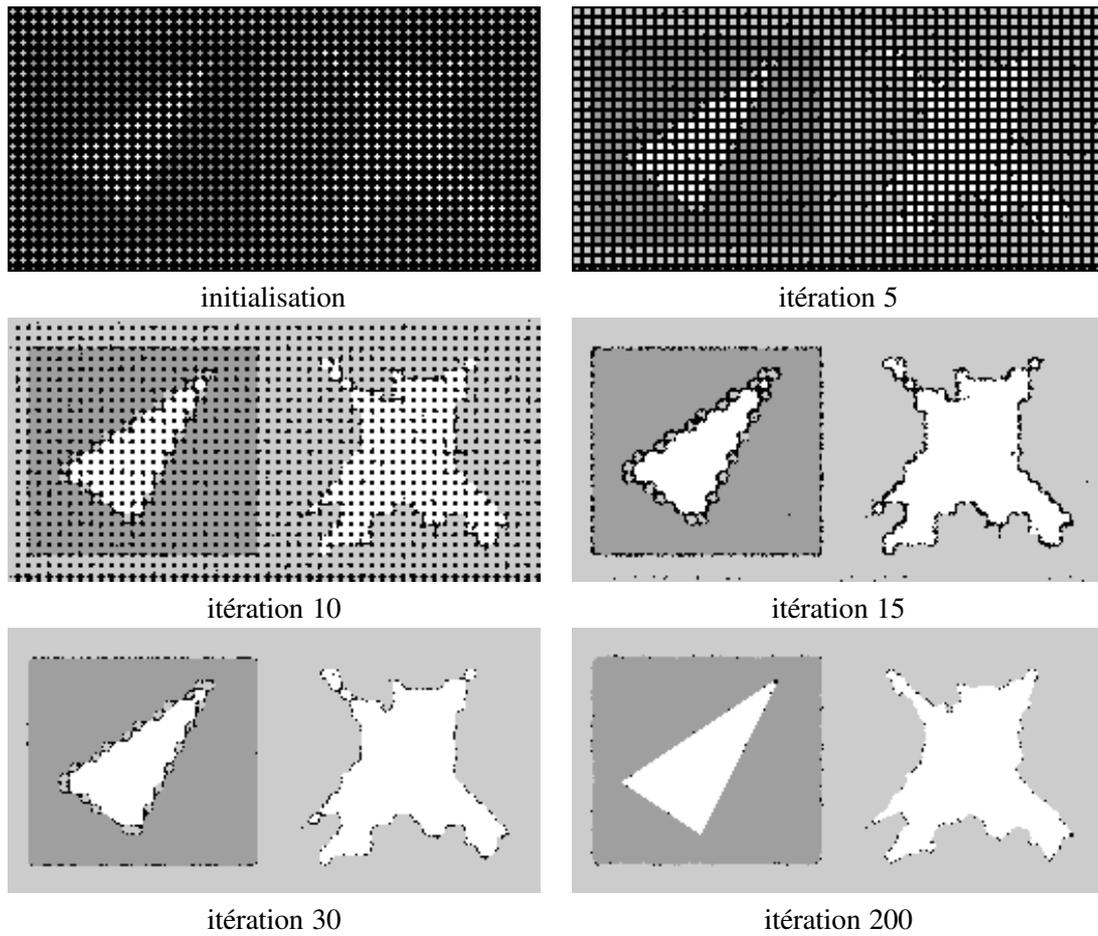


FIG. 5.13 – Evolution des régions associées à la figure 5.12.

Chapitre 6

Estimation des hyperparamètres

Les résultats présentés dans ce chapitre ont été obtenus au cours des DEA de M. Khoumri en 1997 puis A. Jalobeanu en 1998, en collaboration avec J. Zerubia, directeur de recherche à l'Inria.

6.1 Introduction

Dans cette introduction, je présente d'abord succinctement le sujet, les difficultés majeures et les différentes approches que l'on peut trouver dans la littérature, avant de résumer, dans la partie 6.1.2, mon travail dans ce domaine.

La difficulté du choix des paramètres dans les modèles que nous avons présentés jusqu' alors n'a pas été abordée. Elle est pourtant bien réelle, car nombre de méthodes sont sensibles au choix de ces paramètres. D'un point de vue pratique, ceux-ci sont souvent (et c'est le cas dans nos expérimentations précédentes) réglés par l'utilisateur, par essais et erreurs. En effet, on peut supposer que pour une application et un type d'images données, les valeurs des paramètres seront stables d'une observation à l'autre. Cependant ceci n'est plus vrai lorsque l'on change de catégorie d'images, par exemple en restauration d'images satellitaires, on peut avoir des zones à fortes variations ou des images très lisses suivant la région imagée. L'ajustement des paramètres demande alors l'intervention d'un opérateur. Dans l'optique d'une plus grande automatisation des algorithmes proposés, je me suis intéressée au problème de l'estimation des paramètres du modèle a priori, autrement dit les *hyperparamètres*. L'application sur laquelle j'ai travaillé est la restauration d'image floue et bruitée, problème initialement proposé par le CNES et présenté au chapitre 2. Le noyau de convolution est de taille 11×11 , il est séparable selon les lignes et les colonnes, et symétrique. Il est présenté en figure 2.1 du chapitre 1.1. On note ici f l'image originale et O l'image dégradée.

L'écart-type du bruit est calculé de la façon suivante : $\sigma = \sqrt{A + BI + Cn^2}$ avec $A = 1.299$, $B = 0.00676$, $C = 1.89 \cdot 10^{-5}$, I étant la valeur de l'intensité du pixel considéré (entre 0 et 255). Pour l'image fournie, on trouve $\sigma \simeq 1.35$ et on considère que le bruit est gaussien stationnaire (i.e. il dépend peu de I). Dans ce chapitre, tous les résultats utilisent ce modèle de dégradation.

Le modèle de régularisation est celui de la fonction φ (cf. équation (3.37) ou (3.44) des paragraphes 3.3.1 et 3.3.2 du chapitre 3). Nous rappelons ici le critère en variables discrètes :

$$J(f) = \frac{1}{2\sigma^2} \|O - Hf\|_2^2 + \lambda^2 \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \varphi \left(\frac{|(D_x f)_{i,j}|}{\delta} \right) + \varphi \left(\frac{|(D_y f)_{i,j}|}{\delta} \right) \quad (6.1)$$

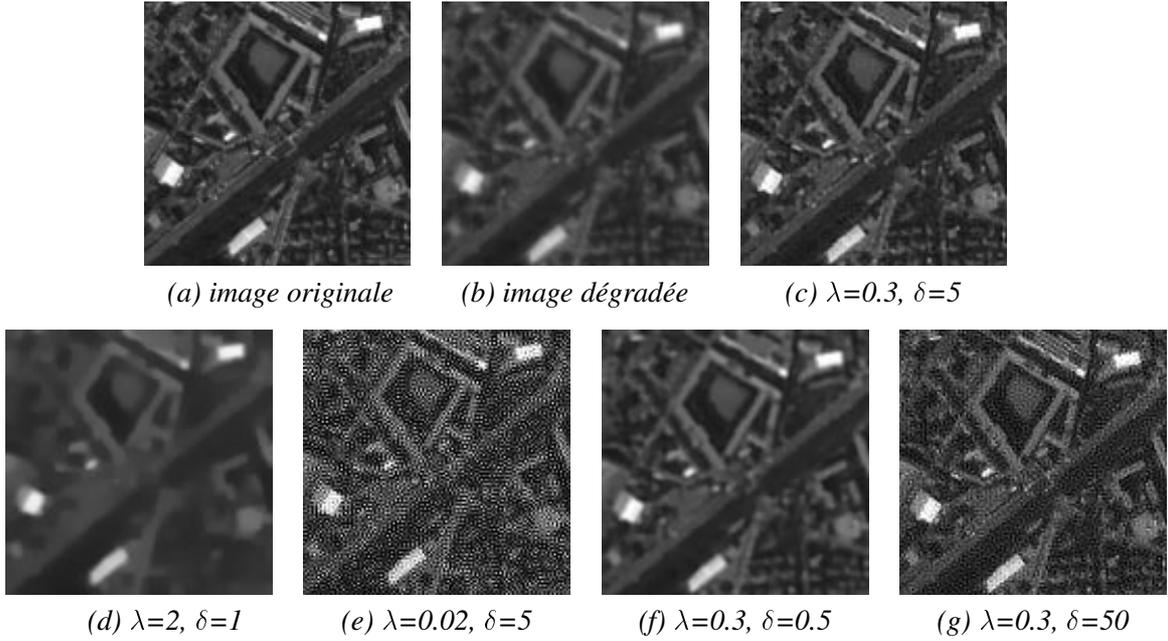


FIG. 6.1 – Résultat de la restauration en fonction des hyperparamètres avec φ_{GM} .

Les paramètres à estimer sont λ et δ . On note J_{reg} le terme de régularisation de (6.1) soit

$$J_{reg}(\mathbf{f}) = \lambda^2 \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \varphi \left(\frac{|(D_x \mathbf{f})_{i,j}|}{\delta} \right) + \varphi \left(\frac{|(D_y \mathbf{f})_{i,j}|}{\delta} \right) \quad (6.2)$$

L'estimation des paramètres du modèle de formation des données (fonction de transfert de l'appareil optique H et écart type du bruit σ) n'a pas été abordée dans ce document mais nous avons commencé à travailler sur ce problème pour la déconvolution d'image en collaboration avec le CNES.

Nous notons les hyperparamètres à estimer par le vecteur θ de \mathbb{R}^d . Pour notre application, $\theta = (\lambda, \delta)$ (la dimension $n=2$). Il est bien entendu que les méthodes générales que nous décrivons sont applicables à d'autres modèles que (6.1), en particulier à d'autres champs de Markov que celui des fonctions φ . La qualité de l'image restaurée dépend sensiblement du choix des hyperparamètres λ et δ . On constate sur la figure 6.1, qu'une valeur de λ trop grande (image (d)) entraîne une sur-régularisation (l'image résultat est beaucoup trop lisse). Inversement, si λ est trop faible, l'image est nette mais noyée dans le bruit (cf. image (e)). La restauration est aussi sensible au réglage du paramètre δ . δ est inversement proportionnel à un seuil en-dessous duquel on lisse les gradients. Un seuil trop grand entraîne la disparition des détails les plus fins (cf. image (f)), un seuil trop petit entraîne, par contre, une diminution insuffisante du bruit (cf. image (g)). L'image (c) semble plus correcte, mais ce n'est certainement pas la meilleure, les hyperparamètres ont été choisis manuellement.

6.1.1 Méthodes et difficultés de l'estimation des paramètres

Les méthodes d'estimation de paramètres sont principalement développées dans le cadre de modèles probabilistes. Il existe peu de méthodes d'estimation de paramètres dans le cadre de modèles variationnels. Certains algorithmes calculent des valeurs de paramètres en même temps que la solution comme l'algorithme de Rozen, par exemple, pour la restauration d'image avec régularisation par norme L^1 du gradient [Rudin *et al.*, 1992], dans

laquelle le paramètre de régularisation λ est calculé (voir fonctionnelle (3.40) du paragraphe 3.3.2).

Dans l'approche stochastique, le problème de l'estimation des paramètres a largement été étudié, qu'il s'agisse des paramètres du modèle de formation des données ou des paramètres du modèle a priori. La modélisation probabiliste est adaptée aux différentes méthodes d'estimation car elle permet de faire le lien entre les estimateurs des paramètres du modèle choisi et les statistiques empiriques extraites des images. Nous nous plaçons donc dans le cadre probabiliste, en particulier nous ne considérons dans ce chapitre que des fonctions à variables discrètes. Pour le problème de la restauration d'image floue, rappelons l'interprétation stochastique de la minimisation de (6.1). On rappelle que l'on note par simplification $P(\mathbf{f})$ à la place de $P(F = \mathbf{f})$ où F est la variable aléatoire multidimensionnelle définie sur l'ensemble des pixels et \mathbf{f} est une réalisation de cette variable aléatoire. La minimisation de (6.1) correspond à la maximisation de la probabilité a posteriori $P(\mathbf{f}/\mathbf{o}) \sim P(\mathbf{o}/\mathbf{f})P(\mathbf{f})$ pour laquelle \mathbf{f} est un champ de Markov de distribution de probabilité

$$P(\mathbf{f}) = \frac{1}{Z} \exp[-J_{reg}] \quad (6.3)$$

où J_{reg} est défini par (6.2). On note parfois $J_{reg}(\mathbf{f}, \theta)$ pour mettre en évidence la dépendance de J_{reg} par rapport aux paramètres cherchés $\theta = (\lambda, \delta)$. La variable Z est la fonction de partition, normalisant la probabilité. Elle est définie par

$$Z = \sum_{\mathbf{f} \in \Lambda} e^{-J_{reg}(\mathbf{f}, \theta)} \quad (6.4)$$

où Λ représente l'ensemble des configurations possibles de la variable \mathbf{f} . Z dépend aussi de θ . Si l'intensité $f_{i,j}$ en chaque pixel $(i, j) \in \{1, \dots, I\} \times \{1, \dots, J\}$ peut prendre une valeur dans l'ensemble borné $[-M, +M]$, alors $\Lambda = [-M, +M]^{IJ}$.

$P(\mathbf{o}/\mathbf{f})$ est la vraisemblance de \mathbf{f} par rapport aux observations. Elle est donnée par la probabilité du bruit (cf. le paragraphe sur le maximum de vraisemblance dans la partie 2.3.1 du chapitre 2)

$$P(\mathbf{o}/\mathbf{f}) = \frac{1}{K_\sigma} \exp\left[-\frac{\|\mathbf{o} - H\mathbf{f}\|^2}{2\sigma^2}\right] \quad (6.5)$$

où

$$K_\sigma = (2\pi)^{\frac{IJ}{2}} \sigma \quad (6.6)$$

est la constante de normalisation de la loi gaussienne du bruit de moyenne nulle et d'écart type σ . Ainsi la probabilité a posteriori s'écrit

$$P(\mathbf{f}/\mathbf{o}, \theta) = \frac{1}{Z_0} e^{-\|\mathbf{o} - H\mathbf{f}\|^2/2\sigma^2 - J_{reg}(\mathbf{f}, \theta)} \quad (6.7)$$

avec Z_0 la constante de normalisation définie par

$$Z_0 = \sum_{\mathbf{f} \in \Lambda} e^{-\|\mathbf{o} - H\mathbf{f}\|^2/2\sigma^2 - J_{reg}(\mathbf{f}, \theta)} \quad (6.8)$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance a de bonnes propriétés asymptotiques [Chellappa et Jain, 1993, Kay, 1993], c'est pourquoi on cherche à l'utiliser pour l'estimation des hyperparamètres. Les méthodes stochastiques d'estimation d'hyperparamètres peuvent être rangées en deux classes : les méthodes où l'on a une observation de l'image \mathbf{f} sur laquelle on cherche un modèle (il n'y a pas de terme de formation des données), on dit qu'on est dans le cas des *données complètes* ; les méthodes où l'on doit chercher en même temps l'image \mathbf{f} et les paramètres de son modèle à partir d'observations \mathbf{o} uniquement, on dit alors que les données sont *incomplètes*.

- **Données complètes**

Dans le cadre des données complètes, nous disposons d'une observation non dégradée de l'image f_0 , et cherchons les paramètres θ de la distribution de probabilité $P(f)$. L'estimateur du maximum de vraisemblance en données complètes consiste à résoudre

$$\max_{\theta} P(f_0/\theta) \quad (6.9)$$

Malheureusement, l'estimation du maximum de vraisemblance sur les paramètres est très difficile à calculer du fait de la fonction de partition (cf. (6.4)). Toute la difficulté de l'estimation des hyperparamètres vient de ce que le cardinal de l'espace de configurations Λ (ensemble des images possibles de dimensions $I \times J$) est très grand, même lorsqu'on se restreint à L niveaux de gris : on a en effet $\text{Card}(\Lambda) = L^{IJ}$. Sachant que les plus petites images (imassettes extraites des images satellitaires) sont de taille minimum 128×128 , en 256 niveaux de gris, on a $\text{Card}(\Lambda) = 256^{16384}$. Des méthodes d'approximation du critère ont été développées comme la méthode de maximum de pseudo-vraisemblance [Chalmond, 1988] (mais qui donne de mauvais résultats quand il y a une grande dépendance entre les pixels), ou comme la méthode de codage de Besag [Besag, 1974]. Un autre type de méthode cherche à estimer effectivement le maximum de vraisemblance en calculant des approximations de son gradient. Maximiser $P(f_0/\theta)$ revient à minimiser $-\log(P(f_0/\theta)) = Z + J_{reg}(f_0, \theta)$ dont la dérivée est

$$\frac{\partial -\log P(f_0/\theta)}{\partial \theta_i} = -E_{f \sim P(f|\theta)} \left[\frac{\partial J(f, \theta)}{\partial \theta_i} \right] + \frac{\partial J(f_0, \theta)}{\partial \theta_i}, \quad i = 1..N \quad (6.10)$$

où $E[\cdot]$ désigne l'espérance mathématique de f de loi de probabilité $P(f|\theta)$. La difficulté d'évaluation de la fonction de partition Z du critère à optimiser se traduit dans sa dérivée par le calcul d'une espérance mathématique. Cette espérance peut être approchée par une moyenne empirique :

$$E_{f \sim P(f|\theta)} \left[\frac{\partial J(f, \theta)}{\partial \theta_i} \right] = \frac{1}{N} \sum_{f^k \sim P(f|\theta)} \frac{\partial J(f^k)}{\partial \theta_i} \quad (6.11)$$

si N est le nombre d'échantillons f^k tirés avec la loi de probabilité $P(f|\theta)$. Ces échantillons sont calculés de manière itérative par chaîne de Markov, donnant lieu à des méthodes dites MCMCMV ("Markov Chain Monte Carlo" Maximum de Vraisemblance). C'est, par exemple, la méthode du gradient stochastique de Younes [Younes, 1988]. Cette chaîne de Markov peut aussi être construite en utilisant la propriété de l'échantillonnage d'importance ("importance sampling") pour accélérer les calculs [Descombes *et al.*, 1999, Geyer et Thompson, 1992, Morris, 1995].

Remarque

La dérivée seconde est :

$$\begin{aligned} \frac{\partial -\log P(f_0/\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} &= -E \left[\frac{\partial}{\partial \theta_i \partial \theta_j} J_{reg}(f, \theta) \right] + \frac{\partial}{\partial \theta_i \partial \theta_j} J_{reg}(f_0, \theta) \\ &\quad + COV \left(\frac{\partial}{\partial \theta_i} J_{reg}(f, \theta), \frac{\partial}{\partial \theta_j} J_{reg}(f, \theta) \right) \end{aligned} \quad (6.12)$$

où COV représente la covariance $COV\left(\frac{\partial J_{reg}}{\partial \theta_i}, \frac{\partial J_{reg}}{\partial \theta_j}\right) = E\left[\frac{\partial J_{reg}}{\partial \theta_i} \frac{\partial J_{reg}}{\partial \theta_j}\right] - E\left[\frac{\partial J_{reg}}{\partial \theta_i}\right] E\left[\frac{\partial J_{reg}}{\partial \theta_j}\right]$. Dans le cas classique d'une loi de probabilité exponentielle, c'est-à-dire telle que la dépendance des hyperparamètres est linéaire, $J_{reg}(\mathbf{f}, \theta) = \langle U_{reg}(\mathbf{f}), \theta \rangle = \sum_{i=1}^d U_{reg}^i(\mathbf{f})\theta_i$, (6.12) est réduit à

$$\frac{\partial -\log P(\mathbf{f}_0/\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = COV(U_{reg}^i(\mathbf{f}), U_{reg}^j(\mathbf{f})).$$

Un moyen élégant d'effectuer ces calculs est d'utiliser le formalisme des cumulants comme le propose Marc Sigelle dans [Sigelle, 1997, Sigelle, 1998]. La matrice hessienne de $-\log P(\mathbf{f}_0, /\theta)$ est la matrice de variance/covariance des $U_{reg}^i(\mathbf{f}), i = 1..n$ selon la loi a priori (6.3) et est définie positive. Ainsi la $-\log$ vraisemblance est convexe, assurant l'unicité de l'optimum. Ceci n'est plus vrai pour des hyperparamètres à dépendance non linéaire tels que le δ . Comme le montre (6.12), la dérivée seconde de la $-\log$ vraisemblance de θ n'est pas définie positive pour tout \mathbf{f} et θ et la convexité n'est plus assurée, rendant possible la présence de minima locaux multiples.

• Données incomplètes

Dans le cas général des problèmes inverses, on observe \mathbf{o} , une version dégradée ou incomplète de \mathbf{f} . Le problème est fondamentalement plus difficile que précédemment car il s'agit de reconstruire à la fois l'image \mathbf{f} cherchée, et les paramètres du modèle qui servent à la reconstruire. Dans ce cas, même si les hyperparamètres sont à dépendance linéaire tels que $J_{reg}(\mathbf{f}, \theta) = \langle U_{reg}(\mathbf{f}), \theta \rangle$, la vraisemblance des hyperparamètres par rapport à l'observation \mathbf{o} n'est pas unimodale. Cet estimateur s'écrit :

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} P(\mathbf{o} | \theta) \quad (6.13)$$

L'observation étant effectuée, cette vraisemblance ne dépend plus que des hyperparamètres. Pour calculer cette probabilité, on se ramène par inférence aux distributions a priori (6.3) et a posteriori (6.7). On a :

$$P(\mathbf{o} | \theta) = \sum_{\mathbf{f} \in \Lambda} P(\mathbf{o}, \mathbf{f} | \theta) \text{ avec } P(\mathbf{o}, \mathbf{f} | \theta) = P(\mathbf{o} | \mathbf{f}, \theta) P(\mathbf{f} | \theta) \text{ (Théorème de Bayes)}$$

ce qui permet d'écrire que

$$P(\mathbf{o} | \theta) = Z_{\mathbf{o}} / Z K_{\sigma} \quad (6.14)$$

où Z , $Z_{\mathbf{o}}$ et K_{σ} sont respectivement les constantes de normalisation (6.4), (6.8) et (6.6) correspondant aux distributions de \mathbf{f} a priori (6.3), a posteriori (6.7) et de vraisemblance (6.5).

Maximiser la vraisemblance en données incomplètes revient à minimiser

$$L(\theta) = -\log P(\mathbf{o} | \theta) = \log Z(\theta) - \log Z_{\mathbf{o}}(\theta) + const. \quad (6.15)$$

La constante est $\log K_{\sigma}$, et ne dépend que de la statistique du bruit qui est connue. Dans le but d'optimiser la log-vraisemblance sur \mathbf{o} , nous calculons son gradient par rapport aux hyperparamètres :

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i} = E\left[\frac{\partial J(\mathbf{f}, \theta)}{\partial \theta_i}\right] - E_{\mathbf{o}}\left[\frac{\partial J(\mathbf{f}, \theta)}{\partial \theta_i}\right] \quad (6.16)$$

où les deux espérances sont :

- $E[\cdot]$ calculée suivant la loi a priori de f : $f \sim P(f) = Z^{-1} e^{-J_{reg}(f)}$, sans attache aux données (6.3)
- $E_o[\cdot]$ calculée suivant la loi a posteriori de f :
 $f \sim P_o(f) = Z_o^{-1} e^{-\|o-Hf\|^2 - J_{reg}(f)}$, avec attache aux données (6.7)

L'approximation des ces espérances peut aussi être envisagée par construction de chaînes de Markov. La difficulté supplémentaire sur laquelle nous revenons largement dans nos travaux est le calcul d'échantillons suivant la loi a posteriori de f , car le terme d'attache aux données induit, au travers de l'opérateur H , un voisinage de dépendance entre les pixels très étendu, rendant impossible l'utilisation d'algorithmes classiques d'échantillonnage tels que Gibbs ou Metropolis.

Le calcul du Hessien pour ce modèle est donné dans le rapport de recherche [Jalobeanu *et al.*, 1998a] que nous joignons en annexe de ce manuscrit en référence [RRest-98]. Il apparaît que le Hessien dépend localement des données observées O , rendant impossible toute conclusion sur sa stricte positivité, même dans le cas d'une loi exponentielle, contrairement aux cas des données complètes.

Un certain nombre d'algorithmes itératifs pour l'estimation en données incomplètes ont été proposés dans la littérature, dont le plus populaire est sans doute l'algorithme E.M. ("Expectation-Maximization") introduit dans [Dempster *et al.*, 1977]. Cependant il ne résout en rien le problème de calcul de la fonction de partition et des techniques issues du premier groupe de méthodes (données complètes) doivent être utilisées comme dans [Chalmond, 1988, Chalmond, 1989, Zhang, 1993]. Une amélioration de l'algorithme EM a été proposée par Celeux et Diebolt sous forme de EM stochastique [Celeux et Diebolt, 1988]. Un autre type d'algorithme consiste à maximiser la vraisemblance généralisée par une méthode sous-optimale de minimisation alternée sur les paramètres θ et l'objet f . C'est ce que proposent Lakshmanan et Derin [Lakshmanan et Derin, 1989] avec le recuit simulé adaptatif ou bien Pieczynski [Pieczynski, 1994] pour l'algorithme ICE (Estimation Conditionnelle Itérative). Citons aussi l'algorithme de Besag [Besag, 1986] où l'optimisation se fait au cours de l'ICM par une méthode de codage. Enfin le gradient stochastique généralisé développé par L. Younes [Younes, 1989], qui est une extension de la méthode du gradient stochastique en données complètes, fait partie des algorithmes itératifs en données incomplètes. Cet algorithme est basé sur une descente de gradient de la vraisemblance (6.14) dont le gradient (de $-\log$ vraisemblance) est donné en (6.16) et qui nécessite la construction de chaînes de Markov.

Plusieurs autres algorithmes récents permettent aussi une approximation des hyperparamètres au sens du maximum de vraisemblance, pour des termes de régularisation proches de (6.2) et des applications telles que la reconstruction tomographique [Higdon *et al.*, 1997, Saquib *et al.*, 1995, Zhou *et al.*, 1997]. Cet aperçu rapide des méthodes d'estimation ne serait pas complet sans citer la méthode des boîtes qualitatives d'Azencott [Azencott, 1992] qui donne un encadrement des paramètres [Graffigne et Labourdette, 1993, Urigo *et al.*, 1995], ni sans aborder le cas du calcul du paramètre de lissage seul (λ), lorsque la partie régularisation ne comporte qu'un seul terme. On trouve dans la littérature quelques articles de référence comparatifs des différentes méthodes, avec en particulier la méthode de validation croisée que nous n'avons pas encore mentionnée [Fortier *et al.*, 1993, Galatsanos et Katsaggelos, 1991, Johnson *et al.*, 1991, Galatsanos et Katsaggelos, 1992, Reeves et Mersereau, 1990, Thompson *et al.*, 1991].

