

Rapport Fondation EADS

$T_0 + 13$

Détection d'objets en imagerie infrarouge en utilisant des contours actifs d'ordre supérieur et des champs de phase

GRÉGOIRE KERR - EPI Ariana, INRIA Sophia Antipolis Méditerranée

IAN JERMYN - EPI Ariana, INRIA Sophia Antipolis Méditerranée

JOSIANE ZERUBIA - EPI Ariana, INRIA Sophia Antipolis Méditerranée

Mars 2011

Table des matières

1	Introduction	4
2	Une Représentation Explicite	6
2.1	Qu'est-ce qu'une Forme ?	6
2.2	Cadre Général d'Étude	7
2.2.1	Les q-Fonctions	7
2.2.2	Invariances et Classes d'Équivalences	7
2.3	Géodésiques	8
2.4	Vers des Modèles de Formes	9
2.5	Avantages et Limitations	11
3	Interactions entre Formes	12
3.1	Énoncé du Problème	12
3.2	Représentation des Données	12
3.3	Calcul de la Corrélacion	16
3.4	Correction du Modèle	18
3.5	Évaluation du Modèle Final	18
3.6	Autres modèles Proposés	18
3.6.1	Modèles de Frontières	19
3.6.2	Extension Tridimensionnelle	20
3.7	Conclusion partielle	21
4	Contours Actifs d'Ordre Supérieur	23
4.1	Les Contours Actifs Simples	23
4.2	Une Première Famille de Contours	24
4.3	Vers un Modèle de Forme	25
4.4	Les Contours Actifs d'Ordre Supérieur : Principes	26
4.5	Exemple de Contour Actif d'Ordre 2	27
5	Les Champs de Phase	30
5.1	Modèle Simple d'Énergie	30
5.2	Optimisation	31
5.3	Lien Avec les Contours Actifs d'Ordre Supérieur	32
6	Stabilité du Modèle	34
6.1	Principes Généraux	34
6.2	Stabilité du Cercle	34

6.3	Vers des formes étoilées	35
7	Stabilité des formes étoilées	37
7.1	Expression de l'Énergie pour des formes Étoilées	37
7.2	Conditions d'Extrémalité	38
7.2.1	Identification des Conditions	38
7.2.2	Première méthode de résolution	40
7.2.3	Approche Manuelle	41
7.3	Identification des Minima	41
8	Conclusion et perspectives	47
A	Développements de L'Énergie	48
A.1	Considérations générales	48
A.2	Développement du terme de longueur	49
A.3	Développement du terme d'aire	50
A.4	Développement du terme d'ordre supérieur	50
A.5	Détail du Calcul des Intégrales	53
B	Définition des Fonctions utilisées	65
B.1	Fonctions F	65
B.2	Fonctions G	68
C	Méthode des Petites Perturbations	71
C.1	Principe des petites perturbations	72
C.2	Calcul des perturbations des valeurs propres	73
C.3	Valeurs propres finales	73
C.4	Perturbations des vecteurs propres	74
C.5	Propriétés diverses	77
D	Tracé de Valeurs Propres	78
E	Activités lors de la 1^{ère} année	84

Table des figures

2.1	Chemins Géodésiques - Exemples	9
3.1	Localisation des Organes Étudiés	13
3.2	Présentation des Organes Étudiés	14
3.3	Base d'apprentissage	14
3.4	Cerveaux Synthétiques - Non Corrélés	15
3.5	Cerveaux Synthétiques - Corrélation	17
3.6	Cerveaux Synthétiques - Corrélation et A Priori	20
3.7	Modèles de Frontière	21
3.8	Serpent de Mer	22
4.1	Serpents de Kass - Initialisation	24
4.2	Illustration des Limitations des Contours Actifs	25
4.3	Première Fonction d'interaction	28
4.4	Influence de l'a priori	29
5.1	Liens Champs de Phase CAOS	31
5.2	Exemple de Potentiel de Champs de Phase	32
5.3	Comparaison Stabilité Champs de Phase - CAOS	33
6.1	Conditions de Stabilité	36
7.1	Tracé de f_3	40
7.2	Diagramme d'existence de solution	45
7.3	Tracé des valeurs propres	46
D.1	Diagramme des solutions pour $m = 2$	79
D.2	Valeurs propres pour $m = 2$	80
D.3	Valeurs propres pour $m = 2$	81
D.4	Valeurs propres pour $m = 2$	82
D.5	Valeurs propres pour $m = 2$	83

Chapitre 1

Introduction

La naissance du traitement d'image remonte vraisemblablement au début des années 1950 lorsque les physiciens ont eu besoin d'analyser les trajectoires de particules issues de collisions en chambres à bulles. Bien que ces premiers traitements furent très limités, tant dans leurs domaines d'applications que dans leurs possibilités, ils ont ensuite ouvert la voie à une immense variété d'applications. De nos jours, l'imagerie médicale permet ainsi de disposer de diagnostics plus rapides et plus sophistiqués. L'imagerie satellitaire autorise, quant à elle, diverses applications telle qu'une meilleure exploitation des sols, voire une meilleure gestion des risques. La liste exhaustive de ces applications est longue et variée.

Pourtant, si les objectifs sont multiples, la démarche reste souvent la même. Considérons une image contenant de l'information. Cette information est généralement traduite par des notions de présence ou d'absence : "Il y a une route reliant ces deux villes", ... Un des buts du traitement d'image va alors être de détecter, si possible automatiquement, cette information¹. Il faudra donc, être capable de détecter les zones correspondant à cette présence.

Cette tâche peut sembler à première vue difficile à réaliser dans le cas général. Heureusement, nous disposons le plus souvent d'informations connues a priori sur ces éléments. Si notre objectif est de détecter un réseau routier sur une image en couleurs naturelles, nous pouvons, par exemple, dire que les tronçons de routes seront assimilables à des segments de couleur sombre sur fond clair. Nous avons ici deux informations a priori : une information de couleur, et une information de forme. C'est sur l'étude de cette dernière que nous avons focalisé notre travail.

Bien qu'il existe de nombreuses façons de représenter "une forme", nous avons restreint notre étude à deux approches. La première, que nous appellerons représentation explicite vise à représenter chaque forme par un unique point d'un "espace des formes". Cette démarche présente l'immense avantage de permettre la définition de statistiques sur les formes et, en particulier, de calculer des formes moyennes. Nous la détaillerons dans la partie 2.

Elle présente cependant plusieurs désavantages non négligeables. Un d'entre eux est son incapacité à représenter facilement des groupes de formes. La première partie du travail de Master de Grégoire Kerr a consisté à apporter des éléments de solution

¹Le résultat de cette détection n'est pas forcément binaire. Il peut être du type : il y a 70% de chance pour qu'il y ait une route et 30% pour que ce soit une rivière.

à cette problématique. Nous les discuterons dans la partie 3.

Une autre approche complémentaire consiste à représenter les formes par leurs propriétés. Nous les nommerons donc approche implicite. La partie 4 présentera un des développements possibles d'une telle approche, les contours actifs d'ordre supérieur.

Cette seconde approche n'est cependant pas encore pleinement adaptée à l'étude de formes complexes. Nous présenterons, dans la partie 6, la méthodologie permettant d'étendre cette démarche pour modéliser des formes simples. Nous nous baserons sur ces résultats initiaux pour essayer d'étendre la méthodologie au cas de formes étoilées dans les parties 6 et 7.

Chapitre 2

Une Représentation Explicite

2.1 Qu'est-ce qu'une Forme ?

Avant de chercher à représenter une "forme" de façon mathématique, il faut commencer par définir ce que c'est. Dans la suite de ce rapport, nous conviendrons d'appeler "forme" l'apparence d'un contour, ce dernier pouvant tout aussi bien être fermé qu'ouvert [1], [6]. Il est important de noter que, ainsi définie, une forme est invariante par translation, par rotation, et changement d'échelle. Une forme est la silhouette du contour et non pas le contour lui-même... Inversement, un contour sera parfaitement défini par la donnée d'une forme, d'une échelle, d'une rotation et d'une position. Dans la suite de ce rapport, nous ne considérerons que des formes fermées, bien que les notions présentées soient parfaitement applicables au cas simplifié que constituent les formes ouvertes.

La notion de forme ayant été fixée, il devient maintenant possible de définir les représentations mathématiques associées.

Comme notre domaine d'application est celui du traitement de l'image, nos données initiales resteront les contours eux-mêmes. Les différentes représentations considérées se baseront sur ces contours.

Un contour peut être représenté par une courbe paramétrée, soit une application γ du segment $[-\pi, \pi[$ dans un domaine Ω de \mathbb{R}^2 . Comme nous nous intéressons à des courbes "plausibles", nous supposons, par ailleurs, qu'elles sont suffisamment régulières. Nous imposerons donc, en particulier, que γ soit continue et dérivable.

Enfin, comme nous supposons que nous travaillons avec des formes fermées, les contours correspondants doivent nécessairement être également fermés. Nous aurons donc $\gamma(-\pi) = \gamma(\pi)$ et $\dot{\gamma}(-\pi) = \dot{\gamma}(\pi)$. Ici, comme dans toute la suite de ce rapport, le point désigne la dérivation par rapport à t .

Ces notions et notations ayant été définies, nous allons pouvoir introduire une représentation explicite des formes : les q-fonctions.

2.2 Cadre Général d'Étude

2.2.1 Les q-Fonctions

Nous allons définir la forme d'un contour en utilisant la q-fonction associée [1], [4], [6] :

$$q(t) = \begin{cases} \frac{\dot{\gamma}(t)}{\sqrt{\|\dot{\gamma}(t)\|}} & \text{si } \dot{\gamma}(t) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.1)$$

Bien sûr, les q-fonctions ne sont pas l'unique représentation s'offrant à nous. D'autres choix seraient tout aussi justifiables, nous pouvons cependant noter que :

- les q-fonctions restent bien définies et continues aux points singuliers.
- la représentation reste valide pour des courbes dans \mathbb{R}^n .
- l'action du groupe de re-paramétrisation agit, dans ce cas, comme des isométries pour le produit scalaire usuel de \mathbb{L}^2 . Ce résultat sera utile pour définir des distances entre classes d'équivalences de formes.

Le lecteur pourra remarquer que, si la définition de la q-fonction permet d'assurer l'invariance par translation via l'utilisation de la dérivée, les autres invariances ne sont pas encore respectées. Commençons par traiter le cas de l'invariance par changement d'échelle.

L'échelle de la courbe peut être assimilée à sa taille c'est-à-dire, dans le cas des courbes planes, à sa longueur $L(\gamma)$. Il suffit donc, pour obtenir une q-fonction invariante par changement d'échelle, de la calculer en utilisant la courbe normalisée :

$$\tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{L(\gamma)}$$

Nous pouvons donc définir un pré-espace des formes :

$$\mathcal{C}^c = \left\{ q \in \mathbb{L}^2([-\pi, \pi], \mathbb{R}^2) \mid \int_{-\pi}^{\pi} \|q(t)\|^2 dt = 1, \int_{-\pi}^{\pi} q(t) \|q(t)\| dt = 0 \right\} \quad (2.2)$$

Nous pouvons remarquer que la première contrainte permet d'éviter les problèmes de changement d'échelle, alors que la seconde impose d'avoir une courbe fermée. Il reste maintenant à traiter le cas des autres invariances : les invariances par rotation et par re-paramétrisation. Dans la suite, nous admettrons que \mathcal{C}^c muni du produit scalaire usuel dans \mathbb{L}^2 est une variété Riemannienne presque partout [1], [4].

2.2.2 Invariances et Classes d'Équivalences

Il ne nous reste donc plus qu'à nous libérer de l'influence des re-paramétrisations et des rotations des courbes [4]. Commençons par noter \mathbb{B} l'ensemble des re-paramétrisations. Son action sur \mathcal{C}^c est définie par :

$$\begin{aligned} \mathbb{B} \times \mathcal{C}^c &\rightarrow \mathcal{C}^c \\ (\beta, q) &\rightarrow \sqrt{\dot{\beta}}(q \circ \beta) \end{aligned} \quad (2.3)$$

où β est un difféomorphisme de $[-\pi, \pi]$ dans un intervalle de \mathbb{R} plus un changement d'origine.

De la même façon, l'action d'une rotation peut être représentée par l'action de $SO(2)$ sur \mathcal{C}^c :

$$\begin{aligned} SO(2) \times \mathcal{C}^c &\rightarrow \mathcal{C}^c \\ (O, q) &\rightarrow \{Oq(t), t \in [-\pi, \pi]\} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Il est possible de montrer que les actions de chacun de ces groupes sur \mathcal{C}^c commutent :

Soient O une rotation et β une re-paramétrisation agissant sur une courbe γ de façon à donner $\tilde{\gamma}$. La q -fonction résultante est donnée par :

$$\tilde{q} = \frac{\dot{\tilde{\gamma}}}{\sqrt{\|\dot{\tilde{\gamma}}\|}} = O\sqrt{\dot{\beta}}(q \circ \beta) \quad (2.5)$$

Nous pouvons noter que ce résultat reste le même si nous appliquons β , puis O . Nous en déduisons donc que les deux actions commutent.

On définit alors l'espace des formes comme étant l'ensemble des classes d'équivalence de \mathcal{C}^c sous les actions de \mathbb{B} et $SO(2)$. En notant :

$$[q] = \text{fermeture } \{((O, q), \beta) \mid (\beta, O) \in \mathbb{B} \times SO(2)\}$$

nous obtenons alors l'espace des formes :

$$\mathcal{S} = \{[q] \mid q \in \mathcal{C}^c\} \quad (2.6)$$

Nous pouvons, enfin, noter que l'action de $\mathbb{B} \times SO(2)$ agit sur \mathcal{C}^c par isométries pour le produit scalaire usuel dans \mathbb{L}^2 :

$$\langle u, v \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \langle u(t), v(t) \rangle dt$$

La distance entre deux classes d'équivalence sera donc donnée par :

$$d([q_1], [q_2]) = \min_{(\beta, O) \in \mathbb{B} \times SO(2)} d(q_1, ((O, q_2), \beta)) \quad (2.7)$$

2.3 Géodésiques

Maintenant que nous avons caractérisé l'espace des formes, il paraît intéressant de pouvoir caractériser deux formes l'une par rapport à l'autre. Nous souhaitons, en effet, être capable de définir une distance entre deux courbes ou encore de caractériser les formes intermédiaires. Pour ce faire, nous allons utiliser les courbes géodésiques.

Compte tenu de la complexité et du nombre d'algorithmes mis en œuvre, nous nous bornerons ici à donner les principes généraux de calcul. Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer aux pages 115 à 161 de [1] ou à [4].

Le principal problème auquel nous nous heurtons ici est qu'il n'existe pas de forme analytique pour exprimer les courbes géodésiques. Il va donc falloir les approcher de

façon numérique. Plusieurs approches sont possibles ; nous ne nous intéresserons ici qu'à celle de la "rectification de chemin" (en anglais, "path-straightening").

Soit deux formes définies par $[q_1]$ et $[q_2]$. L'idée du calcul consiste à tirer un chemin arbitraire entre ces deux formes. Ce chemin va ensuite être rectifié itérativement de façon à minimiser une certaine énergie et ce jusqu'à concorder avec le chemin géodésique entre $[q_1]$ et $[q_2]$. Nous remarquons, au passage, que cette technique présente l'avantage d'assurer que le point de départ et le point d'arrivée sont effectivement ceux recherchés, seul le chemin géodésique étant approximé.

Cette méthode implique donc, entre autres, de définir l'énergie relative à un chemin entre 2 formes. Soit α un chemin différentiable dans une variété et tel que ses dérivées soient des éléments du Hilbert L^2 et appartiennent donc à l'espace tangent à la variété. Par simplicité, nous supposons que α est défini sur $[-\pi, \pi]$.

$$E[\alpha] = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \langle \dot{\alpha}(t), \dot{\alpha}(t) \rangle dt \quad (2.8)$$

Il est alors possible de minimiser cette énergie par descente de gradient. Des exemples de chemins géodésiques entre différentes formes sont représentés en figure 2.1. Le lecteur peut remarquer que, du fait de la représentation choisie, les chemins géodésiques jouent sur la re-paramétrisation. Nous avons donc des déformations "élastiques" des formes. Les bosses et les creux se déplacent, si besoin est, depuis leurs positions dans la forme initiale jusqu'à celles qu'elles occupent dans la forme finale. Les transformations sont donc "optimales" dans le sens où on ne "détruit" pas une bosse pour la recréer à coté. Le phénomène est particulièrement visible sur la première ligne de la figure 2.1.

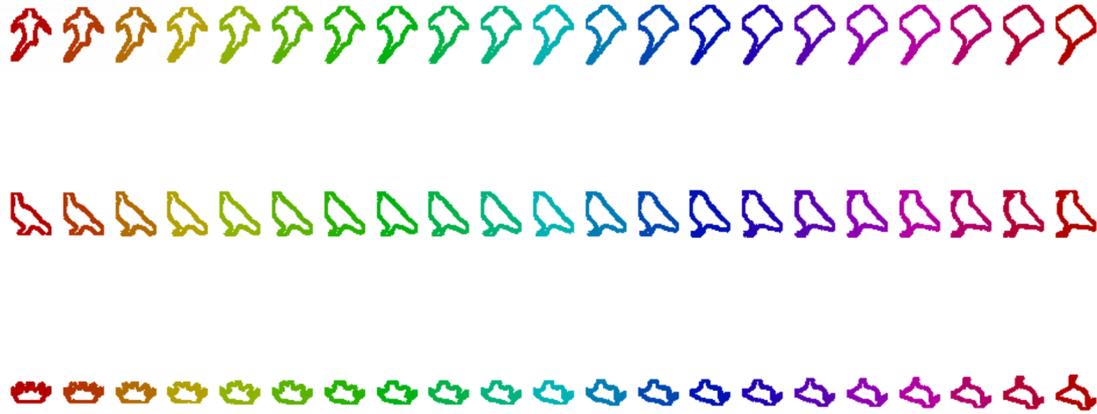


FIG. 2.1: Exemples de chemins géodésiques entre trois couples de formes.

2.4 Vers des Modèles de Formes

Nous avons vu dans les paragraphes précédents comment définir des formes à partir de contours et quel était le cadre topologique de leur étude. Dans la partie

2.3, nous avons posé les bases des calculs de distances entre deux formes. Nous allons maintenant tirer parti de ces résultats en expliquant comment aboutir à une modélisation statistique d'une forme.

Une telle modélisation peut, en effet, présenter plusieurs applications :

- étant donné un ensemble de formes similaires, les résumer par des paramètres statistiques.
- étant donné un ensemble de formes, les scinder en un certain nombre de classes distinctes.
- étant donné un certain nombre d'observations, les modéliser de façon stochastique, c'est-à-dire associer une densité de probabilité à leur forme.

Dans la suite de ce rapport, nous nous focaliserons principalement sur ces deux derniers points bien que la démarche reste de toute façon très similaire quelque soit l'application visée.

Un des principaux problèmes lors de l'élaboration de statistiques dans l'espace des formes est lié à la structure de ce dernier. Il est, en effet, non-linéaire et de dimension infinie. La définition classique de moyenne n'a alors plus de sens du fait de la non linéarité de l'espace. De même, les densités de probabilité ne sont pas toujours définies dès lors que l'on se place dans un espace de dimension infinie.

Le problème de la moyenne peut d'abord être résolu de façon relativement simple en utilisant la notion de "moyenne de Karcher" [1], [3]. La forme moyenne, μ , est la forme minimisant la somme de ses distances aux formes initiales. Ainsi, pour un échantillon de N formes, $(q_i)_{i \in [1..N]}$, la moyenne sera définie par :

$$\mu = \arg \min_{q \in \mathcal{S}} \sum_{i=1}^N d(q, q_i)^2 \quad (2.9)$$

Nous allons maintenant nous placer dans l'espace tangent au point μ de façon à pouvoir profiter de sa linéarité. Pour cela, il suffit de projeter nos observations dans $T_\mu(\mathcal{S}^c)$ en utilisant l'application exponentielle inverse [3] :

$$v_i = \exp_\mu^{-1}(q_i)$$

Il est à ce stade possible de définir des densités de probabilités en sélectionnant habilement des sous-espaces de $T_\mu(\mathcal{S}^c)$ de dimensions finies. Nous pouvons, par exemple, utiliser une base de fonctions trigonométriques de $\mathbb{L}^2([-\pi, \pi], \mathbb{R}^2)$ en ne gardant que les éléments correspondant à des fréquences suffisamment faibles pour être réalistes vis-à-vis des contours utilisés.

Dans le cas numérique, le problème se simplifie cependant, et il n'est pas nécessaire d'en passer par là... En effet, du fait de la discrétisation des données, v_i est défini comme étant un vecteur de taille m . Nous pouvons alors nous rapporter à une matrice de covariance plus classique :

$$\hat{K} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N v_i \cdot v_i^T \quad (2.10)$$

Cette matrice peut alors être décomposée en valeurs singulières $\hat{K} = U \Sigma U^T$. Le lecteur peut maintenant remarquer que les vecteurs propres, (U_i) , correspondent

aux directions de variations de la forme alors que les valeurs propres codent la variance selon ces directions. Autrement dit, il est maintenant possible de définir une densité de probabilité selon chacune de ces composantes. Dans les faits, pour des formes bi-dimensionnelles, nous disposerons des variations de $4m^2$ vecteurs, m étant habituellement très grand.

Afin de limiter les calculs tout en ne gardant que l'information pertinente, il est possible d'utiliser une analyse en composantes principales sur cette base. Nous ne garderons alors que les n vecteurs associés aux valeurs propres les plus significatives soit $(U_i)_{i \in [1..n]}$.

Une fois ces vecteurs principaux déterminés, nous pouvons modéliser les variations qui leur sont associées, puis les retraduire en termes de formes. Pour cela, il suffit de les re-projeter sur notre espace des formes. Si nous supposons, par exemple, que ces variations suivent des lois normales, nous obtenons le modèle de forme suivant :

$$\exp_{\mu} \sum_{i=1}^n \mathcal{N} \left(0, \sqrt{\Sigma_{ii}} \right) U_i \quad (2.11)$$

qui est entièrement résumé par la donnée de μ , Σ et (U_i) .

2.5 Avantages et Limitations

Comme nous avons pu le voir dans les paragraphes précédents, l'approche des q -fonctions présente de nombreux points intéressants. Elle permet, tout d'abord, de modéliser une forme de façon unique et de calculer des distances géodésiques entre tout couple de formes. Il est ainsi possible de comparer des formes entre elles : "ces deux formes sont plus similaires entre elles que celles-là".

Ces notions peuvent, par ailleurs, être étendues de façon à définir des outils d'analyse statistique. Pour une famille de formes, il est ainsi possible d'en définir la moyenne ainsi que les variations autour de cette moyenne. Pour ne donner qu'un exemple d'application, nous pouvons nous rendre compte des avantages que cela présente en termes de classification.

Ces calculs sont cependant complexes. D'un point de vue numérique, ils aboutissent donc à des temps d'exécution extrêmement longs, même pour des formes "simples". D'autre part, cette méthodologie ne donne pas de technique d'extraction des contours depuis une image. Il faudra donc effectuer une première étape d'extraction avant de pouvoir utiliser la méthode. Cela est problématique si nous souhaitons l'utiliser pour fournir a priori sur les formes à extraire. Dans ce cas, la démarche ne sera pas évidente.

Enfin, il ne faut pas oublier que la méthode d'analyse présentée ici ne s'applique qu'à des formes isolées. Il reste donc à définir un modèle d'interaction.

Chapitre 3

Interactions entre Formes

Les principes énoncés dans cette partie correspondent aux travaux effectués par Grégoire Kerr auprès du professeur Srivastava pendant les deux premiers mois de son stage de Master.

Jusqu'à présent, nous n'avons parlé que de formes isolées. Pourtant, lorsque que les objets à l'origine des formes sont déformables, ils interagissent généralement avec leur environnement. Il semble, de ce fait, nécessaire de prendre en compte ces interactions dans les modèles de forme.

Dans le cas général, ce problème est loin d'être trivial. Nous nous limiterons donc à un cas dégradé où le nombre de formes en interaction est connu. Une seconde partie sera consacrée à la présentation de différentes propositions d'extension de la méthodologie.

3.1 Énoncé du Problème

Commençons donc par nous placer dans le cas simplifié où nous connaissons le nombre de formes en interaction. Dans la suite de cette partie, nous appuierons nos propos par une application sur des données réelles : nous avons travaillé sur des "coupes de cerveaux" où les contours de quatre organes ont été extraits (cf : fig. 3.1 & 3.2) : le caudate, l'hippocampe, le putamen, et le thalamus. Notre but est alors d'aboutir à un modèle global de forme permettant de modéliser ces 4 formes de façon conjointe. Nous chercherons ainsi à fournir une "densité de probabilité" permettant de représenter la distribution des différents contours.

Dans la suite, nous désignerons le paramètre k relatif à la forme numéro j par k^j . Ainsi le contour de la courbe j sera $\gamma^j = (x^j, y^j)$.

3.2 Représentation des Données

Une des toutes premières considérations consiste à remarquer que les interactions entre les formes sont avant tout fonctions de l'agencement de ces formes, c'est-à-dire des positions, orientations et échelles relatives de ces formes. Le lecteur pourrait alors être tenté de revenir à un modèle de contour puisque notre modèle de forme a tout fait pour se libérer de l'influence de ces paramètres. Malheureusement, les

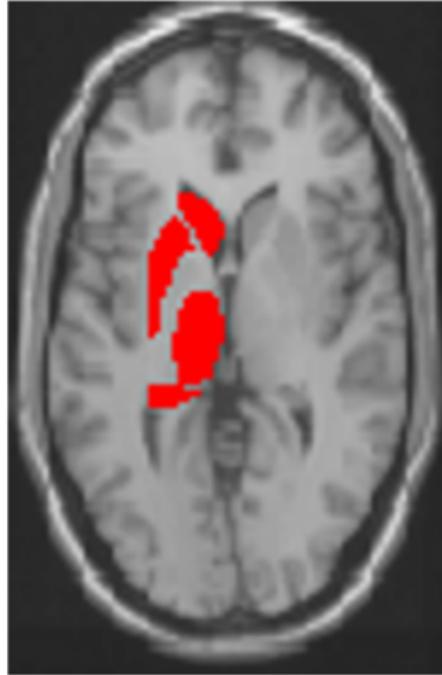


FIG. 3.1: Exemple de coupe de cerveau image obtenue par IRM (Imagerie par Résonance Magnétique) ©Crédit : Département de Statistiques, Université d'État de Floride.

courbes paramétrées n'offrent pas directement d'outils de modélisation statistique. Nous sommes donc repartis de la méthodologie des q-fonctions.

Pour étendre cette méthodologie, nous avons alors défini le groupe de contours comme étant la composition de :

- Les 4 vecteurs positions des contours, (p^j) .
- Les 4 vecteurs orientations des contours, (o^j) .
- Les 4 échelles des contours, (s^j) .
- Les 4 formes des contours, soit les q-fonctions associées : (q^j) .

Paramètre de position : Nous avons choisi comme paramètre de position, les barycentres de chaque courbe. On a donc :

$$p^j = (p_x^j, p_y^j)^T = \int_{-\pi}^{\pi} \gamma^j(t) dt \quad (3.1)$$

Paramètre d'orientation : Nous avons choisi comme paramètre d'orientation la direction principale de la matrice d'inertie des courbes. Comme les organes ont à peu près les mêmes orientations entre deux cerveaux, ce vecteur définit bien les variations d'orientation, bien qu'il soit défini modulo π .