6.1.2 Travaux effectués

Nous avons développé des méthodes visant à minimiser la vraisemblance des paramètres par rapport aux données observées \mathbf{o} (critère 6.14) par une descente de gradient. L'approximation des espérances mathématiques de (6.16) par chaîne de Markov étant impossible à cause de l'échantillonnage selon la loi a posteriori (6.7), nous avons d'abord abordé l'estimation des hyperparamètres par maximisation de la *vraisemblance généralisée* proposée par S. Lakshmanan et H. Derin en 89 [Lakshmanan et Derin, 1989]. L'algorithme consiste en des minimisations alternées par rapport aux hyperparamètres et à l'image restaurée f . Ceci permet de n'avoir à simuler que des images de probabilité a priori (6.3), (sans faire intervenir l'opérateur de convolution). Nous effectuons alors l'estimation des hyperparamètres en données complètes par la méthode de gradient stochastique proposé par Younes en 88 [Younes, 1989], à la fois sur le paramètre à dépendance linéaire (λ) et non linéaire (δ). Cet algorithme donne des résultats pour certaines applications mais il peut aussi y avoir divergence vers des solutions dégénérées. Ce travail a été effectué dans le cadre du DEA de Mustapha Khoumri (en 1997), co-encadré avec Josiane Zerubia, et a conduit à deux communications dans des conférences *SPIE's international Symposium on Optical Science, Engineering, and instrumentation : Bayesian Inference for Inverse Problem* en juillet 98 [Zerubia et Blanc-Féraud, 1998] et *IEEE International Conference of Image Processing* en octobre 98 [Khoumri *et al.*, 1998]. Il est décrit dans la partie suivante de ce chapitre.

Par la suite, nous avons développé une méthode visant à approcher le gradient de la vraisemblance en données incomplètes (6.16) en construisant des chaînes de Markov. La méthode résultante est une méthode MCMCMV (Monte Carlo Markov Chain Maximum de Vraisemblance). Nous avons défini un nouvel algorithme d'échantillonnage d'images dont la probabilité tient compte de la fonction de flou (loi a posteriori). Basé sur la transformation semi-quadratique proposée par Geman et Yang en 95 [Geman et Yang, 1995], et en utilisant de plus une transformée en cosinus, cet algorithme permet d'obtenir des échantillons en des temps tout à fait raisonnables. Nous l'utilisons pour l'approximation des espérances mathématiques servant au calcul du gradient de la vraisemblance et avons proposé un algorithme MCMCMV permettant d'effectuer simultanément l'estimation des hyperparamètres et la restauration de l'image floue. Ce travail a été effectué lors du DEA d'André Jalobeanu (en 1998), co-encadré avec Josiane Zerubia, et a donné lieu à un contrat avec l'Aérospatiale de Cannes (actuellement Alcatel Space Industries) [Jalobeanu *et al.*, 1998b] et un rapport de recherche [Jalobeanu *et al.*, 1998a] soumis à la revue *Pattern Recognition*, rapport de recherche donné en annexe de ce document sous la référence [RRest-98].

6.2 Maximum de vraisemblance généralisée

Lakshmanan et Derin [Lakshmanan et Derin, 1989] proposent d'utiliser le critère de la vraisemblance généralisée (ou vraisemblance conjointe) :

$$(\hat{f}, \hat{\theta}) = \arg \max_{f, \theta} P(f, \mathbf{o} | \theta) \quad (6.17)$$

qui fait intervenir la loi jointe de f et \mathbf{o} . Du point de vue statistique, on peut montrer qu'il est asymptotiquement biaisé dans le cas $H = I$ [Gassiat *et al.*, 1992]. Ceci laisse présager qu'il en est de même dans le cas plus général H quelconque, alors que le maximum de vraisemblance classique est asymptotiquement efficace. Evidemment ces propriétés sont à reconsidérer pour un nombre fini d'échantillons. L'utilisation de cet estimateur est justifié

par sa facilité calculatoire comparé au maximum de vraisemblance. Pour calculer (6.17), les auteurs proposent de minimiser alternativement deux critères :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{f}} = \arg \max_{\mathbf{f}} P(\mathbf{f}, \mathbf{o} | \hat{\theta}) \\ \hat{\theta} = \arg \max_{\theta} P(\hat{\mathbf{f}}, \mathbf{o} | \theta) \end{cases} \quad (6.18)$$

Le premier correspond au maximum a posteriori de \mathbf{f} par rapport aux observations \mathbf{o} pour $\hat{\theta}$ donné. Le second peut s'écrire $P(\mathbf{o} | \hat{\mathbf{f}}, \theta) P(\hat{\mathbf{f}} | \theta)$, et comme l'attache aux données ne dépend pas des hyperparamètres, on a $P(\mathbf{o} | \hat{\mathbf{f}}, \theta) = P(\mathbf{o} | \hat{\mathbf{f}})$. Ainsi en θ , il s'agit du maximum de vraisemblance par rapport à $\hat{\mathbf{f}}$, c'est-à-dire en données complètes. Cette procédure est sous-optimale par rapport au critère (6.17). Le même type de critère a également été utilisé plus récemment dans [Champagnat *et al.*, 1996] pour de la déconvolution de train d'impulsions modélisé par une loi de Bernouilli. L'algorithme proposé par Lakshmanan et Derin [Lakshmanan et Derin, 1989] est un recuit simulé adaptatif, c'est-à-dire un recuit simulé pour estimer \mathbf{f} avec des hyperparamètres θ fixés, qui est stoppé périodiquement pour réactualiser les hyperparamètres θ . θ est donc estimé pour le \mathbf{f} reconstruit à l'itération d'arrêt, et ainsi jusqu'à convergence. Il est montré dans [Lakshmanan et Derin, 1989] que cette procédure converge vers une solution de (6.18) si le maximum de vraisemblance en θ est calculé exactement, ce qui est difficile en pratique. Nous avons mis en œuvre un autre algorithme consistant à résoudre alternativement les deux optimisations de (6.18). Il n'est pas du tout sûr théoriquement que cette procédure alternative converge, ni si elle converge, qu'elle converge vers une solution de (6.17). Le calcul de \mathbf{f} à θ fixé est obtenu en utilisant le développement semi-quadratique de φ et l'algorithme ARTUR (cf. paragraphe 3.3.4 du chapitre 3). Pour le calcul de la vraisemblance de θ étant donné \mathbf{f}^* à une itération fixée, donc en données complètes, nous utilisons l'algorithme du gradient stochastique proposé par L. Younes en 88 [Younes, 1988]. Etant donnée une image restaurée \mathbf{f}^* , l'algorithme de gradient stochastique permettant l'optimisation de la vraisemblance $P(\mathbf{f}^*/\theta)$ est donné par

$$\begin{cases} \text{Initialiser } \mathbf{f}^0, \theta^0 \\ \theta_i^{n+1} = \theta_i^n + \frac{1}{(n+1)K} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_i} J_{reg}(\mathbf{f}^{n+1}, \theta^n) - \frac{\partial}{\partial \theta_i} J_{reg}(\mathbf{f}^*, \theta^n) \right\} \\ P(\mathbf{f}^{n+1} = x / \mathbf{f}^n = y) = P_{\theta^n}^{n, n+1}(y, x) \end{cases} \quad (6.19)$$

où K est une constante gouvernant la convergence de l'algorithme, n est le nombre d'itérations et $P_{\theta^n}^{n, n+1}$ est la densité de probabilité de transition de \mathbf{f}^n à \mathbf{f}^{n+1} d'une itération élémentaire d'un échantillonneur de Gibbs sous le paramètre θ^n comme défini dans Younes [Younes, 1988].

Pour des lois exponentielles, c'est-à-dire des lois de probabilité telles que :

$$J_{reg}(\mathbf{f}, \theta) = \langle \theta, U(\mathbf{f}) \rangle$$

, il est montré dans [Younes, 1988] que θ^n converge presque sûrement vers le maximum de vraisemblance. Dans le cas d'hyperparamètres tels que δ , l'algorithme *quasi-converge* vers un maximum local [Younes, 1989], c'est-à-dire que l'on peut montrer la convergence à condition que la solution au cours des itérations reste dans un ensemble compact autour d'un maximum local. Le choix d'un *bon* point initial est important à la fois pour obtenir une bonne estimée finale et réduire le nombre d'itérations (ainsi que le risque de divergence). En fait, nous n'utilisons pas un gain scalaire K dans (6.19) mais utilisons un gain égal à

$$[cst \|\nabla(-\log P(\mathbf{f}^*/\theta))\| \cdot I + Hess(-\log P(\mathbf{f}^*/\theta))]^{-1} \quad (6.20)$$

où I est la matrice identité et $Hess$ la matrice Hessienne de $-\log$ vraisemblance, définie à partir de (6.12), afin de gagner en vitesse de convergence [Younes, 1989]. Pour simplifier

les calculs nous ne considérons que la partie diagonale de la matrice hessienne. Les dérivées secondes sont obtenues par approximation de (6.12). Les résultats empiriques ont montré que 3 échantillons suffisent pour cette approximation (pour le gradient stochastique, un seul échantillon est nécessaire à chaque itération). Ces résultats ont aussi été obtenus dans [Sigelle, 1997, Sigelle, 1998].

Remarque sur l'échantillonnage

Nous avons échantillonné f avec la probabilité

$$P(f) \propto \exp[-\lambda^2 \sum_{(i,j)} \varphi(\frac{|\nabla f|_{i,j}}{\delta})] \quad (6.21)$$

pour différentes valeurs de λ^2 avec $\delta = 1$, avec un algorithme classique d'échantillonnage de Gibbs. Cette étude a montré que le modèle présente une transition de phase (voir la figure 6.2). La transition de phase correspond à un changement abrupt de comportement des échantillons pour des valeurs λ^2 autour de λ_c^2 . La chaîne de Markov utilisée pour simuler les réalisations du modèle est très lente pour les valeurs de λ^2 autour de la valeur critique. Ce phénomène a beaucoup été étudié en physique statistique de manière théorique [Baxter, 1982, Georgii, 1988], en particulier pour les modèle d'Ising et de Potts, et en traitement d'image de manière expérimentale [Morris *et al.*, 1996b, Morris *et al.*, 1996c] pour de la segmentation.

Pour notre modèle, l'étude théorique est difficile. En faisant l'approximation grossière de $\varphi(u) = \frac{u^2}{1+u^2}$ par $\varphi(u) \approx u^2$ qui n'est justifiée que pour les faibles valeurs de gradients, on retrouve le modèle de Shlosman [Georgii, 1988], dont la valeur critique approchée est :

$$\lambda_c^2 \approx 2,86$$

Nos simulations font apparaître une valeur de transition de phase telle que $3 \leq \lambda_c^2 \leq 3,5$. \square

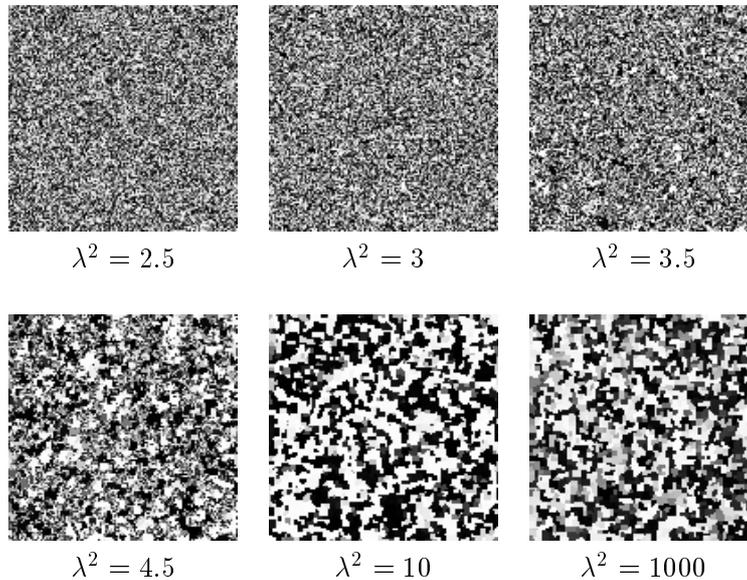


FIG. 6.2 – Echantillons du modèle (6.3,6.2) avec différentes valeurs de λ^2 .

Des résultats de l'algorithme de maximisation de la vraisemblance généralisée par minimisations alternées sont présentés figure 6.3. On note que le SNR n'évolue pas entre l'itération 1 ($\lambda = 9, \delta = 99.4$) et 2 ($\lambda = 387, \delta = 16.5$), bien que la qualité de l'image soit meilleure à l'itération 2. Des résultats sur une image réelle satellitaire sont présentés dans [Khoumri *et al.*, 1998]. La convergence de l'algorithme de gradient stochastique (6.19) est obtenu en 75 itérations environ, et 2 à 4 étapes de minimisations alternées (6.18) sont nécessaires pour le maximum de vraisemblance généralisé.

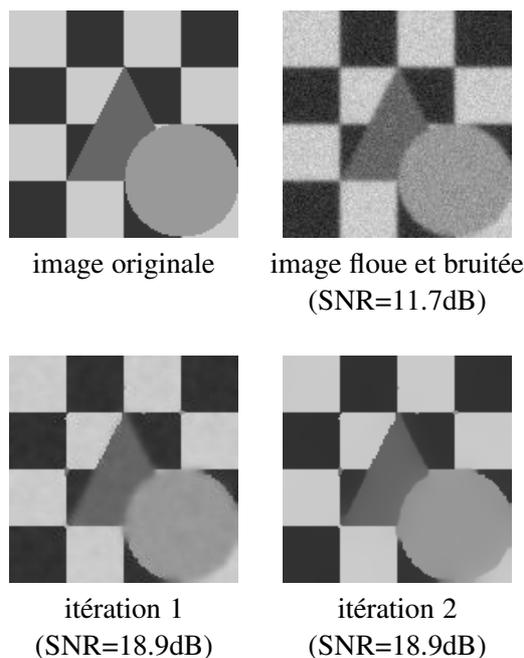


FIG. 6.3 – Restauration d’image floue avec estimation des paramètre par Maximum de Vraisemblance Généralisée.

La procédure sous-optimale utilisée peut ne pas converger ou converger vers un maximum local non satisfaisant pour les applications. Pour éviter ce type de dégénérescence, nous avons étudié la mise en œuvre du critère du maximum de vraisemblance en données incomplètes, travail exposé dans le paragraphe suivant.

6.3 Méthode MCMCMV (Monte Carlo Markov Chain Maximum de Vraisemblance)

Nous cherchons dans cette partie l’estimée de θ au sens du maximum de vraisemblance en données incomplètes, donc à résoudre (6.13), étant données les observations \mathbf{o} . Comme le montre (6.14), il est impossible de calculer $P(\mathbf{o}/\theta)$, à cause des fonctions de partition Z et $Z_{\mathbf{o}}$. Rappelons, de plus, que (6.14) a des minima multiples. On peut toujours chercher les zéros de sa dérivée. L’expression de la dérivée en θ_i (cf. 6.16) est $E \left[\frac{\partial J(\mathbf{f}, \theta)}{\partial \theta_i} \right] - E_{\mathbf{o}} \left[\frac{\partial J(\mathbf{f}, \theta)}{\partial \theta_i} \right]$ qui fait intervenir le calcul de deux espérances mathématiques, l’une ($E[\cdot]$) suivant la loi a priori de $\mathbf{f} \sim P(\mathbf{f}) = Z^{-1} e^{-J_{reg}(\mathbf{f})}$, sans attache aux données (cf. (6.3)), l’autre ($E_{\mathbf{o}}[\cdot]$) calculée suivant la loi a posteriori de $\mathbf{f} \sim P_{\mathbf{o}}(\mathbf{f}) = Z_{\mathbf{o}}^{-1} e^{-\|\mathbf{o} - H\mathbf{f}\|^2 - J_{reg}(\mathbf{f})}$, avec attache aux données (cf. (6.7)). Pour calculer une approximation de ces espérances, nous utilisons une moyenne empirique (6.11). La difficulté est de générer des échantillons suivant ces deux lois. Pour le calcul d’échantillons suivant la loi $P(\mathbf{f})$, nous pouvons utiliser un échantillonneur classique du type Gibbs ou Metropolis, comme nous l’avons fait dans la partie 6.2 précédente. La difficulté est de générer une chaîne de Markov (\mathbf{f}^k) avec la distribution d’équilibre $\pi(\mathbf{f}) = P_{\mathbf{o}}(\mathbf{f})$ qui est la loi a posteriori, soit

$$\pi(\mathbf{f}) = \frac{1}{Z_{\mathbf{o}}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \|\mathbf{o} - H\mathbf{f}\|^2 - \lambda^2 \sum_{ij} \left[\varphi \left(\frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\delta} \right) + \varphi \left(\frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\delta} \right) \right]}$$

Etant donné la forme de π , le voisinage correspondant au champ de Markov n’est pas limité au premier ordre (4 voisins), à cause de l’opérateur H . Si H est de taille $(2p + 1) \times$

$(2p + 1)$, on doit considérer le voisinage dont l'ordre correspond à tous les pixels $f_{k,l}$ dont dépend $f_{i,j}$: on a $k \in \{i - p \dots i + p\}$ et $l \in \{j - p \dots j + p\}$.

Le cœur des algorithmes de Metropolis et Gibbs est le calcul des variations d'énergie lorsque l'on modifie un pixel pris de façon aléatoire ou dans un ordre lexicographique. Cette variation d'énergie est d'autant plus longue à calculer qu'elle fait intervenir un grand nombre de pixels, ici $(2p + 1)^2$, soit 121 pour le noyau fourni par le CNES, et plus pour d'autres noyaux H plus étendus. Par exemple, chaque itération de l'échantillonneur de Gibbs correspondrait (en temps de calcul) à autant de convolutions par H qu'il y a de niveaux de gris (256), sans que la séparabilité de H puisse être utilisée pour accélérer les calculs car on traite les pixels un par un, de manière séquentielle.

Il est indispensable d'utiliser un autre type d'échantillonneur pour la loi a posteriori (avec attache aux données).

6.3.1 Echantillonnage de la loi a posteriori

Nous avons repris et modifié un algorithme d'échantillonnage proposé par Geman et Yang dans [Geman et Yang, 1995]. Le principe de cet échantillonneur réside dans la diagonalisation de l'opérateur de convolution (voir le paragraphe 3.3.4), ce qui équivaut à remplacer la convolution (présente dans l'attache aux données), lourde à calculer, par une multiplication pixel par pixel dans l'espace des fréquences. Afin de diagonaliser l'opérateur de convolution et celui du modèle a priori, Geman et Yang [Geman et Yang, 1995] ont développé l'extension semi-quadratique des fonctions de régularisation φ présentée dans le paragraphe 3.3.3 du chapitre 3. Leur motivation était la mise en œuvre d'un algorithme de recuit simulé pour l'estimation de f . Il fallait donc pouvoir échantillonner f selon la loi a posteriori (6.7). L'algorithme d'estimation qu'ils utilisent est un recuit simulé utilisant une chaîne de Markov échantillonnant alternativement f à \mathbf{b} fixé (dans le plan de Fourier) et inversement. Ainsi, au lieu de fabriquer f^{n+1} à partir de f^n comme avec Metropolis ou Gibbs, on génère successivement f^{n+1} à partir de $(\mathbf{b}^x)^n, (\mathbf{b}^y)^n$ avec $P(f | \mathbf{b}^x, \mathbf{b}^y)$ et $(\mathbf{b}^x)^n, (\mathbf{b}^y)^n$ à partir de f^n avec $P(\mathbf{b}^x, \mathbf{b}^y | f)$.

$$P(f, \mathbf{b}^x, \mathbf{b}^y) \propto e^{-\frac{\|o-Hf\|^2}{2\sigma^2} - \lambda^2 \sum_{ij} \left\{ \left(\frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\delta} - \mathbf{b}_{ij}^x \right)^2 + \xi(\mathbf{b}_{ij}^x) + \left(\frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\delta} - \mathbf{b}_{ij}^y \right)^2 + \xi(\mathbf{b}_{ij}^y) \right\}}$$

L'intérêt de cette méthode est de rendre φ quadratique en f lorsque la variable auxiliaire \mathbf{b} est fixée, ce qui signifie que la probabilité de f sachant $\mathbf{b}^x, \mathbf{b}^y$ est *gaussienne*. La matrice de covariance correspondante Σ est calculée à l'aide de H et des opérateurs de dérivation D_x et D_y . Grâce à la décomposition semi-quadratique :

$$P(f | \mathbf{b}^x, \mathbf{b}^y) \propto e^{\left\{ -f^t \left[\frac{1}{2\sigma^2} H^t H + \frac{\lambda^2}{\delta^2} (D_x^t D_x + D_y^t D_y) \right] f + 2 \left[\frac{1}{2\sigma^2} H^t o + \frac{\lambda^2}{\delta} (D_x^t \mathbf{b}^x + D_y^t \mathbf{b}^y) \right]^t f \right\}}$$

$$\text{on a } \Sigma = \left(\frac{1}{2\sigma^2} H^t H + \frac{\lambda^2}{\delta^2} (D_x^t D_x + D_y^t D_y) \right)^{-1}.$$

La matrice Σ est alors circulante par blocs circulants (si les conditions aux bords du signal sont périodiques), elle est donc *diagonalisée* par la FFT, ce qui permet un tirage de f à \mathbf{b} fixé en une seule étape dans le plan des fréquences.

Le tirage de $\mathbf{b}^x, \mathbf{b}^y$ à f fixé s'effectue de même en une seule passe, car les \mathbf{b}_{ij}^x et \mathbf{b}_{ij}^y sont indépendants deux à deux. Les \mathbf{b} sont tirés selon la loi

$$P_g(\mathbf{b}) \propto \exp \left(\lambda^2 [\mathbf{b}(2g/\delta - \mathbf{b}) - \xi(\mathbf{b})] \right) \quad (6.22)$$

où \mathbf{g} représente le gradient suivant x ou y au point considéré.

La modification que nous avons apportée à cette méthode consiste à employer une transformée en cosinus rapide au lieu d'une FFT, car le noyau H et les conditions aux bords que nous considérons sont symétriques. En effet, l'utilisation de conditions aux bords périodiques (comme pour la FFT) peut entraîner l'apparition de discontinuités sur les bords de l'image, qui font naître des oscillations lors de la déconvolution. Un algorithme rapide de déconvolution utilisant cette transformation a été décrit au chapitre 3, paragraphe 3.3.3 auquel nous renvoyons pour le détail de la symétrisation, la transformée en cosinus et les notations utilisées. $\mathbf{h}_{2I \times 2J}$ est le vecteur de dimension $2I \times 2J$ formé du noyau de h et de zéros (et égal à la première colonne de la matrice de convolution par h appliquée à l'image symétrisée dans les deux directions), de même pour $d_{2I \times 2J}^x$ et $d_{2I \times 2J}^y$ formés à partir des noyaux de dérivation d^x et d^y .

Algorithme d'échantillonnage selon la loi a posteriori

- INITIALISATION : $\mathbf{f}^0 = \hat{\mathbf{f}}$ obtenu par restauration des observations \mathbf{o} ; Calcul de $\mathcal{TF}[\mathbf{h}_{2I \times 2J}]$, $\text{DCT}[\mathbf{o}]$, et W (cf. (3.67)), soit

$$W = \left(\frac{\lambda^2}{\delta^2} (|\mathcal{TF}[d_{2I \times 2J}^x]|^2 + |\mathcal{TF}[d_{2I \times 2J}^y]|^2) + \frac{1}{2\sigma^2} |\mathcal{TF}[\mathbf{h}_{2I \times 2J}]|^2 \right)$$

- Passage de \mathbf{f}^n à \mathbf{f}^{n+1} :
 - Tirage de $\mathbf{b}^x, \mathbf{b}^y$ en fonction des gradients de \mathbf{f}^n , ce qui se fait **globalement**, car les \mathbf{b} sont **indépendants** deux à deux. \mathbf{b} est tiré selon la loi (6.22)
 - On fabrique une image intermédiaire R , dont chaque pixel est une variable aléatoire **gaussienne**, de moyenne nulle et de variance $1/2$.
 - Le tirage de \mathbf{f}^{n+1} se fait également **en une seule étape**, dans le domaine **fréquentiel**, en fonction de $\mathbf{b}^x, \mathbf{b}^y$ et R :

$$\mathbf{f}^{n+1} = \text{DCT}^{-1} \left[W^{-1} \left(\frac{\lambda^2}{\delta} \text{DCT} [D_x^t \mathbf{b}^x + D_y^t \mathbf{b}^y] + \frac{1}{2\sigma^2} \mathcal{TF}[\mathbf{h}_{2IJ \times 2IJ}] \text{DCT}[\mathbf{o}] \right) + \sqrt{W^{-1}} R \right] \quad (6.23)$$

où D_x^t et D_y^t sont les transposés des opérateurs de dérivation, utilisés dans le domaine **spatial**. \square

L'algorithme travaille avec des valeurs de \mathbf{f} bornées mais réelles, contrairement aux algorithmes de Metropolis ou Gibbs qui supposent les valeurs des variables discrètes. Nous montrons des échantillons en figure 6.6. L'aspect essentiel de cet algorithme est qu'une image \mathbf{f} à une itération est obtenue en échantillonnant simultanément $I \times J$ variables aléatoires gaussiennes. La corrélation est obtenue grâce à la DCT.

Remarque 1 Dans cet algorithme, on suppose que $P(\mathbf{f})$ est la loi marginale de $P(\mathbf{f}, \mathbf{b}^x, \mathbf{b}^y)$, c'est-à-dire :

$$\int_{\Lambda_{\mathbf{b}} \times \Lambda_{\mathbf{b}}} P(\mathbf{f}, \mathbf{b}^x, \mathbf{b}^y) d\mathbf{b}^x d\mathbf{b}^y = P(\mathbf{f}) \quad \text{où } \Lambda_{\mathbf{b}} = \mathbb{R}^{IJ}. \quad (6.24)$$

En fait, $P(\mathbf{f})$ définie par (6.24) n'est pas la loi a priori $P(\mathbf{f})$ définie en (6.3) et (6.2) avec la fonction φ , mais une approximation avec une fonction $\tilde{\varphi}$. Bien sûr, $\varphi(u)$ est le minimum de

$(b-u)^2 + \xi(b)$, mais il n'y a aucune raison pour que $P(f)$ soit la loi marginale de la densité jointe de f , b^x , b^y , construite à partir de l'extension semi-quadratique de φ .