Définissons donc la matrice d'inertie comme étant :

$$I^j = \begin{pmatrix} A^j & -C^j \\ -C^j & B^j \end{pmatrix}$$

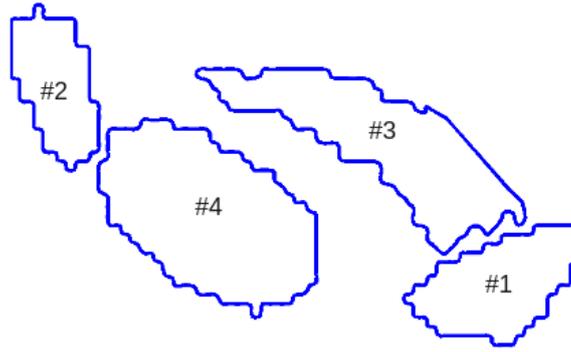


FIG. 3.2: Exemple de coupe de cerveau, numérotation des organes.

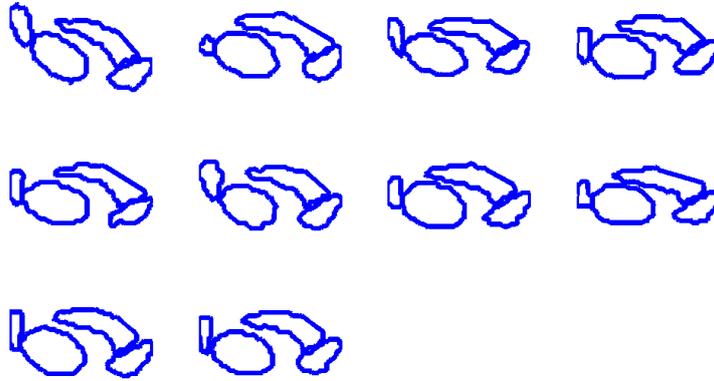


FIG. 3.3: Base de données des contours utilisés pour produire le modèle.

Avec :

$$A^j = \int_0^1 (y^j)^2(t) dt$$

$$B^j = \int_0^1 (x^j)^2(t) dt$$

$$C^j = \int_0^1 y^j(t) \cdot x^j(t) dt.$$

En notant e^j le vecteur propre unitaire dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ associé à la plus grande valeur propre de I^j , on obtient :

$$o^j = (o_x^j, o_y^j)^T = (e_x^j, e_y^j)^T \quad (3.2)$$

Paramètre d'échelle : Nous avons choisi comme paramètre d'échelle, la longueur des contours. On a ainsi :

$$s^j = \int_{\pi}^{\pi} |\dot{\gamma}^j(t)| dt \quad (3.3)$$

Nous pouvons alors montrer qu'un contour j correspond à la donnée de :

$$(p^j, \sigma^j, s^j, q^j) \in \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^+ \times \mathcal{S}$$

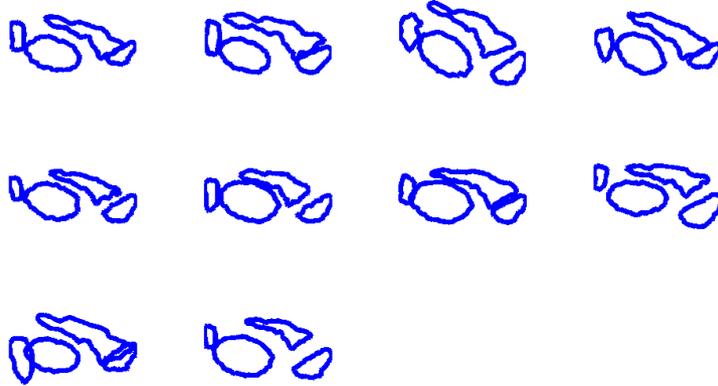


FIG. 3.4: Cerveaux synthétiques ne prenant pas en compte la corrélation entre les organes. Nous constatons des recouvrements et des incohérences entre les formes...

3.3 Calcul de la Corrélation

Les positions, orientations et échelles étant des données statistiques habituelles, nous pouvons calculer leurs moyennes (μ_p , μ_o et μ_s) ainsi que les matrices de covariance correspondantes :

$$\begin{aligned} - K_p &= P_p \cdot \text{Diag}(\sigma_{pi}^2) \cdot P_p^T \\ - K_o &= P_o \cdot \text{Diag}(\sigma_{oi}^2) \cdot P_o^T \\ - K_s &= P_s \cdot \text{Diag}(\sigma_{si}^2) \cdot P_s^T \end{aligned}$$

Pour cela, il suffit de considérer comme vecteurs d'observation les vecteurs :

$$\begin{aligned} - (p_x^1, p_y^1, \dots, p_x^4, p_y^4) \\ - (o_x^1, o_y^1, \dots, o_x^4, o_y^4) \\ - (s^1, s^2, s^3, s^4) \end{aligned}$$

Nous sommes donc en mesure de proposer une distribution statistique de ces paramètres. La loi suivie par un vecteur de position sera, par exemple, définie comme étant, de façon formelle¹ :

$$\pi_p = \mu_p + P_p \cdot (\mathcal{N}(0, \sigma_{p1}), \dots, \mathcal{N}(0, \sigma_{p8})) \quad (3.4)$$

Nous modélisons de la même façon les lois π_o et π_s représentant la distribution des orientations et des échelles moyennant une troncature, plus une renormalisation.

Dans le cas des formes, le problème est un peu plus délicat. Nous avons, en effet, vu dans la partie 2 que les modèles statistiques de formes devaient être définis sur les coefficients selon les directions principales de déformation dans l'espace tangent. Ainsi, la modélisation statistique porte sur les coefficients. Ce constat nous a amené à établir un modèle de corrélation sur ces coefficients.

Nous allons commencer par calculer la forme moyenne de chacun des organes du cerveau : μ_q^j . Il est alors possible de calculer les directions principales de déformations de chacun de ces organes. Nous obtenons donc, pour chaque forme j d'un cerveau k de notre base de données, ses coefficients $(z_i^{j,k})$ relatifs aux directions principales de déformations (U_i^j) .

Nous obtenons ainsi, pour chacun des cerveaux, le vecteur d'observation :

$$(z_1^{1,k}, z_2^{1,k}, \dots, z_{n_1}^{1,k}, z_1^{2,k}, \dots, z_{n_2}^{2,k}, \dots, z_{n_4}^{4,k}) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2+n_3+n_4}$$

Il est maintenant possible de se rapporter aux outils statistiques habituels et, en particulier, de calculer la matrice de covariance associée à ces observations, $K_f = P_f \cdot \text{Diag}(\sigma_{fi}^2) \cdot P_f^T$. Cela nous permet de modéliser la répartition des coefficients de la façon suivante :

$$\pi_f = \mu_p + P_f \cdot (\mathcal{N}(0, \sigma_{f1}), \dots, \mathcal{N}(0, \sigma_{f_{n_1+n_2+n_3+n_4}})) \quad (3.5)$$

Le tirage d'un jeu de ces coefficients (\tilde{z}_i) permet alors, par exemple, de générer un groupe de formes corrélées. La forme numéro 1 sera ainsi définie par :

¹Cela suppose que l'on ait des lois normales. Nous avons utilisé ce modèle compte tenu de la petite taille de notre base d'apprentissage qui ne nous autorisait pas à faire des hypothèses plus complexes.

$$\exp_{\mu^1} \sum_{i=1}^{n_1} \tilde{z}_i U_i^1 \quad (3.6)$$

La connaissance de ces lois nous donne une première distribution de probabilités sur les organes² :

$$\pi_p \cdot \pi_s \cdot \pi_o \cdot \pi_f$$

Afin de vérifier la validité de ce premier modèle, nous avons généré quelques "cerveaux de synthèse" (cf : fig. 3.5).

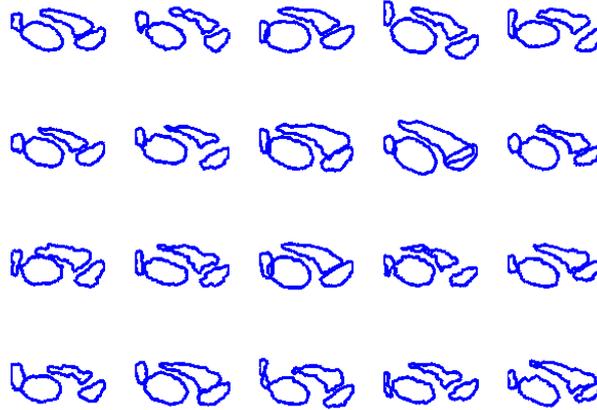


FIG. 3.5: Cerveaux synthétiques prenant en compte la corrélation entre les organes.

²On suppose ici que ces différentes probabilités sont indépendantes.

3.4 Correction du Modèle

La figure 3.5 met en évidence les apports de la prise en compte de la corrélation par rapport à des cerveaux synthétisés par simple superposition de contours non corrélés (cf : fig. 3.4). Les formes s'accordent mieux entre elles, les contours ne se superposent plus. Par contre, si l'on compare les "organes" synthétisés par rapport à ceux de notre base de données initiale (cf : fig. 3.3), on peut se rendre compte qu'il subsiste une certaine imprécision. Les organes numéros 1 et 3 sont, en effet, beaucoup plus éloignés l'un de l'autre lorsqu'ils sont produits par le modèle. Cette "erreur" peut s'expliquer par le fait que nous n'avons pas introduit de corrélation entre les différentes caractéristiques des contours. Ainsi, la corrélation entre la position et la forme n'a pas encore été prise en compte.

Nous avons résolu ce problème en introduisant les énergies d'a priori suivantes :

- E_S , proportionnelle à la surface des zones recouvertes par plus d'un organe. Elle permet de pénaliser les configurations de recouvrements.
- E_{d_1} , proportionnelle à la distance globale entre les contours 1 et 3. Elle pénalise donc les grandes distances entre ces deux organes.
- E_{d_2} , proportionnelle à la distance globale entre les contours 2 et 4.

Ces énergies ont ensuite été traduites en termes d'une densité de probabilité, π_{ap} , proportionnelle à l'exponentielle de moins la somme des énergies afin de pouvoir les introduire dans le modèle. Nous avons, par ailleurs, pondéré les variances du modèle initial pour des raisons de rapidité des calculs afin de limiter les "cas extrêmes". La probabilité d'une tranche de cerveau devient donc :

$$\pi = \frac{1}{Z} \pi_f^{a_f} \cdot \pi_p^{a_p} \cdot \pi_o^{a_o} \cdot \pi_s^{a_s} \cdot \pi_{ap} \quad (3.7)$$

Où Z est un coefficient de normalisation et $a_f = 0.5$, $a_p = 0.7$, $a_o = 0.1$, $a_s = 0.1$.

3.5 Évaluation du Modèle Final

Une fois ce modèle élaboré, il nous a fallu le valider, par exemple en tirant un certain nombre de cerveaux suivant cette densité de probabilité, puis en évaluant le résultat manuellement. Cette démarche fait apparaître une dernière difficulté : comment tirer ces cerveaux vu que notre densité de probabilité n'est pas connue de façon explicite. Une solution consiste à utiliser l'algorithme de "Random-Walk Métropolis-Hastings" qui permet d'échantillonner une loi de probabilité même si cette dernière n'est pas connue de façon explicite. L'algorithme de calcul est l'algorithme 1.

Cet algorithme nous permet de tirer les cerveaux de synthèse de la figure 3.6 selon la loi de probabilité π . On peut constater que l'échantillon renvoyé semble effectivement en accord avec notre base de données initiale.

3.6 Autres modèles Proposés

Nous avons aussi imaginé d'autres modèles plus "propres" mais aussi plus complexes au niveau de leur mise en œuvre. Compte tenu des contraintes de temps, ils n'ont donc pas été fouillés de façon plus approfondie.

Algorithm 1 Algorithme de Métropolis-Hastings, cas de la marche aléatoire :

- 1: On tire un cerveau synthétique, C_c , selon $\pi_p \cdot \pi_s \cdot \pi_o \cdot \pi_f$
 - 2: On évalue $P_c = \pi(C_c)$
 - 3: On pose K grand
 - 4: **for** $i = 0$ to K **do**
 - 5: On crée un nouveau cerveau, C_n identique à C_c
 - 6: On tire un bruit pour les positions, w_p , depuis : $(\mathcal{N}(0, \frac{\sigma_{p1}}{2}), \dots, \mathcal{N}(0, \frac{\sigma_{p8}}{2}))$.
 - 7: On perturbe les positions de C_n : $C_n.positions := C_n.positions + P_p \cdot w_p$
 - 8: On tire un bruit pour les orientations, w_o , depuis : $(\mathcal{N}(0, \frac{\sigma_{o1}}{2}), \dots, \mathcal{N}(0, \frac{\sigma_{o8}}{2}))$.
 - 9: $C_n.orientations := C_n.orientations + P_o \cdot w_o$
 - 10: On tire un bruit pour les échelles, w_s , depuis : $(\mathcal{N}(0, \frac{\sigma_{s1}}{2}), \dots, \mathcal{N}(0, \frac{\sigma_{s4}}{2}))$.
 - 11: $C_n.scales := C_n.scales + P_s \cdot w_s$
 - 12: On tire un bruit pour les coefficients de forme : w_f , depuis : $(\mathcal{N}(0, \frac{\sigma_{f1}}{2}), \dots, \mathcal{N}(0, \frac{\sigma_{fn}}{2}))$.
 - 13: $C_n.f = C_n.f + P_f \cdot w_f$
 - 14: On calcule $P_n = \pi(C_n)$
 - 15: $C_c := C_n$ et $P_c := P_n$ avec la probabilité $\min\left(\frac{P_n}{P_c}, 1\right)$
 - 16: **end for**
 - 17: **return** C_c
-

3.6.1 Modèles de Frontières

Une alternative à la méthode précédente pourrait consister à considérer les interactions non pas en termes de corrélations, mais en termes de frontières. Considérons par exemple deux courbes en interactions. Dans une grande partie des cas pratiques, il semble possible de négliger ces interactions sur les portions de courbes "loin" les unes des autres. Autrement dit, il serait possible de restreindre les interactions aux seules portions proches les unes des autres.

De plus, les interactions sont habituellement mutuelles : nous observons généralement une certaine "anti-symétrie" des contours de part et d'autre d'une frontière. Nous avons donc pensé à définir les interactions par le biais d'une forme de frontière (cf : fig. 3.7). Les formes sont décomposées en un ou plusieurs segments de frontière (en bleu) et en segments libres (en noir). Les premiers sont définis en fonction de la forme elle-même, mais aussi par le modèle de frontière (en rouge). Les seconds ne sont fonction que du modèle de forme qui leur est associé.

Le principal problème associé à cette démarche consiste à isoler les frontières. Certains travaux de doctorat sur l'extraction et la comparaison de segments de contours sont actuellement en cours à l'Université d'État de Floride.

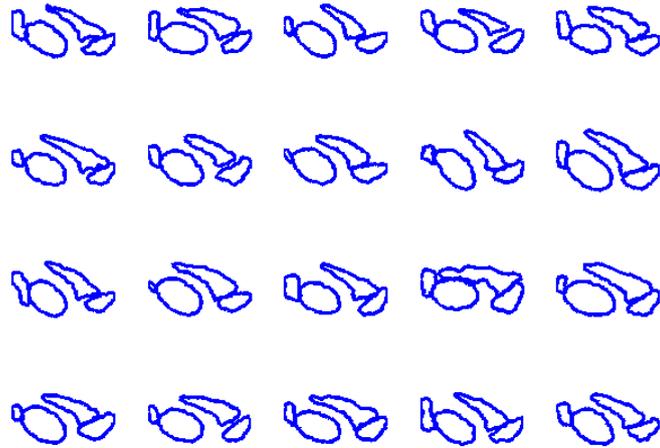


FIG. 3.6: Cerveaux synthétiques prenant en compte la corrélation entre les organes et l'a priori de placement.

3.6.2 Extension Tridimensionnelle

La méthode la plus propre que nous ayons pu imaginer a été d'utiliser une "ruse" mathématique en rajoutant une dimension à notre problème. Nos courbes planaires peuvent, en effet, être vues comme l'intersection d'un "serpent de mer" et d'un plan (cf : fig. 3.8). Plus précisément, il est possible, étant donné un ensemble de courbes, de définir un unique serpent de mer. Inversement, s'il est judicieusement défini, un serpent de mer devrait pouvoir définir de façon unique un ensemble de courbes.

La méthode des q-fonctions étant extensible à des formes de \mathbb{R}^3 , il serait alors a priori possible d'effectuer notre étude sur ces serpents de mer de \mathbb{R}^3 et donc de caractériser nos groupes de formes de \mathbb{R}^2 .

Malheureusement, ces techniques d'analyse dans \mathbb{R}^3 ne sont pas encore pleinement développées.

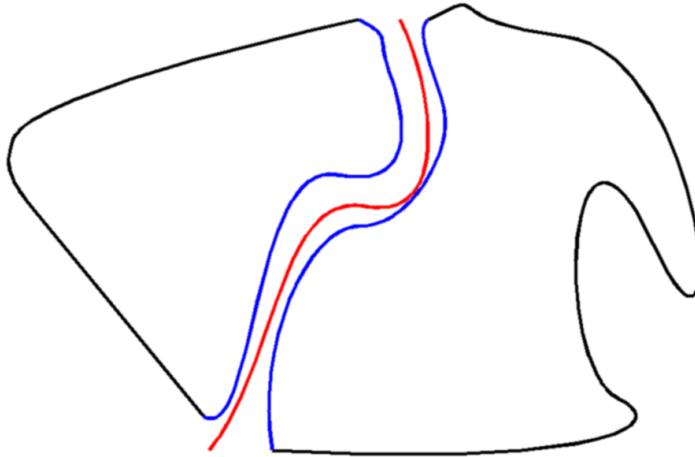


FIG. 3.7: Illustration des modèles de frontière.

3.7 Conclusion partielle

Nous avons donc vu que les q -fonctions permettaient de proposer des modèles probabilistes sur des formes individuelles et qu'il semble possible d'étendre ces notions à des groupes de formes.

Cette approche présente cependant de nombreux désavantages. Nous avons ainsi déjà évoqué sa complexité, ainsi que la difficulté à la rattacher à des données "brutes". Il conviendrait aussi de remarquer que la construction du modèle de forme passe par la suppression d'un certain nombre de données a priori utiles comme, par exemple, la position ou l'orientation des contours. Il faut donc réintroduire ces informations par la suite, ce qui peut-être vu comme une perte d'efficacité. Notons, enfin, que notre approche reste limitée à un nombre connu a priori de formes. Elle ne semble donc pas extensible aux cas où le nombre de formes en interaction est inconnu.

Une dernière critique pourrait enfin être formulée par rapport à la méthodologie d'apprentissage. Nous n'avons, en effet, pas véritablement validé quantitativement la méthodologie. Pour cause, il n'existe à notre connaissance pas de métrique permettant de comparer des groupes de formes. Si c'était le cas, remarquons qu'il faudrait scinder la base d'apprentissage en une base d'apprentissage et une base de validation.

Enfin un modèle de forme, c'est-à-dire une forme moyenne plus des variations autour d'elle, ne sera que très difficilement transposable à une autre famille de forme. Nous nous sommes donc tourné vers un autre modèle.

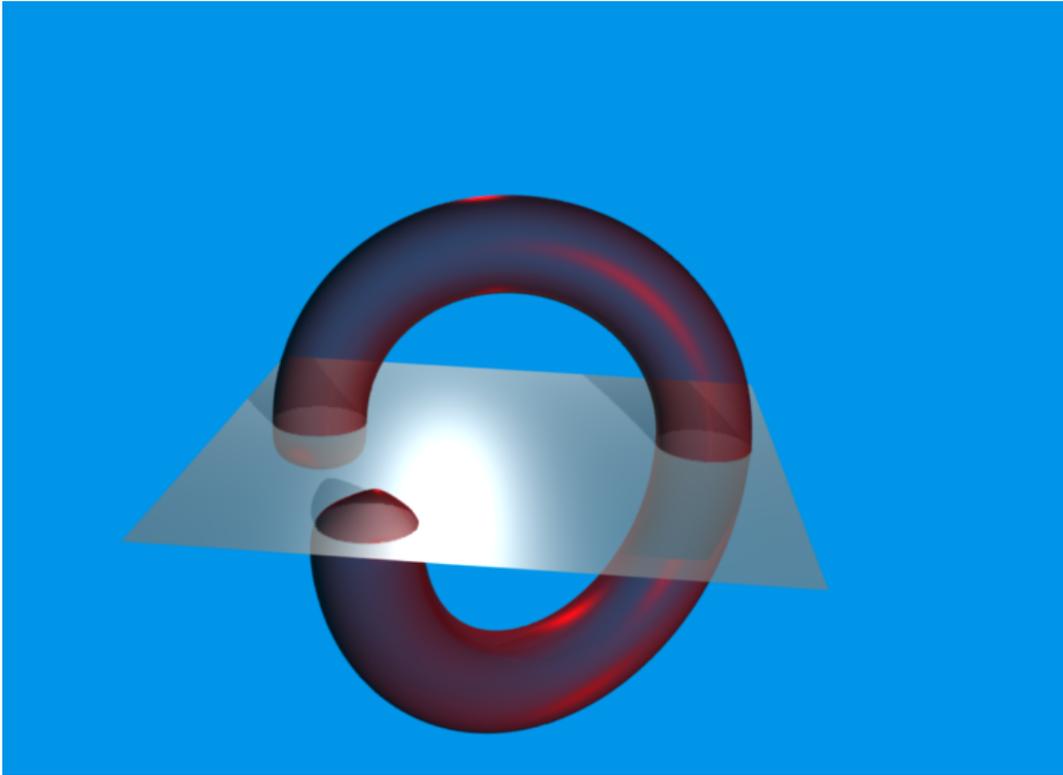


FIG. 3.8: Exemple de "serpent de mer" (en rouge) représentant 3 cercles du plan blanc.

Chapitre 4

Contours Actifs d'Ordre Supérieur

La méthode des q-fonctions, malgré certains désavantages est performante dans le cas de formes bien définies, comme par exemple pour des objets solides. Par contre, elle ne semble pas facilement extensible à des formes définies de façon plus floue. Considérons, par exemple, un réseau routier. Sa forme globale est relativement caractéristique. On peut ainsi dire qu'il est constitué d'un ensemble de bras de largeur à peu près constante. Il est, par contre, très difficile de le définir précisément en termes de formes.

De la même façon, nous avons vu qu'il n'était pas simple de transposer la méthodologie des q-fonctions à des groupes de formes. Il sera donc d'autant plus difficile d'arriver à prendre en compte efficacement des formes présentant des "bras" susceptibles de se rejoindre voir de former des "trous" au sein de formes pré-existantes.

Une solution consiste à ne plus considérer la forme en tant que telle mais plutôt de la définir via ses propriétés générales. Nous aboutissons ainsi à un modèle de forme implicite tel que celui des contours actifs.

4.1 Les Contours Actifs Simples

Les origines des contours actifs remontent à la fin des années 1980 lorsque Kass introduit ce qu'il appelle des "serpents"[8]. L'idée consistait à rechercher les formes délimitées par la courbe γ minimisant une énergie définie sur une image¹ I . Cette énergie peut être vue comme étant la somme d'une énergie a priori portant sur la connaissance de la forme, plus un terme portant sur la connaissance de la représentation de la forme sur l'image :

$$E(\gamma) = E_{Courbe}(\gamma) + E_{Image}(\gamma) \quad (4.1)$$

avec,

$$E_{Courbe}(\gamma) = \int_{-\pi}^{\pi} \alpha |\dot{\gamma}(t)|^2 + \beta |\ddot{\gamma}(t)|^2 dt \quad (4.2)$$

et

$$E_{Image}(\gamma) = - \int_{-\pi}^{\pi} |\nabla I(\gamma(t))|^2 dt \quad (4.3)$$

¹Nous représentons l'image de façon usuelle comme une application associant à un point du plan une intensité lumineuse. $I : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

où $\nabla I(X)$ représente le gradient de l'image au point X .

Notre problème revient donc à minimiser une énergie constituée par :

- Un terme d'a priori sur la courbe, E_{Courbe} , dans ce cas particulier, plus la courbe sera courte et peu courbée, meilleure elle sera.
- Un terme d'attache aux données, E_{Image} , dans ce cas on considère que le contour sera préférentiellement localisé dans les zones de fort gradient de l'image.

Le modèle de Kass présente malheureusement de nombreux défauts. Ainsi, l'énergie de la courbe dépend de la paramétrisation choisie pour le contour. La minimisation de cette énergie sera, par ailleurs, dépendante de l'initialisation (cf. figure 4.1). Nous nous rendons, en effet, aisément compte que si le contour est initialisé en dehors de l'objet à segmenter, il décroîtra sur lui même jusqu'à disparaître. Inversement s'il est correctement initialisé, il arrivera à bien cerner la forme de l'objet.

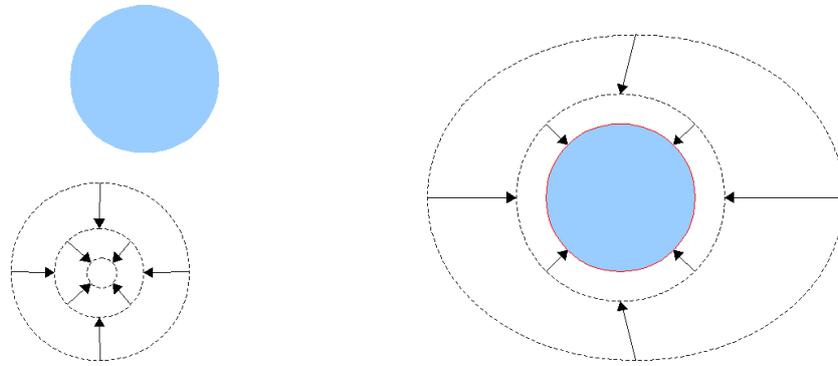


FIG. 4.1: Méthode de Kass - Problèmes d'initialisation : à gauche une mauvaise initialisation ne permet pas d'isoler le contour de l'objet.

Enfin, un autre désavantage de la méthode est sa sensibilité au bruit. L'introduction de bruit revient, en effet, à introduire de forts gradients locaux dans l'image ce qui viendra perturber l'énergie de la courbe et donc la segmentation finale.

4.2 Une Première Famille de Contours

Pour palier ces difficultés, un certain nombre d'améliorations ont progressivement été apportées. Nous ne citerons ici que quelques-unes des plus importantes.

L. Cohen a eu l'idée, dans les années 1990, d'introduire dans le modèle des forces de "pressions" ou forces "ballon" sur le contour. Celles-ci permettent de faire croître les courbes et donc de limiter, en partie, les problèmes d'initialisation [9].

Les contours actifs géométriques [10] sont ensuite venus résoudre les problèmes de paramétrisation en introduisant une fonction g , strictement positive, strictement décroissante et tendant vers zéro en plus l'infini. En introduisant alors le terme $|\dot{\gamma}(t)|$, on obtient l'énergie invariante par re-paramétrisation :

$$E_{Image}(\gamma) = \int_{-\pi}^{\pi} g(|\nabla I(\gamma(t))|) |\dot{\gamma}(t)| dt \quad (4.4)$$

Ces modèles ont, enfin, été affinés de façon à assurer une meilleure attache aux données tout en limitant l'impact du bruit. Nous pourrions, par exemple, retenir le modèle de Chan et Vese [11] qui permet de modéliser l'image non plus en fonction des gradients de l'image mais en fonction des intensités radio-métriques contenues à l'intérieur et à l'extérieur des contours :

$$E_{Image}(\gamma) = \lambda_1 \int_{Interieur(\gamma)} (I(X) - \mu_1)^2 dX + \lambda_2 \int_{Exterieur(\gamma)} (I(X) - \mu_2)^2 dX \quad (4.5)$$

La modélisation de Chan et Vese revient ainsi à faire l'hypothèse de distributions gaussiennes des intensités de l'image. On suppose alors que l'élément à extraire est représenté par des intensités de moyenne μ_1 et de variance $\frac{1}{\lambda_1}$, le reste de l'image possédant quant à elle des intensités centrées en μ_2 et de variance $\frac{1}{\lambda_2}$. Cette modélisation permet, par ailleurs, d'extraire des éléments délimités par de faibles gradients. Nous noterons, au passage, le lien avec les méthodes d'extraction stochastiques.