Définissons $\tilde{\varphi}$ par :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2[(b-u)^2 + \xi(b)]} db = e^{-\lambda^2 \tilde{\varphi}(u)}$$

Ceci est toujours possible car l'intégrale est positive et elle est convergente en vertu de la symétrie et du comportement linéaire à l'infini de ξ . Nous avons tracé le graphe de $\tilde{\varphi}$ par approximation numérique (voir fig. 6.4). Comparé au graphe de φ , il y a une petite différence, mais les deux fonctions ont un comportement quadratique en zéro et linéaire en l'infini. Ainsi en pratique, nous utilisons φ dans l'algorithme de restauration, même si les paramètres sont estimés pour une fonction $\tilde{\varphi}$. Nous avons montré expérimentalement qu'une reconstruction avec la fonction $\tilde{\varphi}$ à la place de φ (avec les mêmes paramètres $\theta = (\lambda, \delta)$) n'influence pas le rapport signal sur bruit (SNR) de l'image reconstruite (variation inférieure à 0.05 dB).

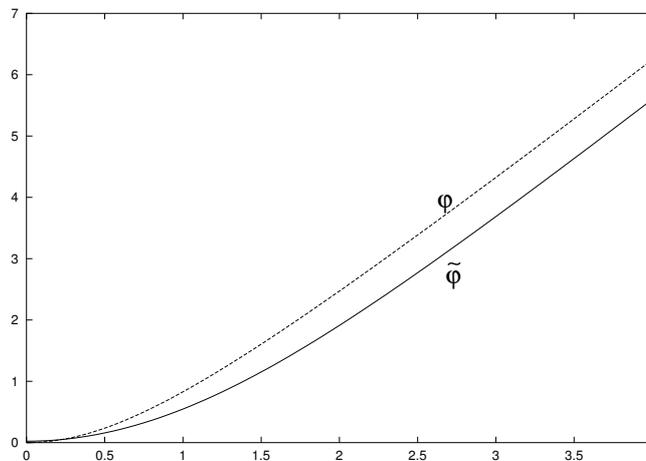


FIG. 6.4 – Comparaison entre les fonctions φ et $\tilde{\varphi}$.

Remarque 2 La chaîne de Markov est initialisée avec $f^0 = \hat{f} = \arg \max_f P(f/\mathbf{o}, \theta)$. \hat{f} est obtenue par l'algorithme rapide de déconvolution dans le domaine de la transformée en cosinus du paragraphe 3.3.3, chapitre 3. Nous avons choisi cette initialisation pour gagner en rapidité de calcul. La figure 6.5 schématise les itérations d'une chaîne de Markov. Les échantillons, si la loi n'est pas trop piquée, sont concentrés autour du maximum de probabilité. L'algorithme aura tendance à générer des échantillons autour de celui-ci, nous l'utilisons donc pour l'initialisation. Nous montrons en figure 6.6 des échantillons générés par la loi a posteriori avec cet algorithme, pour l'image de l'échiquier.

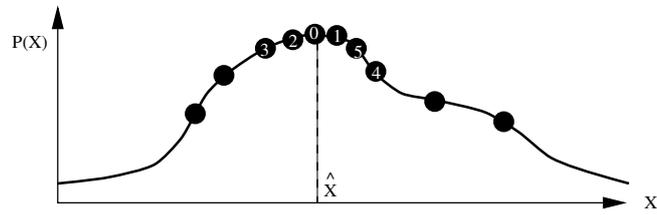


FIG. 6.5 – Justification de l’initialisation des échantillonneurs par l’image \hat{f} qui maximise la probabilité $P(f/o)$.

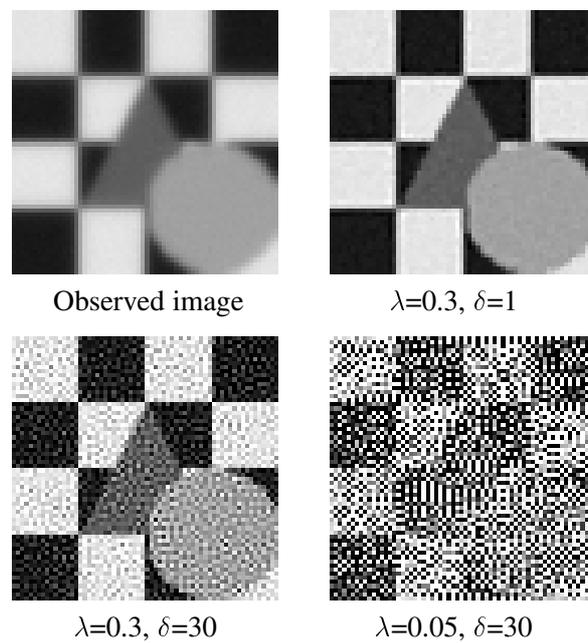


FIG. 6.6 – Echantillons de taille 64×64 tirés avec la loi a posteriori (6.7), calculée par l’algorithme de Geman et Yang modifié.

6.3.2 Echantillonnage du modèle a priori

Il s'agit ici de construire un chaîne de Markov ayant la distribution d'équilibre

$$\pi(\mathbf{f}) = \frac{1}{Z} e^{-J_{reg}(\mathbf{f}, \theta)} = \frac{1}{Z} e^{-\lambda^2 \sum_{ij} \left[\varphi\left(\frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\delta}\right) + \varphi\left(\frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\delta}\right) \right]} \quad (6.25)$$

donc *sans attache aux données*. Le voisinage est limité au premier ordre, car l'expression de l'énergie fait appel uniquement aux gradients $f_{i+1,j} - f_{i,j}$ et $f_{i,j+1} - f_{i,j}$. On remarque que 0 n'intervient pas (donc H n'apparaît pas). Il est donc tout à fait possible d'utiliser, comme nous l'avons fait au paragraphe 6.2, un échantillonneur de Gibbs ou la dynamique de Metropolis. Nous préférons utiliser la version de l'échantillonneur de Geman et Yang modifié, adaptée à la loi a priori. L'algorithme obtenu est bien plus rapide que Gibbs ou Metropolis car il effectue une mise à jour *globale* des sites en fonction de leur voisinage (cf. [RRest-98] pour l'algorithme détaillé pour cette loi).

Etude de convergence

Il existe des études théoriques sur la convergence des chaînes de Markov, par exemple dans [Robert, 1996], [Ruanaidh et Fitzgerald, 1996] et [Tanner, 1996]. Il apparaît qu'une condition suffisante de convergence est d'avoir la possibilité de transition entre deux états quelconques de l'espace des configurations Λ . Concernant le processus stochastique augmenté $(\mathbf{f}, \mathbf{b}^x, \mathbf{b}^y)$, on vérifie que pour toute réalisation des champs aléatoires \mathbf{f} et $\mathbf{b}^x, \mathbf{b}^y$, les probabilités de transition $P(\mathbf{f} | \mathbf{b}^x, \mathbf{b}^y)$ et $P(\mathbf{b}^x, \mathbf{b}^y | \mathbf{f})$ sont strictement positives. Les échantillonneurs de Geman et Yang (sur les lois de probabilité *a priori* et *a posteriori* utilisant le processus augmenté) sont correctes dans la mesure où $P(\mathbf{f}, \mathbf{b}^x, \mathbf{b}^y)$ est une mesure invariante pour ces deux transitions

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{f}, \mathbf{f}', \mathbf{b}, \mathbf{b}' : \\ P(\mathbf{f}, \mathbf{b}).P(\mathbf{f}' | \mathbf{b}) &= P(\mathbf{f}', \mathbf{b}).P(\mathbf{f} | \mathbf{b}) \\ P(\mathbf{b}, \mathbf{f}).P(\mathbf{b}' | \mathbf{f}) &= P(\mathbf{b}', \mathbf{f}).P(\mathbf{b} | \mathbf{f}) \end{aligned} \quad (6.26)$$

L'espace d'état Λ étant infini, nous ne pouvons évaluer la vitesse de convergence que par simulations numériques. Pour déterminer le nombre d'itérations nécessaires avant que la chaîne ait atteint la distribution d'équilibre, nous avons effectué une étude préliminaire de l'énergie J_{reg} . Ce terme atteint son état d'équilibre au bout d'une vingtaine d'itérations environ.

Nous avons aussi effectué une étude comparative de la vitesse de convergence de l'algorithme proposé par rapport aux algorithmes classiques, pour l'échantillonneur de la loi a priori. Nous avons estimé l'énergie J_{reg} pour des échantillons générés par l'algorithme de Gibbs, Metropolis et notre échantillonneur, et nous avons étudié la variation d'énergie avec le nombre d'itérations. Bien que les espaces d'état ne soient pas les mêmes (les pixels sont réels pour l'échantillonneur proposé et entiers pour Gibbs et Metropolis), ce qui entraîne une petite différence sur les échantillons générés, nous concluons que l'échantillonneur proposé est plus performant : l'énergie J_{reg} se stabilise au bout de 5 à 10 itérations pour les trois algorithmes mais la vitesse d'une itération est différente selon l'algorithme (plus rapide pour l'algorithme de Geman et Yang modifié). Nous pouvons noter, par exemple sur la figure 6.7, une petite différence dans la structure des échantillons par Gibbs et par l'algorithme de Geman et Yang modifié. Il semble que la basse fréquence des images générées par Gibbs soit constante sur l'image, contrairement à celle des images générées par l'algorithme proposé. Cette différence a été remarquée sur un grand nombre d'échantillons. Après quelques centaines d'itérations de l'échantillonneur de Gibbs, elle s'atténue,

les images ainsi échantillonnées montrant alors des variations de type basses fréquences. Notre algorithme échantillonnant dans le plan des fréquences où la corrélation inter-pixel est diagonalisée, les interactions longue distance sont restituées en une itération, ce qui n'est pas le cas des algorithmes de Gibbs et Metropolis.

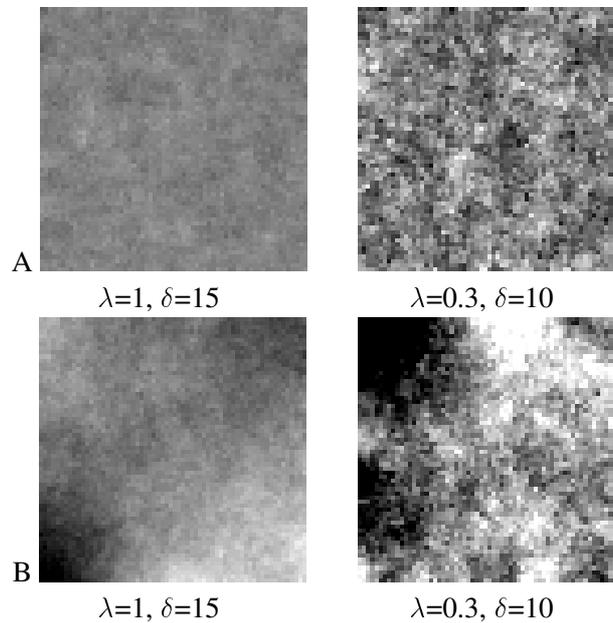


FIG. 6.7 – Echantillons de la loi a priori par l'algorithme de Gibbs (A) et l'algorithme de Geman et Yang modifié (après 20 itérations chacun).

6.3.3 Algorithme d'estimation des hyperparamètres MCMCML

L'algorithme que nous utilisons pour estimer les hyperparamètres est basé sur une méthode de descente. Il s'agit en effet de minimiser la -log vraisemblance $L(\theta) = -\log P(\mathbf{O} | \theta)$ par rapport à θ :

$$(\hat{\theta}) = \arg \min_{\theta} L(\theta)$$

Cette méthode est, dans le cas le plus général, une descente de gradient à pas constant. On peut préférer des méthodes plus élaborées comme Newton-Raphson, qui utilise le hessien. Mais le critère n'étant pas convexe en fonction de δ , ceci n'est envisageable que pour une estimation en fonction de λ seul. Les conditions de convergence de l'algorithme seront discutées au paragraphe 6.3.4.

Algorithme MCMCML

- **Initialisation :**

Deux choix possibles pour les hyperparamètres de départ $\theta^0 = (\lambda^0, \delta^0)$:

- Rapport λ^0/δ^0 correspondant au meilleur filtre de Wiener (correspondant à φ quadratique) ; δ^0 choisi de manière à pénaliser les gradients dus au bruit, et à préserver les contours ($\delta^0 \rightsquigarrow a\sigma, 1 < a < 10$).
- λ^0, δ^0 sont le résultat de l'estimation effectuée sur une autre image, prise dans les mêmes conditions, et si possible de même type géographique (ville, champs, montagne...).

- **Calcul de $\hat{\mathbf{f}}$:**
L'image $\hat{\mathbf{f}}$ est obtenue à partir de \mathbf{o} par l'algorithme rapide de déconvolution, du paragraphe 3.3.4 du chapitre 3, avec (θ^n) courant.
- **Calcul des espérances $E[\cdot]$ et $E_{\mathbf{o}}[\cdot]$ avec (θ_n) :**
Générer deux chaînes de Markov avec les deux échantillonneurs de type Geman et Yang modifiés (cf. paragraphes 6.3.1 et 6.3.2) pour estimer les espérances avec et sans attache aux données. Dans le cas de l'attache aux données, $\hat{\mathbf{f}}$ sert à initialiser l'algorithme.
- **Itération (θ^n) à (θ^{n+1}) :**
 $L(\theta) = -\log P(\mathbf{o} | \theta)$, la -log vraisemblance (6.15) :

$$\theta_i^{n+1} = \theta_i^n - \alpha \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i}, \quad i = 1 \dots d$$
 où $\alpha > 0$ est un pas fixé (ou qui peut dépendre de θ , pour faciliter la convergence).
- **Critère d'arrêt :**
L'algorithme est stoppé si $\sum_{i=1}^d \frac{\|\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i}\|}{\|\theta^i\|} < \epsilon$ □

L'algorithme s'arrête lorsque la norme du gradient passe sous le seuil ϵ . Il peut alors être bloqué par tout *minimum local*. En effet, la non-convexité du critère à optimiser, rend possible l'existence de minima locaux, et l'on comprend alors que le choix des hyperparamètres de départ détermine la convergence vers certains de ces minima. On va chercher à privilégier les couples $(\hat{\lambda}, \hat{\delta})$ pour lesquels δ permet de profiter de la forme de φ : la fonction φ est quadratique autour de zéro (pour lisser les faibles gradients liés au bruit) et non-quadratique en l'infini (pour préserver les forts gradients liés aux contours). Le paramètre δ apparaît dans le terme $\varphi(g/\delta)$ où g est un gradient de l'intensité. δ permet de dilater ou contracter les gradients d'intensité afin qu'ils soient correctement répartis par rapport aux deux comportements de φ . Ces considérations sont développées dans les paragraphes suivants.

6.3.4 Convergence

La convergence de l'algorithme d'estimation, près d'un minimum local, est gouvernée par la forme de la fonctionnelle à minimiser : selon le gradient et le hessien, celle-ci est plus ou moins proche d'une forme quadratique. Si le hessien est constant, le critère est localement quadratique. Mais, dans la pratique, ce n'est jamais le cas suivant δ .

Selon le pas α , l'algorithme peut converger ou diverger. En divisant α par le hessien on peut, comme dans la méthode de Newton, converger plus rapidement vers le minimum local, si le critère est localement quadratique. Mais dès que la courbure s'inverse (c'est parfois le cas dans la pratique), ce choix du pas α peut entraîner une instabilité (inversion du sens de la descente).

Il semble que le meilleur choix du pas ne fasse pas intervenir le hessien, car il est difficile à estimer (il faut, en effet, calculer la covariance de l'énergie des échantillons). Un bon choix des pas est donné par $\alpha_{\theta_i} = \alpha_0 / h_{\theta_i, \theta_i}$, α_0 étant choisi de manière empirique, en cherchant à accélérer la convergence tout en limitant les risques d'instabilité ($0 < \alpha < 1$) ; h_{θ_i, θ_i} est ici la dérivée partielle seconde du critère, calculée en dérivant les *gradients* de façon numérique :

$$h_{\theta_i, \theta_i} = \frac{\frac{\partial L}{\partial \theta_i}(\theta_1, \dots, \theta_i + \Delta\theta_i, \dots, \theta_d) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i}(\theta)}{\Delta\theta_i}$$

Cette méthode de descente, inspirée de l'algorithme de Newton-Raphson, est particulièrement efficace lorsque le critère à optimiser est localement quadratique. Cela semble être le cas lorsque l'on est proche d'un optimum (voir paragraphe 6.4).

6.3.5 Précision de l'estimation

La précision d'estimation des hyperparamètres dépend :

- du seuil d'arrêt de l'algorithme ϵ . Le critère d'arrêt faisant intervenir la norme de la dérivée par rapport aux hyperparamètres, un ϵ trop grand entraîne l'arrêt alors que l'on se trouve trop « loin » du θ le plus proche, qui annule cette norme. Mais un ϵ trop petit peut empêcher l'arrêt à cause des fluctuations des dérivées partielles $\frac{\partial L}{\partial \theta_i}$, alors que l'on est « près » d'un minimum local. Le choix du seuil d'arrêt se fait de manière empirique, en utilisant aussi bien des images réelles que synthétiques, avec toujours le même noyau de convolution H et le même bruit b .
- de la précision de l'estimation des espérances, qui dépend du nombre d'échantillons utilisés pour calculer les moyennes, et de la taille des échantillons. La taille des échantillons intervient dans la mesure où le calcul de $L(\theta)$ ou de ses dérivées est effectué à partir de somme sur les pixels de l'image. L'erreur sur l'espérance évolue donc en $1/\sqrt{nIJ}$ où n est le nombre d'échantillons et IJ leur taille. Nous considérons en général $I = J = 64$ ou 128 et n égal à une vingtaine d'échantillons (après une phase d'initialisation de la chaîne).

6.4 Résultats

Les résultats de la déconvolution (avec les hyperparamètres estimés) de l'image fournie par le CNES (Nîmes, simulation SPOT 5) sont présentés dans ce paragraphe. L'estimation des hyperparamètres a été effectuée sur une imagerie de taille 128×128 extraite de l'image à traiter (voir fig. 6.11).

Le rapport signal/bruit de l'image dégradée (convoluée et bruitée) est de 16,1 dB. L'image restaurée présentée figure 6.9 avec les paramètres optimaux ($\lambda = 0,49$, $\delta = 10$) a un SNR de 21,5 dB. Le SNR "local" calculé sur l'imagerie 6.11 est de 22,8 dB. Ce résultat s'explique par le fait que le SNR de l'imagerie dégradée est plus important que celui de l'image totale (17,6 dB) et que c'est la partie de l'image sur laquelle les paramètres ont été estimés. Ils sont donc bien adaptés à cette portion de l'image. Le temps de calcul est de 13s pour l'estimation et de 12,6s pour la reconstruction (sur une station Sun Ultra 1, 167 Mhz). L'algorithme de restauration avec estimation des hyperparamètres a aussi été utilisé en 1998 avec succès par l'Aérospatiale Cannes (actuellement Alcatel Space Industries) pour le traitement de données de la DGA (Direction Générale de l'Armement). Ces données sont confidentielles et les résultats ne peuvent être présentés ici.

6.4.1 Multiplicité des solutions

Comme on peut voir sur la figure 6.12, il existe un ensemble d'hyperparamètres qui annulent le gradient du critère ; ce sont des minima locaux qui bloquent l'algorithme d'estimation. Ces minima semblent uniformément répartis sur une courbe, qui devient une droite lorsque δ est grand.

La présence d'une asymptote pour $\delta \rightarrow \infty$ peut s'expliquer par la forme de la fonction φ utilisée. Quelle que soit cette fonction, $\varphi(u)$ est quadratique lorsque $u \rightarrow 0$. Comme $u = g/\delta$ (g est une différence de pixels voisins), le modèle devient pratiquement quadratique



FIG. 6.8 – Nîmes, image dégradée (H : cf. fig. 2.1 et bruit σ , $\text{SNR} = 16, 1 \text{ dB}$), 512×512 , 256 niveaux de gris - ©CNES.



FIG. 6.9 – Nîmes, image restaurée avec $\lambda = 0,49, \delta = 10$ (SNR = 21,5 dB).



FIG. 6.10 – Nîmes, image originale f, 512×512 , 256 niveaux de gris - ©CNES.

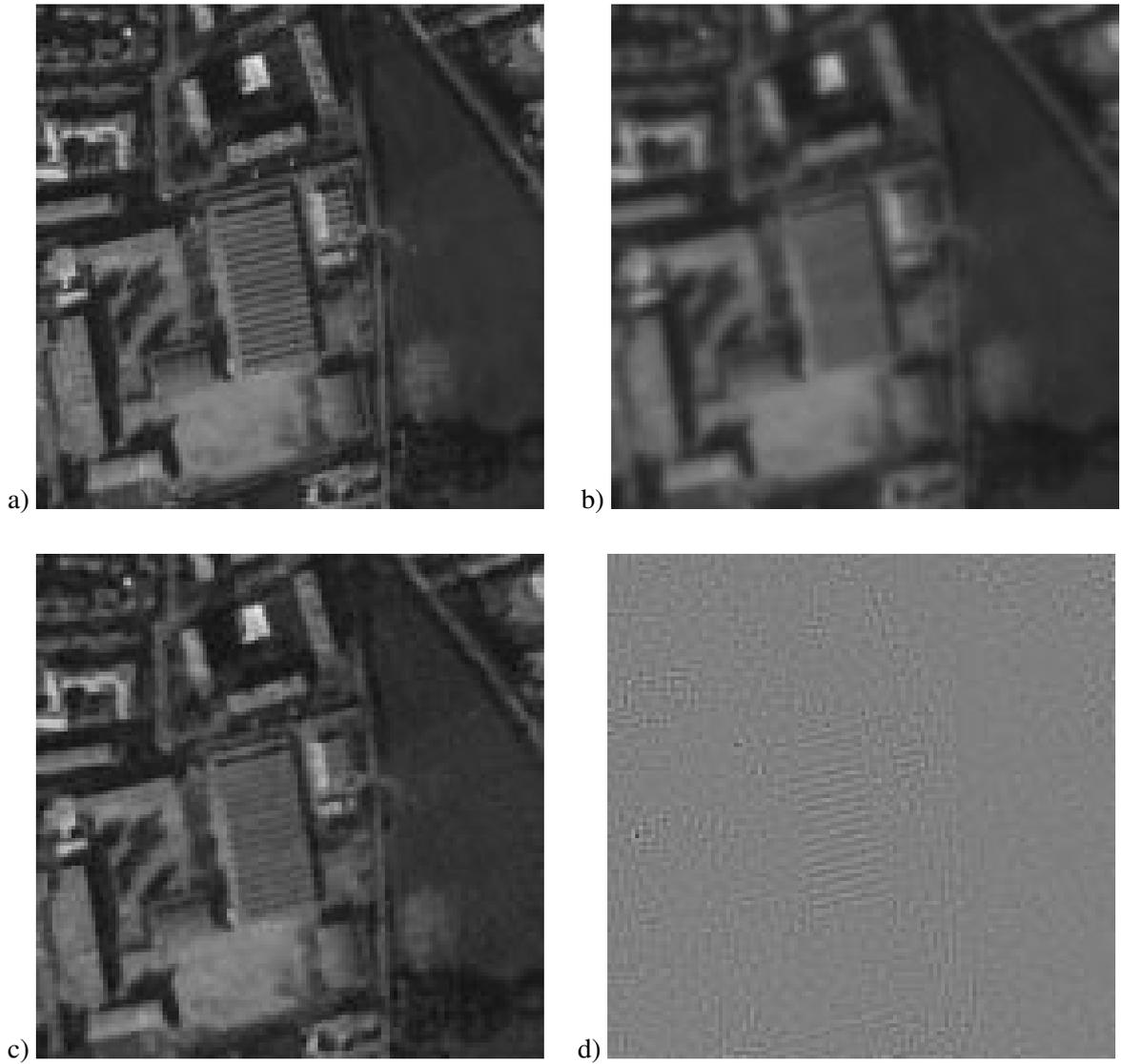


FIG. 6.11 – Image 128×128 extraite de Nîmes (usine) ; a) originale, b) dégradée (SNR= 17.6 dB), c) restaurée avec $\lambda = 0.49$, $\delta = 10$ (SNR= 22.82 dB) d) erreur.

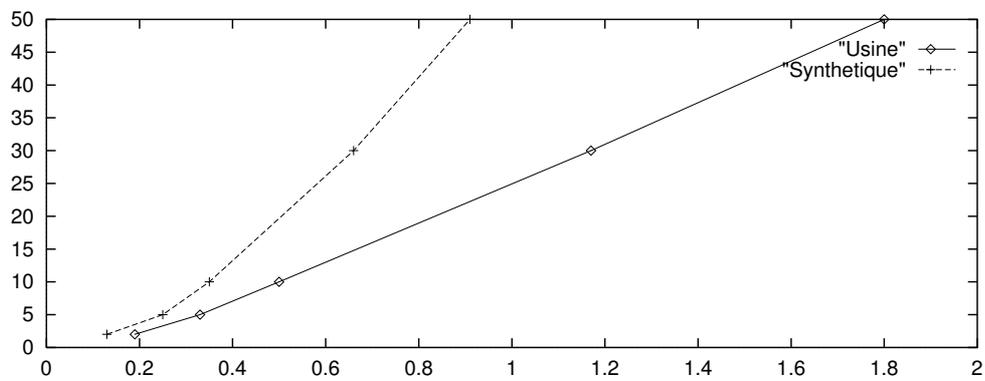


FIG. 6.12 – Ensemble des hyperparamètres (λ, δ) pour lesquels le gradient de la vraisemblance s'annule (image synthétique et usine, cf. fig. 6.13).

lorsque $\delta \rightarrow \infty$, et l'on a alors $\lambda^2 \varphi(g/\delta) \simeq \lambda^2/\delta^2 \varphi(g)$: le modèle dépend uniquement du rapport λ/δ et c'est ce rapport-là que l'on estime, ce qui correspond à une droite $\lambda/\delta = k_\infty$. La fonction HyperSurfaces φ_{HS} devient linéaire lorsque $u \rightarrow \infty$ (voir fig. 3.5 du chapitre 3), c'est-à-dire lorsque $\delta \rightarrow 0$. On doit logiquement s'attendre à estimer le rapport λ^2/δ dans ce cas, pour un modèle $\varphi(u) \simeq |u|$.

Sur la figure 6.13, nous présentons les images restaurées avec différents couples d'hyperparamètres *optimaux* (annulant la dérivée). On voit que dans une plage de valeurs des hyperparamètres, la qualité visuelle et le SNR évoluent peu. La figure 6.14 montre les couples d'hyperparamètres qui annulent la dérivée de $L(\theta)$ (sur la ligne pointillée) et le SNR de l'image reconstruite. On voit que les paramètres optimaux sont dans la zone à fort SNR. Le problème est de choisir l'initialisation qui nous donnera le meilleur de ces couples.

Il est souhaitable de forcer δ à rester proche de $\tilde{\delta}$, lié au seuil du bruit : si $\varphi(u)$ est quadratique pour $u < u_c$, on choisit $\tilde{\delta}$ tel que $g/\tilde{\delta} < u_c$, g étant les gradients dus au bruit, majorés par 5σ environ (car le bruit est gaussien de variance σ). On prend alors $\tilde{\delta} = 5\sigma/u_c$, soit pour la fonction φ_{HS} , $\tilde{\delta} \simeq 1.5\sigma$. δ peut être soit la valeur initiale de δ , soit la valeur fixe de δ , en n'optimisant plus que par rapport à λ . On s'aperçoit en effet que la valeur de δ bouge peu par rapport à son initialisation lors de l'algorithme MCMCMV. De plus, le critère est localement quadratique en λ comme on peut le voir expérimentalement sur la figure 6.15 où l'on a tracé les gradients autour d'un minimum local (pour $\lambda = 0.19$, $\delta = 2$). On constate que la dérivée du critère par rapport à λ est à peu près linéaire. Cela justifie l'emploi d'une méthode de descente de type Newton sur λ . Ainsi dans la pratique, on fixe $\delta = \tilde{\delta} = a\sigma$ avec $0 < a < 10$ et on optimise en λ uniquement, ce qui ne nécessite que le calcul de $\frac{\partial L}{\partial \lambda}$. Cette méthode converge rapidement : en partant de $\lambda = \delta/10$ avec $\delta = 1.5\sigma$, l'optimum $\hat{\lambda}$ est atteint en 4 à 8 itérations sur l'imagette 6.11. Si l'on s'intéresse à la sensibilité de la restauration au choix de δ (avec λ optimal), on constate que tous les minima locaux sont équivalents pour le rapport signal/bruit *global*, quel que soit δ . Ce rapport reste voisin de 22.7 dB pour l'image de la figure 6.11. Par contre, le rapport signal/bruit *local* (calculé par exemple sur une zone homogène, ou sur une zone striée) dépend beaucoup du choix de δ . Le choix de δ par rapport à σ est tel que δ grand favorise la reconstruction des textures alors qu'une faible valeur de δ favorise le lissage des zones homogènes. En restant dans un intervalle $\sigma < \tilde{\delta} < 10\sigma$, le SNR de l'image restaurée évolue peu.

L'influence de la précision de l'estimation de λ (à δ fixé) sur la restauration est illustrée sur la figure 6.16 : on peut tolérer jusqu'à 10% d'erreur sur les hyperparamètres sans observer une dégradation notable de la qualité de l'image restaurée.

6.4.2 Influence de la zone d'extraction des imagettes

Lorsque l'on cherche à déconvoluer *rapidement* une image satellitaire de grande taille, il est indispensable d'effectuer l'estimation des hyperparamètres sur une imagette de petite taille qui en est extraite (64×64 ou 128×128 par exemple). En effet, le modèle de régularisation utilise *un seul* couple (λ, δ) sur la totalité de l'image, et ce couple devrait pouvoir convenir à n'importe quelle imagette quelle que soit la zone d'où elle est extraite.

Nous montrons sur la figure 6.17 que le résultat de l'estimation dépend des imagettes, et les meilleurs hyperparamètres pour restaurer l'image dans son ensemble sont moins bien adaptés au problème que ceux qui sont estimés *localement* sur des zones 64×64 .

Les zones homogènes ont, en effet, besoin d'une régularisation bien plus poussée (jusqu'à $\lambda = 0.4$) que les zones très contrastées contenant de nombreux contours (on a alors $\lambda = 0.17$). Le choix du couple (λ, δ) convenant à toute l'image ne peut alors être fait correctement que si l'imagette choisie est représentative de l'ensemble de la scène. Pour cette raison, même si l'algorithme d'estimation en lui-même est automatique, l'extraction

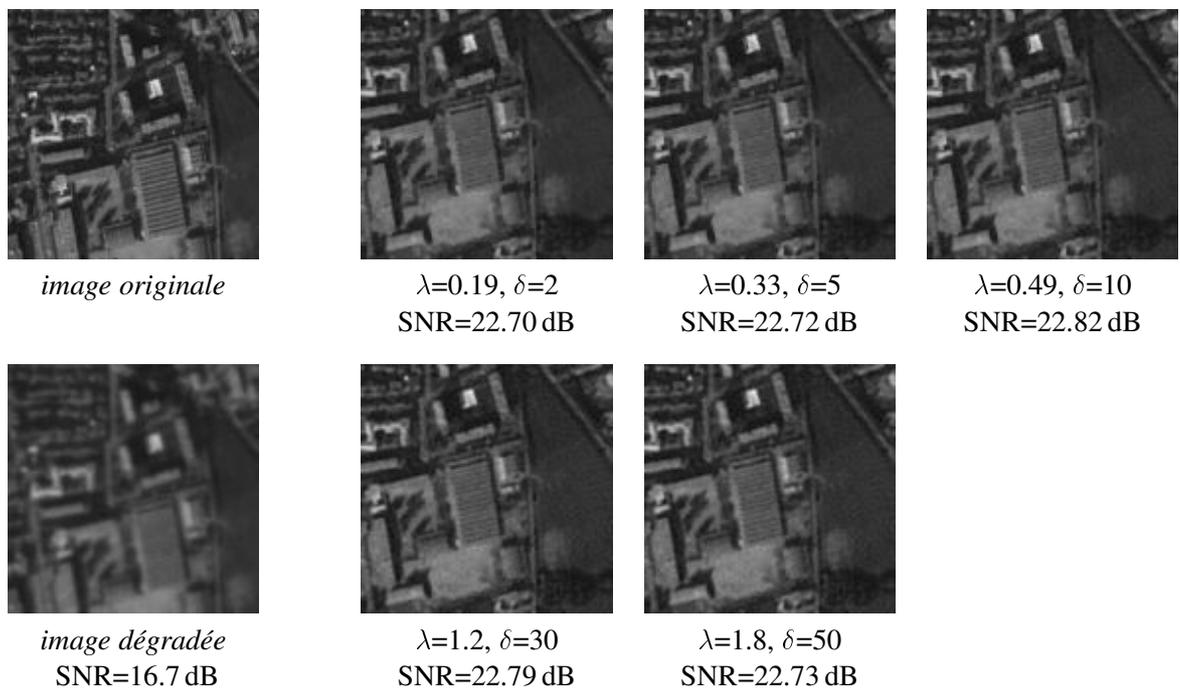
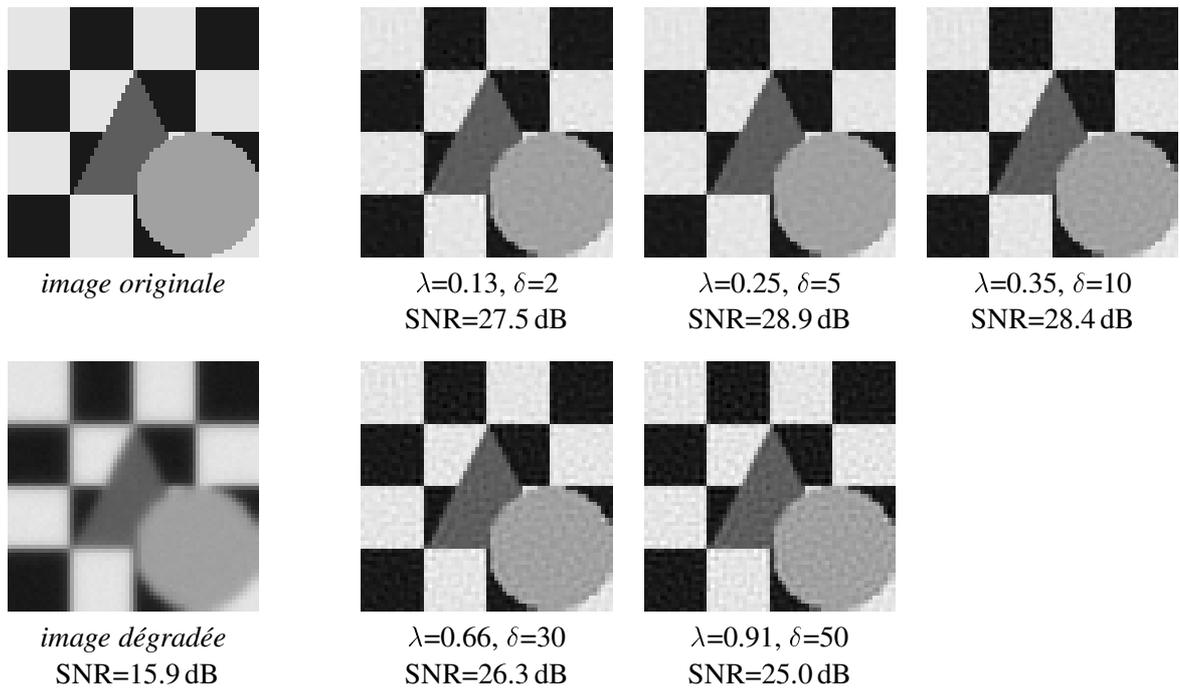


FIG. 6.13 – Image synthétique et extrait de Nîmes (usine) : comparaison des résultats de la restauration avec une série d'hyperparamètres optimaux (fonction φ_{HS}).

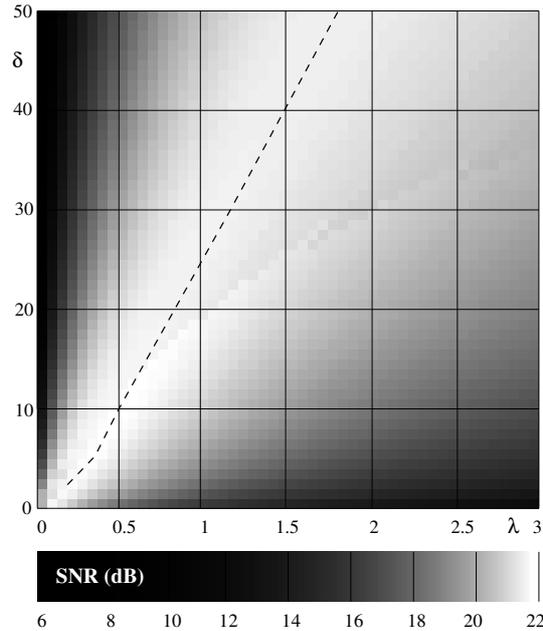


FIG. 6.14 – SNR de l’image reconstruite (cf. fig. 6.11) avec différents (λ, δ) ; ligne pointillée : valeurs optimales $(\hat{\lambda}, \hat{\delta})$ (annulant le gradient de $L(\theta)$).

de l’image ne doit pas être effectuée arbitrairement par le logiciel. L’intervention de l’utilisateur est nécessaire pour cette opération, mais elle est aisée, et ne demande que très peu de temps (contrairement à l’estimation manuelle des hyperparamètres).

6.5 Coût de l’algorithme

- **Echantillonneur de la loi a priori**

Nous évaluons le coût du calcul de chaque échantillon tiré selon la loi a priori de f . A chaque itération de l’échantillonneur, il faut calculer 2 DCT de longueur n si n est le nombre de pixel par ligne, soit environ $30 + 10 \log_2 n$ opérations par pixel (voir le coût de l’algorithme de restauration dans le domaine DCT au paragraphe 3.3.4 du chapitre 3). Les $\mathbf{b}_x, \mathbf{b}_y$ et \mathbf{f} sont aléatoires, et on utilise de préférence des nombres aléatoires précalculés (en effectuant de temps en temps un décalage aléatoire) pour ne pas allonger le temps de calcul. On effectue une approximation de la loi de b pour éviter de calculer la fonction de partition. Ces opérations, plus les initialisations, conduisent à environ $60 + 10 \log_2 n$ opérations par pixel et par échantillon.

Les échantillons sont calculés sur une imagerie (extraite de l’image à traiter), car le modèle suppose que les hyperparamètres ne dépendent pas de la zone d’où l’on tire cette imagerie. Ceci permet un gain de temps dans l’estimation.

Exemple : image $128 \times 128 \rightarrow 130 \text{ op. pixel}^{-1} \text{ échantillon}^{-1}$

- **Echantillonneur de la loi a posteriori**

Cet algorithme ne diffère du précédent que par la présence de H et \mathbf{O} . Il faut ajouter une étape d’initialisation, car l’échantillon de départ de la chaîne de Markov est l’image restaurée par l’algorithme rapide de déconvolution dans le domaine de la DCT avec les paramètres de départ. Cet algorithme a un coût de l’ordre de $50 + 10 \log_2 n$ opérations par pixel et par itération (voir paragraphe 3.3.4 du chapitre 3). Il faut donc ajouter le coût de l’algorithme précédent plus celui de la restauration et une

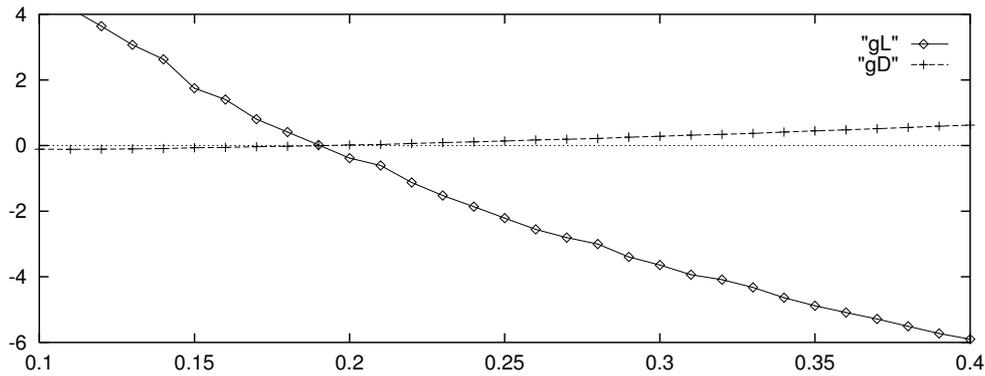


FIG. 6.15 – Gradients du critère $\frac{\partial L}{\partial \lambda}$ et $\frac{\partial L}{\partial \delta}$ (gL et gD) en fonction de λ , pour $\delta = 2$ (image usine extraite de Nîmes, voir fig. 6.11).

% d'erreur	-30%	-20%	-10%	0%	+10%	+20%	+30%
λ	0.13	0.15	0.17	0.19	0.21	0.23	0.25
SNR (dB)	22.13	22.51	22.64	22.70	22.65	22.57	22.48

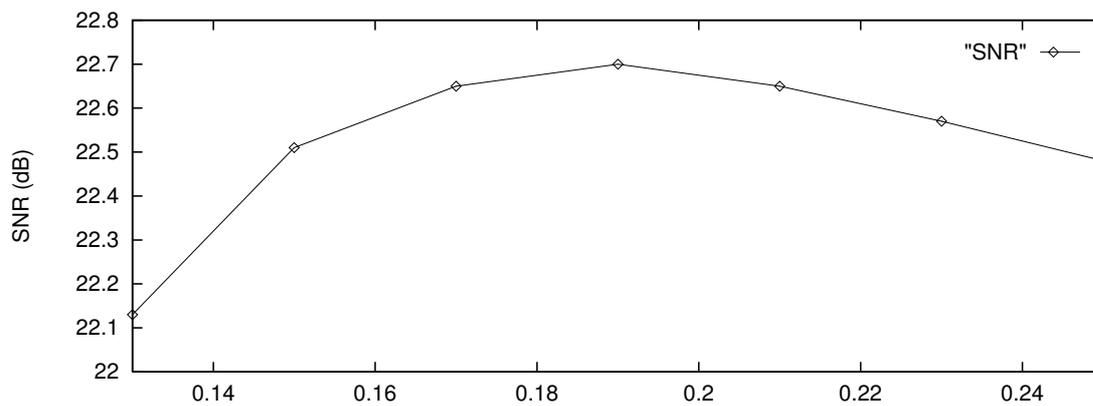


FIG. 6.16 – Rapport signal/bruit de l'image restaurée en fonction de λ en abscisse, autour de $\hat{\lambda} = 0.19$, avec $\delta = 2$ (image usine extraite de Nîmes, cf. fig. 6.11).

étape initiale de calcul des transformées dues à H et \mathbf{O} .

Exemple : image $128 \times 128 \rightarrow 80 \text{ op.pixel}^{-1} + 120 \text{ op.pixel}^{-1} \text{iter}^{-1} + 130 \text{ op.pixel}^{-1} \text{échantillon}^{-1}$

6.6 Conclusion

Nous avons montré qu'il est possible de mettre en œuvre des méthodes d'estimation de paramètres pour le modèle de déconvolution d'image, avec régularisation par fonction φ . L'estimée au sens du maximum de vraisemblance est difficile à calculer pratiquement mais nous avons développé pour ce modèle une méthode assez rapide. Notre algorithme doit être comparé à celui du gradient stochastique généralisé de Younes [Younes, 1989], qui procède aussi par descente de gradient et dans lequel nous pouvons échantillonner les lois a priori et a posteriori par les algorithmes proposés. L'avantage pour l'algorithme du gradient stochastique généralisé de Younes [Younes, 1989], est qu'un seul échantillon de chaque loi est nécessaire à chaque itération (au lieu de plusieurs dizaines pour l'estimation des moyennes

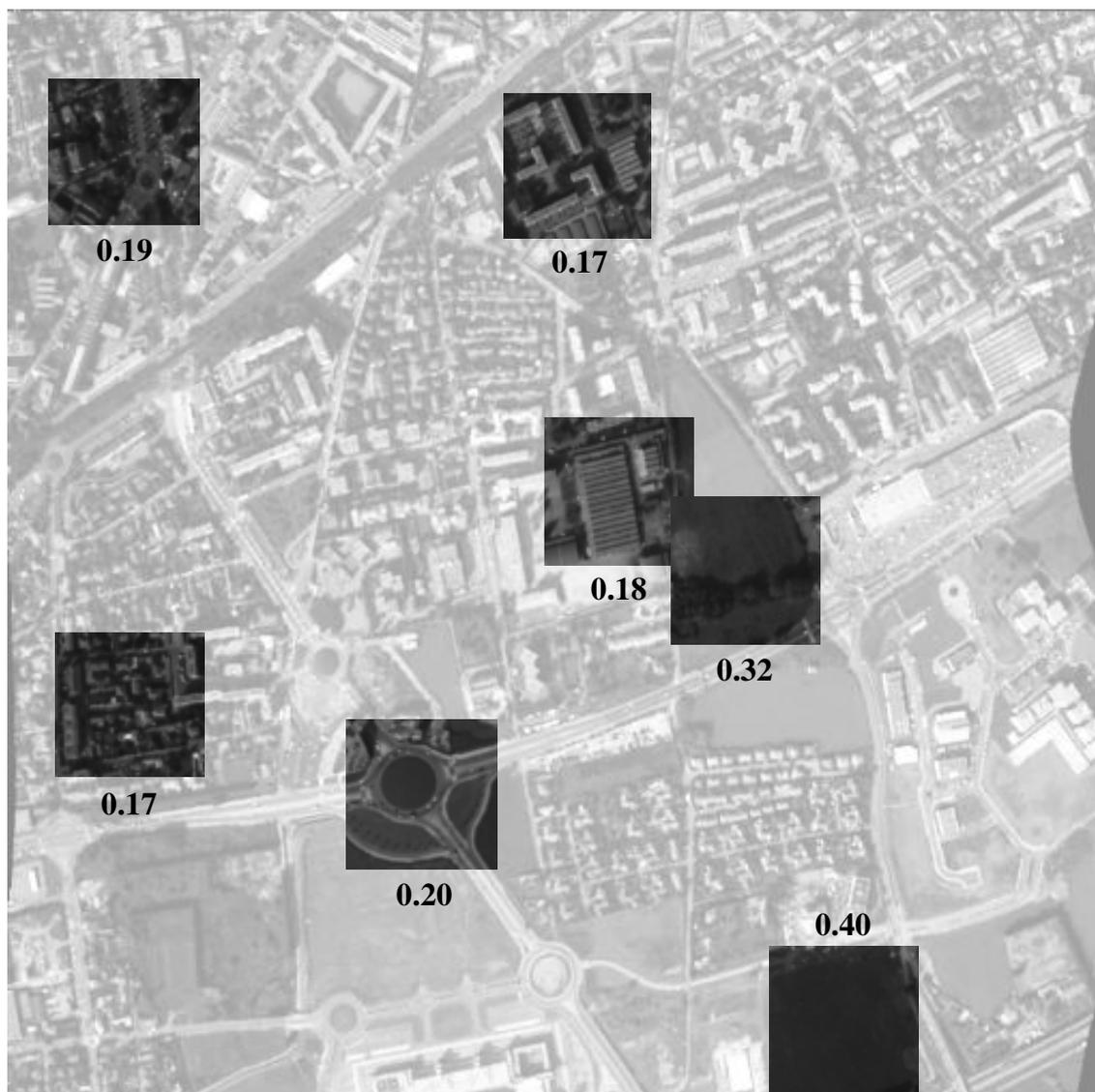


FIG. 6.17 – Influence de la zone d'extraction de l'imageriette (64×64) sur l'estimation de λ , avec $\delta = 2$.

empiriques). Il semble que la difficulté de cet algorithme [Younes, 1989] soit le calcul et l'ajustement du facteur de pondération du gradient dans l'algorithme de descente.

D'autre part, il est nécessaire d'introduire une *connaissance a priori* sur les hyperparamètres si on veut trouver une solution unique (minimum global de la $-\log$ vraisemblance) lors de leur estimation. On pourrait construire une loi de probabilité $P(\lambda, \delta)$ qui tienne compte du fait que δ ne peut être trop grand (on se ramènerait alors à un φ -modèle quadratique) ni trop petit. Dans les deux cas, on perdrait la forme non-linéaire et non-quadratique du modèle, ce qui en fait toute la puissance. Un choix possible de $P(\lambda, \delta)$ serait basé sur une grande série d'hyperparamètres estimés sur un grand nombre d'images, et la probabilité traduirait alors la fréquence d'apparition de certains couples (λ, δ) .

Nous avons estimé les hyperparamètres sur une imageriette, extraite d'une plus grande image à restaurer. Ces paramètres traduisent alors la meilleure façon de restaurer cette imageriette. A l'intérieur d'une même grande image, il n'est pas rare d'obtenir des hyperparamètres optimaux différents, selon l'endroit d'où l'on extrait la sous-image. Ceci montre que l'approche

par un φ -modèle est trop *globale*, car on cherche à restaurer la grande image avec un *unique* couple optimal $(\hat{\lambda}, \hat{\delta})$, alors que *localement*, sur de petites sous-images, d'autres couples conviennent mieux. On peut alors penser à l'utilisation d'un modèle plus local, en utilisant des paramètres différents sur différentes zones de l'image. Evidemment pour se faire, nous devons calculer une segmentation au sens des paramètres de régularisation (prenant en compte la structure des zones, homogènes, texturées...). Cette segmentation doit être calculée en même temps que l'image elle-même, ce qui nous renvoie au type de problèmes du chapitre 4 sur la régularisation et segmentation.

Enfin, appliquer des méthodes stochastiques d'estimation de paramètres pour ce modèle de régularisation a été *relativement aisé* dans la mesure où le modèle a une interprétation stochastique directe. Ce n'est pas le cas des méthodes par EDP ou par contours actifs, pour lesquelles nous essayerons, dans le futur, de développer des algorithmes d'estimation de paramètres.

Chapitre 7

Conclusion

Ce document rassemble un certain nombre de méthodes mathématiques et d'algorithmes pour le traitement d'image. Loin d'être exhaustif, il propose néanmoins un état actuel de nombreux travaux dans le domaine du calcul variationnel et des EDP pour l'image. Nous avons essayé de présenter à la fois un état de la théorie et des résultats mathématiques existants, et les applications pratiques sur des problèmes concrets du monde industriel.

Un de nos soucis est de faire un lien aussi systématique que possible entre l'approche variationnelle et l'approche stochastique. Un certain nombre de méthodes s'interprètent aussi bien dans l'une ou l'autre approche et nous pensons qu'il peut être intéressant d'essayer de dégager les aspects communs ou au contraire spécifiques de chaque approche.

Une des applications est le problème de l'estimation des paramètres de modèles. Dans l'approche variationnelle, il n'existe pratiquement pas de méthodes d'estimation automatique, alors que l'estimation paramétrique est un grand champ de travail et de recherche pour les méthodes stochastiques. Nous avons considéré l'estimation des paramètres du modèle de régularisation de problèmes inverses avec prise en compte des discontinuités. Plus récemment, dans le cadre d'un contrat avec le CNES, nous nous sommes intéressés au problème de l'estimation conjointe des paramètres du modèle de régularisation et du modèle de formation des données (fonction de transfert de l'appareil de mesure et niveau de bruit). Ce travail trop récent n'a pas été présenté dans ce mémoire.

Nos efforts de rapprochement de ces deux approches ont été entrepris pour le moment sur les méthodes par minimisation de fonctionnelles ou d'énergie des probabilités de Gibbs. Dans l'avenir, nous essayerons de mieux comprendre les méthodes des EDP stochastiques, sur lesquelles nous n'avons pas encore travaillé, afin de pouvoir faire le parallèle avec les méthodes par EDP déterministes et avoir une vision plus complète des liens entre déterministe et stochastique pour le traitement d'image. Certains travaux, sur des EDP simples comme l'équation de la chaleur ou la diffusion anisotrope de Malik et Perona ont déjà été menés dans ce sens par certains auteurs [Krim et Bao, 1999a, Krim et Bao, 1999b].