4.3 Vers un Modèle de Forme

Cette première famille de modèles présente, cependant, un gros défaut. Aucun d'entre eux ne prend véritablement en compte la forme des objets recherchés. Ainsi le contour se base principalement sur des termes locaux : la "douceur" du contour, éventuellement l'aire délimité. Aucune autre information géométrique n'est donc utilisée dans les modèles, ce "manque" étant pallié par l'introduction d'informations purement radio-métriques.

Cela aura pour principale conséquence que deux objets de formes éventuellement très différentes mais de radiométries et de régularités similaires seront confondus par la méthode (cf : fig.4.2).

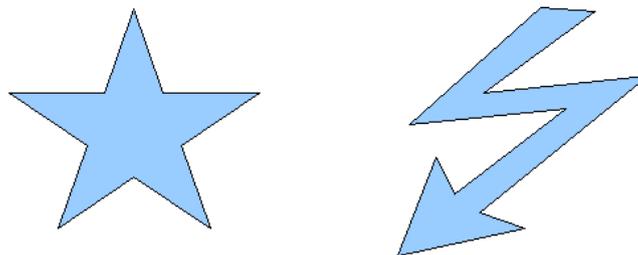


FIG. 4.2: Deux contours différents, mais de régularités comparables...

Afin de mieux tirer parti des informations de formes, Yuille a le premier eu l'idée d'introduire la notion de modèle déformable [12]. Afin de pouvoir détecter les caractéristiques d'un visage, il créa un modèle de formes de bouches et d'yeux. La forme du contour actif est alors déformée à partir de ce modèle pour s'ajuster à

l'image. De grandes déformations ajouteront une grande énergie au contour et seront donc pénalisées...

Cette approche a, ensuite, été enrichie d'un grand nombre de variantes, mais l'idée de base reste la même : il faut définir un modèle pour l'objet recherché, modèle autour duquel on s'autorise quelques variations. Cela implique un certain nombre de remarques.

En premier lieu, nous pouvons constater le lien unissant cette seconde famille de contours actifs avec la méthodologie des q-fonctions (cf : [13]). La technique autorise ainsi la modélisation de formes a priori aussi complexes que possible. Elle souffre, par contre, de nombreuses défauts.

Un tel modèle est, en particulier, extrêmement dépendant de la forme à détecter. La portabilité d'un modèle donné est donc très limitée. Il sera, par ailleurs, très difficile, comme pour la méthodologie des q-fonctions, de l'appliquer à la détection d'objets multiples et en interaction.

Ces raisons ont conduit à introduire la notion de contours actifs d'ordre supérieur [14].

4.4 Les Contours Actifs d'Ordre Supérieur : Principes

Nous allons chercher à généraliser le principe des contours actifs de façon à répondre à l'exigence suivante : nous souhaitons rester le plus générique possible, tout en tenant mieux compte de la "forme" des objets recherchés.

Nous avons vu dans les parties précédentes que la nature même des modèles de forme ne permettait pas véritablement d'être générique. Nous allons donc revenir à la première famille de contours actifs. Comme nous ne savons pas dans quel sens, ni à quel endroit de l'image sera le contour à extraire, il faut que l'énergie proposée soit invariante par translation et rotation. Nous pouvons ainsi commencer par constater que deux termes respectant ces invariances de façon évidente sont l'aire et la longueur des contours.

Or, si l'on y prête plus attention, on peut remarquer que la longueur du contour s'exprime comme une intégrale simple sur ce dernier. De même, l'aire qu'il délimite peut s'exprimer, via le théorème de Green-Riemann, comme une intégrale simple sur le contour.

Nous avons ainsi une énergie formée à partir d'intégrales simples, c'est-à-dire de la forme :

$$E = \int_{-\pi}^{\pi} F(\gamma(t)) dt. \quad (4.6)$$

Il paraît dès lors raisonnable de penser qu'en utilisant pour les termes d'a priori des intégrales d'ordre 2 ou plus sur les contours, nous pourrions modéliser des comportements plus complexes [14]. Cette idée intuitive peut être renforcée par le constat suivant : une intégrale simple revient à sommer des propriétés locales de la courbe. Elle n'est donc pas capable de modéliser des interactions entre plusieurs points de la même courbe. Inversement une intégrale d'ordre 2 permettra de prendre en compte

les interactions entre tout couple de points. De même, une intégrale d'ordre 3 prendra en compte les interactions entre tout triplet de points... L'utilisation d'intégrales multiples permettra donc de prendre en compte des interactions entre les différentes parties du contour.

Nous allons donc essayer d'introduire des énergies d'a priori de la forme :

$$E = \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} \dots dt_1 \dots dt_n. \quad (4.7)$$

Nous allons maintenant voir, sur l'exemple proposé par Rochery [15], une application des contours actifs d'ordre supérieur (CAOS).

4.5 Exemple de Contour Actif d'Ordre 2

Nous avons donc vu dans les parties précédentes que pour prendre en compte des caractéristiques plus complexes des contours, il fallait utiliser des énergies "d'ordre plus élevé" en utilisant des intégrales multiples sur le contour. Prenons, par exemple, l'énergie définie par :

$$E_{\text{Courbe}}(\gamma) = \lambda_c L(\gamma) + \alpha_c A(\gamma) + \frac{1}{2} \beta_c \iint_{-\pi}^{\pi} \dot{\gamma}(t) \cdot \dot{\gamma}(\hat{t}) \Psi(D(\gamma(t), \gamma(\hat{t}))) dt d\hat{t} \quad (4.8)$$

où $L(\gamma)$ représente la longueur d'un contour γ , $A(\gamma)$ l'aire qu'il délimite, $D(P_1, P_2)$ la distance euclidienne entre deux points P_1 et P_2 . La fonction $\Psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est, quant à elle, définie par l'équation 4.9 (cf : fig. 4.3). Les coefficients pondérateurs seront $\alpha_c \geq 0$, $\lambda_c = 1$ et $\beta_c = -1$.

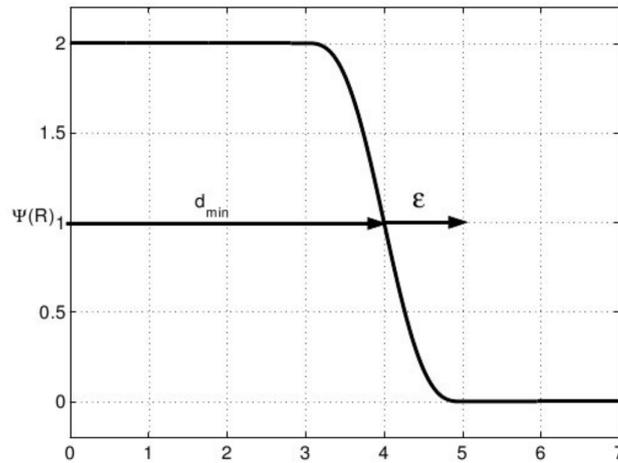
$$\Psi(d) = \begin{cases} 1 & \text{pour } d < d \\ 0 & \text{pour } d > d + \epsilon \\ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{d-d}{\epsilon} + \frac{1}{\pi} \sin \pi \frac{d-d}{\epsilon} \right) & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.9)$$

Minimiser une telle énergie tendra alors à obtenir un contour tel que :

- Sa longueur soit minimisée,
- Son aire soit minimisée,
- Deux points à une distance inférieure à d aient une tangente de même sens.
- La distance entre deux points ayant des tangentes de sens opposés soit supérieure à d .

Des illustrations de l'impact des valeurs des paramètres sont données sur la figure 4.4. Nous y décrivons différentes étapes de la minimisation de l'énergie en partant d'un contour sphérique et sans attache aux données. Nous pouvons cependant noter que de tels "bras" ne se développent qu'à partir d'approximations numériques liées à la numérisation. Un cercle parfait et donc parfaitement "symétrique" ne présenterait, en effet, pas les germes des bras.

Nous constatons ainsi que prendre une valeur élevée pour d va imposer de larges bras. De plus, accorder une grande importance au terme d'aire, i.e. prendre α_c grand, va permettre de limiter l'aire totale et donc de limiter le nombre de bras...

FIG. 4.3: Exemple possible de fonction d'interaction : $y = \Psi(R)$.

Il est donc possible d'adapter le modèle de façon à imposer un a priori géométrique plus complexe sur les formes recherchées tout en évitant d'imposer une forme prédéfinie.

Nous avons jusqu'à présent essentiellement parlé de la modélisation de l'énergie. Il faut, ensuite, être capable de la minimiser. Ceci peut être fait grâce à deux méthodes d'optimisation. La première, la méthode des courbes de niveaux, a été l'outil traditionnel des calculs des contours actifs. Une extension de la méthodologie des contours actifs d'ordre supérieurs qui permet une optimisation plus facile est construite par les champs de phase. Nous renvoyons le lecteur intéressé à la thèse de Marie Rochery [15].

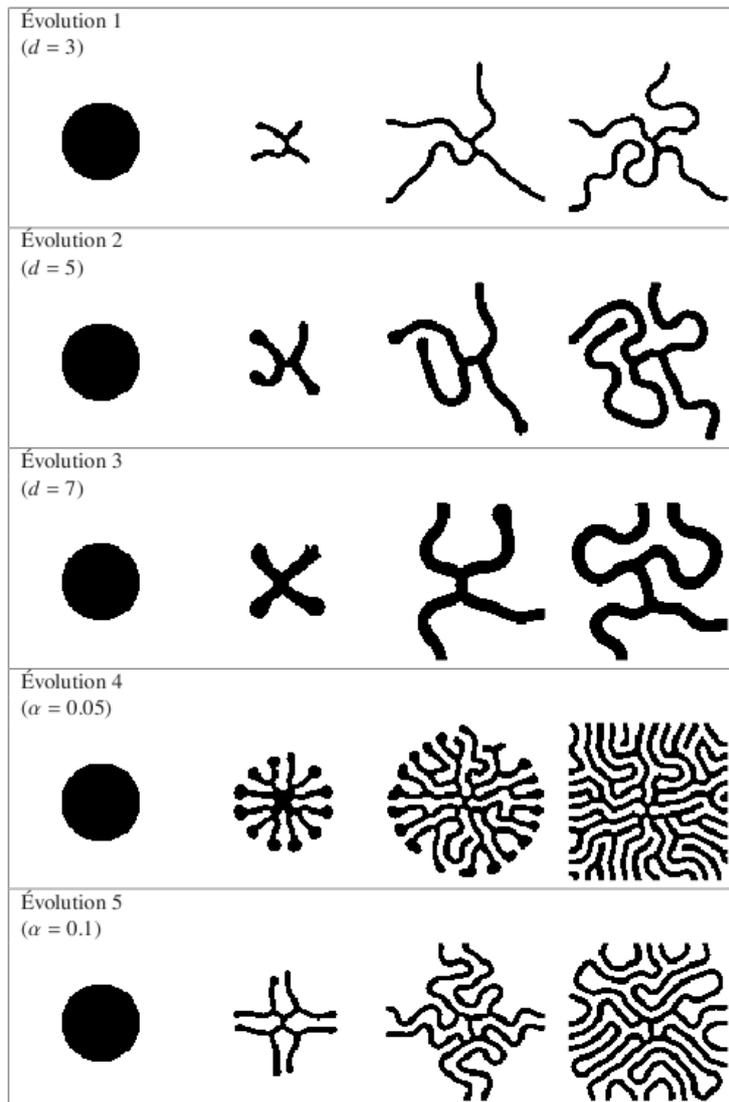


FIG. 4.4: Illustration de l'influence de l'a priori géométrique.

Chapitre 5

Les Champs de Phase

La philosophie des champs de phase est extrêmement proche de celle des courbes de niveaux. Soit une fonction ϕ définie sur le domaine de l'image, Ω , et à valeurs dans \mathbb{R} . Soit un seuil donné, z , il est alors possible de définir une région de l'image comme étant :

$$\zeta_z(\phi) = \{X \in \Omega | z \leq \phi(X)\}$$

Nous pouvons remarquer que, contrairement au cas des courbes de niveau, la fonction ϕ n'est pas du tout contrainte, on ne lui impose pas d'être une fonction de distance signée. L'espace des fonctions sera donc linéaire. Nous allons maintenant définir l'énergie non pas à partir de la courbe elle-même mais à partir de la surface ϕ .

5.1 Modèle Simple d'Énergie

Considérons pour commencer l'énergie suivante, définie pour une surface ϕ :

$$\begin{aligned} E_0(\phi) &= E_{Continuite}(\phi) + E_{Regions}(\phi) \\ &= \int_{\Omega} \frac{D}{2} \nabla \phi(X) \cdot \nabla \phi(X) dX \\ &\quad + \int_{\Omega} \lambda \left(\frac{\phi^4(X)}{4} - \frac{\phi^2(X)}{2} \right) + \alpha \left(\phi(X) - \frac{\phi^3(X)}{3} \right) dX \end{aligned} \quad (5.1)$$

Si l'on suppose que l'on a $|\alpha| \leq \lambda$, les termes de la seconde intégrale admettent deux minima locaux pour $\phi(X) = \pm 1$ et un maximum local pour $\phi(X) = \frac{\alpha}{\lambda}$.

Dès lors, si l'on impose que $\zeta_z(\phi)$ soit égal à une certaine région, notée R , et que l'on minimise $E_{Regions}(\phi)$, on obtiendra une fonction échelon délimitant la région. En rajoutant le terme $E_{Continuite}(\phi)$, nous nous assurons de la continuité de ϕ le long de la frontière. Une minimisation sous contrainte de région pour l'énergie totale permet donc d'avoir une fonction échelon lissée délimitant la région. Nous noterons cette fonction ϕ_{R_0} .

Il est possible de montrer [18] que, moyennant quelques approximations, $E_0(\phi_{R_0})$ est équivalent à une énergie bien connue :

$$E_0(\phi_{R_0}) \sim \frac{4\alpha}{3} A(R) + \sqrt{\frac{16D\lambda K}{15}} L(R) + Cste \quad (5.2)$$

où $K = 1 + 5\frac{\alpha^2}{\lambda^2}$, $A(R)$ est l'aire de la région et $L(R)$ son périmètre.

Il suffit pour cela, de décomposer ϕ sur trois domaines comme indiqué sur la figure 5.1. Dans la région intérieure à la courbe, R^+ , ϕ sera assimilable à la fonction constante égale à 1. En dehors de cette région, à bonne distance de la courbe, ϕ sera assimilable à la fonction constante égale à -1. Enfin à l'interface, nous prendrons ϕ qui varie linéairement de 1 à -1 sur une longueur d'interface égale à w . On a ainsi sur le contour depuis le centre de courbure de la courbe, en notant r_0 le rayon de courbure local et en supposant que cette courbure est localement constante :

$$\phi(r, \theta) \approx -\frac{2}{w}(r - r_0)$$

Une intégration sur Ω permet alors de retrouver l'équation 5.2. Ce qui nous ramène à l'expression de l'énergie du contour actif classique associé à la région.

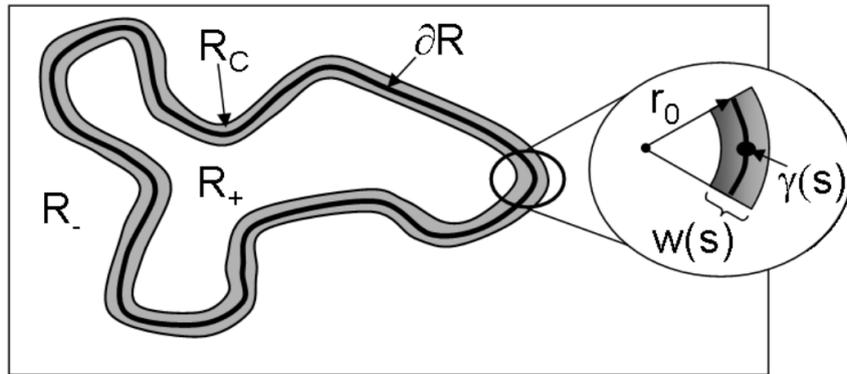


FIG. 5.1: Décomposition de ϕ sur trois régions.

5.2 Optimisation

Nous allons maintenant chercher à optimiser cette énergie jusqu'à obtenir une région optimale. Il suffit pour ce faire d'effectuer une descente de gradient selon E_0 dans l'espace des fonctions. Cela reviendra à descendre la vallée constituée des fonctions ϕ_{R_0} pour R_0 tendant vers la région cherchée. Pour cela, on peut utiliser la dérivée fonctionnelle de E_0 et se ramener ainsi à la résolution d'une équation aux dérivées partielles (cf : eq. 5.3). Cette dernière peut donc être résolue par un simple algorithme des différences finies. Nous aurons ainsi, en absence de terme d'attache aux données :

$$\frac{\partial E_0}{\partial \phi} = -D\nabla^2 \phi + \lambda(\phi^3 - \phi) + \alpha(1 - \phi^2) = -\phi_t \quad (5.3)$$

Cette nouvelle méthode de résolution fait apparaître un premier avantage de la méthode des champs de phase. La phase d'optimisation se fait sans passer par les phases de ré-initialisation. Il y aura donc une résolution plus rapide et surtout plus fiable en termes d'erreurs numériques.

Cet avantage n'est cependant pas le seul. Supposons que l'on initialise ϕ comme étant la fonction constante sur Ω égale à $\frac{\alpha}{\lambda}$, soit au maximum local de l'énergie. Nous pouvons aisément nous rendre compte (cf : fig. 5.2) que cette initialisation est parfaitement neutre dès lors que le seuil z est pris égal à $\frac{\alpha}{\lambda}$. On ne sera, en effet, ni biaisé vers l'intérieur, ni biaisé vers l'extérieur, les régions se formeront donc là où nécessaire.

Alors que la méthode des courbes de niveau ne permettait de gérer les changements de topologie que par "soudure" et "scission", la méthode des champs de phase permettra de créer directement la bonne topologie.

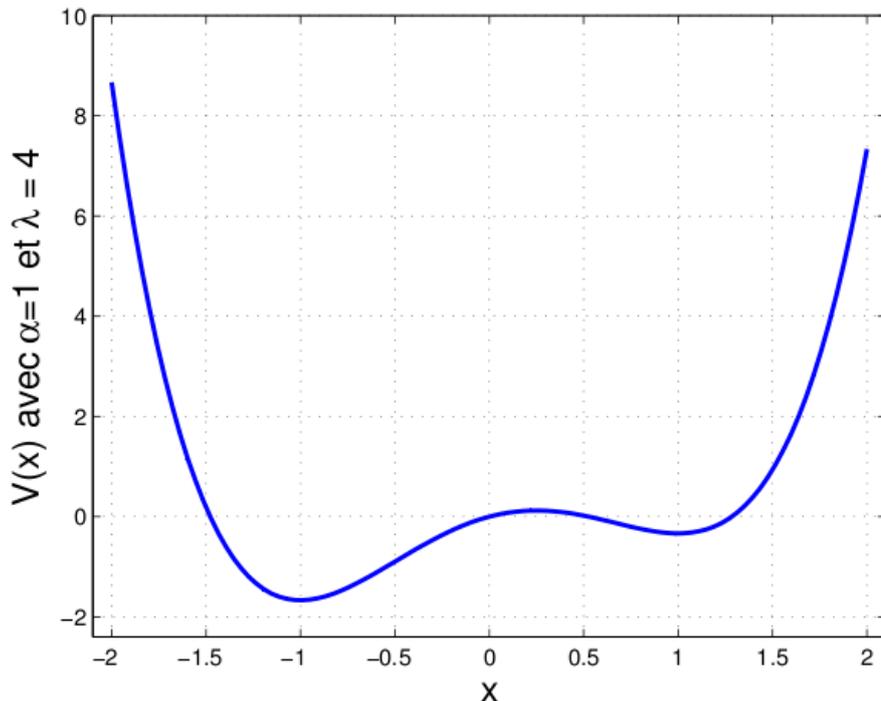


FIG. 5.2: Tracé du potentiel $V(x) = \lambda \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right) + \alpha \left(x - \frac{x^3}{3} \right)$, ici pour $x \in \mathbb{R}$. Le maximum local est atteint en $\frac{\alpha}{\lambda}$.

5.3 Lien Avec les Contours Actifs d'Ordre Supérieur

Nous avons vu que l'approche des champs de phase permettait de dépasser avantageusement les contours actifs classiques. Nous allons maintenant montrer que la méthodologie reste parfaitement valable dans le cas des contours actifs d'ordre supérieur.

Pour cela, nous allons rajouter l'énergie E_{CAOS} à E_0 :

$$E_{CAOS} = \frac{\beta_c}{2} \int_{\Omega^2} \Psi(D(X, \hat{X})) \nabla \phi(X) \cdot I_d \cdot \nabla \phi(\hat{X}) d\hat{X} dX \quad (5.4)$$

où I_d est la matrice identité. On peut commencer par remarquer que ce terme ne jouera qu'à proximité de la frontière de la région. On peut alors montrer en refaisant les mêmes approximations qu'en 5.1 qu'il produit une énergie équivalente à celle des ordres supérieurs habituels.

$$\frac{\partial E_{CAOS}}{\partial \phi} = \beta_c \int_{\Omega} \Psi(D(X, \hat{X})) \nabla \cdot I_d \cdot \nabla \phi(\hat{X}) d\hat{X} \quad (5.5)$$

Afin de minimiser l'énergie totale de la région, $E_0 + E_{CAOS}$, nous allons encore utiliser une descente de gradient, la dérivée fonctionnelle de E_{CAOS} est donnée en équation 5.5. Bien qu'il s'agisse d'un terme non local, nous pouvons nous rendre compte que l'équation revient à une convolution... Il est donc facile de résoudre l'équation d'évolution dans le domaine de Fourier où elle devient locale.

La figure 5.3 compare l'évolution d'un cercle en utilisant une énergie de type CAOS et une énergie de type champ de phase. Nous pouvons constater que la symétrie du problème est mieux préservée dans le cas des champs de phase qui permettent une optimisation plus simple et limitant donc les erreurs numériques.

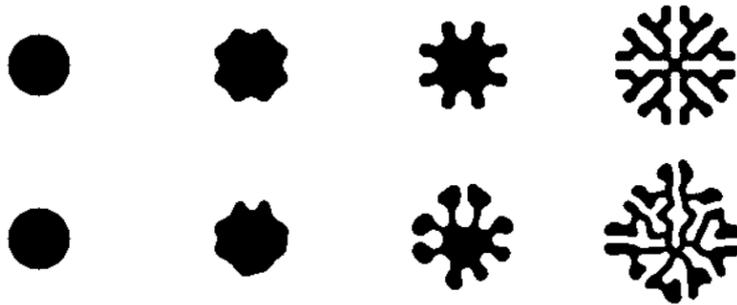


FIG. 5.3: Comparaison de l'évolution des régions en utilisant les CAOS (en bas) et les champs de phase (en haut).

Chapitre 6

Stabilité du Modèle

Dans toutes les expériences que nous avons présentées jusqu'ici¹, nous sommes partis d'un cercle que nous avons ensuite laissé évoluer jusqu'à arriver à une minimisation de son énergie.

Pour les différents choix de paramètres, nous pouvons observer la formation de bras qui s'étendent dans toutes les directions. Nous nous rendons aisément compte que, si l'image n'était pas bornée, ces derniers se développeraient à l'infini.

Si cette propriété est utile dans le cas de la modélisation de structures susceptibles de se ramifier sur de très grandes distances, comme par exemple les réseaux routiers, elle rend rédhibitoire la modélisation d'éléments bien localisés dans l'espace. Nous allons, pour résoudre cette limitation, voir comment il est possible de trouver le jeu de paramètres "stabilisant" le modèle [19], [20].

6.1 Principes Généraux

Nous allons commencer par voir sous quelles conditions sur la forme initiale, un cercle, dans notre exemple, reste stable. Du fait de la phase d'optimisation, un contour γ_0 sera stable si son énergie est un minimum local. Nous aurons donc, formellement et en notant $V(\gamma_0)$ le voisinage de γ_0 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \gamma}(\gamma_0) &= 0 \\ \frac{\partial^2 E}{\partial \gamma^2}(\tilde{\gamma}) &\geq 0, \forall \tilde{\gamma} \in V(\gamma_0) \end{aligned} \tag{6.1}$$

6.2 Stabilité du Cercle

Appliquons maintenant cette démarche au cas où γ_0 est un cercle de rayon r_0 . Il ne semble malheureusement pas possible d'effectuer ces calculs de façon analytique, nous allons donc avoir recours à un artifice de calcul. Pour cela, commençons par chercher à modéliser de légères perturbations d'un cercle γ_0 .

¹Voir figure 5.3 par exemple.

Comme les perturbations tangentielles ne sont pas intéressantes², nous pouvons modéliser ces perturbations par des fluctuations sur le rayon du cercle. Afin de tirer parti des invariances du problème, nous allons les modéliser par leurs composantes de Fourier. Le terme de second ordre sera, en effet, diagonalisé dans cette base. La forme perturbée va donc pouvoir être représentée, en coordonnées polaires, de la façon suivante :

$$\gamma = \gamma_0 + \delta\gamma : \begin{cases} [-\pi, \pi] & \rightarrow \mathbb{R}^+ \times [-\pi, \pi] \\ t & \rightarrow (r_0 + \sum_k a_k e^{ikr_0 t}, t) \end{cases} \quad (6.2)$$

Nous notons ici r_0 le rayon du cercle non perturbé, $k = \frac{m}{r_0}$ avec $m \in \mathbb{Z}$. Afin de simplifier les calculs, nous allons chercher à effectuer un développement limité autour de γ_0 de façon à mettre l'énergie sous la forme³ :

$$E(\gamma_0 + \delta\gamma) = E(\gamma_0) + \left\langle \frac{\partial E}{\partial \gamma} \middle| \delta\gamma \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \delta\gamma \middle| \frac{\partial^2 E}{\partial \gamma^2} \middle| \delta\gamma \right\rangle \quad (6.3)$$

Les détails de ces calculs sont donnés dans [19] et [20]. Il suffit alors d'imposer $\left\langle \frac{\partial E}{\partial \gamma} \middle| \delta\gamma \right\rangle = 0$ pour obtenir une condition d'extrémalité. Montrer qu'il s'agit d'un minimum est plus calculatoire. Horváth et al. ont donc préféré le "prouver" par simulation numérique.

6.3 Vers des formes étoilées

Nous avons vu dans la partie précédente qu'il était possible d'obtenir un jeu de paramètres qui fasse en sorte qu'un cercle corresponde à un minimum d'énergie. L'étape suivante va maintenant consister à calculer un jeu de paramètres permettant de modéliser des formes plus complexes, à savoir, des formes étoilées.

Nous pouvons, en effet, constater que toute forme étoilée peut être exprimée comme étant un cercle plus des perturbations non nulles de son rayon. En coordonnées polaires, son expression sera donc $\gamma = \gamma_0 + \delta\gamma = (r_0 + \sum_k a_k e^{irk_0 t}, t)_{t \in [-\pi; \pi]}$. Comme pour un cercle, cette forme ne sera stable que si elle correspond à un minimum d'énergie, c'est-à-dire si elle satisfait l'équation 6.1.

Comme pour l'étude de la stabilité d'un cercle, il ne semble pas possible de calculer directement les dérivées de l'énergie par rapport aux perturbations. Nous allons donc nous placer dans le cas de petites perturbations : $\frac{|\delta\gamma|}{r_0} = o(1)$. Il devient alors possible d'effectuer un développement limité autour de γ_0 .