Nos travaux à l'heure actuelle, que ce soit en régularisation ou en classification d'image, tendent à approcher numériquement des images définies sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^2 , ayant des discontinuités sur des courbes. Pour cela, nous nous sommes inspirés des travaux effectués pour l'approximation de solutions dans l'espace BV, ou l'approximation de solutions de la fonctionnelle de Mumford et Shah, ou encore de travaux en mécanique des fluides sur l'études des transitions de phase. Deux approches semblent se dégager :

- La première consiste en la construction de suites de fonctionnelles à minimiser successivement. Ces méthodes sont issues de la théorie de la Γ -convergence. Les contours

sont modélisés explicitement dans les suites de fonctionnelles par des variables de même type que les solutions cherchées (images définies sur Ω). Cette approche s'est montrée performante pour la restauration d'image (chapitre 4) et la classification d'image (chapitre 5). Pour ces deux applications, nous rappelons que les résultats théoriques n'existent pas encore sur les fonctionnelles discrètes que nous utilisons, du fait de la régularisation non quadratique sur la variable auxiliaire (de contour). Cependant, nous pensons qu'il n'est pas impossible d'obtenir des résultats en considérant une suite de fonctionnelles discrètes paramétrée par $\epsilon \searrow 0$, dont le pas de discrétisation tend vers zéro avec ϵ , de manière analogue au résultat obtenu par Chambolle et Dal Maso en 98 [Chambolle et Maso, 1998]. Ces aspects sont le sujet de notre demande de collaboration avec R. March du CNR de Rome dans le cadre d'une action bilatérale Galilée dont nous attendons à ce jour l'acceptation.

- La deuxième approche consiste à modéliser explicitement les contours de l'image par un ou plusieurs ensembles de niveau de fonctions définies sur Ω . Cette approche est basée sur les méthodes par contours actifs. Là encore, nous avons considéré le cas de la régularisation des problèmes inverses (chapitre 4) et le cas de la classification d'image (chapitre 5). Cette méthode est délicate à initialiser. Nous avons proposé une méthode utilisant des bulles régulièrement réparties sur l'image qui donnent satisfaction pour la classification d'image. La difficulté de cette approche est son extension au cas plus général de la segmentation d'image, c'est-à-dire où l'on ne connaît pas a priori le nombre et le type de régions à détecter. Un certain nombre de travaux actuels vont dans ce sens [Zhu et Yuille, 1996b, Yezzi *et al.*, 1999] mais la question générale est à notre avis, très difficile et loin d'être résolue.

Pour terminer, notons que nous avons développé et utilisons principalement des méthodes dans l'approche déterministe par minimisation de fonctionnelles. De nombreux travaux restent à effectuer sur ces fonctionnelles. D'abord l'aspect théorique n'a pas toujours été considéré et il serait utile de s'intéresser à l'existence de minimum ainsi qu'à la convergence des algorithmes mis en œuvre. Ces points ont été traités sur certaines fonctionnelles mais restent ouverts pour d'autres. Ces aspects seront traités en collaboration avec le Pr G. Aubert du laboratoire Dieudonné de l'UNSA (Université de Nice-Sophia Antipolis).

Il nous semble aussi utile de nous intéresser systématiquement au problème de l'estimation automatique des paramètres de ces fonctionnelles. Comme nous l'avons vu au chapitre 6, ces questions sont difficiles, même sur des fonctionnelles relativement simples.

Enfin, nous nous intéressons depuis peu à l'imagerie radar RSO (radar à synthèse d'ouverture), domaine particulièrement difficile du fait du type d'acquisition des données et de la très mauvaise qualité de ces images. Cependant, ces capteurs ont l'avantage principal sur les capteurs optiques d'être "tout temps", c'est-à-dire pouvant fournir des données indépendamment de la couverture nuageuse et de la période d'éclairement par le soleil (visibilité de nuit). Pour cette application, nous regarderons le problème de la segmentation, que nous avons déjà largement étudié sur des images optiques. La difficulté provient de la manière de construire les images RSO, engendrant un bruit multiplicatif fort sur les images à traiter. Nous nous intéressons aussi au problème de la reconstruction du relief à partir de couple interférométrique d'images, ce qui demande de résoudre le problème du déroulement de phase, particulièrement mal posé.

Bibliographie

- [Acar et Vogel, 1994] R. Acar et C.R. Vogel. Analysis of bounded variation penalty methods for ill-posed problems. *Inverse Problems*, 10(6) :1217–1229, December 1994.
- [Alicandro *et al.*, to appear] R. Alicandro, A. Braides et J. Shah. Approximation of non-convex functionals in GBV. *Interfaces and free boundaries - modelling, analysis and computation*, to appear.
- [Allen et Cahn, 1979] S. Allen et J.W. Cahn. A microscopic theory for antiphase boundary motion and its application to antiphase domain coarsening. *Acta Metallurgica*, 27 :1085–1095, 1979.
- [Alvarez *et al.*, 1992] L. Alvarez, P-L. Lions et J-M. Morel. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion II. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 29(3) :845–866, June 1992.
- [Ambrosio et Tortorelli, 1990] L. Ambrosio et V.M. Tortorelli. Approximation of functionals via γ -convergence. *Commun. Pure & Appli. Math.*, 43 :999–1036, 1990.
- [Ambrosio et Tortorelli, 1992] L. Ambrosio et V-M. Tortorelli. On the approximation of free discontinuity problems. *Boll. Un. Mat. Ital.*, 6(B) :105–123, 1992.
- [Ambrosio, 1989] L. Ambrosio. Variational problems in sbv and image segmentation. *Acta applicandae Mathematicae*, 17 :1–40, 1989.
- [Ambrosio, 1998] L. Ambrosio. Geometric measure theory and application to computer vision. Notes de Cours - Questions mathématiques en traitement du signal et de l'image 4, Centre Emile Borel, 1998.
- [Angwin et Kaufman, 1989] D. Angwin et H. Kaufman. Image restoration using reduced order models. *Signal Processing*, 16 :21–28, 1989.
- [Attouch, 1984] H. Attouch. *Variational convergence for functions and operators*. Pitman, Boston, 1984.
- [Aubert et Blanc-Féraud , 1999] G. Aubert et L. Blanc-Féraud . Some remarks on the equivalence between 2d and 3d classical snakes and geodesic active contours. *International Journal on Computer Vision*, 34(1) :19–28, 1999.
- [Aubert et Kornprobst, 1999] G. Aubert et P. Kornprobst. A mathematical study of the relaxed optical flow problem in the space $BV(\omega)$. *SIAM J. Math. Anal.*, 1999. to appear.
- [Aubert et Vese, 1997] G. Aubert et L. Vese. A variational method in image recovery. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 34(5) :1948–1979, october 1997.
- [Aujol, 1999] Jean-Fran cois Aujol. Traitement d'images par contours actifs (snakes) - Conservation de la distance. Rapport de stage de 1ère année de l'ENS Cachan, Septembre 1999.
- [Azencott, 1992] R. Azencott. Markov field approach : parameter estimation by qualitative boxes. Cours école d'été, Les Houches, 1992.

- [Baldo, 1990] S. Baldo. Minimal interface criterion for phase transitions in mixtures of Cahn-Hilliard fluids. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 7 :67–90, 1990.
- [Barles *et al.*, 1992] G. Barles, L. Bronsard et P.E. Souganidis. “Front propagation for reaction-diffusion equations of bistable type”. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 9 :479–496, 1992.
- [Barles *et al.*, 1993] G. Barles, H.M. Soner et P.E. Souganidis. Front propagation and phase field theory. *SIAM J. Control and Optimization*, 31(2), March 1993.
- [Baxter, 1982] R.J. Baxter. *Exactly solved models in statistical mechanics*. Academic Press, 1982.
- [Bellettini *et al.*, 1991] G. Bellettini, M. Paolini et C. Verdi. “Numerical minimization of geometrical type problems related to calculus of variations”. *Calcolo*, 27 :251–278, 1991.
- [Bellettini et Coscia, 1994] G. Bellettini et A. Coscia. Discrete approximation of a free discontinuity problem. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 15 :201–224, 1994.
- [Berthod *et al.*, 1996] M. Berthod, Z. Kato, S. Yu et J. Zerubia. Bayesian image classification using Markov random fields. *Image and Vision Computing*, 14(4) :285–293, 1996.
- [Besag, 1974] J. E. Besag. Spatial interaction and the statistical analysis of lattice systems (with discussion). *Journal of Royal Statist. Society B.*, pages 192–236, 1974.
- [Besag, 1986] J.E. Besag. On the statistical analysis of dirty pictures. *Journal of Royal Statistic Society*, B(68) :259–302, 1986.
- [Biemond *et al.*, 1983] J. Biemond, J. Rieske et J.J. Gerbrands. A fast Kalman filter for images degraded by both blur and noise. *IEEE Trans. on Accoustic Speech and Signal Processing*, 31(5) :1248–1256, 1983.
- [Blake et A.Zisserman, 1987] A. Blake et A.Zisserman. *Visual reconstruction*. The MIT Press Series in artificial intelligence, 1987.
- [Blanc-Féraud *et al.*, 1988] L. Blanc-Féraud, M. Barlaud et P. Mathieu. Amélioration de la restauration d’images floues par filtrage adaptatif de Kalman utilisant une image miroir. *Traitement du Signal*, 5(4) :249–261, 1988.
- [Blanc-Féraud *et al.*, 1995] L. Blanc-Féraud, P. Charbonnier, G. Aubert et M. Barlaud. Nonlinear image processing : Modeling and fast algorithm for regularization with edge detection. In *IEEE Proceedings of the 2nd International Conference of Image Processing*, pages 474–477, Washington, USA, October 1995.
- [Blanc-Féraud et Barlaud, 1996] L. Blanc-Féraud et M. Barlaud. Edge preserving restoration of astronomical images. *Numéro spécial de la revue Vistas in Astronomy*, 40(4), 1996.
- [Blanc-Féraud, 1997] L. Blanc-Féraud. Problèmes inverses mal-posés. In *Actes de la VIIIème école d’automne du GdR de Physique de l’intérieur des étoiles et des planètes géantes : Génération et interprétation des oscillations stellaires*, Aussois, France, septembre 1997.
- [Bolomey *et al.*, 1991] J.Ch. Bolomey, Ch. Pichot et G. Gaboriaud. Planar microwave imaging camera for biomedical applications : Critical and prospective analysis of reconstruction algorithms. *Radio Science*, 26(2) :541–549, 1991.
- [Bolon *et al.*, 1995] Ph. Bolon, J.-M. Chassery, J.-P. Cocquerez, D. Demigny, C. Graffigne, A. Montanvert, S. Philipp, R. Zeboudj et J. Zerubia. *Analyse d’images : filtrage et segmentation*. Masson, 1995. Coordinateurs généraux : J.-P. Cocquerez et S. Philipp - Préface de H. Maître.

- [Bonnet, 1995a] A. Bonnet. Caractérisation des minima globaux de la fonctionnelle de Mumford-Shah en segmentation d'images. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t.321(Série I) :1121–1126, 1995.
- [Bonnet, 1995b] A. Bonnet. Sur la régularité des bords des minima de la fonctionnelle de Mumford-Shah. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t.321(Série I) :1275–1279, 1995.
- [Borngefors, 1988] G. Borngefors. Hierarchical chamfer matching : a parametric edge matching algorithm. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 10(6), 1988.
- [Bouman et Sauer, 1993] C. Bouman et K. Sauer. A generalized Gaussian image model for edge-preserving MAP estimation. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2(3) :296–310, July 1993.
- [Bouman et Shapiro, 1994] C.A. Bouman et M. Shapiro. A multiscale random field model for Bayesian image segmentation. *IEEE Trans. on Image Processing*, 3 :162–177, March 1994.
- [Bourdin,] B. Bourdin. Image segmentation with a finite element method. L.P.M.T.M, Institut Galilée, Université Paris Nord, Villetaneuse, France.
- [Braides, 1998] A. Braides. *Approximation of Free-Discontinuity Problems*. Number 1694 in Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1998.
- [Caginalp, 1989] G. Caginalp. Stefan and Hele-Shaw type as asymptotic limits of the phase-field equations. *Physical Review*, 39(11) :5887–5896, 1989.
- [Cahn et Hilliard, 1958] J.W. Cahn et J.E. Hilliard. Free energy of of a nonuniform system. I. Interfacial free energy. *Journal of Chemical Physics*, 28(1) :258–267, 1958.
- [Caorsi *et al.*, 1994] S. Caorsi, G.L. Gragnagni, S. Medicina, M. Pastorino et G. Zunino. Microwave Imaging Based on a Markov Random Field Model. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 42(3) :293–303, March 1994.
- [Caselles *et al.*, 1993] V. Caselles, F. Catte, T. Coll et F. Dibos. A geometric model for active contours. *Numerische Mathematik*, 66 :1–31, 1993.
- [Caselles *et al.*, 1997] V. Caselles, R. Kimmel et G. Sapiro. On geodesic active contours. *Int. Journal of Computer Vision*, 22(1) :61–79, February 1997.
- [Catte *et al.*, 1992] F. Catte, P-L. Lions, J-M. Morel et T. Coll. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 29(1) :182–193, February 1992.
- [Celeux et Diebolt, 1988] G. Celeux et J. Diebolt. A random imputation principle : the stochastic E.M. algorithm. Rapport de recherche 901, Inria, 1988.
- [Chalmond, 1988] B. Chalmond. Image restoration using an estimated markov model. *Signal Processing*, 15 :115–129, 1988.
- [Chalmond, 1989] B. Chalmond. An iterative Gibbsian technique for reconstruction of m-ary images. *Pattern Recognition*, 22(6) :747–761, 1989.
- [Chambolle et Lions, 1997] A. Chambolle et P.L. Lions. Image recovery via total variation minimization and related problems. *Numer. Math.*, 76(2) :167–188, 1997.
- [Chambolle et Maso, 1998] A. Chambolle et G. Dal Maso. Discrete approximation of the Mumford-Shah functional in dimension two. Research note 98-20, Ceremade, cahiers mathématiques de la décision, Université IX Dauphine, 1998.
- [Chambolle, 1995] A. Chambolle. Image segmentation by variational methods : Mumford and shah functional and the discrete approximations. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 1(55), June 1995.

- [Champagnat *et al.*, 1996] F. Champagnat, Y. Goussard et J. Idier. Unsupervised deconvolution of sparse spike train using stochastic approximation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 44(12), December 1996.
- [Charbonnier *et al.*, 1997] P. Charbonnier, L. Blanc-Féraud, G. Aubert et M. Barlaud. Deterministic Edge-Preserving Regularization in Computed Imaging. *IEEE Transactions on Image Processing*, 6(2) :298–311, February 1997. 1998 IEEE young author best paper award, (image and multidimensional area).
- [Charbonnier, 1994] P. Charbonnier. *Restauration d'image : régularisation avec prise en compte des discontinuités*. Thèse de Doctorat, Université de Nice Sophia Antipolis, France, septembre 1994.
- [Chellappa et Jain, 1993] R. Chellappa et A. Jain, editors. *Markov Random Fields, Theory and application*, chapter Parameter estimation for Gibbs distributions from fully observed data by B. Gidas. Academic press, 1993.
- [Chew et Wang, 1990] W.C. Chew et Y.M. Wang. Reconstruction of two-dimensional permittivity distribution using the distorted Born iterative method. *IEEE Trans. on Medical Imaging*, MI-9(2) :218–225, 1990.
- [Chipot *et al.*, 1999] M. Chipot, R. March et D. Vitulano. Numerical analysis of oscillations in a nonconvex problem related to image selective smoothing. Research report 5/1999, Istituto per le applicazioni del calcolo Mauro Picone, CNR, 1999.
- [Ciampini *et al.*, 1998a] R. Ciampini, L. Blanc-Féraud, M. Barlaud et E. Salerno. Estimation-segmentation du flot optique et contours actifs. Rapport de recherche 98-11, Laboratoire I3S, Université de Nice-Sophia Antipolis, 1998.
- [Ciampini *et al.*, 1998b] R. Ciampini, L. Blanc-Féraud, M. Barlaud et E. Salerno. Motion-based segmentation by means of active contours. In *IEEE Proceedings of the 5th International Conference of Image Processing*, Chicago, USA, October 1998.
- [Ciarlet, 1990] Philippe G. Ciarlet. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*. Masson, 1990.
- [Cohen, 1991] L. Cohen. On active contour models and balloons. *Computer Vision, Graphics and Image Processing : Image Understanding*, 53(2) :211–218, March 1991.
- [Colton et Kress, 1992] D. Colton et R. Kress. *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [Colton et Päiväranta, 1992] D. Colton et L. Päiväranta. The uniqueness of a solution to an inverse scattering problem for electromagnetic waves. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 119 :59–70, 1992.
- [Corbard *et al.*, 1998] T. Corbard, G. Bertomieu, J. Provost et L. Blanc-Féraud. On the use of nonlinear regularization in inverse methods for the solar tachocline profile determination. In S.G. Korzennik et A. Wilson, editors, *Structure and dynamics of the interior of the Sun and Sun-like Stars*, volume ESA SP-418, Noordwijk, The Netherlands, 1998.
- [Corbard et Blanc-Féraud and G. Bertomieu and J. Provost , 1999] T. Corbard et L. Blanc-Féraud and G. Bertomieu and J. Provost . Non linear regularization for heliosismic inversions - application for the study of the solar tachocline. *Astronomy and Astrophysics, Springer*, 344 :696–708, april 1999.
- [Coté, 1992] M. G. Coté. Automated Swept-Angle Bistatic Scattering Measurements Using Continuous Wave Radar. *IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement*, 41(2) :185–192, April 1992.

- [Delaney et Bresler, 1998] A.H. Delaney et Y. Bresler. Globally convergent edge-preserving regularized reconstruction : An application to limited-angle tomography. *IEEE Trans. on Image Processing*, 7(2) :204–221, 1998.
- [Demoment, 1989] G. Demoment. Image reconstruction and restoration : overview of common estimation structures and problems. *IEEE Transactions on Acoustic Speech and Signal Processing*, 37(12) :2024–2036, December 1989.
- [Dempster *et al.*, 1977] A. Dempster, N. Laird et D. Rubin. Maximum Likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *Journal of Royal Statistics Society B*, 39 :1–38, 1977.
- [Deriche et Faugeras, 1996] R. Deriche et O. Faugeras. Les EDP en traitement des images et vision par ordinateur. *Traitement du Signal*, 13(6), 1996. Numéro Spécial.
- [Descombes *et al.*, 1997a] X. Descombes, R. Morris et J. Zerubia. Some improvements to Bayesian image segmentation. Part one : modelling. (in french). *Traitement du Signal*, 14(4) :373–382, 1997.
- [Descombes *et al.*, 1997b] X. Descombes, R. Morris et J. Zerubia. Some improvements to Bayesian image segmentation. Part two : classification. (in french). *Traitement du Signal*, 14(4) :383–395, 1997.
- [Descombes *et al.*, 1999] X. Descombes, R. Morris, J. Zerubia et M. Berthod. Estimation of Markov Random Field prior parameters using Markov Chain Monte Carlo Maximum Likelihood. *IEEE Trans. on Image Processing*, 8(7) :954–963, July 1999.
- [Devaney, 1983] J. Devaney. A computer simulation study of diffraction tomography. *IEEE Trans. on Biomedical Engineering*, BME-30 :377–386, 1983.
- [Elissalt, 1995] J.M. Elissalt. *Imagerie Microonde : Reconstruction Quantitative Bidimensionnelle – Applications au Domaine Biomédical*. Thèse de Doctorat, Université de Paris-XI, Février 1995.
- [Epstein et Gage, 1987] C.L. Epstein et M. Gage. The curve shortening flow. In A. Chorin et A. Madja, editors, *Waves motion : Theory, Modeling and Computation*, 1987.
- [Evans et Gariepy, 1992] L. Evans et R. Gariepy. *Measure Theory and Fine properties of Functions*. Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Berlin, 1992.
- [Evans et Spruck, 1991] L.C. Evans et J. Spruck. Motion of level sets by mean curvature, I. *Journal of Differential Geometry*, 33, 1991.
- [Evans et Spruck, 1992] L.C. Evans et J. Spruck. Motion of level sets by mean curvature, II. *Trans. of the American Mathematical Society*, 330(1), 1992.
- [Fonseca et Tartar, 1989] I. Fonseca et L. Tartar. The gradient theory of phase transitions for systems with two potential wells. *Proc. of the Royal Society of Edinburgh*, 111A(11) :89–102, 1989.
- [Fortier *et al.*, 1993] N. Fortier, G. Demoment et Y. Goussard. GCV and ML methods of determining parameters in image restoration by regularization : Fast computation in the spatial domain and experimental comparison. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 4(1), March 1993.
- [Franchois et Pichot, 1997] A. Franchois et Ch. Pichot. Microwave Imaging - Complex Permittivity Reconstruction with a Levenberg-Marquardt Method. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, AP-45(2) :203–215, 1997.
- [Franchois, 1993] A. Franchois. *Contribution à la Tomographie Microonde : Algorithmes de Reconstruction Quantitative et Vérifications Expérimentales*. Thèse de Doctorat, Université de Paris-XI, Juin 1993.

- [Galatsanos et Katsaggelos, 1991] N.P. Galatsanos et A.K. Katsaggelos. Cross-Validation and other criteria for estimating the regularizing parameter. In *IEEE Proceedings of ICASSP*, pages 3021–3024, 1991.
- [Galatsanos et Katsaggelos, 1992] N.P. Galatsanos et A.K. Katsaggelos. Methods for choosing the regularization parameter and estimating the noise variance in image restoration and their relation. *IEEE Transactions on Image Processing*, 1(3) :322–336, July 1992.
- [Garnero *et al.*, 1991] L. Garnero, A. Franchois, J. P. Hugonin, Ch. Pichot et N. Joachimiowicz. Microwave imaging : complex permittivity reconstruction by simulated annealing. *IEEE Trans. on Microwaves Theory and Techniques*, MTT-39 :1801–1807, 1991.
- [Gassiat *et al.*, 1992] E. Gassiat, F. Monfront et Y. Goussard. On simultaneous signal estimation and parameter identification using generalized likelihood approach. *IEEE Transactions on Information Theory*, 38(1), January 1992.
- [Geiger et Girosi, 1991] D. Geiger et F. Girosi. Parallel and deterministic algorithms for MRFs : surface reconstruction. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13(5) :401–412, May 1991.
- [Geiger et Yuille, 1990] D. Geiger et A. Yuille. A common framework for image segmentation. In *Proc. of the Int. Conf. on Pattern Recognition*, pages 502–507, Atlantic City, 1990.
- [Geman et Clure, 1985] S. Geman et D.E. Mc Clure. Bayesian image analysis : an application to single photon emission tomography. In Amer. Statist. Assoc., editor, *Proc. Statist. Comput. Sect.*, pages 12–18, Washington DC, 1985.
- [Geman et Geman, 1984] S. Geman et D. Geman. Stochastic Relaxation, Gibbs Distributions and the Bayesian Restoration of Images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 6(6) :721–741, November 1984.
- [Geman et Reynolds, 1992] D. Geman et G. Reynolds. Constrained restoration and the recovery of discontinuities. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14(3) :367–383, March 1992.
- [Geman et Yang, 1995] D. Geman et C. Yang. Nonlinear Image Recovery with Half-Quadratic Regularization. *IEEE Transactions on Image Processing*, 4(7) :932–946, July 1995.
- [Georgii, 1988] H-O Georgii. *Gibbs Measures and Phase Transitions*. de Gruyter, Berlin, 1988.
- [Geyer et Thompson, 1992] C.J. Geyer et E.E. Thompson. Constrained Monte Carlo Maximum Likelihood for dependent data. *Journal of Royal Statistics Society B*, 54(3) :647–699, 1992.
- [Giorgi *et al.*, 1989] E. De Giorgi, M. Carriero et A. Leaci. Existence theorem for a minimum problem with free discontinuity set. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 108 :195–218, 1989.
- [Giorgi, 1977] E. De Giorgi. γ -convergenza e g-convergenza. *Bollettino unione Matematica Italiana*, 14-A(2) :213–220, 1977.
- [Giorgi, 1978] E. De Giorgi. “Convergence problems for functionals or operators”. *Proc. of the International Meeting on Recent Methods in Nonlinear Analysis, Pitagoria, Ed. Bologna*, 1978.
- [Giusti, 1984] E. Giusti, editor. *Minimal surfaces and functions of bounded variation*. Birkhäuser, 1984.

- [Gomes et Faugeras, 1999] J. Gomes et O. Faugeras. Reconciling distance functions and level sets. Rapport de recherche 3666, Inria, Sophia Antipolis, France, Avril 1999.
- [Graffigne et Labourdette, 1993] C. Graffigne et C. Labourdette. Some segmentation algorithms and their parallel implementation. In *49-ième session de l'Institut International de Statistique*, Florence, 1993.
- [Green, 1990] P. J. Green. Bayesian reconstruction from emission tomography data using a modified EM algorithm. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 9(1) :84–93, March 1990.
- [Habashy *et al.*, 1990] T.M. Habashy, M.L. Oristaglio et M.L. de Hoop. Simultaneous non-linear reconstruction of two-dimensional problems in tomography. *J. Comput. Appl. Math.*, 4 :1101–1118, 1990.
- [Hadamard, 1923] J. Hadamard. *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*. Yale University Press, New Haven, 1923.
- [Hähner, 1993] P. Hähner. A uniqueness theorem for a transmission problem in inverse electromagnetic scattering. *Inverse Problems*, 9 :667–678, 1993.
- [Harada *et al.*, 1995] H. Harada, D.J.N. Wall et T. Takenaka. Conjugate gradient method applied to inverse scattering problem. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 43(8) :784–792, August 1995.
- [Hebert et Leahy, 1989] T. Hebert et R. Leahy. A generalized EM algorithm for 3-D Bayesian reconstruction from Poisson data using Gibbs priors. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, MI-8(2) :194–202, June 1989.
- [Higdon *et al.*, 1997] D.M. Higdon, J.E. Bowsher, V.E. Johnson, T.G. Turkington, D.R. Gilland et R.J. Jaszczak. Fully Bayesian estimation of Gibbs hyperparameters for emission computed tomography data. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 16(5) :516–526, October 1997.
- [Horn et Schunck, 1981] B. Horn et B. Schunck. Determining optical flow. *Artificial Intelligence*, 17 :185–203, 1981.
- [Huber, 1981] P.J. Huber. *Robust Statistics*. John Wiley, New York, 1981.
- [Isakov, 1993a] V. Isakov. New stability results for soft obstacles in inverse scattering. *Inverse Problems*, 9 :535–543, 1993.
- [Isakov, 1993b] V. Isakov. Uniqueness and stability in multi-dimensional inverse problems. *Inverse Problems*, 9 :579–621, 1993.
- [Jain, 1989] A.K. Jain. *Fundamentals of digital image processing*. Prentice HALL, 1989.
- [Jalobeanu *et al.*, 1998a] A. Jalobeanu, L. Blanc-Féraud et J. Zerubia. Estimation d'hyperparametres pour la restauration d'images satellitaires par une méthode MCMCML. Rapport de recherche 3469, Inria, Août 1998.
- [Jalobeanu *et al.*, 1998b] A. Jalobeanu, L. Blanc-Féraud et J. Zerubia. *Etude de la déconvolution d'images satellitaires*, Décembre 1998. Rapport du contrat 44 LEO 527290 00775, Alcatel Space Industries, Cannes.
- [Joachimowicz *et al.*, 1991] N. Joachimowicz, Ch. Pichot et J. P. Hugonin. Inverse scattering : an iterative numerical method for electromagnetic imaging. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, AP-39 :1742–1751, 1991.
- [Johnson *et al.*, 1991] V.E. Johnson, W.H. Wong, X.Hu et C-T. Chen. Image restoration using Gibbs priors : Boundary modeling, treatment of blurring, and selection of hyperparameter. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13(5) :413–425, May 1991.