Un "simple" développement à l'ordre 2 ne sera cependant plus suffisant : nous effectuons un développement limité autour du cercle initial et cherchons des minima pour une perturbation $\delta\gamma \neq 0$. Il faudra donc pousser notre développement au moins jusqu'à l'ordre 4. Formellement, nous aurons donc :

$$E(\gamma + \delta\gamma) = e_0 + e_1\delta\gamma + e_2\delta\gamma^2 + e_3\delta\gamma^3 + e_4\delta\gamma^4$$

²Il s'agit ici de perturbations de re-paramétrisation qui n'influent donc pas sur la stabilité de la forme.

³Notons ici que bien que la Hessienne soit complexe, nous multiplions à gauche par $\delta\gamma$ et non pas par $\delta\gamma^*$.

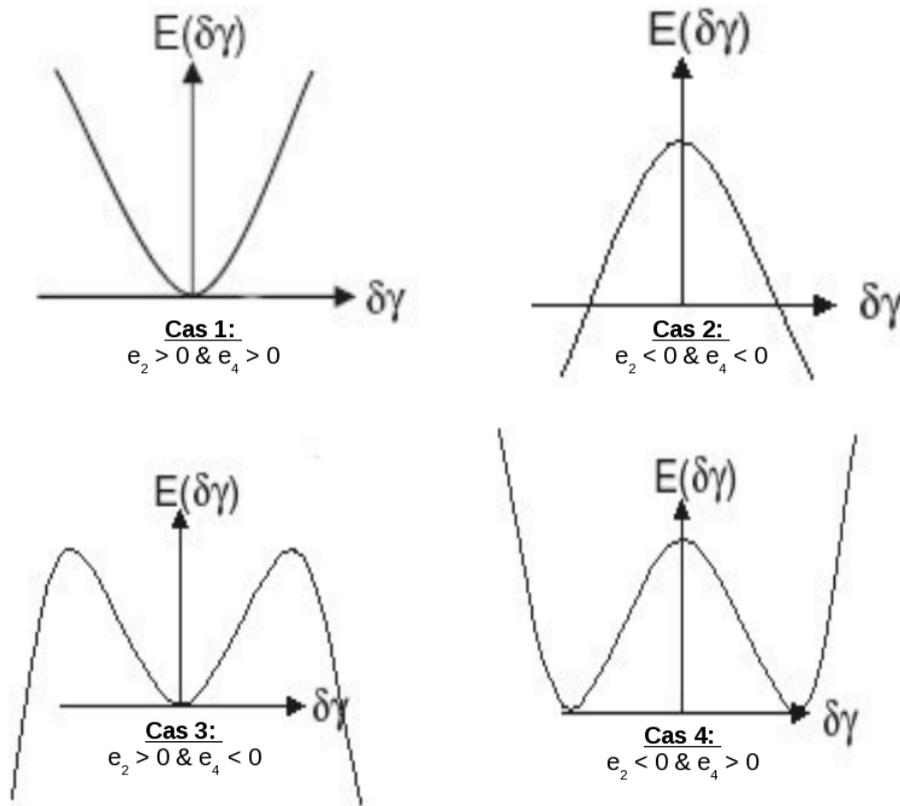


FIG. 6.1: Différents cas de figure - Représentation Formelle.

Les premières phases du stage de Master de Grégoire Kerr ont été défrichées par Ducret [24]. La seconde partie a consisté à reprendre et corriger ses calculs de développement limité avant de se lancer dans la recherche des minima d'énergie.

Chapitre 7

Stabilité des formes étoilées

7.1 Expression de l'Énergie pour des formes Étoilées

Comme pour l'étude de la stabilité d'un cercle, nous nous sommes donc placés dans le cas de petites perturbations : $\frac{|\delta\gamma|}{r_0} = o(1)$ afin d'effectuer un développement limité à l'ordre 4 de l'énergie autour de γ_0 . Les détails des calculs sont donnés dans l'annexe A, le résultat final est donné en équation 7.1. La validité de cette expression a été testée numériquement sur différents cas particuliers :

$$\begin{aligned}
 E(\gamma_0 + \delta\gamma) &\approx e_0 + \sum_k a_k e_k + \frac{1}{2} \sum_{k_1, k_2} a_{k_1} a_{k_2} e_{k_1, k_2} + \frac{1}{6} \sum_{k_1, k_2, k_3} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} e_{k_1, k_2, k_3} \\
 &\quad + \frac{1}{24} \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a_{k_4} e_{k_1, k_2, k_3, k_4} \\
 &\approx 2\pi\lambda_c r_0 + \pi\alpha_c r_0^2 + \beta_c M_0 \\
 &\quad + \sum_k a_k \delta(k) (2\pi\lambda_c + 2\pi r_0 \alpha_c + \beta_c M_1(k)) \\
 &\quad + \sum_{k_1, k_2} a_{k_1} a_{k_2} \delta(k_1 + k_2) \left\{ -\pi r_0 k_1 k_2 \lambda_c + \pi \alpha_c + \beta_c M_2(k_1, k_2) \right\} \\
 &\quad + \sum_{k_1, k_2, k_3} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} \delta(k_1 + k_2 + k_3) \left\{ -\pi \lambda_c \frac{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}{6} + \beta_c M_3(k_1, k_2, k_3) \right\} \\
 &\quad + \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a_{k_4} \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \left\{ \right. \\
 &\quad \quad \left. \frac{\pi r_0 \lambda_c}{4} \left(\frac{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2}{3r_0^2} - k_1 k_2 k_3 k_4 \right) + \beta_c M_4(k_1, k_2, k_3, k_4) \right\}
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

Les fonctions M_i sont définies dans l'annexe A. Le lecteur pourra remarquer, qu'ainsi exprimés, ces développements ne sont pas valides. Remarquons, en effet,

que la fonction d'interaction Ψ telle qu'elle est définie en équation 4.9 n'est pas C^4 : ses dérivées tierces n'existent pas en $z = d \pm \epsilon$. Nous ne pouvons dès lors pas appliquer de développement de Taylor jusqu'à l'ordre 4.

Ce problème peut facilement être contourné en changeant de fonction d'interaction. Nous avons ainsi choisi de définir $\Psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0; 1]$ de la façon suivante :

$$\Psi(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0; d - \epsilon] \\ \frac{1}{2\pi} \left(\pi + 2 \arctan \left(\frac{1}{(z-d+\epsilon)^2} - \frac{1}{(z-d-\epsilon)^2} \right) \right) & \text{si } x \in]d - \epsilon; d + \epsilon[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (7.2)$$

Ainsi définie, Ψ est C^∞ tout en présentant la même allure qu'en figure 4.3. Nous pouvons alors effectivement lui appliquer une décomposition de Taylor et donc obtenir l'expression 7.1.

7.2 Conditions d'Extrémalité

7.2.1 Identification des Conditions

Maintenant que nous avons obtenus une expression de l'énergie exploitable, nous allons commencer à en chercher les minima potentiels. Une condition nécessaire est la nullité des dérivées. Un contour γ correspondra à un extremum d'énergie si pour toute fréquence i :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial a_i}(\gamma) &= e_i + \sum_{k_1} a_{k_1} e_{i,k_1} + \frac{1}{2} \sum_{k_1, k_2} a_{k_1} a_{k_2} e_{i,k_1, k_2} + \frac{1}{6} \sum_{k_1, k_2, k_3} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} e_{i,k_1, k_2, k_3} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (7.3)$$

Cette condition reste difficile à exprimer dans le cas général. Nous avons donc préféré nous placer dans un cas simplifié où la perturbation du cercle ne correspond qu'à une unique fréquence, m . Comme le cas $m = 0$ revient à considérer un cercle de rayon $r_0 + a_0$, nous supposons que $m \neq 0$. Le lecteur pourra enfin remarquer que, comme γ est à valeurs dans \mathbb{R}^2 , nous avons nécessairement $a_m = a_{-m}^*$. L'astérix désigne le complexe conjugué. Les contours considérés seront donc de la forme :

$$\gamma = (r_0 + a_m e^{imt} + a_{-m} e^{-imt}, t)_{t \in [-\pi; \pi[}$$

En injectant cette simplification dans l'équation 7.3, nous obtenons un ensemble de conditions d'extrémalité :

$$\begin{aligned}
 \alpha_c &= -\frac{1}{2r_0} \left(6|a_m|^2 \frac{m^2}{r_0^2} \left(\frac{M_3(0,m,-m)}{M_3(2m,-m,-m)} - \frac{1}{3} \right) + 2 + \frac{G_{10}m^2}{r_0^2 M_3(2m,-m,-m)} \right) \\
 \beta_c &= \frac{\pi m^2}{r_0^2 M_3(2m,-m,-m)} \\
 0 &= r_0 M_4(3m, -m, -m, -m) + M_3(2m, -m, -m) \left(1 + \frac{3m^2}{4} \right) = f_3(\epsilon, r_0, m) \\
 |a_m|^2 &= \frac{\left(m^2 \left(-r_0^2 + \frac{G_{10}}{2M_3(2m,-m,-m)} - r_0 \frac{M_2(m,-m)}{M_3(2m,-m,-m)} \right) + r_0^2 \right)}{\left(m^2 \left(5 - \frac{3M_3(0,m,-m)}{M_3(2m,-m,-m)} - 3m^2 + 12r_0 \frac{M_4(m,-m,m,-m)}{M_3(2m,-m,-m)} \right) \right)} = f_4(\epsilon, r_0, m)
 \end{aligned} \tag{7.4}$$

Notons bien qu'ainsi exprimé, ce système n'est pas toujours valide. Il est, par exemple, possible que $M_3(2m, -m, -m)$ soit nul. Ces cas particuliers peuvent cependant être rejetés comme étant irréalistes. Ainsi, si $M_3(2m, -m, -m) = 0$, nous aurions nécessairement $\beta_c = \infty$. Nous nous placerons donc implicitement dans le cas où ces équations sont effectivement définies.

Il reste maintenant à résoudre ces équations. Rappelons que les paramètres sur lesquels nous pouvons jouer sont r_0 , ϵ , α_c et β_c . Les termes λ_c et d peuvent être assimilés à des paramètres d'échelle et ont donc été fixés à 1. Enfin, les termes m et a_m sont des données du problème de modélisation.

Les deux premières équations expriment α_c et β_c de façon explicite alors que les deux dernières devraient permettre de fixer r_0 et ϵ . Malheureusement, elles ne sont pas linéaires et ne permettent pas d'obtenir directement ϵ ou r_0 . Il faudra se contenter de solutions numériques et donc approchées.

La figure 7.1 montre l'allure de f_3 à la fréquence $m = 3$. Nous pouvons constater facilement qu'il semble, a priori, y avoir des solutions. Reste à vérifier que les autres conditions peuvent aussi être satisfaites. Pour cela, observons la figure 7.2. Elle représente la plausibilité d'une solution. Les lignes blanches correspondent aux solutions $f_3 = 0$ pour $m = 0$. Les lignes rouges correspondent aux zéros des dénominateurs. Enfin, les zones jaunes montrent le domaine où nous avons $f_4 \leq 0$ et donc, où il n'y a pas de solution envisageable. Les autres codes de couleur sont résumés dans la table 7.1.

Couleur	dénominateurs	f_3	$ a_m ^2$	α_c	β_c	Solution
<u>Rouge</u>	0	non
<u>Blanc</u>	$\neq 0$	0	oui
<u>Jaune</u>	$\neq 0$...	≤ 0	non
<u>Magenta</u>	$\neq 0$...	≥ 0	≤ 0	≥ 0	oui
<u>Vert</u>	$\neq 0$...	≥ 0	≤ 0	≤ 0	oui
<u>Bleu</u>	$\neq 0$...	≥ 0	≥ 0	≥ 0	oui
<u>Noir</u>	$\neq 0$...	≥ 0	≥ 0	≤ 0	oui

TAB. 7.1: Légende de la figure 7.2.

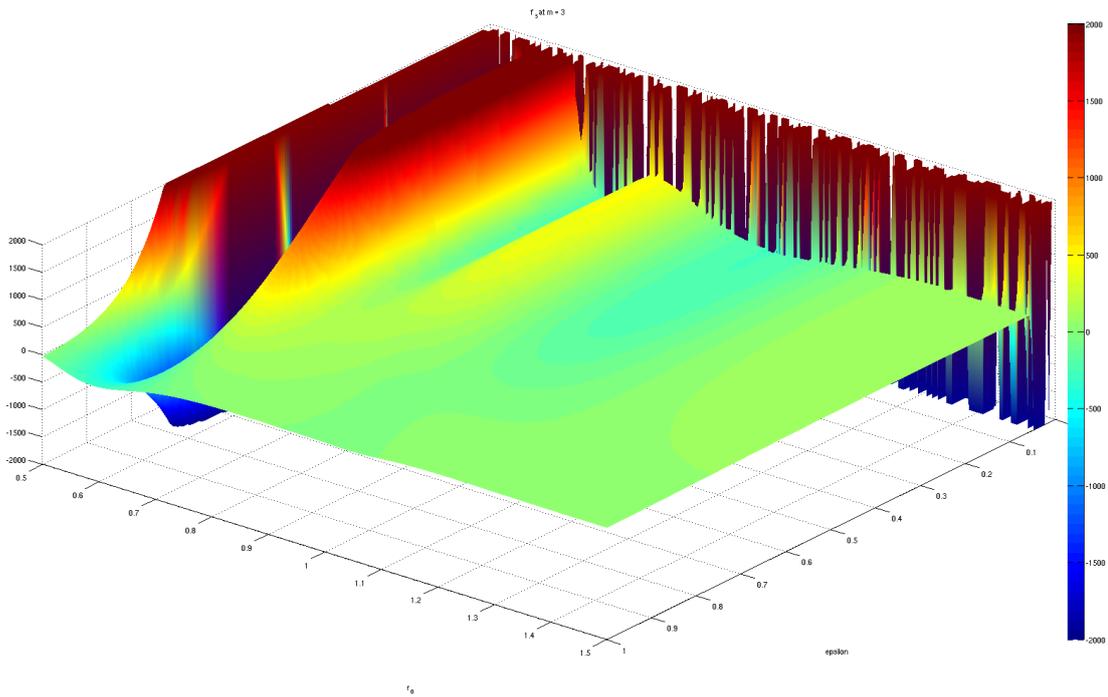


FIG. 7.1: Tracé de $f_3(\epsilon, r_0)$ pour $m = 3$ (troncature à ± 2000).

Cherchons maintenant à identifier les solutions. Comme dit précédemment, il ne semble pas possible de résoudre analytiquement le système, nous aurons donc recours à des solutions numériques. Nous en avons identifié deux possibles.

7.2.2 Première méthode de résolution

Nous avons commencé par considérer une méthode de résolution entièrement automatique. Pour une fréquence m fixée, considérons la fonctionnelle J_m :

$$J_m(r_0, \epsilon) = (f_3(r_0, \epsilon))^2 + (|a_m|^2 - f_4(r_0, \epsilon))^2$$

Nous nous rendons facilement compte que les solutions à notre problème correspondent aux zéros de J_m , c'est-à-dire à ses minima. Cherchons donc à identifier ces derniers. Comme f_3 est non convexe, nous avons pensé à utiliser une méthode de résolution par recuit simulé.

Si la méthode converge dans le cas théorique, il ne faut pas oublier que cette convergence ne se fait qu'au bout d'un temps infini. En pratique, nous n'arriverons donc jamais à obtenir exactement les zéros de J_m .

Cet inconvénient peut être levé en utilisant le recuit comme initialisation pour une méthode d'optimisation déterministe (descente de gradient, méthode de Newton,...). Cependant, plusieurs inconvénients persistent.

Commençons par noter que la mise en œuvre du recuit simulé nécessite l'estimation de très nombreux paramètres (température initiale, longueur des paliers de

température, ...). Il faudra donc les estimer pour chaque fréquence m , ce qui revient à perdre la généralité du modèle.

Les approches déterministes posent elles aussi problème puisqu'elles supposent au moins la convexité de J_m . Il devrait bien sûr être possible de montrer que notre fonctionnelle est localement convexe autour de la plupart des points isolés par le recuit. Ces résultats seraient néanmoins extrêmement lourds à démontrer et leur validité resterait sujette à caution. Nous ne parlerons même pas d'hypothèses plus complexes telles que l'exigence d'une α -convexité dans le cas de la descente de gradient.

Il semble donc difficile de mettre en œuvre cette méthode de façon purement automatique et sans intervention extérieure. Notons enfin que les résultats pourraient parfaitement ne pas être plausibles. Il peut, par exemple, y avoir de nombreuses solutions pour ϵ petit (cf. figure 7.2). Comme les variations de J_m se font à très haute fréquence dans cette zone et compte tenu des approximations numériques, il semble par contre impossible d'y obtenir une solution valide.

Soulignons enfin que le temps d'exécution d'une telle approche est extrêmement long. Toutes ces limitations rendent obligatoire l'introduction d'un opérateur à un moment ou à un autre. Nous nous sommes donc tournés vers une méthode purement manuelle et surtout plus simple à mettre en œuvre.

7.2.3 Approche Manuelle

Plutôt que d'essayer d'identifier systématiquement les solutions, concentrons nous sur celles qui semblent "utiles". Commençons par noter que, par analogie avec les CAOS utilisés par Rochery et al [14], il est probable que nos solutions correspondant à $\alpha_c \geq 0$ et $\beta_c \leq 0$ soient dans les domaines noirs sur la figure 7.2. Nous constatons ainsi qu'il semble y avoir un ensemble de solutions pour $r_0 \approx 1$ et $\epsilon \approx 0.5$. Ces dernières présentent, par ailleurs, l'avantage d'être des valeurs "normales".

Notons enfin que, du fait de la régularité de f_3 et f_4 dans cette zone, il semble possible d'approcher ces valeurs par une simple dichotomie.

7.3 Identification des Minima

Nous avons vu dans la partie précédente qu'il y avait, a priori, des extrema. Il reste maintenant à vérifier s'il s'agit ou non de minima. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un de ces extrema soit un minimum est que la hessienne de l'énergie en ce point soit définie positive :

$$K = \left(\frac{\partial^2 E}{\partial a_p \partial a_q} (r_0, \epsilon, m) \right)_{(p,q) \in \mathbb{Z}^2} \geq 0 \quad (7.5)$$

Pour essayer de vérifier cette condition, nous allons étudier ses valeurs propres. Encore une fois, l'expression analytique de la hessienne (cf : eq. 7.6) est peu propice à une étude directe. Nous allons donc contourner le problème et utiliser la théorie des petites perturbations¹.

¹Les détails des calculs ainsi que des justifications plus détaillées se trouvent en annexe C.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 E}{\partial a_p \partial a_q}(r_0, \epsilon, m) = & e_{p,q} \delta(p+q) + e_{p,q,m} a_m \delta(p+q+m) + e_{p,q,-m} a_{-m} \delta(p+q-m) \\
 & + |a_m|^2 e_{p,q,m,-m} \delta(p+q) + \frac{a_m^2}{2} e_{p,q,-m,-m} \delta(p+q-2m) \\
 & + \frac{a_m^2}{2} e_{p,q,m,m} \delta(p+q+2m)
 \end{aligned} \tag{7.6}$$

Rappelons que dans notre étude, nous considérons que $\frac{\|(a_i)_i\|}{r_0} \ll 1$. Nous pouvons donc remarquer que K est décomposable en une matrice principale, K_0 , plus des perturbations, K_1 et K_2 .

$$\left\{ \begin{array}{l}
 K_0 = (e_{p,q} \delta(p+q) + |a_m|^2 e_{p,q,m,-m} \delta(p+q))_{(p,q) \in \mathbb{Z}^2} \\
 K_1 = (e_{p,q,m} a_m \delta(p+q+m) + e_{p,q,-m} a_{-m})_{(p,q) \in \mathbb{Z}^2} \\
 K_2 = \left(\frac{a_m^2}{2} e_{p,q,-m,-m} \delta(p+q-2m) + \frac{a_m^2}{2} e_{p,q,m,m} \delta(p+q+2m) \right)_{(p,q) \in \mathbb{Z}^2}
 \end{array} \right. \tag{7.7}$$

Notons ici que, bien que nous supposons que $\frac{\|(a_p)_p\|}{r_0} \ll 1$, nous n'avons pas forcément $\|K_2\| \ll \|K_1\|$. Les perturbations considérées doivent, en effet, être suffisamment grandes pour que les formes modélisées diffèrent réellement d'un cercle. En pratique, nous aurons par exemple $|a_m| \approx 0.2r_0$. Pour cette plage de valeurs, nous avons K_1 et K_2 qui sont sensiblement équivalents tout en étant négligeables devant K_0 .

Nous allons donc commencer par obtenir les valeurs propres (λ_n) associées aux vecteurs propres ($|b_n \rangle$) de la matrice K_0 . Notons que nous utiliserons la notation "bra-ket" afin de simplifier les expressions. Nous nous restreindrons, par ailleurs, à des perturbations plausibles, c'est-à-dire dans \mathbb{R} . Nous obtenons, à un coefficient de normalisation près, et en notant $n > 0$:

$$\begin{aligned}
 |b_{n+} \rangle &= (\delta(n+p) + \delta(n-p))_{p \in \mathbb{Z}} \\
 |b_{n-} \rangle &= (\delta(n-p) - \delta(n+p))_{p \in \mathbb{Z}} \\
 |b_0 \rangle &= (\delta(p))_{p \in \mathbb{Z}}
 \end{aligned}$$

Remarquons que toute perturbation réelle correspondra au ket :

$$c_0 |b_0 \rangle + \sum_{n \in \mathbb{N}^+} c_{n+} |b_{n+} \rangle + i c_{n-} |b_{n-} \rangle$$

avec $(c_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$. Comme la perturbation $K_1 + K_2$ est faible devant K_0 , les valeurs propres et vecteurs propres de $K_0 + (K_1 + K_2)$ seront proches de ceux de K_0 . Nous les chercherons donc sous la forme $\lambda_n^{[0]} + \lambda_n^{[1]}$ et $|b_n^{[0]} \rangle + |b_n^{[1]} \rangle$ où par abus de notation nous notons $n \pm$ par n et avec :

$$\lambda_n^{[1]} \ll \lambda_n^{[0]}$$

$$|b_n^{[1]} \rangle = \sum_{k \neq n} c_{n,k}^{[1]} |b_k^{[0]} \rangle, \quad c_{n,k}^{[1]} \ll 1$$

En injectant ces expressions dans l'équation aux valeurs propres et en se limitant aux termes du premier ordre, nous obtenons l'expression de $\lambda_n^{[1]}$ et de $|b_n^{[1]} \rangle$. Les expressions analytiques ainsi que les différentes justifications sont données dans l'annexe C. Nous obtenons finalement l'expression suivante valable, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\lambda_{n\pm} = \lambda_n^{[0]} + \langle b_{n\pm}^{[0]} | K_1 | b_{n\pm}^{[0]} \rangle + \langle b_{n\pm}^{[0]} | K_2 | b_{n\pm}^{[0]} \rangle \quad (7.8)$$

Nous pouvons commencer par remarquer qu'a priori, telles qu'elles sont formulées, ces valeurs propres ne sont pas toutes positives. En vérité, ce que nous entendons par "positivité de la hessienne" est le fait que, pour toute perturbation réelle, $\langle \delta\gamma | K | \delta\gamma \rangle \geq 0$. En considérant le cas simplifié où $K = K_0$, nous remarquons que, pour être satisfaite, cette condition implique que les valeurs propres associées aux $|b_{-n} \rangle$ soient négatives :

$$\langle ib_{n-} | K_0 | ib_{n-} \rangle = -\lambda_n \langle b_{n-} | b_{n-} \rangle = -\lambda_n \geq 0$$

Soulignons encore une fois que, bien que K soit complexe, nous sommes dans le cas d'un "produit scalaire réel". Dans le cas de la matrice perturbée, nous pouvons remarquer que les vecteurs propres sont de la forme (à une normalisation près) :

$$|\tilde{b}_{n+} \rangle = \left(\delta(n+p) + \delta(n-p) + \sum_k (c_k \delta(k+p) - id_k \delta(k+p) + c_k \delta(k-p) - id_k \delta(k-p)) \right)_{p \in \mathbb{Z}} \quad (7.9)$$

$$|\tilde{b}_{n-} \rangle = \left(\delta(n-p) - \delta(n+p) + \sum_k (-id_k \delta(k+p) - c_k \delta(k+p) - id_k \delta(k-p) + c_k \delta(k-p)) \right)_{p \in \mathbb{Z}}$$

Nous constatons donc que nous aurons nécessairement, ici encore, une perturbation de la forme :

$$C_0 |\tilde{b}_{n-} \rangle + \sum_{k>0} C_{k+} |\tilde{b}_{n+} \rangle + i C_{k-} |\tilde{b}_{n-} \rangle$$

avec (C_k) une suite réelle. Elle produira donc un terme du second ordre de la forme :

$$C_0^2 \lambda_0 + \sum_{k>0} C_{k+}^2 \lambda_{n+} - C_{k-}^2 \lambda_{n-}$$

Il faut donc vérifier que nous sommes bien dans le cas où :

$$\lambda_{n+} \geq 0$$

$$\lambda_{n-} \leq 0$$

$$\lambda_0 \geq 0$$

La forme des valeurs propres laisse penser qu'une telle condition est réalisable, reste encore à le vérifier numériquement. Comme il est illustré sur l'exemple de la figure 7.3, ces valeurs propres ont globalement "le bon signe"².

Malheureusement, quelques unes d'entre elles détonnent (ici pour $n = 0$ et $n = +2$). Si cela est problématique d'un point de vue théorique, il ne faut pas oublier que, en pratique, le modèle de forme sera couplé à un terme d'attache aux données. Il est donc possible que cette instabilité locale puisse être contrée par l'énergie issue de l'image. Pour cela, il "suffit" que l'instabilité soit faible, c'est-à-dire que $|\lambda_{n\pm}|$ soit "petite", ce qui semble être effectivement le cas dans nos expériences.

²Et ce, pour la quasi-totalité de nos expériences. Quelques autres exemples sont donnés en annexe D.

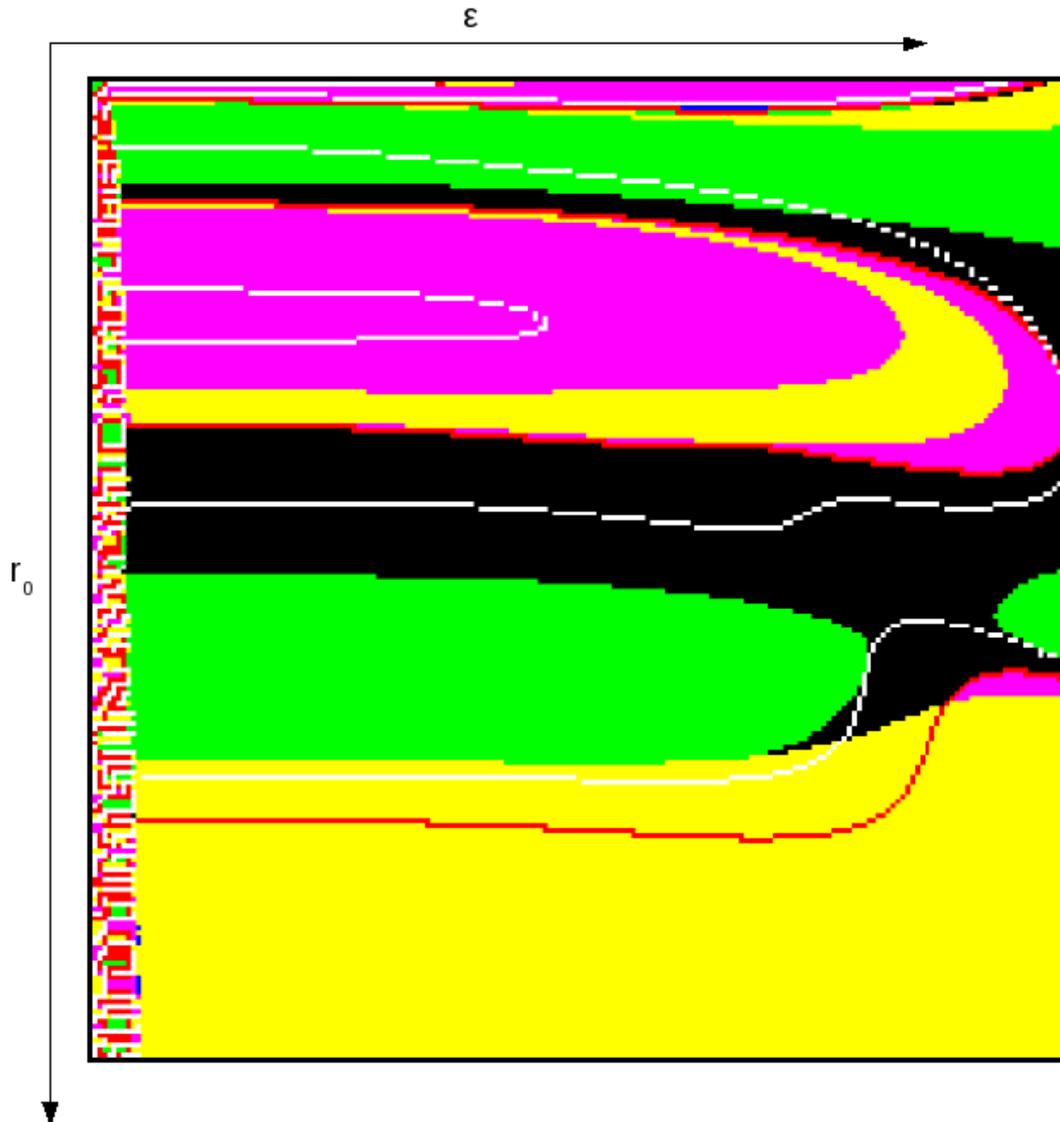


FIG. 7.2: Diagramme des solutions pour $m = 3$, r_0 de 0.5 à 1.5 et ϵ de 0.1 à 1 (cf : tab. 7.1 pour la légende).

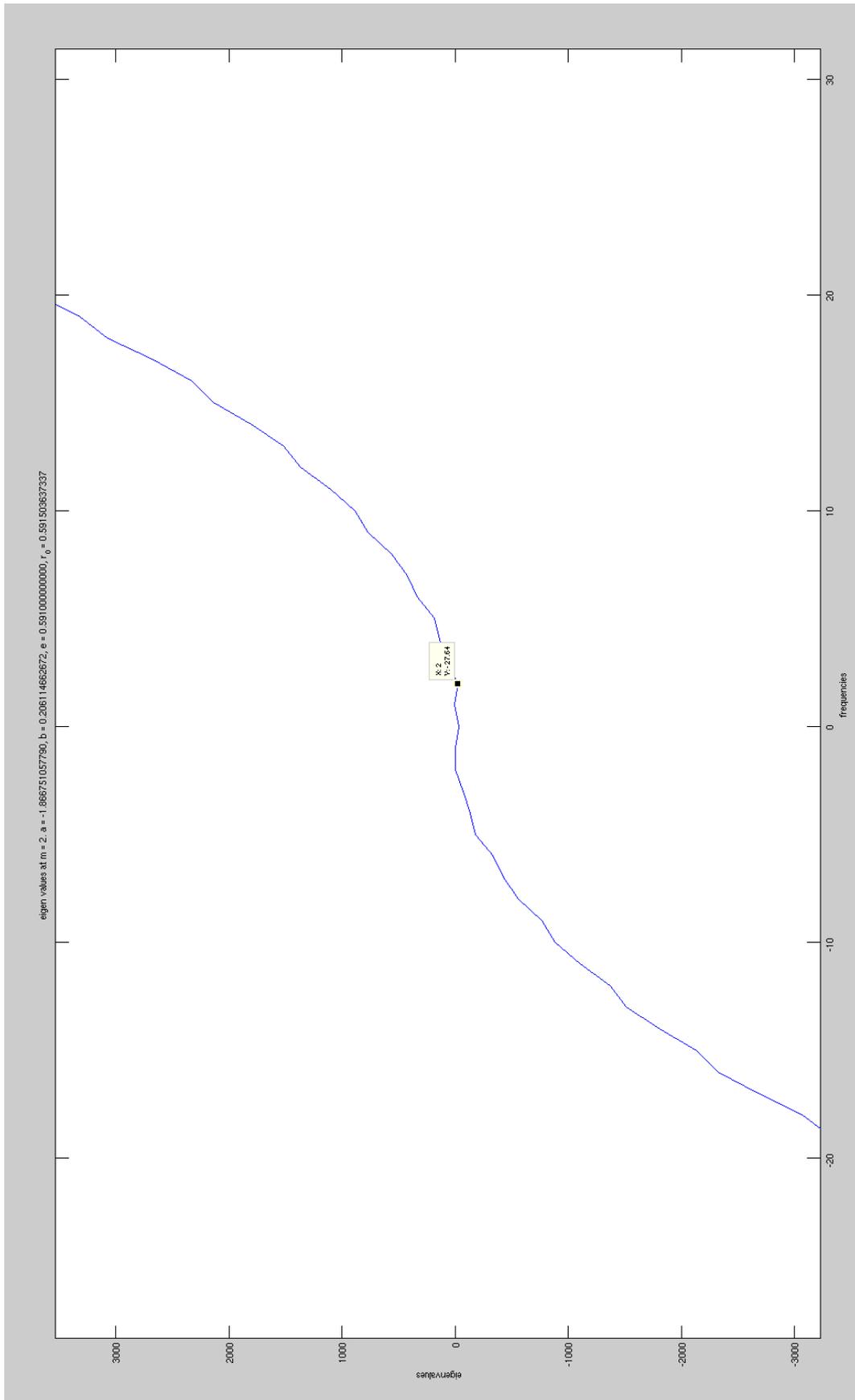


FIG. 7.3: Exemple de valeurs propres. Par convention, nous notons ici n par $-n$.

Chapitre 8

Conclusion et perspectives

Nous avons étudié deux approches complémentaires du problème de modélisation de la forme. La première, les q -fonctions, permet de modéliser explicitement des formes isolées. Ses principaux désavantages restent liés à son incapacité à représenter facilement des groupes de formes. Ceci est étroitement lié au besoin d'estimer les paramètres de pose pour chaque objet qui, à son tour, mène vers des algorithmes de forte complexité.

La seconde approche, les contours actifs d'ordre supérieur et les champs de phase, permet au contraire de modéliser facilement un nombre quelconque d'instances de formes, mais aussi des interactions entre différentes formes. Leur inconvénient a été que les formes modélisées sont 'simples'. L'analyse de stabilité décrite dans ce rapport suggère, cependant, qu'avec un choix adéquat des paramètres et de la fonction d'interaction, des formes complexes peuvent être modélisées.

Le travail du postdoctorant commençant au mois d'avril 2011 sera de reprendre les travaux décrits dans ce rapport. Ceci inclut la finalisation du travail sur les formes étoilées simples, avant de passer à l'analyse de perturbations multi-fréquences. Une approche alternative fondée sur l'équivalence entre les modèles de champs de phases et les champs markoviens binaires sera explorée en parallèle, et des techniques bayésiennes seront utilisées afin d'estimer les paramètres et la fonction d'interaction.

Annexe A

Développements de L'Énergie

Nous allons, dans cette annexe, décrire en détails la démarche permettant d'aboutir au développement à l'ordre 4 de l'énergie d'un contour actif d'ordre supérieur.

A.1 Considérations générales

Commençons par rappeler que nous considérons un cercle de rayon r_0 auquel vient se rajouter une perturbation δr que l'on exprimera en fonction de ses coefficients de Fourier (a_k). Le contour s'exprimera donc en coordonnées polaires de la façon suivante :

$$\gamma : (r(t), t) = \left(r_0 + \sum_k a_k e^{ir_0 k t}, t \right)_{t \in [-\pi; \pi[}$$

Où $k = \frac{n}{r_0}$ et $n \in \mathbb{Z}$. La tangente à la courbe à l'angle t s'écrit donc :

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{r}(t)\vec{u}_r(t) + r(t)\vec{u}_t(t) \quad (\text{A.1})$$

Nous en déduisons donc facilement le carré de la norme de la tangente :

$$\|\dot{\gamma}(t)\|^2 = r_0^2 + 2r_0 \sum_k a_k e^{ir_0 k t} + \sum_{k_1, k_2} a_{k_1} a_{k_2} e^{ir_0(k_1+k_2)t} (1 - r_0^2 k_1 k_2) \quad (\text{A.2})$$

Nous avons, par ailleurs, en notant \vec{x} et \vec{y} une base du plan :

$$\begin{aligned} \vec{u}_r(t) &= \cos(t)\vec{x} + \sin(t)\vec{y} \\ \vec{u}_t(t) &= -\sin(t)\vec{x} + \cos(t)\vec{y} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Cela nous permet d'exprimer facilement le produit scalaire de deux tangentes :

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) \cdot \dot{\gamma}(t') &= \cos(t' - t)[r_0^2 + r_0 \delta r(t) + r_0 \delta r(t') + \delta r(t) \delta r(t') + \dot{\delta r}(t) \dot{\delta r}(t')] \\ &\quad \sin(t' - t)[r_0 \dot{\delta r}(t') - r_0 \dot{\delta r}(t) + \delta r(t) \dot{\delta r}(t') - \dot{\delta r}(t) \delta r(t')] \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Ainsi que la distance au carrée entre deux points du contour :

$$\begin{aligned}
 |\gamma(t') - \gamma(t)|^2 &= [(r_0 + \delta r(t')) \cos(t') - (r_0 + \delta r(t)) \cos(t)]^2 \\
 &\quad + [(r_0 + \delta r(t')) \sin(t') - (r_0 + \delta r(t)) \sin(t)]^2 \\
 &= 2r_0^2 (1 - \cos(t' - t)) \\
 &\quad \left(1 + \frac{1}{r_0} (\delta r(t) + \delta r(t')) + \frac{\delta r^2(t) + \delta r^2(t') - 2 \cos(t - t') \delta r(t) \delta r(t')}{2r_0^2 (1 - \cos(t' - t))} \right)
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

Comme nous pouvons le voir, ces notations deviennent vite lourdes, dans la suite nous noterons donc une quantité q évaluée à un point t' par q' par opposition à la même quantité évaluée au point t qui sera notée simplement q . Introduisons, par ailleurs, quelques notations susceptibles d'alléger les expressions :

$$\Delta t = t' - t \tag{A.6}$$

$$X_0 = 2r_0 \left| \sin \frac{\Delta t}{2} \right| \tag{A.7}$$

$$A(\Delta t) = \frac{\cos^2 \left(\frac{\Delta t}{2} \right)}{\left| \sin \left(\frac{\Delta t}{2} \right) \right|} \tag{A.8}$$

A.2 Développement du terme de longueur

Le terme de longueur se calcule à partir de l'expression A.2 : $L(\gamma) = \int \|\dot{\gamma}(t)\| dt$. Nous ne disposons malheureusement que de l'expression de la norme au carré.

Commençons donc par remarquer que l'on a $\|\gamma(t)\| = r_0^2 \cdot (1 + X(t))$ avec $X(t) \ll 1$ du fait de l'hypothèse de petites perturbations. Il devient alors possible d'utiliser le développement limité de la racine carrée pour obtenir une approximation de cette norme.

$$|\dot{\gamma}(t)| = r_0 \cdot \left(1 + \frac{X(t)}{2} - \frac{X(t)^2}{8} + \frac{X(t)^3}{16} - \frac{5X(t)^4}{128} + o(X(t)^5) \right) \tag{A.9}$$

Il suffit alors de noter que $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} dt = \delta(k)$ pour obtenir une première approximation du terme de longueur :

$$\begin{aligned}
 L(\gamma) &= 2\pi r_0 + 2\pi \sum_k a_k \delta(k) - \pi r_0 \sum_{k_1, k_2} a_{k_1} a_{k_2} k_1 k_2 \delta(k_1 + k_2) \\
 &\quad + \pi \sum_{k_1, k_2, k_3} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} k_1 k_2 \delta(k_1 + k_2 + k_3) \\
 &\quad - \frac{\pi r_0}{4} \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a_{k_4} \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \left(\frac{7k_1 k_2}{r_0^2} + \frac{k_1^2}{r_0^2} + k_1 k_2 k_3 k_4 \right)
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

Nous pouvons remarquer que les indices de sommation peuvent être permutés :

$$\sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a_{k_4} \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) k_1 k_2 = \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a_{k_4} \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) k_1 k_4$$

.

Il suffit, enfin, de prendre en compte les symboles de Kronecker pour jouer sur les indices. Par exemple, si l'on a $\delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)$, nous avons nécessairement $k_4 = -(k_1 + k_2 + k_3)$. En utilisant ces deux astuces de calculs, nous obtenons une version symétrisée du terme de longueur :

$$\begin{aligned} L(\gamma) = & 2\pi r_0 + 2\pi \sum_k a_k \delta(k) - \pi r_0 \sum_{k_1, k_2} a_{k_1} a_{k_2} k_1 k_2 \delta(k_1 + k_2) \\ & - \pi \sum_{k_1, k_2, k_3} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} \delta(k_1 + k_2 + k_3) \frac{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}{6} \\ & + \frac{\pi r_0}{4} \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a_{k_4} \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \left(\frac{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2}{3r_0^2} - k_1 k_2 k_3 k_4 \right) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

A.3 Développement du terme d'aire

Le calcul du terme d'aire est plus simple et ne nécessite pas d'approximation :

$$\begin{aligned} A(\gamma) &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r^2(t)}{2} dt \\ &= \pi r_0^2 + 2\pi r_0 \sum_k a_k \delta(k) + \pi \sum_{k_1, k_2} a_{k_1} a_{k_2} \delta(k_1 + k_2) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

A.4 Développement du terme d'ordre supérieur

L'équation A.5 nous donne l'expression de la distance au carré entre deux points du contour. Il suffit de se rendre compte qu'elle est de la forme $2r_0^2 \sin^2(\frac{t'-t}{2}) (1 + o(1))$ pour obtenir une approximation de sa racine carrée :

$$\begin{aligned} |\gamma(t)' - \gamma(t)| &\approx \\ & 2r_0 \left| \sin\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \right| + \left| \sin\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \right| (\delta r + \delta r') \\ & + \frac{A(\Delta t)}{4r_0} (\delta r - \delta r')^2 - \frac{A(\Delta t)}{8r_0^2} (\delta r^2 - \delta r'^2) (\delta r - \delta r') \quad (\text{A.13}) \\ & + \frac{A(\Delta t)}{16r_0^3} (\delta r^2 - \delta r'^2)^2 - \frac{A^2(\Delta t)}{64r_0^3 \left| \sin \frac{\Delta t}{2} \right|} (\delta r - \delta r')^4 \end{aligned}$$

Nous allons maintenant injecter cette expression dans le développement de Taylor à l'ordre 4 de la fonction d'interaction¹. Nous obtenons, après calculs :

$$\begin{aligned}
 \Psi(|\gamma(t)' - \gamma(t)|) = & \Psi(X_0) + (\delta r + \delta r') \left| \sin \frac{\Delta t}{2} \right| \frac{d\Psi}{dz}(X_0) \\
 & + \frac{(\delta r - \delta r')^2}{4r_0} A(\Delta t) \frac{d\Psi}{dz}(X_0) \\
 & + \frac{(\delta r + \delta r')^2}{2} \left| \sin^2 \frac{\Delta t}{2} \right| \frac{d^2\Psi}{dz^2}(X_0) \\
 & + \frac{(\delta r^2 - \delta r'^2)(\delta r - \delta r') A(\Delta t)}{4r_0} \left[-\frac{d\Psi}{dz}(X_0) + \left| \sin \frac{\Delta t}{2} \right| \frac{d^2\Psi}{dz^2}(X_0) \right] \\
 & + \frac{(\delta r + \delta r')^3}{6} \left| \sin^3 \frac{\Delta t}{2} \right| \frac{d^3\Psi}{dz^3}(X_0) \\
 & + \frac{(\delta r - \delta r')^4}{32r_0^2} A^2(\Delta t) \left[-\frac{d\Psi}{dz}(X_0) + \frac{d^2\Psi}{dz^2}(X_0) \right] \\
 & + \frac{(\delta r^2 - \delta r'^2)^2}{8r_0} A(\Delta t) \left[\frac{d\Psi}{dz}(X_0) - \frac{\left| \sin \frac{\Delta t}{2} \right|}{r_0} \frac{d^2\Psi}{dz^2}(X_0) + \sin^2 \frac{\Delta t}{2} \frac{d^3\Psi}{dz^3}(X_0) \right] \\
 & + \frac{(\delta r + \delta r')^4}{24} \sin^4 \frac{\Delta t}{2} \frac{d^4\Psi}{dz^4}(X_0)
 \end{aligned} \tag{A.14}$$

Il suffit alors de multiplier ce terme par le produit scalaire des tangentes en t et t' pour obtenir le développement du potentiel d'ordre supérieur, les fonctions "F" étant données en annexe B.1.

$$\begin{aligned}
 P(\gamma(t), \gamma(t')) = & \dot{\gamma}(t) \cdot \dot{\gamma}(t') \Psi(|\gamma(t)' - \gamma(t)|) = \\
 & F_{00} + (\delta r + \delta r') F_{10} + (\delta \dot{r}' - \delta \dot{r}) F_{11} + (\delta r^2 + \delta r'^2) F_{20} \\
 & + \delta r \delta r' F_{21} + \delta \dot{r} \delta \dot{r}' F_{22} + (\delta r \delta r' - \delta r' \delta r) F_{23} \\
 & + (\delta r' \delta \dot{r}' - \delta r \delta \dot{r}) F_{24} + (\delta r^3 + \delta r'^3) F_{30} \\
 & + (\delta r^2 \delta r' + \delta r \delta r'^2) F_{31} + (\delta r^2 \delta \dot{r}' - \delta r'^2 \delta \dot{r}) F_{32} \\
 & + (\delta \dot{r}' \delta'^2 - \delta r^2 \delta \dot{r}) F_{33} + \delta \dot{r} \delta \dot{r}' (\delta r + \delta r') F_{34} \\
 & + \delta r \delta r' (\delta \dot{r}' - \delta \dot{r}) F_{35} + (\delta r^4 + \delta r'^4) F_{40} \\
 & + (\delta r^3 \delta r' + \delta r \delta r'^3) F_{41} + \delta r^2 \delta r'^2 F_{42} \\
 & + (\delta r^3 \delta \dot{r}' - \delta r'^3 \delta \dot{r}) F_{43} + (\delta r'^3 \delta \dot{r}' - \delta r^3 \delta \dot{r}) F_{44} \\
 & + (\delta r^2 \delta \dot{r}' \delta r' - \delta r'^2 \delta \dot{r} \delta r) F_{45} + (\delta r^2 \delta r' \delta \dot{r} - \delta r'^2 \delta r \delta \dot{r}') F_{46} \\
 & + \delta \dot{r} \delta \dot{r}' (\delta r^2 + \delta r'^2) F_{47} + (\delta r'^3 \delta \dot{r}' - \delta r^3 \delta \dot{r}) F_{48} \\
 & + \delta r \delta r' \delta \dot{r} \delta \dot{r}' F_{49}
 \end{aligned} \tag{A.15}$$

¹Cela suppose que la fonction soit au moins C^4 .

Il ne nous reste plus qu'à intégrer deux fois ce potentiel entre $-\pi$ et π pour obtenir le développement à l'ordre 4 de l'énergie d'ordre supérieur. Les détails de cette intégration sont donnés en annexe A.5. Nous obtenons ainsi l'expression finale du terme d'ordre supérieur :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \iint_{-\pi}^{\pi} P(\gamma(t), \gamma(t')) dt dt' = G_{00} \\
 & + \sum_k a_k \delta(k) G_{10} \\
 & + \sum_{k_1, k_2} a_{k_1} a_{k_2} \delta(k_1 + k_2) \left\{ G_{20} + \frac{G_{21}(k_1) + G_{21}(k_2)}{2} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{G_{22}(k_1, k_2) + G_{22}(k_2, k_1)}{2} + \frac{G_{23}(k_1, k_2) + G_{23}(k_2, k_1)}{2} \right\} \\
 & + \sum_{k_1, k_2, k_3} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} \delta(k_1 + k_2 + k_3) \left\{ G_{30} \right. \\
 & \quad + \frac{G_{31}(k_1) + G_{31}(k_2) + G_{31}(k_3)}{3} + \frac{G_{32}(k_1) + G_{32}(k_2) + G_{32}(k_3)}{3} \\
 & \quad + \frac{G_{34}(k_1, k_2, k_3) + G_{34}(k_1, k_3, k_2) + G_{34}(k_2, k_1, k_3)}{3} \\
 & \quad \left. + \frac{G_{35}(k_1, k_2, k_3) + G_{35}(k_2, k_1, k_3) + G_{35}(k_3, k_1, k_2)}{3} \right\} \\
 & + \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a_{k_4} \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \\
 & \quad \left\{ G_{40} + \frac{G_{41}(k_1) + G_{41}(k_2) + G_{41}(k_3) + G_{41}(k_4)}{4} \right. \\
 & \quad + \frac{G_{42}(k_1, k_2, k_3, k_4) + G_{42}(k_2, k_1, k_3, k_4) + G_{42}(k_3, k_1, k_3, k_4) + G_{42}(k_4, k_1, k_2, k_3)}{4} \\
 & \quad + \frac{G_{43}(k_1) + G_{43}(k_2) + G_{43}(k_3) + G_{43}(k_4)}{4} \\
 & \quad + \frac{G_{45}(k_1, k_2, k_3, k_4) + G_{45}(k_2, k_1, k_3, k_4) + G_{45}(k_3, k_2, k_1, k_4) + G_{45}(k_4, k_2, k_3, k_1)}{4} \\
 & \quad + \frac{G_{46}(k_1, k_2, k_3, k_4) + G_{46}(k_2, k_1, k_3, k_4) + G_{46}(k_3, k_2, k_1, k_4) + G_{46}(k_4, k_2, k_3, k_1)}{4} \\
 & \quad + \frac{G_{47}(k_1) + G_{47}(k_2) + G_{47}(k_3) + G_{47}(k_4)}{4} \\
 & \quad \left. + \frac{G_{49}(k_1, k_2, k_3, k_4) + G_{49}(k_1, k_3, k_2, k_4) + G_{49}(k_1, k_4, k_2, k_3)}{3} \right\}
 \end{aligned} \tag{A.16}$$

Cette égalité peut, enfin, être légèrement allégée en introduisant les notations M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \iint_{-\pi}^{\pi} P(\gamma(t), \gamma(t')) dt dt' = M_0 \\
& + \sum_k a_k \delta(k) M_1(k) \\
& + \sum_{k_1, k_2} a_{k_1} a_{k_2} \delta(k_1 + k_2) M_2(k_1, k_2) \\
& + \sum_{k_1, k_2, k_3} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} \delta(k_1 + k_2 + k_3) M_3(k_1, k_2, k_3) \\
& + \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a_{k_4} \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) M_4(k_1, k_2, k_3, k_4)
\end{aligned} \tag{A.17}$$

A.5 Détail du Calcul des Intégrales

Notons que du fait de la convergence uniforme des coefficients de Fourier (théorème de Dirichlet du fait de la continuité des perturbations), il est possible d'intervertir séries et intégrales.