- [Kass *et al.*, 1987] M. Kass, A. Witkin et D. Terzopoulos. Snakes : Active contour models. *International Journal of Computer Vision*, 1 :321–331, 1987.
- [Kato, 1994] Z. Kato. *Multiresolution Markovian modeling for computer vision. Application to SPOT image segmentation (in French and English)*. Thèse de Doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis, France, 1994.
- [Katsaggelos et Lay, 1991] A.K. Katsaggelos et K.T. Lay. Maximum Likelihood blur identification and image restoration using the EM algorithm. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 39 :729–733, 1991.
- [Kay, 1993] S.T. Kay. *Fundamentals of statistical signal processing*. Signal Processing Series. Prentice Hall, 1993.
- [Khoumri *et al.*, 1998] M. Khoumri, L. Blanc-Féraud et J. Zerubia. Unsupervised deconvolution of satellite images. In *IEEE Proceedings of the 5th International Conference of Image Processing*, Chicago, USA, October 1998.
- [Kichenassamy *et al.*, 1996] S. Kichenassamy, A. Kumar, P. Olver, A. Tannenbaum et A. Yezzi. Conformal curvature flows : from phase transitions to active vision. *Arch. rational Mech. Anal.*, 134, 1996.
- [Kirkpatrick *et al.*, 1983] S. Kirkpatrick, C. Gelatt et M. Vecchi. Optimization by simulated annealing. *Science*, 220 :671–680, 1983.
- [Kirsch, 1996] A. Kirsch. *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*, volume 120 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, 1996.
- [Kleinman et van den Berg, 1992] R.E. Kleinman et P.M. van den Berg. A modified gradient method for two-dimensional problems in tomography. *J. Comput. Appl. Math.*, 42 :17–35, 1992.
- [Kleinman et van den Berg, 1993] R.E. Kleinman et P.M. van den Berg. An extended range-modified gradient technique for profile inversion. *Radio science*, 28(5) :877–884, October 1993.
- [Koenderink, 1984] J.J. Koenderink. The structure of images. *Biological Cybernetics*, 50 :363–370, 1984.
- [Kornprobst *et al.*, 1999] P. Kornprobst, R. Deriche et G. Aubert. Image sequence analysis via partial differential equations. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 11 :5–26, 1999.
- [Kornprobst, 1998] P. Kornprobst. *Contribution à la restauration d'images et à l'analyse de séquences : Approches variationnelles et solutions de viscosité*. Thèse de Doctorat, Université de Nice Sophia Antipolis, France, 1998.
- [Koulibaly *et al.*, 1996] P.M. Koulibaly, P. Charbonnier, L. Blanc-Féraud, I. Laurette, J. Darcourt et M. Barlaud. Poisson statistic and half-quadratic regularization for emission tomography reconstruction algorithm. In *IEEE Proceedings of the 3rd International Conference of Image Processing*, Lausanne, Switzerland, September 1996.
- [Koulibaly, 1996] P. M. Koulibaly. *Régularisation et corrections physiques en tomographie d'émission*. Thèse de Doctorat, Université de Nice Sophia Antipolis, France, octobre 1996.
- [Krim et Bao, 1999a] H. Krim et Y. Bao. Nonlinear diffusion : a probabilistic view. In *IEEE International Conference on Image Processing*, volume II, pages 21–25, Kobe, Japan, October 1999.
- [Krim et Bao, 1999b] H. Krim et Y. Bao. A stochastic diffusion approach to signal denoising. In *IEEE International Conference on Acoustic Speech and Signal Processing*, volume IV, pages 1773–1776, Phoenix, USA, March 1999.

-
- [Laarhoven et Aarts, 1987] P. Van Laarhoven et E. Aarts. *Simulated Annealing : Theory and Applications*. Reidel-Kluwer, 1987.
- [Legendijk *et al.*, 1988] R.L. Legendijk, D.L. Angwin, H. Kaufman et J. Biemond. Recursive and iterative methods for image identification and restoration. In *Signal Processing IV : theories and applications, Proceedings of the conference EUSIPCO*, pages 235–238, Grenoble, France, 1988.
- [Legendijk *et al.*, 1989] R.L. Legendijk, J. Biemond et D.E. Boekee. Blur identification using the Expectation-Maximization algorithm. In *IEEE Proceedings of the International Conference on Acoustic, Speech and Signal Processing*, pages 1397–1400, 1989.
- [Lakshmanan et Derin, 1989] S. Lakshmanan et H. Derin. Simultaneous parameter estimation and segmentation of Gibbs random field using simulated annealing. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11(8) :322–336, August 1989.
- [Lange, 1990] K. Lange. Convergence of EM image reconstruction algorithm with Gibbs smoothing. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, MI-9(4) :439–446, December 1990.
- [Laurette *et al.*, 1998] I. Laurette, J. Darcourt, L. Blanc-Féraud, P. M. Koulibaly et M. Barlaud. Combined constraints for efficient algebraic regularized methods in fully 3d reconstruction. *Phys. Med. Biol*, 43(4) :991–1000, Avril 1998. 1997 International Meeting on Fully Three-Dimensional Image Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine.
- [Laurette, 1997] I. Laurette. *Reconstruction en géométrie conique : application à l'imagerie d'émission tridimensionnelle*. Thèse de Doctorat, Université de Nice Sophia Antipolis, France, Mars 1997.
- [Lazaroa'ia-Vese, 1996] L. Lazaroa'ia-Vese. *Problèmes variationnels et EDP pour l'analyse d'images et l'évolution de courbes*. Thèse de Doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis, France, novembre 1996.
- [Lobel *et al.*, 1995a] P. Lobel, L. Blanc-Féraud, Ch. Pichot et M. Barlaud. Technical development for an edge-preserving regularization method in inverse scattering. Research note 95-73, Laboratoire Informatique Signaux et Systèmes de Sophia Antipolis, December 1995.
- [Lobel *et al.*, 1995b] P. Lobel, R. Kleinman, Ch. Pichot, L. Blanc-Féraud et M. Barlaud. Gradient Method For Solving Non Linear Inverse Scattering In Microwave Tomography. In *Proceedings PIERS'95*, page 742, Seattle, Washington, USA, July 1995. University of Washington.
- [Lobel *et al.*, 1996a] P. Lobel, L. Blanc-Féraud, Ch. Pichot et M. Barlaud. Conjugate Gradient Algorithm with Edge-Preserving Regularization for Microwave Inverse Scattering. In *Proceedings PIERS'96*, page 355, Innsbruck, Austria, July 1996. Innsbruck Universität.
- [Lobel *et al.*, 1996b] P. Lobel, R. Kleinman, Ch. Pichot, L. Blanc-Féraud et M. Barlaud. Conjugate gradient method for solving inverse scattering with experimental data. *IEEE Antennas & Propagation Magazine*, 38(3) :48–51, June 1996.
- [Lobel *et al.*, 1996c] P. Lobel, Ch. Pichot, L. Blanc-Féraud et M. Barlaud. Conjugate Gradient Algorithm With Edge-Preserving Regularization for Image Reconstruction from Experimental Data. In *IEEE AP-S/URSI International Symposium*, volume 1, pages 644–647, Baltimore, Maryland, USA, July 1996.
- [Lobel *et al.*, 1996d] P. Lobel, Ch. Pichot, L. Blanc-Féraud et M. Barlaud. Microwave Imaging : Reconstructions from Experimental Data using Conjugate Gradient and Enhancement by Edge-Preserving Regularization. In *International Conference on Imaging and Image Processing Technology*, December 9-11 1996.

- [Lobel *et al.*, 1997] P. Lobel, L. Blanc-Féraud, Ch. Pichot et M. Barlaud. A new regularization scheme for inverse scattering. *Inverse Problems*, 13, April 1997.
- [Lobel, 1996] P. Lobel. *Problèmes de diffraction inverse : reconstruction d'image et optimisation avec régularisation par préservation des discontinuités – Application à l'imagerie microonde*. PhD thesis, Université de Nice - Sophia Antipolis, Septembre 1996.
- [Lorette *et al.*, 1998] A. Lorette, X. Descombes et J. Zerubia. Extraction des zones urbaines fondée sur une analyse de la texture par modélisation markovienne. Rapport de recherche 3423, Inria, Mai 1998.
- [Louis, 1992a] A.K. Louis. Medical imaging : state of the art and future development. *Inverse Problems*, 8 :709–738, 1992.
- [Louis, 1992b] A.K. Louis. Medical imaging : state of the art and future development. *Inverse Problems*, 8 :709–738, 1992.
- [Lucy, 1974] L. B. Lucy. An iterative technique for the rectification of observed images. *The Astronomical Journal*, 79(6) :745–754, June 1974.
- [Malladi *et al.*, 1995] R. Malladi, J.A. Sethian et B.C. Vermuri. Shape modeling with front propagation : A level set approach. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 17(2), Feb 1995.
- [Malladi et Sethian, 1996] R. Malladi et J.A. Sethian. A unified approach for noise removal image enhancement and shape recovery. *IEEE Trans. on Image Processing*, 5(11) :1554–1568, November 1996.
- [March et Dozio, 1997] R. March et M. Dozio. A variational method for the recovery of smooth boundaries. *Image and Vision Computing Journal*, 15(9) :705–712, September 1997.
- [Marroquin *et al.*, 1987] J. Marroquin, S. Mitter et T. Poggio. Probabilistic solution of ill-posed problems in computational vision. *Journal of the American Statistical Association*, 82(397) :76–89, 1987.
- [Maso, 1993] G. Dal Maso. *Γ -convergence in calculus of variations*. Birkhäuser, 1993.
- [Metropolis *et al.*, 1953] N. Metropolis, A.W. Rosenbluth, M.N. Rosenbluth et A.H. Teller. Equations of state calculations by fast computing machines. *Journal of Chem. and Phys.*, 21 :1087–1091, 1953.
- [Modica, 1987] L. Modica. The gradient theory of phase transitions and the minimal interface criterion. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 98 :123–142, 1987.
- [Mol, 1991] C. de Mol. A critical survey of regularized inversion methods. In *NATO Advanced research workshop on inverse problems in scattering and imaging*, pages 1–26, Cape Cod, Massachusetts, USA, April 1991. Invited Paper.
- [Morel et Solimini, 1994] J-M. Morel et S. Solimini. *Variational Methods in Image Segmentation*. Birkhäuser, 1994.
- [Morris *et al.*, 1996a] J.B. Morris, D.A. Pomet, R.V. McGahan et M.A. Fiddy. Imaging of Strongly Scattering Targets from Real Data by Nonlinear Filtering. In *IEEE AP-S/URSI Digest*, page 80, Baltimore, Maryland, USA, July 1996.
- [Morris *et al.*, 1996b] R. Morris, X. Descombes et J. Zerubia. An analysis of some models used in image segmentation. Research report 3016, Inria, october 1996.
- [Morris *et al.*, 1996c] R. Morris, X. Descombes et J. Zerubia. Fully Bayesian image segmentation - an engineering perspective. Research report 3017, Inria, october 1996.

-
- [Morris, 1995] R. Morris. *Image sequence restoration using Gibbs distributions*. PhD thesis, University of Cambridge, Depart. of Eng. and Trinity College, 1995.
- [Mumford et Shah, 1989] D. Mumford et J. Shah. Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems. *Commun. Pure & Appli. Math.*, 42(5) :577–685, 1989.
- [N. Nordström, 1990] N. Nordström. Biased anisotropic diffusion : a unified regularization and diffusion approach to edge detection. *Image and Vision Computing*, 8(4) :318–327, 1990.
- [Natterer, 1986] F. Natterer. *The mathematics of computerized tomography*. Wiley-Teubner, 1986.
- [Nitzberg et Shiota, 1992] M. Nitzberg et T. Shiota. Nonlinear image filtering with edge and corner enhancement. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14(8) :826–833, August 1992.
- [Nosmas, 1999] J-C. Nosmas. Remarques sur un algorithme d’optimisation pour une classe de fonctionnelles sur \mathbb{R}^k . *C. R. Acad. Sci. Paris*, t.328(Série I) :1237–1240, 1999. Analyse Numérique.
- [Osher et Sethian, 1988] S. Osher et J.A. Sethian. Front propagating with curvature dependent speed : Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, 79 :12–49, 1988.
- [Owen et Sternberg, 1991] C. Owen et P. Sternberg. Nonconvex variational problems with anisotropic perturbations. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 16(7) :705–719, 1991.
- [Päivärinta et Somersalo, 1987] L. Päivärinta et E. Somersalo. The uniqueness of the one dimensional electromagnetic inversion with bounded potentials. *J. Math. Anal. Appl.*, 127 :312–333, 1987.
- [Paolini, 1987] F.J. Paolini. Implementation of microwave diffraction tomography for measurement of dielectric constant distribution. In *IEE Proceedings*, volume 134, Pt. H (1), pages 25–29, February 1987.
- [Paragios et Deriche, 1999] N. Paragios et R. Deriche. Geodesic active regions for texture segmentation. Rapport de recherche 3440, Inria, Sophia Antipolis, France, Mai 1999.
- [Pavlidis et Liow, 1988] T. Pavlidis et Y-T. Liow. Integrating region and edge detection. In *Proceedings of the IEEE Conf. Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 208–214, 1988.
- [Peng *et al.*, 1998] D. Peng, B. Merriman, S. Osher, H. Zhao et M. Kang. A PDE based fast local level set method. Technical Report CAM 98-25, Department of Mathematics, UCLA, CA USA, 1998.
- [Perona et Malik, 1990] P. Perona et J. Malik. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-12(7) :629–639, July 1990.
- [Pichot, 1986] Ch. Pichot. Electromagnétisme. In *Série Electronique*. Editions des Techniques de l’Ingénieur, 1986.
- [Pieczynski, 1994] W. Pieczynski. Champs de Markov cachés et estimation conditionnelle itérative. *Traitement du Signal*, 11(2) :141–153, 1994.
- [Poggio *et al.*, 1985] T. Poggio, V. Torre et C. Koch. Computational vision and regularization theory. *Nature*, 317 :314–319, September 1985.

- [Polak et Ribière, 1969] E. Polak et G. Ribière. Note sur la convergence de méthodes de directions conjuguées. *Revue Française d'Informatique et de Recherche Opérationnelle*, R1(16) :35–43, 1969.
- [Ramm, 1995] A.G. Ramm. A numerical method for solving inverse scattering problems. *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.*, 50(1) :18–22, 1995.
- [Reeves et Mersereau, 1990] S.J. Reeves et R. M. Mersereau. Optimal constraint parameter estimation for constrained image restoration. In *SPIE Visual Communications and Image Processing*, volume 1360, pages 1372–1380, 1990.
- [Reitich et Soner, 1996] F. Reitich et H.M. Soner. Three-phase boundary motions under constant velocities. part one : The vanishing surface tension limit. *Proc. of the Royal Society of Edinburgh*, 126(A) :837–865, 1996.
- [Richardson, 1972] W. H. Richardson. Bayesian-based method of image restoration. *Journal of Optical Society of America*, 62(1) :55–59, January 1972.
- [Richardson, 1990] T.J. Richardson. *Scale independent piecewise smooth segmentation of images via variational methods*. Thèse de Doctorat, Lab. for Information and Decision Systems, MIT, Cambridge, MA, 1990.
- [Robert, 1996] C. Robert. *Méthodes de Monte Carlo par chaînes de Markov*. Ecomica, Paris, 1996.
- [Romeny, 1994] Bart M. Ter Haar Romeny, editor. *Geometry-driven diffusion in computer vision*. Kluwer Academic Publishers, 1994.
- [Ronfard, 1994] R. Ronfard. Region-based strategies for active contour models. *International J. of Computer Vision*, 13(2) :229–251, 1994.
- [Rosati, 1997] M. Rosati. Asymptotic behaviour of a Geman and Mc Clure discrete model. Research note 8/1997, Istituto per le applicazioni del calcolo, Consiglio Nazionale delle Ricerche, Roma, 1997.
- [Ruanaidh et Fitzgerald, 1996] J. J. K. O Ruanaidh et W. J. Fitzgerald. *Numerical Bayesian methods applied to signal processing*. Statistics and Computing. Springer-Verlag, 1996.
- [Rubinstein *et al.*, 1989] J. Rubinstein, P. Sternberg et J.B. Keller. Fast reaction, slow diffusion, and curve shortening. *SIAM J. of Applied Mathematics*, 49 :116–133, 1989.
- [Rudin *et al.*, 1992] L-I. Rudin, S. Osher et E. Fatemi. Nonlinear total variation noise removal algorithm. *Physica D*, 60 :259–268, 1992. Elsevier Science Publisher.
- [Samson *et al.*, 1998] C. Samson, L. Blanc-Féraud, G. Aubert et J. Zerubia. Image classification using a variational approach. Rapport de recherche 3523, Inria, Octobre 1998.
- [Samson *et al.*, 1999a] C. Samson, L. Blanc-Féraud, G. Aubert et J. Zerubia. Multiple evolution and variational image classification. Rapport de recherche 3662, Inria, Avril 1999.
- [Samson *et al.*, 1999b] C. Samson, L. Blanc-Féraud, G. Aubert et J. Zerubia. Simultaneous image classification and restoration using a variational approach. In *Proc. of International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, june 1999.
- [Sapiro, 1996a] G. Sapiro. From active contours to anisotropic diffusion : connections between basic pde's in image processing. In *IEEE Proceedings of the 3rd International Conference of Image Processing*, volume I, pages 477–480, Lausanne, Switzerland, September 1996.
- [Sapiro, 1996b] G. Sapiro. Vector self snakes : a geometric framework for color, texture, and multiscale image segmentation. In *IEEE Proceedings of the 3rd International Conference of Image Processing*, volume I, pages 817–420, Lausanne, Switzerland, September 1996.

- [Saqib *et al.*, 1995] S. Saquib, C. Bouman et K. Sauer. ML parameter estimation for markov random fields with applications to Bayesian tomography. Rapport de Recherche TR-ECE-95-24, Electrical and computer engineering, Purdue university, 1995.
- [Shah, 1996] J. Shah. A common framework for curve evolution, segmentation and anisotropic diffusion. In *IEEE Proceedings of the Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 136–142, San Francisco, USA, June 1996.
- [Siddiqi *et al.*, 1998] K. Siddiqi, Y.B. Lauzière, A. Tannenbaum et S.W. Zucker. Area and length minimizing flows for shape segmentation. *IEEE Transactions on Image Processing*, 7(3) :433–443, March 1998.
- [Sigelle, 1997] M. Sigelle. Simultaneous image restoration and hyperparameter estimation for incomplete data by a cumulant analysis. Research report 3249, Inria, september 1997.
- [Sigelle, 1998] M. Sigelle. Simultaneous image restoration and hyperparameter estimation by a cumulant analysis. In *SPIE's international Symposium on Optical Science, Engineering, and instrumentation : Bayesian Inference for Inverse Problem*, San Diego, USA, July 1998.
- [Slaney *et al.*, 1984] M. Slaney, A.C. Kak et L.E. Larsen. Limitation of imaging with first-order diffraction tomography. *IEEE Trans. on Medical Imaging*, MI-12(2) :232–239, 1984.
- [Smith, 1985] B.D. Smith. Image reconstruction from cone-beam projections : necessary and sufficient conditions and reconstruction method . *IEEE Trans. on Medical Imaging*, 4(1) :14–25, 1985.
- [Stark, 1987] H. Stark, editor. *Image Recovery : Theory ans Application*. Academic Press, 1987.
- [Sternberg et Zeimer, 1994] P. Sternberg et W.P. Zeimer. Local minimisers of a three-phase partition problem with triple junctions. *Proc. of the Royal Society of Edinburgh*, 124(A) :1059–1073, 1994.
- [Sternberg, 1991] P. Sternberg. Vector-valued local minimizers of nonconvex variational problems. *J. of Mathematics*, 21 :799–807, 1991.
- [Sussman *et al.*, 1994] M. Sussman, P. Smereka et S. Osher. A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow. *Journal of Computational Physics*, 114 :146–159, 1994.
- [Tabbara *et al.*, 1988] W. Tabbara, B. Duchêne, Ch. Pichot, D. Lesselier, L. Chommeloux et N. Joachimowicz. Diffraction tomography : contribution of the analysis of some applications in microwaves and ultrasonics. *Inverse Problems*, 4 :305–331, 1988.
- [Tanner, 1996] A. Tanner. *Tools for statistical inference*. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag, 1996.
- [Teboul *et al.*, 1997a] S. Teboul, L. Blanc-Féraud, G. Aubert et M. Barlaud. Segmentation and edge-preserving restoration. In *IEEE Proceedings of the 4th International Conference of Image Processing*, pages 168–172, Santa Barbara, CA, USA, 1997.
- [Teboul *et al.*, 1997b] S. Teboul, L. Blanc-Féraud, G. Aubert M. Barlaud et J. Darcourt. Contours déformables et reconstruction tomographique en imagerie médicale. In *16eme colloque GRETSI sur le traitement du signal et des images*, Grenoble, France, septembre 1997.
- [Teboul *et al.*, 1998] S. Teboul, L. Blanc-Féraud, G. Aubert et M. Barlaud. Variational approach for edge-preserving regularization using coupled PDE's. *IEEE Trans. on Image Processing*, 7(3) :387–397, March 1998. Special issue on partial differential equations and geometry driven diffusion in image processing and analysis.

- [Teboul, 1999] S. Teboul. Reconstruction et segmentation d'images : Approche variationnelle et edp couplées. Phd thesis, Université de Nice-Sophia Antipolis, France, Avril 1999.
- [Terzopoulos, 1986] D. Terzopoulos. Regularization of inverse visual problems involving discontinuities. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 8(4) :413–424, July 1986.
- [Thompson *et al.*, 1991] A.M. Thompson, J.C. Brown, J.W. Kay et D.M. Titterington. A study of methods of choosing the smoothing parameter in image restoration by regularization. *IEEE Transactions on Pattern Recognition and Machine Intelligence*, 13(4) :326–339, April 1991.
- [Tikhonov et Arsenin, 1977] A.N. Tikhonov et V.Y. Arsenin. “*Solutions of ill-posed problems*”. Winston and Wiley, 1977.
- [Tikhonov, 1963] A.N. Tikhonov. Regularization of incorrectly posed problems. *Sov. Math. Dokl.*, 4 :1624–1627, 1963.
- [Tournier *et al.*, 1994] E. Tournier, C. Mestais et O. Peyret. Le compromis sensibilité-résolution, méthodes de collimation, caméras multi-têtes, méthodes tomographiques. *Médecine nucléaire*, 18 :317–321, 1994.
- [Trenoguine, 1985] V. Trenoguine. *Analyse fonctionnelle*. Mir, 1985.
- [Tuy, 1983] H.K. Tuy. An inversion formula for cone-beam reconstruction. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 43(3) :546–552, 1983.
- [Urago *et al.*, 1995] S. Urago, J. Zerubia et M. Berthod. A markovian model for contour grouping. *Pattern Recognition*, 28(5) :683–693, 1995.
- [van den Berg et Kleinman, 1995] P.M. van den Berg et R.E. Kleinman. A total variation enhanced modified gradient algorithm for profile reconstruction. *Inverse Problems*, 11 :L5–L10, 1995. Letter to the editor.
- [Vogel et Oman, 1998] C-R. Vogel et M-E. Oman. A fast, robust algorithm for total variation based reconstruction of noisy, blurred images. *IEEE Trans. on Image Processing*, 7(6) :813–842, June 1998.
- [Wolf et Habashy, 1993] E. Wolf et T. Habashy. Invisible bodies and uniqueness of the inverse scattering problem. *J. of Modern Optics*, 40(5) :785–792, 1993.
- [Woods et Ingle, 1981] J.W. Woods et V.K. Ingle. Kalman filtering in two dimensions : further results. *IEEE Trans. on Acoustic Speech and Signal Processing*, 29 :188–197, April 1981.
- [Woods et Radewan, 1977] J.W. Woods et C.H. Radewan. Kalman filtering in two dimensions. *IEEE Trans. on Information Theory*, 23 :473–482, July 1977.
- [Yezzi *et al.*, 1999] A. Yezzi, A. Tsai et A. Willsky. A statistical approach to snakes for bimodal and trimodal imagery. In *Seventh International Conference on Computer Vision*, volume II, pages 898–903, Kerkyra, Greece, September 1999. IEEE Computer Society.
- [You *et al.*, 1996] Y-L. You, W. Xu, A. Tannenbaum et M. Kaveh. Behavioral analysis of anisotropic diffusion in image processing. *IEEE Trans. on Image Processing*, 5(11) :1539–1553, November 1996.
- [Younes, 1988] L. Younes. Estimation and annealing for Gibbsian fields. *Annales de l'Institut Poincaré*, 24 :269–294, 1988.
- [Younes, 1989] L. Younes. Parametric inference for imperfectly observed Gibbsian fields. *Probability Theory and Related Fields*, 82 :625–645, 1989. Springer-Verlag.

-
- [Zerubia et Blanc-Féraud, 1998] J. Zerubia et L. Blanc-Féraud. Hyperparameter estimation of a variational model using a stochastic gradient method. In *SPIE's international Symposium on Optical Science, Engineering, and instrumentation : Bayesian Inference for Inverse Problem*, San Diego, USA, July 1998.
- [Zhang, 1993] J. Zhang. The mean field theory in EM procedures for blind Markov random fields image restoration. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2(1), January 1993.
- [Zhao et al., 1996] H-K Zhao, T. Chan, B. Merriman et S. Osher. A variational level set approach to multiphase motion. *Journal of Computational Physics*, 127 :179–195, 1996.
- [Zhou et al., 1997] Z. Zhou, R.M. Leahy et J. Qi. Approximate maximum likelihood hyperparameter estimation for gibbs priors. *IEEE Transactions on Image Processing*, 6(6) :844–861, June 1997.
- [Zhu et Yuille, 1996a] S. C. Zhu et A. Yuille. Integrating region growing and edge detection. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 18(9) :884–900, 1996.
- [Zhu et Yuille, 1996b] S.C. Zhu et A. Yuille. Region competition : Unifying snakes, region growing, and Bayes/MDL for multi-band image segmentation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 18(9) :884–900, September 1996.
- [Zolesio, 1990] J.P. Zolesio. Introduction to shape optimization problems and free boundary problems. In M.C. Delfour et G. Sabidussi, editors, *Shape Optimization and Free Boundaries*, pages 397–457. Kluwer, Dordrecht, 1990.