$$\begin{aligned}
\iint_{-\pi}^{\pi} F_{00}(t' - t) dt dt' &= \iint_{-\pi}^{\pi} F_{00}(p) dp dt' \\
&= 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} F_{00}(p) dp
\end{aligned} \tag{A.18}$$

$$\begin{aligned}
& \iint_{-\pi}^{\pi} \delta r(t) F_{10}(t' - t) dt dt' \\
&= \iint_{-\pi}^{\pi} \sum_{k_1} a_{k_1} e^{ir_0 k_1 t} F_{10}(t' - t) dt dt' \\
&= \sum_{k_1} a_{k_1} \iint_{-\pi}^{\pi} e^{ir_0 k_1 (-p+t')} F_{10}(p) dp dt' \\
&= \sum_{k_1} a_{k_1} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ir_0 k_1 t'} dt' \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ir_0 k_1 p} F_{10}(p) dp \\
&= \sum_{k_1} a_{k_1} 2\pi \delta(k_1) \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ir_0 k_1 p} F_{10}(p) dp \\
&= 2\pi a_0 \int_{-\pi}^{\pi} F_{10}(p) dp
\end{aligned} \tag{A.19}$$

$$\begin{aligned}
 & \iint_{-\pi}^{\pi} \delta r(t) F_{11}(t' - t) dt dt' \\
 &= \iint_{-\pi}^{\pi} \sum_{k_1} a_{k_1} i r_0 e^{i r_0 k_1 t} F_{11}(t' - t) dt dt' \\
 &= \sum_{k_1} a_{k_1} i r_0 k_1 \iint_{-\pi}^{\pi} e^{i r_0 k_1 (-p+t')} F_{11}(p) dp dt' \\
 &= \sum_{k_1} a_{k_1} i r_0 k_1 \int_{-\pi}^{\pi} e^{i r_0 k_1 t'} dt' \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i r_0 k_1 p} F_{11}(p) dp \\
 &= \sum_{k_1} a_{k_1} i r_0 k_1 2\pi \delta(k_1) \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i r_0 k_1 p} F_{11}(p) dp \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{A.20}$$

$$\begin{aligned}
 & \iint_{-\pi}^{\pi} \delta r^2(t) F_{20}(t' - t) dt dt' \\
 &= \iint_{-\pi}^{\pi} \sum_{k_1, k_2} a_{k_1} a_{k_2} e^{i r_0 (k_1 + k_2) t} F_{20}(t' - t) dt dt' \\
 &= \sum_{k_1, k_2} a_{k_1} a_{k_2} \iint_{-\pi}^{\pi} e^{i r_0 (k_1 + k_2) (-p+t')} F_{20}(p) dp dt' \\
 &= \sum_{k_1, k_2} a_{k_1} a_{k_2} \int_{-\pi}^{\pi} dt' e^{i r_0 (k_1 + k_2) t'} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i r_0 (k_1 + k_2) p} F_{20}(p) dp \\
 &= \sum_{k_1, k_2} a_{k_1} a_{k_2} 2\pi \delta(k_1 + k_2) \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i r_0 (k_1 + k_2) p} F_{20}(p) dp \\
 &= \sum_{k_1} a_{k_1} a_{-k_1} 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} F_{20}(p) dp \\
 &= 2\pi \sum_{k_1} |a_{k_1}|^2 \int_{-\pi}^{\pi} F_{20}(p) dp
 \end{aligned} \tag{A.21}$$

$$\begin{aligned}
 & \iint_{-\pi}^{\pi} \delta r(t) \delta r(t') F_{21}(t' - t) dt dt' \\
 &= \iint_{-\pi}^{\pi} \sum_{k_1, k_2} a_{k_1} a_{k_2} e^{ir_0(k_1 t + k_1 t')} F_{21}(t' - t) dt dt' \\
 &= \sum_{k_1, k_2} a_{k_1} a_{k_2} \iint_{-\pi}^{\pi} e^{ir_0(k_1(-p+t'))} e^{ir_0 k_2 t'} F_{21}(p) dp dt' \\
 &= \sum_{k_1, k_2} a_{k_1} a_{k_2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ir_0(k_1+k_2)t'} dt' \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ir_0 k_1 p} F_{21}(p) dp \\
 &= \sum_{k_1, k_2} a_{k_1} a_{k_2} 2\pi \delta(k_1 + k_2) \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ir_0 k_1 p} F_{21}(p) dp \\
 &= \sum_{k_1} a_{k_1} a_{-k_1} 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ir_0 k_1 p} F_{21}(p) dp \\
 &= 2\pi \sum_{k_1} |a_{k_1}|^2 \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ir_0 k_1 p} F_{21}(p) dp
 \end{aligned} \tag{A.22}$$

$$\begin{aligned}
 & \iint_{-\pi}^{\pi} \delta \dot{r}(t') \delta \dot{r}(t) F_{22}(t' - t) dt dt' \\
 &= \iint_{-\pi}^{\pi} \sum_{k_1, k_2} a_{k_1} a_{k_2} ir_0 k_1 ir_0 k_2 e^{ir_0(k_1 t + k_2 t')} F_{22}(t' - t) dt dt' \\
 &= - \sum_{k_1, k_2} a_{k_1} a_{k_2} r_0^2 k_1 k_2 \iint_{-\pi}^{\pi} e^{ir_0(k_1(-p+t') + t k_2)} F_{22}(p) dp dt' \\
 &= - \sum_{k_1, k_2} a_{k_1} a_{k_2} r_0^2 k_1 k_2 \int_{-\pi}^{\pi} e^{ir_0(k_1+k_2)t'} dt' \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ir_0 k_1 p} F_{22}(p) dp \\
 &= - \sum_{k_1, k_2} a_{k_1} a_{k_2} r_0^2 k_1 k_2 2\pi \delta(k_1 + k_2) \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ir_0 k_1 p} F_{22}(p) dp \\
 &= 2\pi r_0^2 \sum_{k_1} |a_{k_1}|^2 k^2 \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ir_0 k_1 p} F_{22}(p) dp
 \end{aligned} \tag{A.23}$$

$$\begin{aligned}
 & \iint_{-\pi}^{\pi} \delta r(t) \delta \dot{r}(t') F_{23}(t' - t) dt dt' \\
 &= \iint_{-\pi}^{\pi} \sum_{k_1, k_2} a_{k_1} a_{k_2} i r_0 k_2 e^{i r_0 (k_1 t + k_2 t')} F_{23}(t' - t) dt dt' \\
 &= \sum_{k_1, k_2} a_{k_1} a_{k_2} i r_0 k_2 \iint_{-\pi}^{\pi} e^{i r_0 (k_1 (-p + t'))} e^{i r_0 k_2 t'} F_{23}(p) dp dt' \\
 &= \sum_{k_1, k_2} a_{k_1} a_{k_2} i r_0 k_2 \int_{-\pi}^{\pi} e^{i r_0 (k_1 + k_2) t'} dt' \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i r_0 k_1 p} F_{23}(p) dp \\
 &= \sum_{k_1, k_2} a_{k_1} a_{k_2} i r_0 k_2 2\pi \delta(k_1 + k_2) \int_{-\pi}^{\pi} dp e^{-i r_0 k_1 p} F_{23}(p) \\
 &= \sum_{k_1} a_{k_1} a_{-k_1} i r_0 k_2 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} F_{23}(p) e^{-i r_0 k_1 p} dp \\
 &= -2\pi \sum_{k_1} |a_{k_1}|^2 i r_0 k \int_{-\pi}^{\pi} F_{23}(p) e^{-i r_0 k_1 p} dp
 \end{aligned} \tag{A.24}$$

$$\begin{aligned}
 & \iint_{-\pi}^{\pi} \delta r(t') \delta \dot{r}(t') F_{24}(t' - t) dt dt' \\
 &= \iint_{-\pi}^{\pi} \sum_{k_1, k_2} a_{k_1} a_{k_2} i r_0 k_2 e^{i r_0 (k_1 + k_2) t'} F_{24}(t' - t) dt dt' \\
 &= \sum_{k_1, k_2} a_{k_1} a_{k_2} i r_0 k_2 \int_{-\pi}^{\pi} e^{i r_0 (k_1 + k_2) t'} dt' \int_{-\pi}^{\pi} F_{24}(p) dp \\
 &= \sum_{k_1, k_2} a_{k_1} a_{k_2} i r_0 k_2 2\pi \delta(k_1 + k_2) \int_{-\pi}^{\pi} F_{24}(p) dp \\
 &= \sum_{k_1} a_{k_1} a_{-k_1} i r_0 (-k_1) 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} F_{24}(p) dp \\
 &= -2\pi i r_0 \sum_{k_1} |a_{k_1}|^2 k \int_{-\pi}^{\pi} F_{24}(p) dp \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{A.25}$$

$$\begin{aligned}
 & \iint_{-\pi}^{\pi} \delta r^3(t) F_{30}(t' - t) dt dt' \\
 &= \iint_{-\pi}^{\pi} \sum_{k_1, k_2} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} e^{ir_0(k_1+k_2+k_3)t} F_{30}(t' - t) dt dt' \\
 &= \sum_{k_1, k_2, k_3} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} \iint_{-\pi}^{\pi} e^{ir_0(k_1+k_2+k_3)(-p+t')} F_{30}(p) dp dt' \\
 &= \sum_{k_1, k_2, k_3} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ir_0(k_1+k_2+k_3)t'} dt' \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ir_0(k_1+k_2+k_3)p} F_{30}(p) dp \quad (\text{A.26}) \\
 &= \sum_{k_1, k_2, k_3} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} 2\pi \delta(k_1 + k_2 + k_3) \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ir_0(k_1+k_2+k_3)p} F_{30}(p) dp \\
 &= \sum_{k_1, k_2} a_{k_1} a_{k_2} a_{-(k_1+k_2)} 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} F_{30}(p) dp \\
 &= 2\pi \sum_{k_1, k_2} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_1+k_2}^* \int_{-\pi}^{\pi} F_{30}(p) dp
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \iint_{-\pi}^{\pi} \delta r^2(t') \delta r(t) F_{31}(t' - t) dt dt' \\
 &= \iint_{-\pi}^{\pi} \sum_{k_1, k_2} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} e^{ir_0(k_1 t + (k_2+k_3)t')} F_{31}(t' - t) dt dt' \\
 &= \sum_{k_1, k_2, k_3} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} \iint_{-\pi}^{\pi} e^{ir_0 k_1(-p+t')} e^{ir_0(k_2+k_3)t'} F_{31}(p) dp dt' \\
 &= \sum_{k_1, k_2, k_3} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ir_0(k_1+k_2+k_3)t'} dt' \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ir_0 k_1 p} F_{31}(p) dp \quad (\text{A.27}) \\
 &= \sum_{k_1, k_2, k_3} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} 2\pi \delta(k_1 + k_2 + k_3) \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ir_0 k_1 p} F_{31}(p) dp \\
 &= \sum_{k_1, k_2} a_{k_1} a_{k_2} a_{-(k_1+k_2)} 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ir_0 k_1 p} F_{31}(p) dp \\
 &= 2\pi \sum_{k_1, k_2} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_1+k_2}^* \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ir_0 k_1 p} F_{31}(p) dp
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \iint_{-\pi}^{\pi} \delta r^2(t') \delta \dot{r}(t) F_{32}(t' - t) dt dt' \\
 &= \iint_{-\pi}^{\pi} \sum_{k_1, k_2} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} i r_0 k_1 e^{i r_0 (k_1 t + (k_2 + k_3) t')} F_{32}(t' - t) dt dt' \\
 &= \sum_{k_1, k_2, k_3} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} i r_0 k_1 \iint_{-\pi}^{\pi} e^{i r_0 k_1 (-p + t')} e^{i r_0 (k_2 + k_3) t'} F_{32}(p) dp dt' \\
 &= \sum_{k_1, k_2, k_3} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} i r_0 k_1 \int_{-\pi}^{\pi} e^{i r_0 (k_1 + k_2 + k_3) t'} dt' \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i r_0 k_1 p} F_{32}(p) dp \quad (\text{A.28}) \\
 &= \sum_{k_1, k_2, k_3} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} i r_0 k_1 2\pi \delta(k_1 + k_2 + k_3) \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i r_0 k_1 p} F_{32}(p) dp \\
 &= \sum_{k_1, k_2} a_{k_1} a_{k_2} a_{-(k_1 + k_2)} i r_0 k_1 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i r_0 k_1 p} F_{32}(p) dp \\
 &= 2\pi \sum_{k_1, k_2} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_1 + k_2}^* i r_0 k_1 \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i r_0 k_1 p} F_{32}(p) dp
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \iint_{-\pi}^{\pi} \delta r^2(t) \delta \dot{r}(t) F_{33}(t' - t) dt dt' \\
 &= \iint_{-\pi}^{\pi} \sum_{k_1, k_2} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} i r_0 k_1 e^{i r_0 (k_1 + k_2 + k_3) t} F_{33}(t' - t) dt dt' \\
 &= \sum_{k_1, k_2, k_3} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} i r_0 k_1 \iint_{-\pi}^{\pi} e^{i r_0 (k_1 + k_2 + k_3) (-p + t')} F_{33}(p) dp dt' \\
 &= \sum_{k_1, k_2, k_3} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} i r_0 k_1 \int_{-\pi}^{\pi} e^{i r_0 (k_1 + k_2 + k_3) t'} dt' \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i r_0 (k_1 + k_2 + k_3) p} F_{33}(p) dp \\
 &= \sum_{k_1, k_2, k_3} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} i r_0 k_1 2\pi \delta(k_1 + k_2 + k_3) \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i r_0 (k_1 + k_2 + k_3) p} F_{33}(p) dp \\
 &= \sum_{k_1, k_2} a_{k_1} a_{k_2} a_{-(k_1 + k_2)} i r_0 k_1 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} F_{33}(p) dp \\
 &= 2\pi \sum_{k_1, k_2} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_1 + k_2}^* i r_0 k_1 \int_{-\pi}^{\pi} F_{33}(p) dp \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{A.29}$$

$$\begin{aligned}
 & \iint_{-\pi}^{\pi} \delta r(t) \delta \dot{r}(t') \delta \dot{r}(t) F_{34}(t' - t) dt dt' \\
 &= \iint_{-\pi}^{\pi} \sum \lim(t) i t s_{k_1, k_2} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} i^2 r_0^2 k_2 k_3 e^{i r_0 k_3 t' + (k_1 + k_2) t} F_{34}(t' - t) dt dt' \\
 &= - \sum_{k_1, k_2, k_3} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} r_0^2 k_2 k_3 \iint_{-\pi}^{\pi} e^{i r_0 (k_1 + k_2) (-p + t')} e^{i r_0 k_3 t'} F_{34}(p) dp dt' \\
 &= - \sum_{k_1, k_2, k_3} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} r_0^2 k_2 k_3 \int_{-\pi}^{\pi} e^{i r_0 (k_1 + k_2 + k_3) t'} dt' \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i r_0 (k_1 + k_2) p} F_{34}(p) dp \\
 &= - \sum_{k_1, k_2, k_3} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} r_0^2 k_2 k_3 2\pi \delta(k_1 + k_2 + k_3) \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i r_0 (k_1 + k_2) p} F_{34}(p) dp \\
 &= - \sum_{k_1, k_2} a_{k_1} a_{k_2} a_{-(k_1 + k_2)} r_0^2 k_2 k_3 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i r_0 (k_1 + k_2) p} F_{34}(p) dp \\
 &= +2\pi \sum_{k_1, k_2} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_1 + k_2}^* r_0^2 k_2 (k_1 + k_2) \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i r_0 (k_1 + k_2) p} F_{34}(p) dp
 \end{aligned} \tag{A.30}$$

$$\begin{aligned}
 & \iint_{-\pi}^{\pi} \delta r(t) \delta r(t') \delta \dot{r}' F_{35}(t' - t) dt dt' \\
 &= \iint_{-\pi}^{\pi} \sum_{k_1, k_2} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} i r_0 k_2 e^{i r_0 k_1 t + (k_2 + k_3) t'} F_{35}(t' - t) dt dt' \\
 &= \sum_{k_1, k_2, k_3} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} i r_0 k_2 \iint_{-\pi}^{\pi} e^{i r_0 k_1 (-p + t')} e^{i r_0 (k_2 + k_3) t'} F_{35}(p) dp dt' \\
 &= \sum_{k_1, k_2, k_3} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} i r_0 k_2 \int_{-\pi}^{\pi} e^{i r_0 (k_1 + k_2 + k_3) t'} dt' \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i r_0 k_1 p} F_{34}(p) dp \\
 &= \sum_{k_1, k_2, k_3} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} i r_0 k_2 2\pi \delta(k_1 + k_2 + k_3) \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i r_0 k_1 p} F_{35}(p) dp \\
 &= \sum_{k_1, k_2} a_{k_1} a_{k_2} a_{-(k_1 + k_2)} i r_0 k_2 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i r_0 k_1 p} F_{35}(p) dp \\
 &= 2i\pi r_0 \sum_{k_1, k_2} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_1 + k_2}^* k_2 \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i r_0 k_1 p} F_{35}(p) dp
 \end{aligned} \tag{A.31}$$

$$\begin{aligned}
 & \iint_{-\pi}^{\pi} \delta r^4(t) F_{40}(t' - t) dt dt' \\
 &= \iint_{-\pi}^{\pi} \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a_{k_4} e^{ir_0(k_1+k_2+k_3+k_4)t} F_{40}(t' - t) dt dt' \\
 &= \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a_{k_4} \iint_{-\pi}^{\pi} e^{ir_0(k_1+k_2+k_3+k_4)(-p+t')} F_{40}(p) dp dt' \\
 &= \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a_{k_4} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ir_0(k_1+k_2+k_3+k_4)t'} dt' \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ir_0(k_1+k_2+k_3+k_4)p} F_{40}(p) dp \\
 &= \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a_{k_4} 2\pi \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ir_0(k_1+k_2+k_3+k_4)p} F_{40}(p) dp \\
 &= \sum_{k_1, k_2, k_3} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a_{-(k_1+k_2+k_3)} 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} F_{40}(p) dp \\
 &= 2\pi \sum_{k_1, k_2, k_3} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a_{k_1+k_2+k_3}^* \int_{-\pi}^{\pi} F_{40}(p) dp
 \end{aligned} \tag{A.32}$$

$$\begin{aligned}
 & \iint_{-\pi}^{\pi} \delta r^3(t) \delta r(t') F_{41}(t' - t) dt dt' \\
 &= \iint_{-\pi}^{\pi} \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a_{k_4} e^{ir_0(k_1 t' + (k_2+k_3+k_4)t)} F_{41}(t' - t) dt dt' \\
 &= \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a_{k_4} \iint_{-\pi}^{\pi} e^{ir_0 k_1 t'} e^{ir_0(k_2+k_3+k_4)(-p+t')} F_{41}(p) dp dt' \\
 &= \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a_{k_4} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ir_0(k_1+k_2+k_3+k_4)t'} dt' \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ir_0(k_2+k_3+k_4)p} F_{41}(p) dp \\
 &= \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a_{k_4} 2\pi \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ir_0(k_2+k_3+k_4)p} F_{41}(p) dp \\
 &= 2\pi \sum_{k_1, k_2, k_3} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a_{-(k_1+k_2+k_3)} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ir_0 k_1 p} F_{41}(p) dp \\
 &= 2\pi \sum_{k_1, k_2, k_3} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a_{k_1+k_2+k_3}^* \int_{-\pi}^{\pi} e^{ir_0 k_1 p} F_{41}(p) dp
 \end{aligned} \tag{A.33}$$

$$\begin{aligned}
 & \iint_{-\pi}^{\pi} \delta r^2(t) \delta r^2(t') F_{42}(t' - t) dt dt' \\
 &= \iint_{-\pi}^{\pi} \sum_{k_1, k_2+k_3+k_4} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a_{k_4} e^{ir_0(k_1+k_2)t+(k_3+k_4)t'} F_{42}(t' - t) dt dt' \\
 &= \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a_{k_4} \iint_{-\pi}^{\pi} e^{ir_0(k_1+k_2)(-p+t')} e^{k_3+k_4} F_{42}(p) dp dt' \\
 &= \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a_{k_4} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ir_0(k_1+k_2+k_3+k_4)t'} dt' \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ir_0(k_1+k_2)p} F_{42}(p) dp \\
 &= \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a_{k_4} 2\pi \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ir_0(k_1+k_2)p} F_{42}(p) dp \\
 &= \sum_{k_1, k_2, k_3} a_{k_1} a_{k_1} a_{k_2} a_{-(k_1+k_2+k_3)} 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ir_0(k_1+k_2)p} F_{42}(p) dp \\
 &= 2\pi \sum_{k_1, k_2, k_3} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_1+k_2+k_3}^* \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ir_0(k_1+k_2)p} F_{42}(p) dp
 \end{aligned} \tag{A.34}$$

$$\begin{aligned}
 & \iint_{-\pi}^{\pi} \delta r^3(t') \delta r(t) F_{43}(t' - t) dt dt' \\
 &= \iint_{-\pi}^{\pi} \sum_{k_1, k_2+k_3+k_4} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a_{k_4} ir_0 k_1 e^{ir_0 k_1 t + (k_2+k_3+k_4)t'} F_{43}(t' - t) dt dt' \\
 &= \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a_{k_4} ir_0 k_1 \iint_{-\pi}^{\pi} e^{ir_0 k_1(-p+t')} e^{k_2+k_3+k_4} F_{43}(p) dp dt' \\
 &= \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a_{k_4} ir_0 k_1 \int_{-\pi}^{\pi} e^{ir_0(k_1+k_2+k_3+k_4)t'} dt' \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ir_0 k_1 p} F_{43}(p) dp \\
 &= \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a_{k_4} ir_0 k_1 2\pi \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ir_0 k_1 p} F_{43}(p) dp \\
 &= \sum_{k_1, k_2, k_3} a_{k_1} a_{k_1} a_{k_2} a_{-(k_1+k_2+k_3)} ir_0 k_1 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ir_0 k_1 p} F_{43}(p) dp \\
 &= 2\pi \sum_{k_1, k_2, k_3} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_1+k_2+k_3}^* ir_0 k_1 \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ir_0 k_1 p} F_{43}(p) dp
 \end{aligned} \tag{A.35}$$

$$\begin{aligned}
 & \iint_{-\pi}^{\pi} \delta r^3(t) \delta \dot{r}(t) F_{44}(t' - t) dt dt' \\
 &= \iint_{-\pi}^{\pi} \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a_{k_4} i r_0 k_1 e^{i r_0 (k_1 + k_2 + k_3 + k_4) t} F_{44}(t' - t) dt dt' \\
 &= \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a_{k_4} i r_0 k_1 \iint_{-\pi}^{\pi} e^{i r_0 (k_1 + k_2 + k_3 + k_4) (-p + t')} F_{44}(p) dp dt' \\
 &= \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a_{k_4} i r_0 k_1 \int_{-\pi}^{\pi} e^{i r_0 (k_1 + k_2 + k_3 + k_4) t'} dt' \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i r_0 (k_1 + k_2 + k_3 + k_4) p} F_{44}(p) dp \\
 &= \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a_{k_4} i r_0 k_1 2\pi \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i r_0 (k_1 + k_2 + k_3 + k_4) p} F_{44}(p) dp \\
 &= \sum_{k_1, k_2, k_3} a_{k_1} a_{k_1} a_{k_2} a_{-(k_1 + k_2 + k_3)} i r_0 k_1 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} F_{44}(p) dp \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{A.36}$$

$$\begin{aligned}
 & \iint_{-\pi}^{\pi} \delta r^2(t') \delta r(t) \delta \dot{r} F_{45}(t' - t) dt dt' \\
 &= \iint_{-\pi}^{\pi} \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a_{k_4} i r_0 k_1 e^{i r_0 (k_1 + k_2) t + (k_3 + k_4) t'} F_{45}(t' - t) dt dt' \\
 &= \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a_{k_4} i r_0 k_1 \iint_{-\pi}^{\pi} e^{i r_0 (k_1 + k_2) (-p + t')} e^{k_3 + k_4} F_{45}(p) dp dt' \\
 &= \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a_{k_4} i r_0 k_1 \int_{-\pi}^{\pi} e^{i r_0 (k_1 + k_2 + k_3 + k_4) t'} dt' \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i r_0 (k_1 + k_2) p} F_{45}(p) dp \\
 &= \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a_{k_4} i r_0 k_1 2\pi \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i r_0 (k_1 + k_2) p} F_{45}(p) dp \\
 &= \sum_{k_1, k_2, k_3} a_{k_1} a_{k_1} a_{k_2} a_{-(k_1 + k_2 + k_3)} i r_0 k_1 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i r_0 (k_1 + k_2) p} F_{45}(p) dp \\
 &= 2\pi \sum_{k_1, k_2, k_3} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_1 + k_2 + k_3}^* i r_0 k_1 \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i r_0 (k_1 + k_2) p} F_{45}(p) dp
 \end{aligned} \tag{A.37}$$

$$\begin{aligned}
 & \iint_{-\pi}^{\pi} \delta r^2(t') \delta r(t) \delta \dot{r}(t') F_{46}(t' - t) dt dt' \\
 &= \iint_{-\pi}^{\pi} \sum_{k_1, k_2+k_3+k_4} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a_{k_4} i r_0 k_2 e^{i r_0 k_1 t + (k_2+k_3+k_4)t'} F_{46}(t' - t) dt dt' \\
 &= \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a_{k_4} i r_0 k_1 \iint_{-\pi}^{\pi} e^{i r_0 k_1 (-p+t')} e^{k_2+k_3+k_4} F_{46}(p) dp dt' \\
 &= \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a_{k_4} i r_0 k_2 \int_{-\pi}^{\pi} e^{i r_0 (k_1+k_2+k_3+k_4)t'} dt' \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i r_0 k_1 p} F_{46}(p) dp \\
 &= \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a_{k_4} i r_0 k_2 2\pi \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i r_0 k_1 p} F_{46}(p) dp \\
 &= \sum_{k_1, k_2, k_3} a_{k_1} a_{k_1} a_{k_2} a_{-(k_1+k_2+k_3)} i r_0 k_2 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i r_0 k_1 p} F_{46}(p) dp \\
 &= 2\pi \sum_{k_1, k_2, k_3} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_1+k_2+k_3}^* i r_0 k_2 \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i r_0 k_1 p} F_{46}(p) dp
 \end{aligned} \tag{A.38}$$

$$\begin{aligned}
 & \iint_{-\pi}^{\pi} \delta r^2(t') \delta \dot{r}(t') \delta \dot{r}(t) F_{47}(t' - t) dt dt' \\
 &= \iint_{-\pi}^{\pi} \sum_{k_1, k_2+k_3+k_4} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a_{k_4} i^2 r_0^2 k_1 k_2 e^{i r_0 k_1 t + (k_2+k_3+k_4)t'} F_{47}(t' - t) dt dt' \\
 &= - \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a_{k_4} r_0^2 k_1 k_2 \iint_{-\pi}^{\pi} e^{i r_0 k_1 (-p+t')} e^{k_2+k_3+k_4} F_{47}(p) dp dt' \\
 &= - \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a_{k_4} r_0^2 k_1 k_2 \int_{-\pi}^{\pi} e^{i r_0 (k_1+k_2+k_3+k_4)t'} dt' \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i r_0 k_1 p} F_{47}(p) dp \\
 &= - \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a_{k_4} r_0^2 k_1 k_2 2\pi \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i r_0 k_1 p} F_{47}(p) dp \\
 &= - \sum_{k_1, k_2, k_3} a_{k_1} a_{k_2} a_{-(k_1+k_2+k_3)} r_0^2 k_1 k_2 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i r_0 k_1 p} F_{47}(p) dp \\
 &= -2\pi \sum_{k_1, k_2, k_3} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_1+k_2+k_3}^* r_0^2 k_1 k_2 \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i r_0 k_1 p} F_{47}(p) dp
 \end{aligned} \tag{A.39}$$

$$\begin{aligned}
 & \iint_{-\pi}^{\pi} \delta r^3(t) \delta \dot{r}(t) F_{48}(t' - t) dt dt' \\
 &= \iint_{-\pi}^{\pi} \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a_{k_4} i r_0 k_1 e^{i r_0 (k_1 + k_2 + k_3 + k_4) t} F_{48}(t' - t) dt dt' \\
 &= \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a_{k_4} i r_0 k_1 \iint_{-\pi}^{\pi} e^{i r_0 (k_1 + k_2 + k_3 + k_4) (-p + t')} F_{48}(p) dp dt' \\
 &= \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a_{k_4} i r_0 k_1 \int_{-\pi}^{\pi} e^{i r_0 (k_1 + k_2 + k_3 + k_4) t'} dt' \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i r_0 (k_1 + k_2 + k_3 + k_4) p} F_{48}(p) dp \\
 &= \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a_{k_4} i r_0 k_1 2\pi \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i r_0 (k_1 + k_2 + k_3 + k_4) p} F_{48}(p) dp \\
 &= \sum_{k_1, k_2, k_3} a_{k_1} a_{k_2} a_{-(k_1 + k_2 + k_3)} i r_0 k_1 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} F_{48}(p) dp \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{A.40}$$

$$\begin{aligned}
 & \iint_{-\pi}^{\pi} \delta r(t) \delta r(t') \delta \dot{r}(t) \delta \dot{r}(t') F_{49}(t' - t) dt dt' \\
 &= \iint_{-\pi}^{\pi} \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a_{k_4} i^2 r_0^2 k_1 k_3 e^{i r_0 (k_1 + k_2) t + (k_3 + k_4) t'} F_{49}(t' - t) dt dt' \\
 &= -r_0^2 \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a_{k_4} k_1 k_3 \iint_{-\pi}^{\pi} e^{i r_0 (k_1 + k_2) (-p + t')} e^{k_3 + k_4} F_{49}(p) dp dt' \\
 &= -r_0^2 \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a_{k_4} k_1 k_3 \int_{-\pi}^{\pi} e^{i r_0 (k_1 + k_2 + k_3 + k_4) t'} dt' \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i r_0 (k_1 + k_2) p} F_{49}(p) dp \\
 &= -2\pi r_0^2 \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a_{k_4} k_1 k_3 \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i r_0 (k_1 + k_2) p} F_{49}(p) dp \\
 &= -2\pi r_0^2 \sum_{k_1, k_2, k_3} a_{k_1} a_{k_2} a_{-(k_1 + k_2 + k_3)} k_1 k_3 \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i r_0 (k_1 + k_2) p} F_{49}(p) dp \\
 &= -2\pi r_0^2 \sum_{k_1, k_2, k_3} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_1 + k_2 + k_3}^* k_1 k_3 \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i r_0 (k_1 + k_2) p} F_{49}(p) dp
 \end{aligned} \tag{A.41}$$

Annexe B

Définition des Fonctions utilisées

B.1 Fonctions F

$$F_{00}(\Delta t) = r_0^2 \cos(\Delta t) \Psi(X_0) \quad (\text{B.1})$$

$$F_{10}(\Delta t) = r_0 \cos(\Delta t) \left\{ \Psi(X_0) + r_0 \left| \sin\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \right| \frac{d\Psi}{dz}(X_0) \right\} \quad (\text{B.2})$$

$$F_{11}(\Delta t) = r_0 \sin(\Delta t) \Psi(X_0) \quad (\text{B.3})$$

$$F_{20}(\Delta t) = r_0 \cos(\Delta t) \left\{ \left| \sin\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \right| \frac{d\Psi}{dz}(X_0) + \frac{A(\Delta t)}{4} \frac{d\Psi}{dz}(X_0) + \frac{r_0 \sin^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right)}{2} \frac{d^2\Psi}{dz^2}(X_0) \right\} \quad (\text{B.4})$$

$$F_{21}(\Delta t) = \cos(\Delta t) \left\{ \Psi(X_0) + 2r_0 \left| \sin\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \right| \frac{d\Psi}{dz}(X_0) - \frac{r_0 A(\Delta t)}{2} \frac{d\Psi}{dz}(X_0) + r_0^2 \sin^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \frac{d^2\Psi}{dz^2}(X_0) \right\} \quad (\text{B.5})$$

$$F_{22}(\Delta t) = \cos(\Delta t) \Psi(X_0) \quad (\text{B.6})$$

$$F_{23}(\Delta t) = \sin(\Delta t) \left\{ \Psi(X_0) + r_0 \left| \sin\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \right| \frac{d\Psi}{dz}(X_0) \right\} \quad (\text{B.7})$$

$$F_{24}(\Delta t) = r_0 \sin(\Delta t) \left| \sin\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \right| \Psi'(X_0) \quad (\text{B.8})$$

$$F_{30}(\Delta t) = \frac{\cos(\Delta t)}{2} \left\{ r_0 \sin^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \left(\frac{d^2\Psi}{dz^2}(X_0) + \frac{r_0 |\sin(\frac{\Delta t}{2})|}{3} \frac{d^3\Psi}{dz^3}(X_0) \right) + \frac{A(\Delta t)}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{d\Psi}{dz}(X_0) + r_0 \left| \sin\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \right| \frac{d^2\Psi}{dz^2}(X_0) \right) \right\} \quad (\text{B.9})$$

$$F_{31}(\Delta t) = \cos(\Delta t) \left\{ \frac{3r_0 \sin^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right)}{2} \left(\frac{d^2\Psi}{dz^2}(X_0) + \frac{r_0 |\sin(\frac{\Delta t}{2})|}{3} \frac{d^3\Psi}{dz^3}(X_0) \right) - \frac{A(\Delta t)}{4} \left(\frac{1}{2} \frac{d\Psi}{dz}(X_0) + r_0 \left| \sin\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \right| \frac{d^2\Psi}{dz^2}(X_0) \right) + \left| \sin\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \right| \frac{d\Psi}{dz}(X_0) \right\} \quad (\text{B.10})$$

$$F_{32}(\Delta t) = \sin(\Delta t) \left\{ \frac{A(\Delta t)}{4} \frac{d\Psi}{dz}(X_0) + \left| \sin\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \right| \frac{d\Psi}{dz}(X_0) + \frac{r_0 \sin^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right)}{2} \frac{d^2\Psi}{dz^2}(X_0) \right\} \quad (\text{B.11})$$

$$F_{33}(\Delta t) = \frac{\sin(\Delta t)}{2} \left\{ \frac{A(\Delta t)}{2} \frac{d\Psi}{dz}(X_0) + r_0 \sin^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \frac{d^2\Psi}{dz^2}(X_0) \right\} \quad (\text{B.12})$$

$$F_{34}(\Delta t) = \cos(\Delta t) \left| \sin\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \right| \frac{d\Psi}{dz}(X_0) \quad (\text{B.13})$$

$$F_{35}(\Delta t) = \sin(\Delta t) \left\{ -\frac{A(\Delta t)}{2} \frac{d\Psi}{dz}(X_0) + \left| \sin\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \right| \frac{d\Psi}{dz}(X_0) + r_0 \sin^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \frac{d^2\Psi}{dz^2}(X_0) \right\} \quad (\text{B.14})$$

$$F_{40}(\Delta t) = \frac{\cos(\Delta t)}{2} \left\{ \frac{r_0 |\sin^3\left(\frac{\Delta t}{2}\right)|}{3} \left(\frac{d^3\Psi}{dz^3}(X_0) + \frac{r_0 |\sin(\frac{\Delta t}{2})|}{4} \frac{d^4\Psi}{dz^4}(X_0) \right) + \frac{A^2(\Delta t)}{2} \left(-\frac{1}{16r_0 |\sin(\frac{\Delta t}{2})|} \frac{d\Psi}{dz}(X_0) + \frac{1}{8} \frac{d^2\Psi}{dz^2}(X_0) \right) + \frac{A(\Delta t)}{2} \left(-\frac{1}{4r_0} \frac{d\Psi}{dz}(X_0) + \frac{|\sin(\frac{\Delta t}{2})|}{2} \frac{d^2\Psi}{dz^2}(X_0) + \frac{r_0 \sin^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right)}{2} \frac{d^3\Psi}{dz^3}(X_0) \right) \right\} \quad (\text{B.15})$$

$$\begin{aligned}
 F_{41}(\Delta t) = \frac{\cos(\Delta t)}{2} \left\{ \frac{4r_0 |\sin^3(\frac{\Delta t}{2})|}{3} \left(\frac{d^3\Psi}{dz^3}(X_0) + \frac{r_0 |\sin(\frac{\Delta t}{2})|}{4} \frac{d^4\Psi}{dz^4}(X_0) \right) \right. \\
 + \frac{A(\Delta t)}{2r_0} \frac{d\Psi}{dz}(X_0) + \sin^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \frac{d^2\Psi}{dz^2}(X_0) \\
 \left. - \frac{A^2(\Delta t)}{4} \left(\frac{d^2\Psi}{dz^2}(X_0) - \frac{1}{2r_0 |\sin(\frac{\Delta t}{2})|} \frac{d\Psi}{dz}(X_0) \right) \right\} \quad (\text{B.16})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{42}(\Delta t) = \cos(\Delta t) \left\{ \frac{A(\Delta t)}{2r_0} \frac{d\Psi}{dz}(X_0) + \sin^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \frac{d^2\Psi}{dz^2}(X_0) \right. \\
 + r_0 \left| \sin^3\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \right| \left(\frac{d^3\Psi}{dz^3}(X_0) + \frac{r_0 |\sin(\frac{\Delta t}{2})|}{4} \frac{d^4\Psi}{dz^4}(X_0) \right) \\
 + \frac{3A^2(\Delta t)}{16} \left(-\frac{1}{2r_0 |\sin(\frac{\Delta t}{2})|} \frac{d\Psi}{dz}(X_0) + \frac{d^2\Psi}{dz^2}(X_0) \right) \\
 - \frac{A(\Delta t)}{2} \left(-\frac{1}{4r_0} \frac{d\Psi}{dz}(X_0) + \frac{|\sin(\frac{\Delta t}{2})|}{2} \frac{d^2\Psi}{dz^2}(X_0) \right. \\
 \left. + \frac{r_0 \sin^2(\frac{\Delta t}{2})}{2} \frac{d^3\Psi}{dz^3}(X_0) \right) \left. \right\} \quad (\text{B.17})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{43}(\Delta t) = \frac{\sin(\Delta t)}{2} \left\{ \frac{A(\Delta t)}{2} \left(-\frac{1}{2r_0} \frac{d\Psi}{dz}(X_0) + \left| \sin\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \right| \frac{d^2\Psi}{dz^2}(X_0) \right) \right. \\
 + \frac{A(\Delta t)}{2r_0} \frac{d\Psi}{dz}(X_0) + \sin^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \frac{d^2\Psi}{dz^2}(X_0) \\
 \left. + \frac{r_0 |\sin^3(\frac{\Delta t}{2})|}{3} \frac{d^3\Psi}{dz^3}(X_0) \right\} \quad (\text{B.18})
 \end{aligned}$$

$$F_{44}(\Delta t) = \frac{\sin(\Delta t)}{4} A(\Delta t) \left\{ -\frac{1}{2r_0} \frac{d\Psi}{dz}(X_0) + \left| \sin\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \right| \frac{d^2\Psi}{dz^2}(X_0) \right\} \quad (\text{B.19})$$

$$\begin{aligned}
 F_{45}(\Delta t) = \frac{\sin(\Delta t)}{2} \left\{ -\frac{A(\Delta t)}{2} \left(-\frac{1}{2r_0} \frac{d\Psi}{dz}(X_0) + \left| \sin\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \right| \frac{d^2\Psi}{dz^2}(X_0) \right) \right. \\
 - \frac{A(\Delta t)}{r_0} \frac{d\Psi}{dz}(X_0) + 2 \sin^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \frac{d^2\Psi}{dz^2}(X_0) \\
 \left. + r_0 |\sin^3(\frac{\Delta t}{2})| \frac{d^3\Psi}{dz^3}(X_0) \right\} \quad (\text{B.20})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{46}(\Delta t) = \frac{\sin(\Delta t)}{2} \left\{ \frac{A(\Delta t)}{2} \left(-\frac{1}{2r_0} \frac{d\Psi}{dz}(X_0) + \left| \sin\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \right| \frac{d^2\Psi}{dz^2}(X_0) \right) \right. \\
 - \frac{A(\Delta t)}{2r_0} \frac{d\Psi}{dz}(X_0) - \sin^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \frac{d^2\Psi}{dz^2}(X_0) \\
 \left. - r_0 \left| \sin^3\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \right| \frac{d^3\Psi}{dz^3}(X_0) \right\} \quad (\text{B.21})
 \end{aligned}$$

$$F_{47}(\Delta t) = \frac{\cos(\Delta t)}{2} \left\{ \frac{A(\Delta t)}{2r_0} \frac{d\Psi}{dz}(X_0) + \sin^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \frac{d^2\Psi}{dz^2}(X_0) \right\} \quad (\text{B.22})$$

$$F_{48}(\Delta t) = \sin(\Delta t) \frac{r_0 \left| \sin^3\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \right|}{6} \frac{d^3\Psi}{dz^3}(X_0) \quad (\text{B.23})$$

$$F_{49}(\Delta t) = \frac{\cos(\Delta t)}{2} \left\{ -\frac{A(\Delta t)}{r_0} \frac{d\Psi}{dz}(X_0) + 2 \sin^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \frac{d^2\Psi}{dz^2}(X_0) \right\} \quad (\text{B.24})$$

Le lecteur pourra remarquer que les fonctions F_{20} , F_{21} , F_{30} , F_{31} , F_{32} , F_{33} , F_{35} , F_{40} , F_{41} , F_{42} , F_{43} , F_{44} , F_{45} , F_{46} , F_{47} et F_{49} ne sont pas définies en zéro. Il est, par contre, possible de montrer qu'elles admettent une limite en zéro et donc de les prolonger par continuité.

Il convient aussi de remarquer que, dans l'absolu, ces expressions ne sont pas uniquement fonction de Δt . Pour être parfaitement rigoureux, il aurait fallu rappeler que ces fonctions dépendent aussi de r_0 et de ϵ . Cela présente cependant le désavantage de surcharger les notations. Nous avons donc omis ces paramètres.

Notons, enfin, que ces expressions ont été vérifiées en utilisant le logiciel de calcul formel Maple.

B.2 Fonctions G

Nous allons maintenant pouvoir définir les intégrales des fonctions F_{ij} . Nous les noterons G_{ij} . Le lecteur pourra se rapporter à la partie A.5 pour obtenir le détail des calculs d'intégrales.

$$G_{00} = \pi \int_{-\pi}^{\pi} F_{00}(p) dp \quad (\text{B.25})$$

$$G_{10}(k_1) = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} F_{10}(p) dp \quad (\text{B.26})$$

$$G_{20} = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} F_{20}(p) dp \quad (\text{B.27})$$

$$G_{21}(k) = \pi \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ir_0kp} F_{21}(p) dp \quad (\text{B.28})$$

$$G_{22}(k_1 k_2) = -\pi r_0^2 k_1 k_2 \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ir_0k_1p} F_{22}(p) dp \quad (\text{B.29})$$

$$G_{23}(k_1, k_2) = 2\pi ir_0 k_1 \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ir_0k_2p} F_{23}(p) dp \quad (\text{B.30})$$

$$G_{30} = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} F_{30}(p) dp \quad (\text{B.31})$$

$$G_{31}(k) = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ir_0kp} F_{31}(p) dp \quad (\text{B.32})$$

$$G_{32}(k) = -2ikr_0\pi \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ir_0kp} F_{32}(p) dp \quad (\text{B.33})$$

$$G_{34}(k_1, k_2, k_3) = -r_0^2\pi k_1 k_2 \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ir_0k_3p} (e^{-ir_0k_1p} + e^{-ir_0k_2p}) F_{34}(p) dp \quad (\text{B.34})$$

$$G_{35}(k_1, k_2, k_3) = ir_0\pi k_1 \int_{-\pi}^{\pi} (e^{-ir_0k_2p} + e^{-ir_0k_3p}) F_{35}(p) dp \quad (\text{B.35})$$

$$G_{40} = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} F_{40}(p) dp \quad (\text{B.36})$$

$$G_{41}(k) = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikr_0p} F_{41}(p) dp \quad (\text{B.37})$$

$$G_{42}(k_1, k_2, k_3, k_4) = \frac{\pi}{3} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ir_0k_1p} (e^{-ir_0k_2p} + e^{-ir_0k_3p} + e^{-ir_0k_4p}) F_{42}(p) dp \quad (\text{B.38})$$

$$G_{43}(k) = -2\pi ir_0k \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ir_0kp} F_{43}(p) dp \quad (\text{B.39})$$

$$G_{45}(k_1, k_2, k_3, k_4) = -\frac{2\pi i r_0}{3} k_1 \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i r_0 k_1 p} (e^{-i r_0 k_2 p} + e^{-i r_0 k_3 p} + e^{-i r_0 k_4 p}) F_{45}(p) dp \quad (\text{B.40})$$

$$G_{46}(k_1, k_2, k_3, k_4) = -\frac{2\pi i r_0}{3} k_1 \int_{-\pi}^{\pi} (e^{-i r_0 k_2 p} + e^{-i r_0 k_3 p} + e^{-i r_0 k_4 p}) F_{46}(p) dp \quad (\text{B.41})$$

$$G_{47}(k) = \frac{2\pi r_0^2}{3} k^2 \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i r_0 k p} F_{47}(p) dp \quad (\text{B.42})$$

$$G_{49}(k_1, k_2, k_3, k_4) = -\frac{\pi r_0^2}{8} (k_1 k_2 + k_3 k_4) \int_{-\pi}^{\pi} (e^{-i r_0 k_1 p} + e^{-i r_0 k_2 p}) \cdot (e^{-i r_0 k_3 p} + e^{-i r_0 k_4 p}) F_{49}(p) dp \quad (\text{B.43})$$

Annexe C

Méthode des Petites Perturbations

Nous souhaitons ici obtenir les valeurs propres de la matrice hessienne de E :

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{\partial^2 E}{\partial a_p \partial a_q} (r_0, \epsilon, m) \\
 &= e_{p,q} \delta(p+q) + e_{p,q,m} a_m \delta(p+q+m) + e_{p,q,-m} a_{-m} \delta(p+q-m) \\
 &\quad + |a_m|^2 e_{p,q,m,-m} \delta(p+q) + \frac{a_{-m}^2}{2} e_{p,q,-m,-m} \delta(p+q-2m) \\
 &\quad + \frac{a_m^2}{2} e_{p,q,m,m} \delta(p+q+2m)
 \end{aligned} \tag{C.1}$$

Rappelons que nous notons $K = K_0 + K_1 + K_2$ avec K_1 et K_2 "petits" devant K_0 :

$$\begin{aligned}
 K_0 &= (e_{p,q} \delta(p+q) + |a_m|^2 e_{p,q,m,-m} \delta(p+q))_{(p,q) \in \mathbb{Z}^2} \\
 K_1 &= (e_{p,q,m} a_m \delta(p+q+m) + e_{p,q,-m} a_{-m})_{(p,q) \in \mathbb{Z}^2} \\
 K_2 &= \left(\frac{a_{-m}^2}{2} e_{p,q,-m,-m} \delta(p+q-2m) + \frac{a_m^2}{2} e_{p,q,m,m} \delta(p+q+2m) \right)_{(p,q) \in \mathbb{Z}^2}
 \end{aligned}$$

Nous pouvons facilement vérifier que, pour des raisons de symétrie, $e_{p,-p} + |a_m|^2 e_{p,-p,m,-m} = e_{-p,p} + |a_m|^2 e_{-p,p,m,-m} \in \mathbb{R}$. K_0 est donc hermitienne et a des valeurs propres réelles. Soit $|b \rangle = (b(p))_{p \in \mathbb{Z}}$ un de ses vecteurs propres, λ étant la valeur propre associée. Nous avons donc le système suivant :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \begin{cases} \lambda |b(-p) \rangle &= (e_{p,-p} + |a_m|^2 e_{p,-p,m,-m}) |b(p) \rangle \\ \lambda |b(p) \rangle &= (e_{p,-p} + |a_m|^2 e_{-p,p,m,-m}) |b(-p) \rangle \end{cases}$$

Les solutions sont les vecteurs propres :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall p > 0 \quad |b_{p-}^{[0]} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\delta(q+p) + \delta(q-p))_q \\ |b_{p+}^{[0]} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\delta(q+p) - \delta(q-p))_q \end{array} \right\} \tag{C.2}$$

et

$$|b_0^{[0]} \rangle = (\delta(q))_q$$

Les valeurs propres correspondantes étant :

$$\lambda_{p+}^{[0]} = e_{p,-p} + |a_m|^2 e_{-p,p,m,-m},$$

$$\lambda_{p-}^{[0]} = -e_{p,-p} - |a_m|^2 e_{-p,p,m,-m}$$

et

$$\lambda_0^{[0]} = e_{0,0}.$$

Notons bien que l'indice $\pm p$ n'est qu'une notation. En particulier $|b_{p\pm}^{[0]} \rangle$ sont bien les vecteur propres se rapportant aux $\pm p^{emes}$ composantes de Fourier mais $|b_p^{[0]} \rangle$ n'est pas le vecteur propre relatif uniquement à la p^{emes} composante de Fourier.

C.1 Principe des petites perturbations

Nous allons utiliser ces résultats non perturbés pour calculer une approximation des valeurs propres de $K = K_0 + K_1 + K_2$. Comme les perturbations K_1 et K_2 sont petites comparées à K_0 , nous allons chercher des résultats proches de ceux obtenus pour K_0 . Nous allons ainsi supposer qu'il existe $|b_n^{[1]} \rangle$ et $\lambda_n^{[1]}$ tels que :

$$\begin{aligned} K \cdot (|b_n^{[0]} \rangle + |b_n^{[1]} \rangle) &\approx (\lambda_n^{[0]} + \lambda_n^{[1]}) (|b_n^{[0]} \rangle + |b_n^{[1]} \rangle) \\ |b_n^{[1]} \rangle &= \sum_{k \neq n} c_{n,k}^{[1]} |b_k^{[0]} \rangle \end{aligned} \quad (C.3)$$

En utilisant ces équations et en se restreignant au premier ordre, nous obtenons, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$(K_1 + K_2) |b_n^{[0]} \rangle + \sum_{k \neq n} c_{n,k}^{[1]} \lambda_k^{[0]} |b_k^{[0]} \rangle = \lambda_n^{[1]} |b_n^{[0]} \rangle + \lambda_n^{[0]} \sum_{k \neq n} c_{n,k}^{[1]} |b_k^{[0]} \rangle \quad (C.4)$$

En multipliant par $\langle b_k^{[0]} |$, puis en utilisant le fait que $\langle b_k^{[0]} | b_n^{[0]} \rangle = \delta(n - k)$, nous arrivons au résultat suivant :

$$\begin{aligned} \lambda_n^{[1]} &= \langle b_n^{[0]} | K_1 + K_2 | b_n^{[0]} \rangle \\ c_{n,k}^{[1]} &= \frac{\langle b_k^{[0]} | K_1 + K_2 | b_n^{[0]} \rangle}{\lambda_n^{[0]} - \lambda_k^{[0]}}, \quad \forall k \neq n \end{aligned} \quad (C.5)$$

Nous obtenons finalement :

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \lambda_n^{[0]} + \langle b_n^{[0]} | K_1 | b_n^{[0]} \rangle + \langle b_n^{[0]} | K_2 | b_n^{[0]} \rangle \\ |b_n \rangle &= |b_n^{[0]} \rangle + \sum_{k \neq n} \frac{\langle b_k^{[0]} | K_1 + K_2 | b_n^{[0]} \rangle}{\lambda_n^{[0]} - \lambda_k^{[0]}} |b_k^{[0]} \rangle \end{aligned} \quad (C.6)$$

Il convient de remarquer que ces approximations ne sont valides que si les $e_{p,-p}$ sont non nuls. Dans les faits, c'est généralement le cas. Notons, par ailleurs, que l'expression précédente suppose implicitement que l'on ait $\lambda_n^{[0]} \neq \lambda_k^{[0]}$, ce qui est aussi le cas dans les faits (ou alors $\langle b_k^{[0]} | K_1 + K_2 | b_n^{[0]} \rangle = 0$).

C.2 Calcul des perturbations des valeurs propres

Perturbations liées à K_1 : $\langle b_n^{[0]} | K_1 | b_n^{[0]} \rangle$.

Cas 1 : $n+$

$$\begin{aligned} 2 \langle b_{n+}^{[0]} | K_1 | b_{n+}^{[0]} \rangle &= (e_{n,n,-m} a_{-m} + e_{-n,-n,m} a_m) \delta(m - 2n) \\ &= 2\mathcal{R}e(e_{n,n,-m} a_{-m}) \delta(m - 2n) \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Notons que dans nos notations, $m > 0$.

Cas 2 : $n-$

$$\begin{aligned} 2 \langle b_{n-}^{[0]} | K_1 | b_{n-}^{[0]} \rangle &= (e_{n,n,-m} a_m + e_{-n,-n,m} a_m) \delta(m - 2n) \\ &= \mathcal{R}e(e_{n,n,-m} a_{-m} m) \delta(m - 2n) \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Cas 3 : $n = 0$

$$\langle b_0^{[0]} | K_1 | b_0^{[0]} \rangle = 0 \quad (\text{C.9})$$

Perturbations par rapport à K_2 : $\langle b_n^{[0]} | K_2 | b_n^{[0]} \rangle$.

Cas 1 : $n+$

$$\begin{aligned} 2 \langle b_{n+}^{[0]} | K_2 | b_{n+}^{[0]} \rangle &= \frac{1}{2} (e_{n,n,-m,-m} a_{-m}^2 + e_{-n,-n,m,m} a_m^2) \delta(m - n) \\ &= \mathcal{R}e(e_{n,n,-m,-m} a_{-m}^2) \delta(m - n) \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Case 2 : $n-$

$$\begin{aligned} 2 \langle b_{n-}^{[0]} | K_2 | b_{n-}^{[0]} \rangle &= \frac{1}{2} (e_{n,n,-m,-m} a_{-m}^2 + e_{-n,-n,m,m} a_m^2) \delta(m - n) \\ &= \mathcal{R}e(e_{n,n,-m,-m} a_{-m}^2) \delta(m - n) \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Cas 3 : $n = 0$

$$\langle b_0^{[0]} | K_2 | b_0^{[0]} \rangle = 0 \quad (\text{C.12})$$

C.3 Valeurs propres finales

Soit $n > 0$, nous avons alors les valeurs propres suivantes :

$$\begin{aligned} \lambda_{n+} &= e_{p,-p} + e_{-p,p,m,-m} |a_m|^2 + \frac{1}{2} \mathcal{R}e(e_{n,n,-m,-m} a_{-m}^2) \delta(m - n) \\ &\quad + \mathcal{R}e(e_{n,n,-m} a_{-m}) \delta(m - 2n) \\ \lambda_{n-} &= -e_{p,-p} - e_{-p,p,m,-m} |a_m|^2 + \frac{1}{2} \mathcal{R}e(e_{n,n,-m,-m} a_{-m}^2) \delta(m - n) \\ &\quad + \mathcal{R}e(e_{n,n,-m} a_{-m}) \delta(m - 2n) \\ \lambda_0 &= +e_{0,-0} + e_{-0,0,m,-m} |a_m|^2 \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

C.4 Perturbations des vecteurs propres

Calculons maintenant les termes croisés :

$$\langle b_k^{[0]} | K_1 + K_2 | b_n^{[0]} \rangle = \langle b_k^{[0]} | K_1 | b_n^{[0]} \rangle + \langle b_k^{[0]} | K_2 | b_n^{[0]} \rangle$$

Cas 1 : $n+$ et $k+$

$$\begin{aligned} 2 \langle b_{k+}^{[0]} | K_1 | b_{n+}^{[0]} \rangle &= \left\{ \delta(m - k - n) (e_{-k, -n, m} a_m + e_{k, n, -m} a_{-m}) + \right. \\ &\quad \delta(m + k - n) (e_{-k, n, -m} a_{-m} + e_{k, -n, m} a_m) + \\ &\quad \left. \delta(m - k + n) (e_{-k, n, m} a_m + e_{k, -n, -m} a_{-m}) \right\} \quad (\text{C.14}) \\ &= 2\mathcal{R}e (e_{-k, -n, m} a_m) \delta(m - k - n) + \\ &\quad 2\mathcal{R}e (e_{-k, n, -m} a_{-m}) \delta(m + k - n) + \\ &\quad 2\mathcal{R}e (e_{-k, n, m} a_m) \delta(m - k + n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \langle b_{k+}^{[0]} | K_2 | b_{n+}^{[0]} \rangle &= \left\{ \delta(2m - k - n) (e_{-k, -n, m, m} a_m^2 + e_{k, n, -m, -m} a_{-m}^2) + \right. \\ &\quad \delta(2m + k - n) (e_{-k, n, -m, -m} a_{-m}^2 + e_{k, -n, m, m} a_m^2) + \\ &\quad \left. \delta(2m - k + n) (e_{-k, n, m, m} a_m^2 + e_{k, -n, -m, -m} a_{-m}^2) \right\} \quad (\text{C.15}) \\ &= 2\mathcal{R}e (e_{-k, -n, m, m} a_m^2) \delta(2m - k - n) + \\ &\quad 2\mathcal{R}e (e_{-k, n, -m, -m} a_{-m}^2) \delta(2m + k - n) + \\ &\quad 2\mathcal{R}e (e_{-k, n, m, m} a_m^2) \delta(2m - k + n) \end{aligned}$$

Cas 2 : $n+$, $k-$

$$\begin{aligned} 2 \langle b_{k-}^{[0]} | K_1 | b_{n+}^{[0]} \rangle &= \left\{ \delta(m - k - n) (e_{-k, -n, m} a_m - e_{k, n, -m} a_{-m}) + \right. \\ &\quad \delta(m + k - n) (e_{-k, n, -m} a_{-m} - e_{k, -n, m} a_m) + \\ &\quad \left. \delta(m - k + n) (e_{-k, n, m} a_m - e_{k, -n, -m} a_{-m}) \right\} \quad (\text{C.16}) \\ &= 2i\delta(m - k - n) \mathcal{I}m (e_{-k, -n, m} a_m) + \\ &\quad 2i\delta(m + k - n) \mathcal{I}m (e_{-k, n, -m} a_{-m}) + \\ &\quad 2i\delta(m - k + n) \mathcal{I}m (e_{-k, n, m} a_m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2 \langle b_{k-}^{[0]} | K_2 | b_{n+}^{[0]} \rangle &= \left\{ \begin{aligned} &\delta(2m - k - n) (e_{-k,-n,m,m} a_m^2 - e_{k,n,-m,-m} a_{-m}^2) + \\ &\delta(2m + k - n) (e_{-k,n,-m,-m} a_{-m}^2 - e_{k,-n,m,m} a_m^2) + \\ &\delta(2m - k + n) (e_{-k,n,m,m} a_m^2 - e_{k,-n,-m,-m} a_{-m}^2) \end{aligned} \right\} \quad (\text{C.17}) \\
 &= 2i\delta(2m - k - n) \mathcal{I}m (e_{-k,-n,m,m} a_m^2) + \\
 &\quad 2i\delta(2m + k - n) \mathcal{I}m (e_{-k,n,-m,-m} a_{-m}^2) + \\
 &\quad 2i\delta(2m - k + n) \mathcal{I}m (e_{-k,n,m,m} a_m^2)
 \end{aligned}$$