Annexe A

Curriculum vitae

Laure Blanc-Féraud - Mariée, deux enfants.
114 corniche d'agrimont, 06700 Saint Laurent du Var.
Tél. 04 92 12 18 49.
projet Ariana, CNRS-INRIA-UNSA,
INRIA 2004 route des Lucioles,
BP 93 06902 Sophia Antipolis Cedex.
Tel : 04 92 38 77 14 / Fax :04 92 38 76 43
[http ://www.inria.fr/ariana/](http://www.inria.fr/ariana/)

Activité professionnelle :

- Depuis octobre 1994 : Chargé de recherche grade 1 au CNRS, Laboratoire I3S, UPRES-A 6070 du CNRS, Université de Nice-Sophia Antipolis (UNSA), Sophia Antipolis, France. (temps partiel 90% durant l'année scolaire 98-99).
- Oct. 1990 - sept. 1994 : Chargé de recherche grade 2 au CNRS, Laboratoire I3S, UPRES-A 6070 du CNRS, UNSA, Sophia Antipolis, France.
- Oct. 1989 - sept. 1990 : Ingénieur CISI en contrat chez THOMSON SINTRA Activités sous marines à Cagnes sur mer, dans le laboratoire "Mesures de bruit".
- De 1982 à 1985 : Stages (1 mois) à Electricité de France à la direction des Etudes et Recherches de Chatou.
-

Formation :

- Oct. 1986 - sept. 1989 : **Thèse de doctorat en Sciences de l'ingénieur** au laboratoire LASSY de l'UNSA-CNRS. Sujet : *Modélisation d'image. Application à la compression numérique et à la restauration d'image floue.*
- Oct. 1985 - juin 86 : **DEA de mathématiques et automatique** de l'université de Paris IX (Dauphine). Stage à l'INRIA Rocquencourt avec M. Sorine. Sujet : *Etude théorique de l'implantation d'un algorithme multigrille de résolution d'EDP sur un réseau de transputers en parallèle.*

- Oct. 1984 - juin 85 : **Maîtrise de mathématiques et automatique**, université Paris IX.
- Oct. 1983 - juin 84 : **Licence de Mathématiques et licence MASS (Mathématiques appliquée aux sciences sociales)**, université Paris IX.
- Oct. 1981 - juin 83 : **DEUG MASS**, université Paris IX.

Enseignement :

- Depuis 1999 : **Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'espace (Sup'Aéro) de Toulouse**. Module sur les Méthodes variationnelles pour le traitement d'image (11h CM).
- Depuis 1995 : **DEA ARAVIS de l'UNSA**. Module de Reconstruction d'image (15h CM).
- Depuis 1995 : **Ecole d'ingénieur ESINSA**. Module de traitement d'image en 5ème année (15h CM), module sur les Transformées unitaires (15h CM, 15 TD).
- De 1993 à 1996 : **DEA d'Atrophysique et Sciences de l'Univers de l'UNSA**. Régularisation par champs de Markov (3h CM).
- De 1992 à 1994 : **DEA TTI (Traitement et Transmission de l'Information) de l'UNSA**. Module de Problèmes Inverses (12h CM).
- De 1987 à 1989 : **IUT de Nice**. TD de mathématiques au Département GEII ou OGP (13,5h).
- En 1987 : **Maîtrise EAA de l'UNSA**. TD d'automatique (13,5h).

Co-encadrement de Thèse :

- J-M. Bruneau (90-93) : Résolution de problèmes inverses mal-posés en analyse multirésolution - application à la restauration d'image et à la stéréovision, 8 oct. 93. Co-encadrement M. Barlaud, P. Mathieu, Laboratoire I3S.
- P. Charbonnier (91-94) : Reconstruction d'image : régularisation avec prise en compte des discontinuités, 30 septembre 1994. Co-encadrement Pr. M. Barlaud, laboratoire I3S, Pr G. Aubert, laboratoire de mathématiques J.A. Dieudonné.
- B. Rouchouze (94-95) : Paquets d'ondelettes et estimation de mouvement pour la compression de séquences d'images, 3 juillet 1995. Co-encadrement avec Pr M. Barlaud, laboratoire I3S sur une partie de la thèse, l'autre partie ayant été effectuée à l'EPFL à Lausanne, sous la direction du Pr. Kunt.
- P. Lobel (93-96) : Problèmes de diffraction inverse : reconstruction d'image et optimisation avec régularisation par préservation des discontinuités - Application à l'imagerie microonde, 27 septembre 1996. Co-encadrement C. Pichot, directeur de recherche au laboratoire d'électronique, antennes et télécommunications, Pr M. Barlaud, laboratoire I3S.
- P. Koulibaly (93-96) : Régularisation et corrections physiques en tomographie d'émission, 11 octobre 1996. Co-encadrement Pr M. Barlaud, laboratoire I3S, J. Darcourt, laboratoire de biophysique et traitement de l'image de la faculté de médecine de Nice.

-
- I. Laurette (94-97) : Reconstruction en géométrie conique : application à l'imagerie d'émission tridimensionnelle, 28 mars 1997. Co-encadrement Pr M. Barlaud, laboratoire I3S, J. Darcourt, laboratoire de biophysique et traitement de l'image de la faculté de médecine de Nice.
- T. Corbard (97-98) : Inversion de mesures héliosismologiques : la rotation interne du soleil, 20 novembre 98. Encadrement sur une partie de la thèse seulement, les autres parties ayant été effectuées uniquement à l'Observatoire de la Côte d'Azur sous la direction de G. Berthomieu et J. Provost.
- S. Teboul (94-99) : Reconstruction et segmentation d'images : approche variationnelle et EDP couplées, 27 avril 1999. Co-encadrement Pr M. Barlaud, laboratoire I3S, Pr G. Aubert, laboratoire de mathématiques J.A. Dieudonné.
- C. Samson (97-) : Classification d'image par approche variationnelle. Co-encadrement J. Zerubia, directeur de recherche INRIA, Pr G. Aubert, laboratoire de mathématiques J.A. Dieudonné, 3ème année de thèse.
- A. Jalobeanu (98-) : Estimation de paramètres en restauration d'images floues, 2ème année de thèse. Co-encadrement J. Zerubia, directeur de recherche INRIA.
- C. Lacombe (99-) : Modèles variationnels et Equations aux Dérivées Partielles pour le déroulement de phase interférométrie radar (RSO), 1ère année de thèse. Co-encadrement Pr G. Aubert, laboratoire de mathématiques J.A. Dieudonné.
-

Co-encadrement de Stage (21) :

- DEA : 19 dont 13 DEA ARAVIS, 2 DEA Mathématiques Appliquées de l'UNSA, 2 DEA Astrophysique de l'UNSA, 1 DEA Mathématiques Vision et Apprentissage de l'ENS Cachan, 1 DEA Traitement du Signal et de l'Image de Toulouse.
- Stage d'école : 1 stage de fin d'étude de l'université de Pise en 98, 2 magistères de l'ENS Cachan.
-

Administration de la recherche, aspects de visibilité :

- Membre élu de la commission de spécialiste de 61ème section de l'UNSA depuis 1998.
- Membre du comité de direction du GdR-PRC ISIS depuis 1998.
- Rédactrice en chef de la gazette du GdR-PRC ISIS depuis 1998.
- Membre élu du conseil de laboratoire I3S de 1994 à 1999.
- Relecteur pour les revues IEEE trans. on Image Processing, Traitement du Signal.
- Relecteur pour les conférences ICIP'96, ISIE'97, EMMCVPR'97, 2nd Int. Conf. on Inverse Problems in Engineering 96.
- Membre du comité organisateur de la conférence IEEE IMSDP'93.
- J'ai donné plusieurs séminaires au cours de visites de laboratoires à l'étranger et un cours dans une école d'été (cf liste des publications).

Collaborations :

Collaborations internationales

- Je collabore avec **Riccardo March** ainsi que d'autres chercheurs de l'**Institut de mathématiques appliquées du CNR** à Rome dans le cadre d'une action intégrée Galilée acceptée en janvier 2000.
- Je vais participer à une collaboration dans le cadre d'une action intégrée Alliance acceptée en janvier 2000 avec le département Engineering de l'**université de Cambridge** en Grande Bretagne avec l'équipe du professeur **Nick Kingsbury**.
- J'ai collaboré avec le professeur **Yoram Bresler de l'UIUC** (University of Illinois at Urbana-Champaign), dans le cadre d'une collaboration CNRS-UIUC sur des problèmes de classifications d'images satellitaires multispectrales 1998 et 1999.
- J'ai collaboré avec le Professeur **R. Kleiman, de l'université du Delaware** (USA) dans le cadre de la thèse de Pierre Lobel et de ma collaboration avec C. Pichot (cf collaborations nationales).
- J'ai collaboré avec le Professeur **J. Biemond, de l'Université Technologique de Delft** (Pays-Bas) dans le cadre d'une collaboration CNRS/NWO en 91/92.

Collaborations nationales

- Je collabore depuis 1994 avec **Gilles Aubert**, professeur de mathématiques au **laboratoire J-A. Dieudonné de l'UNSA**, d'abord dans le cadre du thème Images de l'IS puis dans le cadre du projet Ariana, dont il est un collaborateur extérieur. Le Pr G. Aubert participe à l'élaboration des nouveaux modèles variationnels et par EDP, et à leur étude mathématique.
- Collaboration avec l'équipe du professeur **Jacques Darcourt** du **laboratoire de biophysique et traitement de l'image de l'UNSA et du centre anti-cancereux A. Lacassagne de Nice** pour les activités en reconstruction 2D et 3D en médecine nucléaire.
- Collaboration avec **Christian Pichot**, directeur de recherche au CNRS au LEAT (Laboratoire d'Electronique, Antennes et Télécommunications) à Sophia Antipolis pour l'application reconstruction en micro-ondes.
- Collaboration avec les membres du **GdR-PRC ISIS** par une participation actives à plusieurs groupes de travail. Je participe aussi au **GdR MSPC** (Mathématiques des Systèmes Perceptifs et Cognitifs).
- Collaboration avec l'équipe de Janine Provost de l'**Observatoire de Nice Côte d'Azur** pour l'application à l'inversion de la rotation du soleil.

Contrats industriels :

- Contrat CNES. Etude de la restitution des paramètres instrumentaux, Sep. 1999 - Fév. 2000.
- Contrat Aérospatiale (Cannes). Estimation d'hyperparamètres pour la restauration d'images satellitaires haute résolution, Jul. 1998 - Déc. 1998.

- Contrat CNES/CNRS. Restauration d'images satellitaires floues et bruitées, Sep. 1995 - Sep. 1996.

Parcours dans la recherche :

J'ai débuté la recherche au cours de mon DEA obtenu à l'université Dauphine en 1986, avec un stage à l'INRIA de Rocquencourt sur l'étude théorique de l'implantation d'un algorithme multigrille de résolution d'EDP sur un réseau de transputers en parallèle, sous la direction de M. Sorine, directeur de recherche à l'INRIA. J'ai ensuite poursuivi par une thèse au laboratoire LASSY du CNRS et l'Université de Nice-Sophia Antipolis (UNSA) portant sur la restauration et de la compression d'image, sous la direction du professeur M. Barlaud. C'est au cours de cette thèse que j'ai commencé à m'intéresser aux problèmes inverses en traitement d'image. Après l'obtention de cette thèse, j'ai travaillé un an comme ingénieur chez CISI, en contrat chez THOMSON SINTRA Activités sous marines à Cagnes sur mer, dans le laboratoire "Mesures de bruit". Cette activité relevait du domaine des études et recherches et portait sur des méthodes de mesure de bruit sur des images acoustiques sous-marines.

Depuis mon entrée au CNRS en octobre 1990, je fais partie du laboratoire I3S et j'ai travaillé dans l'équipe Images avec le professeur Michel Barlaud jusqu'en 97-98. Mon travail a porté sur la résolution de problèmes inverses en traitement d'images, en particulier le problème de la reconstruction SPECT (*Single Photon Emission Computed Tomography* en anglais) en médecine nucléaire. D'un point de vue théorique, j'ai développé des modèles de régularisation avec prise en compte des discontinuités. Ces modèles ont d'abord été considérés dans une approche bayésienne, puis d'un point de vue déterministe par calcul des variations et EDP (Equations aux Dérivées partielles). En collaboration avec le professeur Gilles Aubert du laboratoire de mathématiques J-A Dieudonné de l'UNSA (Université de Nice Sophia Antipolis), de nouveaux termes de régularisation pour les problèmes inverses ont été développés, en 2D et 3D, utilisant des modèles de segmentation d'images. Je me suis aussi intéressée à une approche multirésolution par transformée en ondelettes, et à d'autres applications comme l'estimation du flot optique dans une séquence d'images et la restauration d'image satellitaire.

A partir de 1997, j'ai commencé une collaboration avec Josiane Zerubia, directeur de recherche à l'INRIA Sophia Antipolis. Notre projet était de développer des méthodes d'estimation de paramètres pour les modèles que j'avais développés dans une approche déterministe. Pour la mise en place d'estimateurs statistiques des paramètres, nous avons interprétés ces modèles dans un cadre bayésien. Il s'est avéré intéressant de mettre en parallèle plus systématiquement et d'analyser plus précisément les modèles et les méthodes issus de deux mondes a priori différents, l'un stochastique avec les champs de Markov en particulier, et l'autre déterministe avec la définition de fonctionnelles à optimiser et les EDP. Nous avons proposé la création d'un projet commun au CNRS, à l'INRIA et à l'UNSA, dont un des objectifs est d'étudier cette question. Dans ce projet, intitulé Ariana, nous focalisons notre activité sur les problèmes du traitement d'images satellitaires et aériennes pour l'observation de la Terre et la cartographie. Ce thème est suffisamment vaste pour inclure un grand nombre de problèmes génériques et les développements théoriques faits dans Ariana s'insèrent naturellement dans le cadre plus général du traitement d'images. Ce projet a été officiellement créé au cours de l'année 1998 et mon activité de recherche s'inscrit entière-

ment dans ce cadre depuis 98.

J'ai actuellement en co-direction trois étudiants en thèse : Christophe Samson en troisième année de thèse sur la classification d'images satellitaires par approche variationnelle et EDP ; André Jalobeanu en deuxième année de thèse sur la déconvolution d'image satellitaire avec estimation des paramètres ; Caroline Lacombe en première année de thèse sur le déroulement de phase en interférométrie radar (RSO) par approche variationnelle et EDP.

Annexe B

Liste des publications

B.1 Liste des publications - Juin 2000

B.1.1 Participations à des ouvrages de synthèse

[A1] L. Blanc-Féraud, M. Barlaud, P. Charbonnier “Problèmes inverses et multirésolution” dans *Progress in Wavelet analysis and Applications*, édité par Y. Meyer and S. Roques, ed. Frontières, pp.387-398. (version étendue du papier de la conférence internationale “Wavelets and Applications” , Toulouse, France, June 1992).

[A2] I. Laurette, L. Blanc-Féraud, P. Charbonnier, P.M. Koulibaly, J. Darcourt, M. Barlaud “ Cone-beam algebraic reconstruction using edge-preserving regularization” *Three-dimensional image reconstruction in radiology and nuclear medicine, Computational Imaging and Vision*, Editeurs : P. Grangeat and J. L. Amans, Kluwer academic Publishers, pp.59-73, 1996.

[A3] C. Pichot, P. Lobel, L. Blanc-Féraud, M. Barlaud, K. Belkebir, J-M. Elissat, J-M. Geffrin “ Gradient and Newton-Kantorovitch Methods for Microwave Tomography” *Inverse Problems in Medical Imaging and Nondestructive Testing*, H.W.Engl, A.K. Louis, W. Rundell, (Eds), Springer, Wien, New York, pp.169-187, 1997.

[A4] P. Lobel, C. Pichot, L. Blanc-Féraud, M. Barlaud “ Edge-Preserving Regularization for Quantitative Reconstruction Algorithms in Microwave Imaging” *Tomography and Image processing*, A. Ramm (Ed.), Plenum Press, New-York, pp.113-124, 1998.

B.1.2 Publications dans des revues avec comité de lecture

[P1] L. Blanc-Féraud, M. Barlaud, P. Mathieu “Amélioration de la restauration d’images floues par un filtrage adaptatif de Kalman utilisant une image miroir” *Traitement du Signal*, vol. 5, n° 4, pp.249-261, 1988.

[P2] M. Barlaud, L. Blanc-Féraud, J. Menez, P.Mathieu “Image coding using 2D space-varying linear predictive filters excited by 2-D multipulse field” *Signal Processing*, vol.16, n° 1, pp.13-19, janvier 1989.

[P3] M. Barlaud, L. Blanc-Féraud, P. Mathieu “Blind Restoration of noisy blurred images using Maximum Likelihood method with constraints” *Optical Engineering*, vol.30, no4, pp.431-437, avril 1991.

[P4] P. Charbonnier, L. Blanc-Féraud, M. Barlaud “Noisy image restoration using multiresolution Markov random field” *Journal of Visual Communication and Image Representation* vol.3, no4, pp.338-346, décembre 1992.

[P5] L. Blanc-Féraud, M. Barlaud “Restauration d’image bruitée par analyse multirésolution et champ de Markov” *Traitement du Signal* , vol.10, n° 2, pp.171-183, 1993.

[P6] L. Blanc-Féraud, M. Barlaud, T. Gaidon “Motion estimation involving discontinuities in a multiresolution scheme” *Optical Engineering* , vol.32, n° 7, pp.1475-1482, juillet 1993.

[P7] P.M. Koulibaly, J. Darcourt, P. Charbonnier, O. Migneco, M. Barlaud, L. Blanc-Féraud “ Comparaison du MAP-EM OSL et d’Artur : deux algorithmes déterministes régularisés de reconstruction en tomographie d’émission” *Innovation et Technologie en Biologie et Médecine*, vol.16, n° 4, pp.377-390, 1995.

[P8] P. Charbonnier, L. Blanc-Féraud, M. Barlaud “ Méthode adaptative de reconstruction tomographique préservant les discontinuités” *Rapport de synthèse du GDR TDSI : reconstruction 3D en tomographie X*, numéro spécial de la revue traitement du signal, juillet 1996.

[P9] Laure Blanc-Féraud, M. Barlaud “ Edge Preserving Restoration of Astrophysical Images” N° spécial de la revue *Vistas in Astronomy*, vol.40, part 4, pp.531-538, 1996.

[P10] P. Lobel, R. Kleinman, C. Pichot, L. Blanc-Féraud, M. Barlaud “Conjugate gradient method for solving inverse scattering with experimental data” *IEEE Antennas Propagation Magazine*, vol. 38, n° 3, pp.48-51, juin 1996, article invité.

[P11] P. Charbonnier, L. Blanc-Féraud, G. Aubert, M. Barlaud “Deterministic edge-preserving regularization in computed imaging” *IEEE Trans. on Image Processing*, vol.6, n° 2, pp.298-311, février 1997. Prix du meilleur papier de jeune auteur de la IEEE Signal Processing Society 1998 (Image and Multidimensional Signal Processing Area).

[P12] P. Lobel, L. Blanc-Feraud, Ch. Pichot and M. Barlaud, “A new regularization scheme for Inverse Scattering”, *Inverse Problems*, vol. 13, n° 2, pp.403-410, avril 1997.

[P13] P. Lobel, C. Pichot, L. Blanc-Féraud, M. Barlaud “Conjugate Gradient Algorithm with Edge-Preserving Regularization for Image Reconstruction from Ipswich Data for Mystery Objects”, *IEEE Antennas Propagation Magazine*, vol.39, n° 2, pp.12-13, avril 1997 (article invité).

[P14] P. Lobel, C. Pichot, L. Blanc-Féraud, M. Barlaud “Microwave Imaging : Reconstruction from experimental data using conjugate gradient and enhancement by edge-preserving regularization”, *International journal of Imaging System and Technology*, vol.8, pp.337-342, 1997 (article invité).

[P15] C. Pichot, P. Lobel, C. Dourthe, L. Blanc-Féraud, M. Barlaud “Microwave Inverse scattering : Quantitative Reconstruction of Complex Permittivity for Different Applications” *IEICE Trans.on Electronics*, Special issue on Electromagnetic Theory - Scattering and Diffraction - vol.E80-C, n° 11, novembre 1997 (article invité).

[P16] S. Teboul, L. Blanc-Féraud, G. Aubert, M. Barlaud “Variational approach for edge preserving regularization using coupled PDE’s” *IEEE Image Processing*, numéro sur la diffusion guidée par la géométrie et les EDP en traitement d’image, vol.7, n° 3, pp.387-397, mars 1998.

[P17] I. Laurette, J. Darcourt, L. Blanc-Féraud, PM. Koulibaly, M. Barlaud “Combined constraints for efficient algebraic regularized methods” *Journal of Physics in Medicine and Biology*, vol.43, n° 4, pp.991-1000, avril 1998.

[P18] T. Corbard, L. Blanc-Féraud, G. Berthomieu, J. Provost “Non linear regularization for helioseismic inversions. Application for the study of the solar tachocline” *Astronomy and Astrophysics*, 344, pp.696-708, avril 1999.

[P19] L. Blanc-Féraud, G. Aubert “Some remarks on the equivalence between 2D and 3D classical snakes and geodesic active contours ” *International Journal Computer Vision*, vol.34, n° 1, pp.19-28,1999.

[P20] C. Samson, L. Blanc-Féraud, G. Aubert, J. Zerubia “Image Classification using a variational approach” , à paraître dans *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence* en 2000.

B.1.3 Communications dans des conférences avec actes et comité de lecture

[C1] M. Barlaud, L. Blanc-Féraud, P. Mathieu, F. Dubus “Modélisation d’images par des modèles autorégressifs non-stationnaires excités par des trains d’impulsions” 11ème colloque du GRETSI, Nice, juin 1987.

[C2] M. Barlaud, L. Blanc-Féraud, J. Menez “Coding images using 2-D nonstationary linear predictive filters excited by 2-D multipulse field” 5th Workshop IEEE-ASSP & EURASIP, La Haye, Pays-Bas, 14-16 septembre 1987.

[C3] L. Blanc-Féraud, M. Barlaud, P. Mathieu “Ringing reduction in images restoration using mirror images and adaptive Kalman filtering” *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, New York, pp.1012-1015, 11-14 avril 1988.

- [C4] M. Barlaud, L. Blanc-Féraud, P. Mathieu, J. Menez, M. Antonini "2D linear predictive image coding with vector quantization" EUSIPCO, Grenoble, septembre 1988.
- [C5] L. Blanc-Féraud, M. Barlaud, P. Mathieu "High efficiency images restoration using mirrors images and Kalman filtering" EUSIPCO, Grenoble, septembre 1988.
- [C6] L. Blanc-Féraud, M. Barlaud, P. Mathieu "Amélioration de la restauration d'images floues par un filtrage adaptatif de Kalman utilisant une image miroir" Atelier du CNRS TIPI, Aussois, avril 1988.
- [C7] M. Barlaud, P. Mathieu, L. Blanc-Féraud, J. Menez, M. Antonini "Predictive image coding with vector quantization using mirror images" IEEE International Symposium on Information theory, Kobe, Japon, juin 1988.
- [C8] L. Blanc-Féraud, M. Barlaud, P. Mathieu "Image Restoration and Blur estimation using a constrained Maximum Likelihood method" Time-Varying Image Processing and Moving Object Recognition 2, Proceedings of the 3rd international Workshop Florence, Italy, 29-31 mai, 1989.
- [C9] L. Blanc-Féraud, M. Barlaud, P. Mathieu "Restauration d'images et estimation du flou par maximum de vraisemblance avec contraintes" 12ème colloque du GRETSI, Nice, pp.613-616, juin 1989.
- [C10] L. Blanc-Féraud, M. Barlaud "Restauration d'image bruitée par analyse multi-résolution et champs de Markov" 13ème colloque du GRETSI, Juan-les-pins, pp.829-832, septembre 1991.
- [C11] J-M Bruneau, L. Blanc-Féraud, M. Barlaud "Opérateurs de régularisation en restauration d'images : calculs et comparaisons." 13ème colloque du GRETSI, Juan-les-pins, pp.781-784, septembre 1991.
- [C12] M. Barlaud, L. Blanc-Féraud, P. Charbonnier "Image coding using Multiresolution Markov Random Fields" SPIE, Image Processing Algorithms and Techniques III, vol. 1657, San Jose, USA, pp.24-35, 10-13 février 1992.
- [C13] P. Charbonnier, M. Barlaud, L. Blanc-Féraud, I. Laurette, J. Darcourt, F. Lapa-lus "Iterative SPECT reconstruction using a regularization which preserves sharp edges : comparison to classical methods" 14th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society, vol.5, Paris, pp.1823-1824, 29 oct.-1er nov. 1992.
- [C14] M. Barlaud, L. Blanc-Féraud, J-M. Collin "Motion Estimation Involving Discontinuities in a multiresolution Scheme" Visual Communications and Image Processing, SPIE Proceedings vol.1818, Boston, USA, pp.526-541, novembre 1992.
- [C15] P. Charbonnier, L. Blanc-Féraud, M. Barlaud "An adaptative Reconstruction Method Involving Discontinuities" IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Minneapolis, Minnesota USA, pp.V-491 V-494, 27-30 avril 1993.
- [C16] M. Barlaud, M. Antonini, L. Blanc-Féraud "Ondelettes et multirésolution en traitement d'images" Actes du colloque TOM, Temps Fréquence, Ondelettes et multirésolution, Journées thématique du GDR TdSI, Lyon, pp.2.1-2.10, 9-11 mars 1994.
- [C17] L. Blanc-Féraud, P. Charbonnier, P. Lobel, M. Barlaud "A fast tomographic reconstruction algorithm in the 2D wavelet transform domain" IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Adelaide, Australia, vol.V, pp.305-308, 19-22 avril 1994.
- [C18] P.M. Koulibaly, P. Charbonnier, M. Barlaud, J. Darcourt, L. Blanc-Féraud "EM-MAP algorithms versus ARTUR : theoretical and practical comparisons" in Mathematical methods in Medical Imaging III, SPIE Proceedings, vol.2299, pp.294-304, The International Society of Optical Engineering SPIE's annual meeting, San Diego, California, USA, juillet 1994.

[C19] P.M. Koulibaly, P. Charbonnier, J. Darcourt, O. Migneco, M. Barlaud, L. Blanc-Féraud “ Iterative SPECT reconstruction with Gibbs prior regularization : comparison of MAP-EM-OSL and ARTUR” *European Journal of Nuclear Medecine*, vol.21, n° 8, p.773, abstracts of the European Association of Nuclear Medecine Congress, Dusseldorf, Germany, 20-24 août 1994.

[C20] G.Aubert, M. Barlaud, L. Blanc-Féraud, P. Charbonnier “ A deterministic Algorithm for edge-preserving computed imaging using Legendre Transform” 12th IAPR International conference on Pattern Recognition, signal processing conference, Jerusalem, Israel, vol. III, pp.188-191, 9-13 octobre 1994.

[C21] P. Charbonnier, L. Blanc-Féraud, G.Aubert, M. Barlaud “ Two deterministic half-quadratic regularization algorithms for computed imaging” 1th IEEE International conference on Image Processing, Austin Texas, USA, vol.II, pp.168-172, 13-16 novembre 1994.

[C22] P. Lobel, R. Kleinman, C. Pichot, L. Blanc-Féraud, M. Barlaud “ Object reconstruction from far-field data using gradient and Gauss-Newton type methods” In Digest USNC/URSI radio science meeting, p.233, Newport Beach, California, USA, juin 1995 (communication invitée).

[C23] P. Lobel, R. Kleinman, C. Pichot, L. Blanc-Féraud, M. Barlaud “ Different spatial iterative methods for microwave inverse scattering” In Digest USNC/URSI radio science meeting, p.344, Newport Beach, California, USA, juin 1995.

[C24] P. Lobel, R. Kleinman, C. Pichot, L. Blanc-Féraud, M. Barlaud “ Gradient method for solving non linear inverse scattering in microwave tomography” Progress In Electromagnetics Research Symposium (PIERS'95) p.742, Seattle, USA, 24-28 juillet 1995.

[C25] I. Laurette, L. Blanc-Féraud, P. Charbonnier, P.M. Koulibaly, J-C. Nosmas, M. Barlaud, J. Darcourt “ Cone-beam algebraic reconstruction using edge-preserving regularization” International Meeting on Fully Three-Dimensional Image Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine, Aix-les-Bains, France, pp.333-336, 4-6 juillet 1995 (version longue parue chez Kluwer [A2]).

[C26] I. Laurette, L. Blanc-Féraud, P. Charbonnier, P.M. Koulibaly, J. Darcourt, M. Barlaud “ Cone-beam algebraic reconstruction using edge-preserving regularization” Proceedings of the International Workshop on stéréoscopic and three dimensional imaging, Santorini, Grèce, pp.299-304, septembre 1995.

[C27] Laure Blanc-Féraud, M. Barlaud “ Edge Preserving Restoration of Astrophysical Images” Workshop on Vision Modelling and Information Coding, Observatoire de Nice, octobre 1995 (actes dans la revue *Vistas in Astronomy* [P9]).

[C28] Laure Blanc-Féraud, P. Charbonnier, G.Aubert, M. Barlaud “ Nonlinear Image Processing : modeling and fast algorithm for regularization with edge detection” Proceedings ICIP-95, 2nd IEEE International conference on Image Processing, Washington, USA, vol.I, pp.474-477, 23-26 octobre, 1995.

[C29] P. Lobel, L. Blanc-Féraud, C. Pichot, M. Barlaud “ Conjugate Gradient Algorithm with Edge-Preserving Regularization for Microwave Inverse Scattering” Progress In Electromagnetics Research Symposium (PIERS'96), p.355 Innsbruck, Austria, 8-12 juillet 1996 (communication invitée).

[C30] P. Lobel, C. Pichot, L. Blanc-Féraud, M. Barlaud “ Conjugate Gradient Algorithm with Edge-Preserving Regularization for image reconstruction form experimental data” In IEEE AP-S/URSI International Symposium, vol.1, pp.644-647, Baltimore, Maryland, USA, 21-26 juillet 1996 (communication invitée).

[C31] C. Pichot, P. Lobel, L. Blanc-Féraud, M. Barlaud “ Regularized inversion algorithms for imaging” In XXVth General Assembly of the International Union of Radio Science (URSI), p.74, Lille, France, 28 Août-5 septembre 1996 (communication invitée).

[C32] Laure Blanc-Féraud, S. Teboul, G. Aubert, M. Barlaud “ Nonlinear regularization using constrained edges in image reconstruction” Proceedings ICIP-96, 3rd IEEE International conference on Image Processing, vol.II, pp.449-452, Lausanne, Suisse, 16-19 octobre, 1996.

[C33] P.M. Koulibaly, P. Charbonnier, L. Blanc-Féraud, I. Laurette, J. Darcourt, M. Barlaud “ Poisson statistic and Half-quadratic regularization for emission tomography reconstruction algorithm” Proceedings ICIP-96, 3rd IEEE International conference on Image Processing, vol.II, pp.729-732, Lausanne, Suisse, 16-19 octobre, 1996.

[C34] C. Pichot, P. Lobel, L. Blanc-Féraud, M. “ Edge preserving regularization for quantitative reconstruction algorithm in microwave imaging” In the International Society for Analysis, Applications and computing (ISAAC) Congress, Delaware, Massachusetts, USA, 2-6 juin 1997 (communication invitée).

[C35] P. Lobel, C. Pichot, L. Blanc-Féraud, M. Barlaud “ Microwave Imaging : Reconstruction from experimental data using conjugate gradient and enhancement by edge-preserving regularization” , International Conference on Imaging and Image Processing Technology, 1997, (publié dans Journal of Imaging System and Technology).

[C36] I. Laurette, J. Darcourt, L. Blanc-Féraud, P.M. Koulibaly, M. Barlaud “Advantage of Algebraic Regularized Algorithms over Feldkamp Method in 3D Cone-Beam Reconstruction” International Meeting on Fully Three-Dimensional Image Reconstruction Radiology and Nuclear Medicine, Nemacon, Pennsylvania, USA, 25-28 juin 1997 (article long paru dans le journal Physics in Medicine and Biology (43)4).

[C37] P. Lobel, L. Blanc-Féraud, C. Pichot, M. Barlaud “ Iterative Regularized Algorithms for Microwave Tomography : the Conjugate Gradient and the Modified Gradient” in Progress In Electromagnetics Research Symposium (PIERS'97), p.729, Cambridge, Massachusetts, USA, 7-11 juillet 1997 (communication invitée).

[C38] P. Lobel, C. Pichot, L. Blanc-Féraud, M. Barlaud “ Reconstructions from the 1997s Ipswich Data using conjugate gradient inversion algorithm with edge-preserving Regularization” In IEEE AP-S International Symposium, p.159, Montreal, Canada, 14-18 juillet 1997 (communication invitée).

[C39] S. Teboul, L. Blanc-Féraud, G. Aubert, M. Barlaud, J. Darcourt “ Contours déformables et restauration en imagerie médicale” 16ème colloque GRETSI sur le traitement du signal et des images, Grenoble, France, 15-19 septembre 1997.

[C40] L. Blanc-Féraud “ Problèmes inverses mal posés” Cours à l'école d'automne d'Aussois du GdR Physique de l'intérieur des étoiles en septembre 1997 (paru dans : Schatzman E.(Ed).Cours de Structure interne : Génération et interprétation des oscillations stellaires, Observatoire de Meudon, DASCAL, Meudon, France, 24p, 1998).

[C41] S. Teboul, L. Blanc-Féraud, G. Aubert, M. Barlaud “ Segmentation and Edge-Preserving Restoration” Proceedings ICIP-97, 4th IEEE International conference on Image Processing, vol.I, pp.168-172., Santa Barbara, Californie, USA, 26-29 octobre, 1997.

[C42] C. Pichot, P. Lobel, C. Dourthe, L. Blanc-Féraud, M. Barlaud “ Inversion algorithms for microwave imaging using different modalities and for various applications” 1st European Microwave Sensing Laboratory (EMSL) User Workshop, Ispra Italie, 23-24 avril 1996 (paru dans European Commission, Joint Research Center, ref. 17326 EN, Eur. Report 1997).

[C43] T. Corbard, G. Berthomieu, J. Provost, L. Blanc-Féraud “ On the use of nonlinear regularization in inverse methods for the solar tachocline profile determination” Proceedings of the SOHO6/GONG98 workshop, ESA SP-418, ESA Publications Division, pp.747-752, Boston, USA, 1-4 juin 1998.

[C44] J. Zerubia, L. Blanc-Féraud “ Hyperparameter estimation of a variational model

using a stochastic gradient” SPIE International Symposium on Optical Science, Engineering and Instrumentation, dans la partie intitulée Bayesian Inference for Inverse Problem, San Diego, USA, juillet 1998.

[C45] R. Ciampini, L. Blanc-Féraud, M. Barlaud, E. Salerno “Motion-based Segmentation by means of active contours” Proceedings ICIP’98, 5th IEEE International conference on Image Processing, vol.II , pp.667-670, Chicago, USA, octobre, 1998.

[C46] M. Khourmi, L. Blanc-Féraud, J. Zerubia “Unsupervised deconvolution of satellite images” Proceedings ICIP’98, 5th IEEE International conference on Image Processing, vol.II , pp.84-87, Chicago, USA, octobre, 1998.

[C47] C. Samson, L. Blanc-Féraud, G. Aubert, J. Zerubia “Simultaneous image classification and restoration using a variational approach” CVPR’99, IEEE Computer Society Conference on Computer Vision & Pattern Recognition, Fort Collins, Colorado, USA, 23-25 juin 1999.

[C48] A. Jalobeanu, L. Blanc-Féraud, J. Zerubia “Hyperparameter estimation for satellite image restoration by MCMCML method” EMMCVPR’99, Second International Workshop on Energy Minimization Methods in Computer Vision and Pattern Recognition, York, Angleterre, 26-29 juillet 1999.

[C49] C. Samson, L. Blanc-Féraud, G. Aubert, J. Zerubia “A level set model for image classification” Proceedings of the Second International Conference on Scale-Space’99, Corfu, Grèce, Lecture Notes in Computer Science, 1682, Springer, pp.306-317, 26-27 septembre 1999.

[C50] A. Jalobeanu, L. Blanc-Féraud, J. Zerubia “Restauration automatique d’images satellitaires par une méthode MCMC” GRETSI’99, 17ème Colloque GRETSI sur le traitement du signal et des images, Vannes, France, 13-17 septembre 1999.

[C51] C. Samson, L. Blanc-Féraud, G. Aubert, J. Zerubia “Une approche variationnelle pour la classification d’images par régions actives” 12ème congrès francophone AFRIF-AFIA de reconnaissance des formes et intelligence artificielle, Paris, 1-3 février 2000.

[C52] L. Blanc-Féraud “Image classification with level set model” Congress SIMAI of the Italian Society of Applied and Industrial Mathematics, Ischia isle, 5-9 juin 2000 (conférence invitée).

[C53] A. Jalobeanu, L. Blanc-Féraud, J. Zerubia “Estimation of adaptive parameters for satellite image deconvolution” ICPR’00 15th International Conference on Pattern Recognition, Barcelone, Espagne, 3-8 septembre 2000.

[C54] A. Jalobeanu, L. Blanc-Féraud, J. Zerubia “Satellite image deconvolution using complex wavelet packets ” ICIP’00, 7th International Conference on Image Processing, Vancouver, Canada, 10-13 septembre 2000.

B.1.4 Colloques internationaux sans acte ou avec actes à diffusion restreinte

[W1] M. Barlaud, L. Blanc-Féraud “Noisy image restoration using multiresolution analysis and Markov random fields” 7ème workshop IEEE on Multidimensional Signal Processing, Lake Placid, New-York, septembre 1991.

[W2] P. Charbonnier, L. Blanc-Féraud, M. Barlaud “A fast iterative tomographic reconstruction algorithm” 8ème workshop IEEE on Image and Multidimensional Signal Processing, Cannes, France, pp.104-106, 8-10 septembre 1993.

[W3] C. Pichot, P. Lobel, C. Dourthe, L. Blanc-Féraud, M. Barlaud “Inversion algorithms for microwave imaging using different modalities and for various” 1st EMSL workshop, Space Application.Institute, ATU-JCR, Ispra, Italy, 1996.

[W4] L. Blanc-Féraud, X. Dupuis, G. Aubert, M. Barlaud “Edge Modeling for Nonlinear Image Processing” 9th IEEE Workshop on image and multidimensional signal proces-

sing, Belize City, Belize, pp.60-61, 3-6 mars, 1996.

[W5] C. Pichot, P. Lobel, C. Dourthe, L. Blanc-Féraud, M. Barlaud “ Quantitative microwave reconstructions algorithms for buried or non-buried objects” IIIème séminaire international sur les problèmes inverses, Clermont Ferrand, France, 3-5 juin 1997.

[W6] F. Diard, S. Teboul, L. Blanc-Féraud, M. Barlaud “ Real-Time 3D Visualization for Medical Images Reconstruction and Segmentation” IEEE 10th Workshop on Image and Multidimensional Signal Processing IMDSP’98, Autriche, juillet 1998.

[W7] C. Samson, L. Blanc-Féraud, G. Aubert, J. Zerubia “ Supervised image restoration using a variational approach” MRF’99, Mathematics and Shape Recognition, Mathématique et reconnaissance de formes, CIRM, Luminy, France, 26-30 avril 1999.

B.1.5 Colloques nationaux sans actes ou avec actes à diffusion restreinte, participation aux GDR

[G1] L. Blanc-Féraud, M. Barlaud “Restauration d’images floues par filtrage de Kalman” - Greco, Traitement du signal et image, GT6, Paris, décembre 1988.

[G2] L. Blanc-Féraud, M. Barlaud “Restauration d’image bruitée par analyse multirésolution et champs de Markov” GDR 134 du CNRS, Traitement du signal et image, GT8 multirésolution, ENST Paris, juin 1991.

[G3] L. Blanc-Féraud, M. Barlaud “Modélisation markovienne multirésolution et restauration d’image” GDR 134 du CNRS, Traitement du signal et image, GT8 champs de Markov, ENST Paris, octobre 1991.

[G4] J.M. Bruneau, M. Barlaud, L. Blanc-Féraud “Reconstruction de surface stéréo par champs de Markov et pyramides d’ondelettes” GDR 134 Traitement du signal et image du CNRS, ENST Paris, janvier 1992.

[G5] P. Charbonnier, M. Barlaud, L. Blanc-Féraud “Reconstruction tomographique d’images avec prise en compte des discontinuités” GDR 134 Traitement du signal et image du CNRS, GT5/GT8 reconstruction 3D, ENST Paris, octobre 1992.

[G6] P. Charbonnier, L. Blanc-Féraud, M. Barlaud “Compression d’opérateur pour la reconstruction d’images” GDR 134 Traitement du signal et image du CNRS, GT8 reconstruction 3D, ENST Paris, juin 1993.

[G7] P. Charbonnier, G. Aubert, L. Blanc-Féraud, M. Barlaud “Prise en compte des discontinuités en traitement d’images : deux algorithmes déterministes basés sur une régularisation semi-quadratique” GDR 134 Traitement du signal et image du CNRS, GT2, ENST Paris, 16 mars 1994.

[G8] P.M. Koulibaly, P. Charbonnier, L. Blanc-Féraud, J. Darcourt, M. Barlaud “ Comparaison de deux méthodes de reconstruction en tomographie d’émission monophotonique du cerveau” GDR 134 Traitement du signal et image du CNRS, journées thématiques “ Imagerie cérébrale fonctionnelle” , ENST Paris, 3-4 mai 1994.

[G9] L. Blanc-Féraud, P. Charbonnier, M. Barlaud “Approches multirésolutions pour la régularisation de problèmes inverses par champs Markoviens” GDR 134 Traitement du signal et image du CNRS, journées thématiques “ Modèles Markoviens hiérarchiques en analyse d’image : approches et applications” , ENST Paris, 5-6 décembre 1994.

[G10] L. Blanc-Féraud, M. Barlaud “ Régularisation et préservation des contours en problèmes inverses” GDR ISIS, GT7 problèmes inverses, ENST, novembre 1995.

[G11] S. Teboul, L. Blanc-Féraud, G. Aubert, M. Barlaud “ Régularisation semi-quadratique et EDP couplées” GDR MSPCV, Cérémade, Université Paris IX Dauphine, novembre 1996.

[G12] S. Teboul, L. Blanc-Féraud, G. Aubert, M. Barlaud, “ Contours déformables et reconstruction en imagerie médicale” GDR-PRC ISIS, GT3 modèles dynamiques déformables, ENST, mars 1997.

[G13] M. Khoumri, L. Blanc-Féraud, J. Zerubia “ Estimation d’hyperparamètre pour la déconvolution d’image satellitaire par modèle” GDR-PRC ISIS, GT7, ENST, juin 1997.

[G14] R. Ciampini, L. Blanc-Féraud, M. Barlaud, E.Salerno “ Estimation-segmentation du flot optique et contours actifs” GDR-PRC ISIS, GT3 modèles dynamiques déformables, ENST Paris, 29 octobre 1998.

[G15] C. Samson, L. Blanc- Féraud, G. Aubert, J. Zerubia “ Classification et restauration d’images par approche variationnelle” ORASIS’99, Actes des journées des jeunes chercheurs en analyse d’images et perception visuelle, Aussois, France, pp. 215-224, 26-30 avril 1999.

[G16] L. Blanc-Féraud, C. Samson, G. Aubert, J. Zerubia “ Classification d’images par approche variationnelle” GDR-PRC ISIS, GT 1 : Information journée sur les Applications des méthodes de résolution des problèmes, ENST, Paris, 23 juin 1999.

[G17] A. Jalobeanu, L. Blanc-Féraud, J. Zerubia “ Estimation d’hyperparamètres pour la restauration d’images satellitaires par une méthode MCMCML” GDR-PRC ISIS, GT 2 : Analyse et Décision en Signal Journée sur les Methodes de Simulation en traitement du signal et des images, ENST, Paris, 9 juillet 1999.

[G18] A. Jalobeanu, L. Blanc- Féraud, J. Zerubia “ Estimation des paramètres adaptatifs pour la déconvolution d’images satellitaires par paquets d’ondelettes complexes” GDR-PRC ISIS, GT 1 : Opération thématique Problèmes inverses, ENST, Paris, 15 décembre 1999.

[G19] C. Samson, L. Blanc-Féraud, G. Aubert, J. Zerubia “ Evolution de phases multiples et classification d’images par modèle variationnel” GDR-PRC ISIS, GT 4 : Modèles dynamiques déformables, ENST, Paris, 16 décembre 1999.

[G20] A. Jalobeanu, L. Blanc- Féraud, J. Zerubia “ Méthodes de Monte-Carlo par chaînes de Markov : théorie et applications en traitement des signaux et des images” Centre de Compétence Technique du CNES, CNES Toulouse, séminaire du 11 mai 2000.

B.1.6 Rapports de recherche/ articles soumis

[R1] P. Lobel, L. Blanc-Féraud, C. Pichot, M. Barlaud “ Technical development for an edge-preserving regularization method in inverse scattering” rapport de recherche 95-73, Laboratoire I3S, Université de Nice Sophia Antipolis, décembre 1995.

[R2] C. Samson, M. Barlaud, L. Blanc-Féraud, S. Teboul “ Surfaces déformables : application à l’imagerie médicale” Rapport de recherche 97-18, Laboratoire I3S du CNRS, Université de Nice Sophia Antipolis, 1997.

[R3] G. Aubert, L. Blanc-Féraud “ An elementary proof of the equivalence between 2D and 3D classical snakes and geodesic active contours” rapport de recherche n° 3340, INRIA Sophia Antipolis, 16p., (accepté au journal IJCV), janvier 1998.

[R4] R. Ciampini, L. Blanc-Féraud, M. Barlaud, E.Salerno “ Estimation-segmentation du flot optique et contours actifs” rapport de recherche 98-11, laboratoire I3S, 54 p., 1998.

[R5] A. Jalobeanu, L. Blanc-Féraud, J. Zerubia “ Estimation d’hyperparamètres pour la restauration d’images satellitaires par une méthode “ MCMCML ” ” , rapport de recherche n° 3469, Inria, 71p. (soumis à IEEE Trans. on Image Processing), août 1998.

[R6] C. Samson, L. Blanc-Féraud, G. Aubert, J. Zerubia “ Image Classification using a variational approach” , rapport de recherche n° 3523, Inria, 48p., (soumis à IEEE Trans. on PAMI), octobre 1998.

[R7] C. Samson, L. Blanc-Féraud, G. Aubert, J. Zerubia “ Multiphase evolution and variational image clasification ” , rapport de recherche n° 3662, Inria, 41p. (soumis à IJCV), avril 1999.

[R8] A. Jalobeanu, L. Blanc-Féraud, J. Zerubia “ Satellite image deconvolution using complex wavelet packets” , rapport de recherche Inria, juin 2000.

[R8] A. Jalobeanu, L. Blanc-Féraud, J. Zerubia “ Inhomogeneous model for satellite image deconvolution ” , rapport de recherche Inria, juin 2000.

B.1.7 Rapports de contrats

[RC1] M. Barlaud, L. Blanc- Féraud “ Estimation de mouvement dans des séquences d’images infra-rouge “ Rapport de contrat SFIM/I3S/CNRS/UNSA, 30 p., 1995.

[RC2] S. Tramini, M. Barlaud, L. Blanc- Féraud “ Déconvolution d’images satellites“ Rapport de contrat CNES/GDR ISIS/CNRS/UNSA, 40 p., décembre 1996.

[RC3] A. Jalobeanu, L. Blanc- Féraud, J. Zerubia “ Estimation d’hyperparamètres pour la restauration d’images satellitaires haute résolution.“ Rapport de contrat Aérospatiale (Cannes), décembre 1998.

[RC3] A. Jalobeanu, L. Blanc- Féraud, J. Zerubia “ Etude de la restitution des paramètres instrumentaux.“ Rapport de contrat CNES (Toulouse) n° 762/2/99/0066/CNES, février 2000.

B.1.8 Dépôt de logiciels à l’agence pour la protection des programmes (APP)

[L1] C. Samson, L. Blanc- Féraud, G. Aubert, J. Zerubia “ VIC, variational image classification“ , langage C, février 1999.

[L2] C. Samson, L. Blanc- Féraud, G. Aubert, J. Zerubia “ CIRA, classification d’images par régions actives“ langage C, décembre 1999.

[L3] A. Jalobeanu, L. Blanc- Féraud, J. Zerubia “ COWPATH, complex wavelet packets automatic thresholding“ langage C, décembre 1999.

[L4] A. Jalobeanu, L. Blanc- Féraud, J. Zerubia “ DEPA, Déconvolution avec estimation des paramètres adaptatifs“ langage C, janvier 2000.

B.1.9 Diffusion de la connaissance

[D1] L. Blanc-Féraud “ Problèmes inverses mal-posés” Cours à l’école d’automne d’Aussois du GdR Physique de l’intérieur des étoiles, sept.1997 (Article paru dans : Schatzman E. (Ed.) Cours de Structure interne : Génération et interprétation des oscillations stellaires, Observatoire de Meudon, DASCAL, Meudon, France).

[D2] L. Blanc-Féraud “ Contours actifs en image” Conférence (3h) dans le cadre du DEA de l’Ecole Nationale Supérieure de Physique de Marseille, 21 janvier 98.

B.1.10 Séminaires

L. Blanc-Féraud “ Variational approach for edge-preserving regularization and segmentation”

–University of California in Los Angeles (UCLA), USA, Dept of applied mathematics, 23 octobre 1997,

–Istituto per la Elaborazione della Informazione, CNR, Pisa, Italie, 26 septembre 1997.

L. Blanc-Féraud “ Image classification using a variational approach”

–University of Illinois at Urbana-Champaign (UIUC), DSP Group at the Dept of ECE and the coordinated science laboratory, 30 septembre1998,

–CNR institute of applied mathematics, Rome, Italie, 11 décembre 1998.

Annexe C

Les publications jointes (document annexe)

- [IEEE APM-96] P. Lobel, R. Kleinman, C. Pichot, L. Blanc-Féraud, M. Barlaud *Conjugate gradient method for solving inverse scattering with experimental data* IEEE Antennas Propagation Magazine, vol.38, n.3, June 1996, pp. 48-51.
- [IEEE IP-97] P. Charbonnier, L. Blanc-Féraud, G. Aubert, M. Barlaud *Deterministic edge-preserving regularization in computed imaging* IEEE Trans. on Image Processing, vol.6, n.2, Février 1997, pp.298-311. **Prix du meilleur papier jeune auteur de la IEEE Signal processing Society 1998** (*Image and Multidimensional Signal Processing Area*)
- [PMB-98] I. Laurette, J. Darcourt, L. Blanc-Féraud, P.M. Koulibaly, M. Barlaud. *Combine constraints for efficient algebraic regularized methods in fully 3D reconstruction* Phys. Med. Biol., vol.43, pp. 991-1000, 1998.
- [IEEE IP-98] S. Teboul, L. Blanc-Féraud, G. Aubert, M. Barlaud *Variational approach for edge preserving regularization using coupled PDE's* IEEE Trans. on Image Processing 1998.
- [IJCV-99] G. Aubert, L. Blanc-Féraud *Some remarks on the equivalence between 2D and 3D classical snakes and geodesic active contours* International Journal of Computer Vision, vol.34, n.1, pp 19-28, 1999.
- [RR-98] C. Samson, L. Blanc-Féraud, G. Aubert, J. Zérubia *Image classification using a variational approach* Rapport de recherche 3523, Inria, 1998, 48p.
 - cet article est accepté (en janvier 2000) pour publication dans la revue *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*.
 - une version courte a été présentée à la conférence internationale *IEEE Computer Society Conference on Computer Vision & and Pattern Recognition* en juin 99.
- [RR-99] C. Samson, L. Blanc-Féraud, G. Aubert, J. Zérubia *Multiphase evolution and variational image classification* Rapport de recherche 3662, Inria, 1999, 41p.
 - cet article est soumis à la revue *International Journal of Computer Vision*.
 - une version courte a été présentée à la conférence internationale *Scale-Space Theories in Computer Vision, Geometric flows, Nonlinear Diffusion, Functional minimization, and linear Scale-Space* en septembre 99.
- [RRest-98] A. Jalobeanu, L. Blanc-Féraud, J. Zérubia *Estimation d'hyperparamètres pour la restauration d'images satellitaires par une méthode "MCMCML"* Rapport de recherche 3469, Inria, 1998, 71p.

- cet article est soumis à la revue *Pattern Recognition*.
- une version courte a été présentée à la conférence internationale *Second International Workshop on Energy Minimization Methods in Computer Vision and Pattern Recognition* en juillet 99.