Cas 3 : $n+$, $k = 0$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{2} \langle b_0^{[0]} | K_1 | b_{n+}^{[0]} \rangle &= (\delta(n - m) (e_{0,-m,m} a_m + e_{0,m,-m} a_{-m})) \\
 &= 2\delta(n - m) \mathcal{R}e (e_{0,-m,m} a_m) \quad (\text{C.18})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{2} \langle b_0^{[0]} | K_2 | b_{n+}^{[0]} \rangle &= (\delta(n - 2m) (e_{0,-m,m,m} a_m^2 + e_{0,m,-m,-m} a_{-m}^2)) \\
 &= 2\delta(n - 2m) \mathcal{R}e (e_{0,-m,m,m} a_m^2) \quad (\text{C.19})
 \end{aligned}$$

Cas 4 : $n-$, $k+$

$$\begin{aligned}
 2 \langle b_{k+}^{[0]} | K_1 | b_{n-}^{[0]} \rangle &= \left\{ \begin{aligned} &\delta(m + k - n) (e_{k,-n,m} a_m - e_{-k,n,-m} a_{-m}) + \\ &\delta(m - k + n) (e_{k,-n,-m} a_{-m} - e_{-k,n,m} a_m) + \\ &\delta(m - k - n) (e_{-k,-n,m} a_m - e_{k,n,-m} a_{-m}) \end{aligned} \right\} \quad (\text{C.20}) \\
 &= 2i\delta(m + k - n) \mathcal{I}m (e_{k,-n,m} a_m) + \\
 &\quad 2i\delta(m - k + n) \mathcal{I}m (e_{k,-n,-m} a_{-m}) + \\
 &\quad 2i\delta(m - k - n) \mathcal{I}m (e_{-k,-n,m} a_m)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2 \langle b_{k+}^{[0]} | K_2 | b_{n-}^{[0]} \rangle &= \left\{ \begin{aligned} &\delta(2m + k - n) (e_{k,-n,m,m} a_m^2 - e_{-k,n,-m,-m} a_{-m}^2) + \\ &\delta(2m - k + n) (e_{k,-n,-m,-m} a_{-m}^2 - e_{-k,n,m,m} a_m^2) + \\ &\delta(2m - k - n) (e_{-k,-n,m,m} a_m^2 - e_{k,n,-m,-m} a_{-m}^2) \end{aligned} \right\} \quad (\text{C.21}) \\
 &= 2i\delta(2m + k - n) \mathcal{I}m (e_{k,-n,m,m} a_m^2) + \\
 &\quad 2i\delta(2m - k + n) \mathcal{I}m (e_{k,-n,-m,-m} a_{-m}^2) + \\
 &\quad 2i\delta(2m - k - n) \mathcal{I}m (e_{-k,-n,m,m} a_m^2)
 \end{aligned}$$

Cas 5 : $n-, k-$

$$\begin{aligned}
 2 \langle b_{k-}^{[0]} | K_1 | b_{n-}^{[0]} \rangle &= \left\{ \begin{aligned} &\delta(m+k-n) (-e_{k,-n,m} a_m - e_{-k,n,-m} a_{-m}) + \\ &\delta(m-k+n) (-e_{k,-n,-m} a_{-m} - e_{-k,n,m} a_m) + \\ &\delta(m-k-n) (e_{k,n,-m} a_{-m} + e_{-k,-n,m} a_m) \end{aligned} \right. \quad (C.22) \\
 &= -2\delta(m+k-n) \mathcal{R}e(e_{k,-n,m} a_m) \\
 &\quad - 2\delta(m-k+n) \mathcal{R}e(e_{k,-n,-m} a_{-m}) \\
 &\quad + 2\delta(m-k-n) \mathcal{R}e(e_{k,n,-m} a_{-m})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2 \langle b_{k-}^{[0]} | K_2 | b_{n-}^{[0]} \rangle &= \left\{ \begin{aligned} &\delta(2m+k-n) (-e_{k,-n,m,m} a_m^2 - e_{-k,n,-m,-m} a_{-m}^2) + \\ &\delta(2m-k+n) (-e_{k,-n,-m,-m} a_{-m}^2 - e_{-k,n,m,m} a_m^2) + \\ &\delta(2m-k-n) (e_{k,n,-m,-m} a_{-m}^2 + e_{-k,-n,m,m} a_m^2) \end{aligned} \right\} \quad (C.23) \\
 &= -2\delta(2m+k-n) \mathcal{R}e(e_{k,-n,m,m} a_m^2) \\
 &\quad - 2\delta(2m-k+n) \mathcal{R}e(e_{k,-n,-m,-m} a_{-m}^2) \\
 &\quad + 2\delta(2m-k-n) \mathcal{R}e(e_{k,n,-m,-m} a_{-m}^2)
 \end{aligned}$$

Cas 6 : $n-, k=0$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{2} \langle b_0^{[0]} | K_1 | b_{n-}^{[0]} \rangle &= \delta(m-n) (e_{0,-m,m} a_m - e_{0,m,-m} a_{-m}) \\
 &= 2i \mathcal{I}m(e_{0,-m,m} a_m) \delta(m-n) \quad (C.24)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{2} \langle b_0^{[0]} | K_2 | b_{n-}^{[0]} \rangle &= \delta(2m-n) (e_{0,-n,m,m} a_m^2 - e_{0,n,-m,-m} a_{-m}^2) \\
 &= 2i \mathcal{I}m(e_{0,-n,m,m} a_m^2) \delta(2m-n) \quad (C.25)
 \end{aligned}$$

Cas 7 : $n=0, k+$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{2} \langle b_{k+}^{[0]} | K_1 | b_0^{[0]} \rangle &= \delta(m-k) (e_{-m,0,m} a_m + e_{m,0,-m} a_{-m}) \\
 &= 2\delta(m-k) \mathcal{R}e(e_{-m,0,m} a_m) \quad (C.26)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{2} \langle b_{k+}^{[0]} | K_2 | b_0^{[0]} \rangle &= \delta(2m-k) (e_{-m,0,m,m} a_m^2 + e_{k,0,-m,-m} a_{-m}^2) \\
 &= 2\delta(2m-k) \mathcal{R}e(e_{-k,0,m,m} a_m^2) \quad (C.27)
 \end{aligned}$$

Cas 8 : $n=0, k-$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{2} \langle b_{k-}^{[0]} | K_1 | b_0^{[0]} \rangle &= \delta(m-k) (e_{0,-m,m} a_m - e_{0,m,-m} a_{-m}) \\
 &= 2i\delta(m-k) \mathcal{I}m(e_{0,-m,m} a_m) \quad (C.28)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{2} \langle b_{k-}^{[0]} | K_2 | b_0^{[0]} \rangle &= \delta(2m-k) (e_{0,-k,m,m} a_m^2 - e_{0,k,-m,-m} a_{-m}^2) \\
 &= 2i\delta(2m-k) \mathcal{I}m(e_{0,-k,m,m} a_m^2) \quad (C.29)
 \end{aligned}$$

C.5 Propriétés diverses

Une analyse des résultats précédents montre quelques résultats intéressants :

$$\forall (n, k) \in \mathbb{N}^2, \quad c_{n\pm, k\pm} = -c_{k\pm, n\pm}$$

La démonstration est directe. Il suffit de remarquer que pour toutes fréquences k, l, n , et m , $e_{k,l,m} = e_{l,k,m} \in \mathbb{R}$ et que $e_{l,k,n,m} = e_{k,l,n,m} \in \mathbb{R}$.

Nous pouvons aussi facilement constater que les vecteurs propres sont, à des coefficients de normalisation près, de la forme :

$$\begin{aligned} |\tilde{b}_{n+}\rangle &= \left(\delta(n+p) + \delta(n-p) + \right. \\ &\quad \left. \sum_k (\mathcal{R}e(c_{n+,k+}) (\delta(k+p) + \delta(k-p)) + \right. \\ &\quad \left. i\mathcal{I}m(c_{n+,k-}) (\delta(k-p) - \delta(k+p))) \right)_{p \in \mathbb{Z}} \\ |\tilde{b}_{n-}\rangle &= \left(\delta(n-p) - \delta(n+p) + \right. \\ &\quad \left. \sum_k (i\mathcal{I}m(c_{n-,k+}) (\delta(k+p) + \delta(k-p)) + \right. \\ &\quad \left. \mathcal{R}e(c_{n-,k-}) (\delta(k-p) - \delta(k+p))) \right)_{p \in \mathbb{Z}} \end{aligned} \quad (\text{C.30})$$

Nous pouvons vérifier, en utilisant les deux constats précédents, que ces vecteurs propres sont bien orthogonaux au premier ordre. Comme, en pratique et du fait du théorème de Shanon lié à la numérisation des images, les hautes fréquences pourront être considérées comme nulles, nous pouvons considérer que cette base est effectivement orthogonale en pratique.

Annexe D

Tracé de Valeurs Propres

Nous donnons ici quelques exemples supplémentaire de tracé des valeurs propres pour $m = 2$. La figure D.1 montre le "diagramme des solutions" correspondant. Nous pourrons nous rapporter au tableau 7.1 pour plus d'informations sur la légende. Les principaux "types" de tracés correspondant sont donnés sur les figures D.2 à D.5.



FIG. D.1: Diagramme des solutions pour $m = 2$.

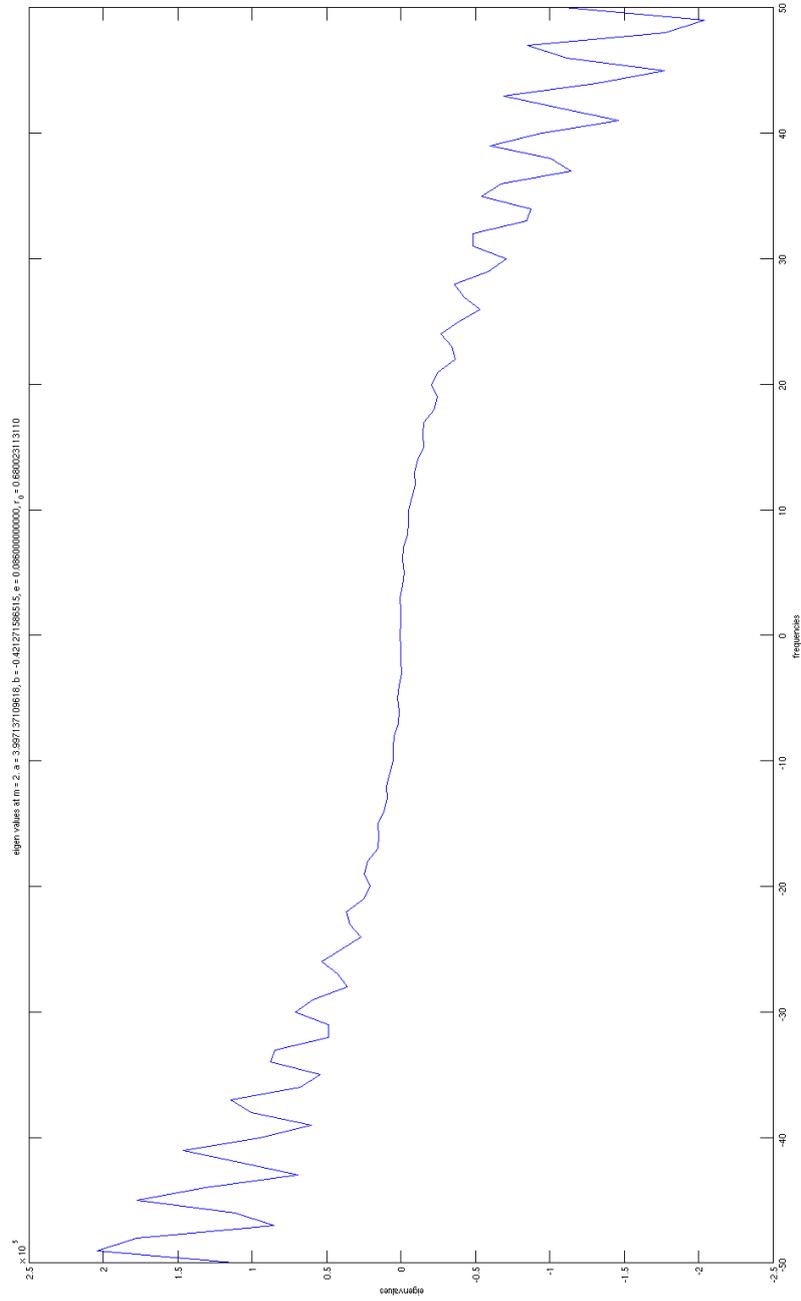


FIG. D.2: Valeurs propres pour $m = 2$

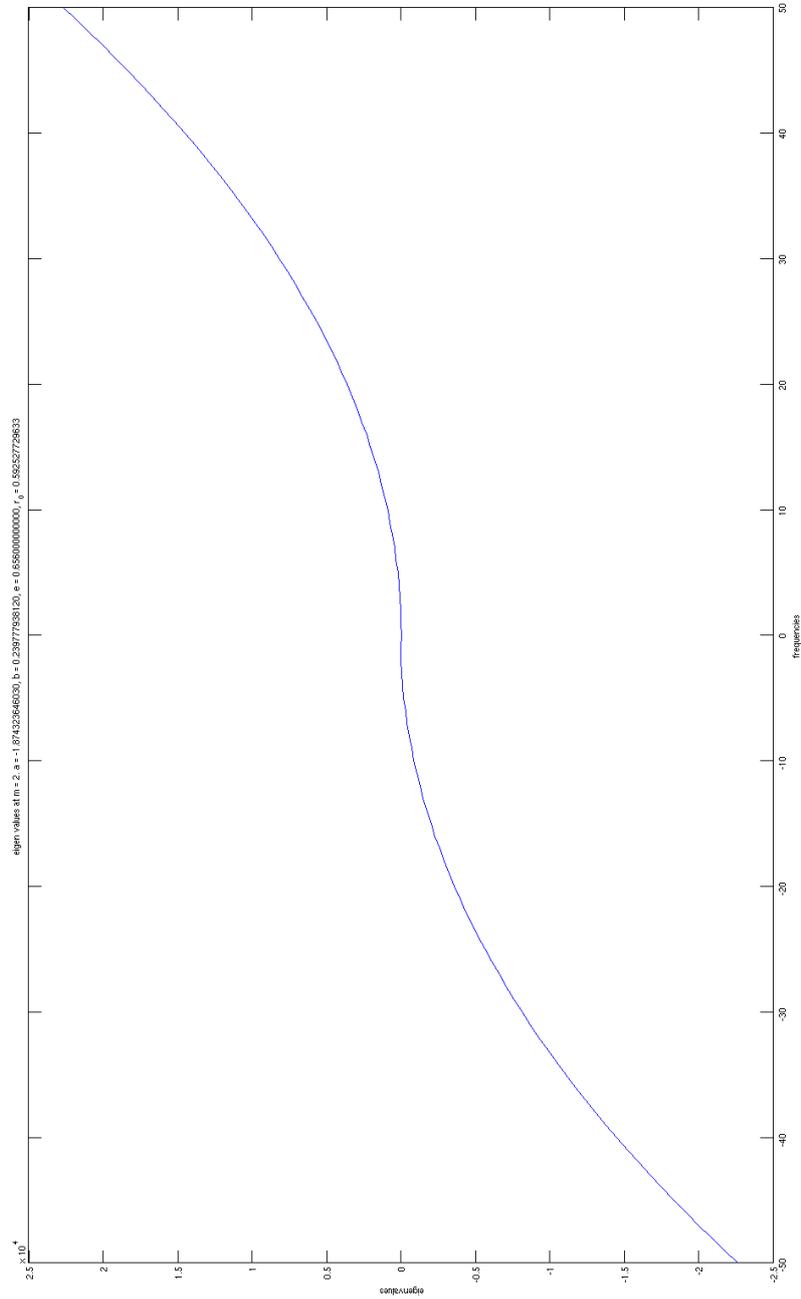


FIG. D.3: Valeurs propres pour $m = 2$.

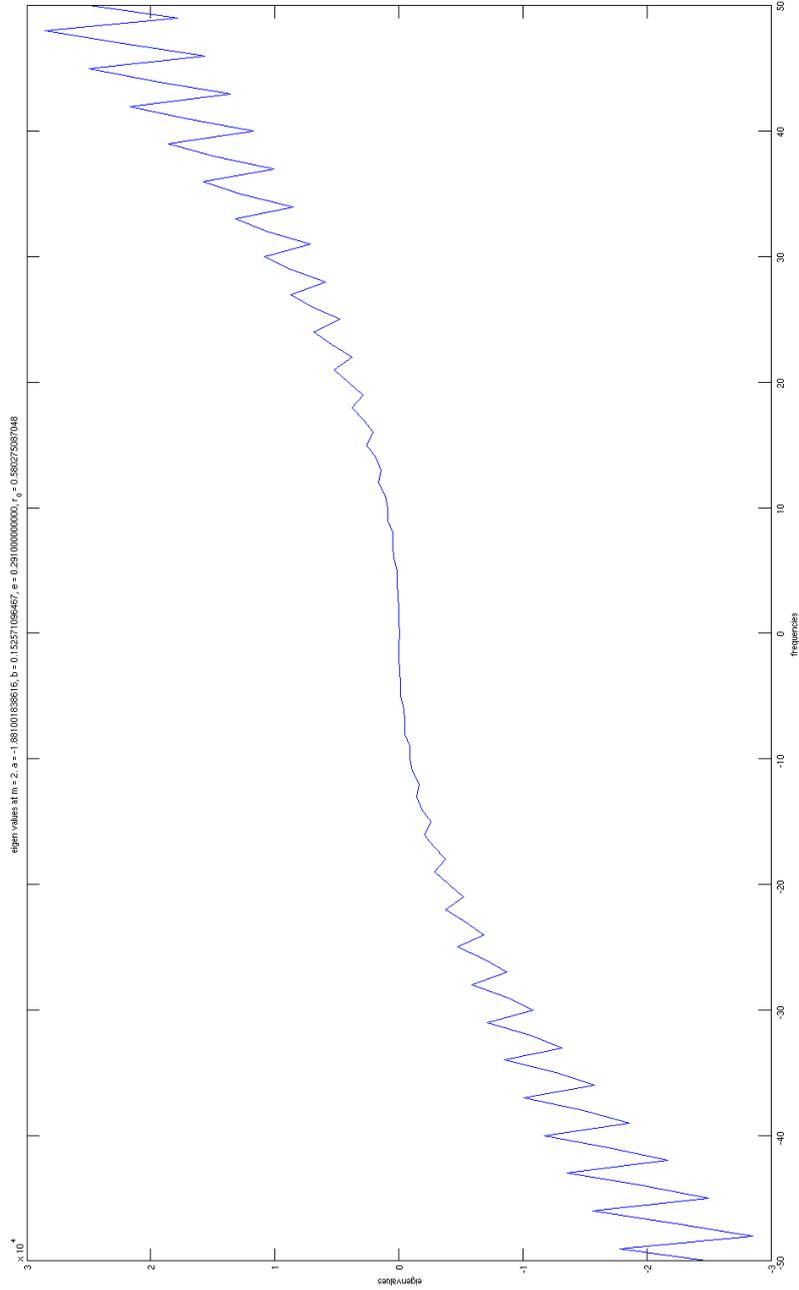


FIG. D.4: Valeurs propres pour $m = 2$.

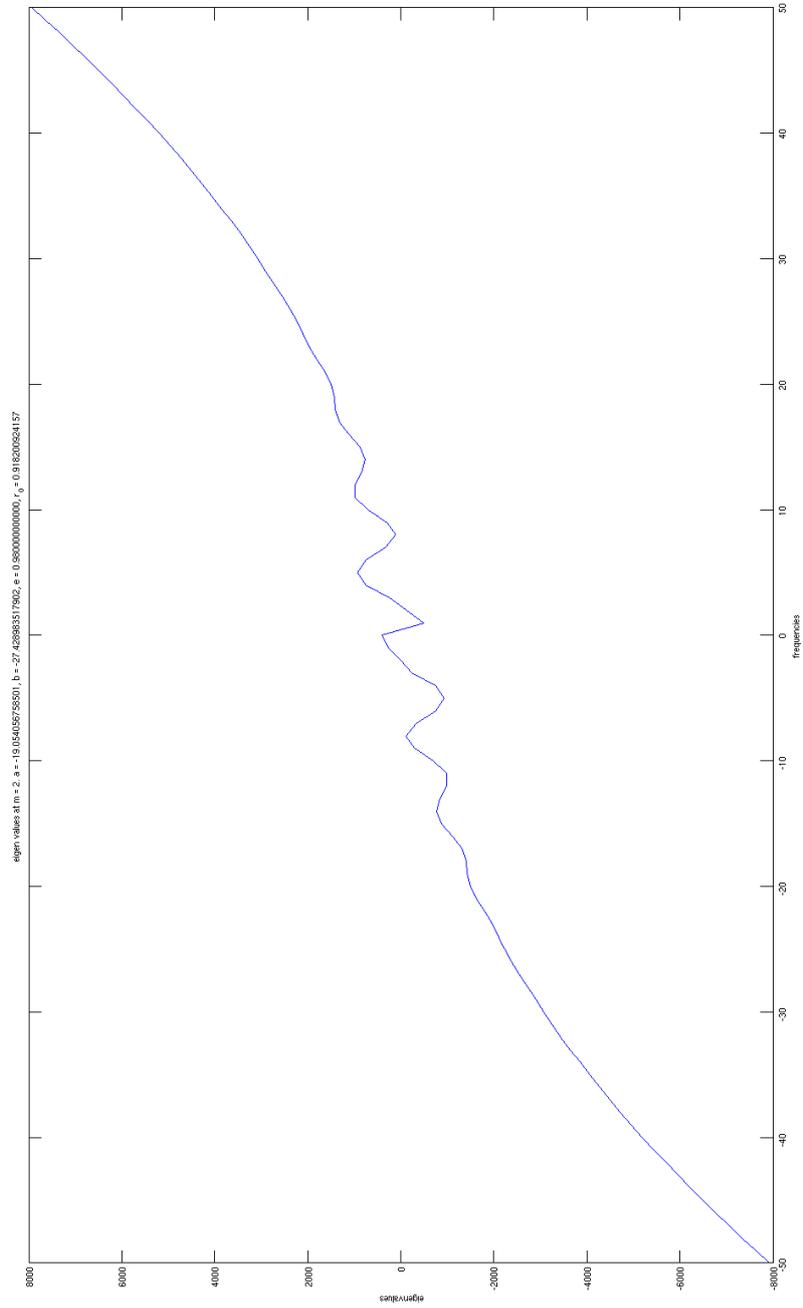


FIG. D.5: Valeurs propres pour $m = 2$.

Annexe E

Activités lors de la 1^{ère} année

- 01/04/10–31/05/10** : Visite de G. Kerr auprès du Prof. A. Srivastava du Département de Statistiques de “Florida State University”, États-Unis.
- 11/09/10** : Conférence invitée de I. Jermyn au “Workshop on Shape Perception in Human and Computer Vision”, Hersonissos, Crète, Grèce.
- 14/09/10** : Conférence invitée de I. Jermyn au “Solar Image Processing Workshop”, Les Diablerets, Suisse. Sponsorisé par la NASA et l’ESA.
- 05/11/10** : Attribution à G. Kerr du Prix de la ville de Toulouse pour son travail de recherche de Master et son activité remarquable à l’étranger, lors de la remise des diplômes d’ingénieur à l’ISAE à Toulouse.
- 06/12/10** : Participation de G. Kerr à la “Journée Envol Recherche” de la Fondation EADS, Paris, avec une présentation orale et un poster.
- 25/01/11** : Visite de J. Zerubia à Astrium, Toulouse (discussion avec notre correspondant technique, Marie Rochery).
- 11/02/11–18/02/11** Participation de G. Kerr à la conférence SPIE “Medical Imaging 2011 : Image Processing”, Lake Buena Vista, Floride, États-Unis.
- 22/02/11** : Visite de J. Zerubia à Astrium, Toulouse (discussion avec notre correspondant technique, Marie Rochery).

Bibliographie

- [1] E. Klassen & A. Srivastava : *Shape Analysis* - Preprint de livre à paraître chez Springer.
- [2] G. Kerr, S. Kurtek & A. Srivastava : *A joint model for boundaries of multiple anatomical part*, manuscript soumis à SPIE medical imaging.
- [3] A. Srivastava, S.H. Joshi, W. Mio & X. Liu : *Statistical shape analysis : Clustering, learning and testing*, IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 27(4), 433-446, 2005.
- [4] S.H. Joshi, E. Klassen, A. Srivastava & I. H. Jermyn : *A novel representation for Riemannian analysis of elastic curves in \mathbb{R}^n* , IEEE, Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 1-7, 2007.
- [5] A. Srivastava, W. Liu & S.H. Joshi : *Modelling Spatial Patterns Of Shapes*, International Conference on Image Processing, San Diego, USA 2008.
- [6] M. Mani, S. Kurtek, A. Srivastava & C. Barillot : *A Comprehensive Riemannian Framework for the Analysis of White Matter Fiber Track*, International Symposium on Biomedical Imaging, Rotterdam, Pays-Bas, 2010.
- [7] C.P. Robert, G. Casella : *Monte Carlo Statistical Method*, Springer, 1999.
- [8] M. Kass, A. Zitkin & D. Terzopoulos : *Snakes : Active Contour Models*, International Journal of Computer Vision, Kluwer Academic Publishers, 1987, 321-331.
- [9] L. Cohen : *On Active Contours Models and Balloons*, Computer Vision, Graphics and Image Processing : Image understanding, 53(2), 211-218, 1991.
- [10] V. Caselles, R. Kimmel & G. Sapiro : *Geodesic active contours*, International Journal of Computer Vision, 22(1) : 61-79, 1997.
- [11] T. Chan & L. Vese : *Active Contours Without Edges*, IEEE Trans. on Image Processing, vol.10, no. 2, 2001.
- [12] A.L. Yuille, P.W. Hallinan, & D.S. Cohen : *Feature extraction from faces using deformable templates*, International Journal of Computer Vision, 8(2) : 99-111, 1992.
- [13] S. Joshi & A. Srivastava : *Intrinsic Bayesian Active Contours for Extraction of Object Boundaries in Images*, International Journal of Computer Vision, vol.81, 331-355, 2009.
- [14] M. Rochery, I. Jermyn & J. Zerubia : *Higher Order Active Contours*, International Journal of Computer Vision, vol. 69(1), 27-42, 2005.

- [15] M. Rochery : *Contours Actifs d'Ordre Supérieur et leur application à la détection de Linéiques dans des images de télédétection*, Thèse de Doctorat, Université de Nice - Sophia Antipolis, 2005.
- [16] T. Peng : *New Higher Order Active Contours Models, Shape Priors and Multiscale Analysis*, Thèse de Doctorat, Université de Nice - Sophia Antipolis, 2008.
- [17] M. Kulikova : *Shape Recognition for Image Scene Analysis*, Thèse de Doctorat, Université de Nice - Sophia Antipolis, 2009.
- [18] M. Rochery, I. Jermyn & J. Zerubia : *Phase field models and higher-order active contours*, IEEE International Conference on Computer Vision, Beijing, Chine, 2005.
- [19] P. Horváth, I. Jermyn, Z. Kato & J. Zerubia : *A higher-order active contour model of a 'gas of circles' and its application to tree crown extraction*, Pattern Recognition, 2008.
- [20] P. Horváth, I. Jermyn, Z. Kato & J. Zerubia : *A higher-order active contour model of a 'gas of circles' and its application to tree crown extraction*, Rapport de Recherche 6026, INRIA, 2006.
- [21] P. Horváth & I. Jermyn : *A 'Gas of Circles' Phase Field Model and its Application to Tree Crown Extraction*, European Signal Processing Conference, Poznan, Pologne, 2007.
- [22] P. Horváth, I. Jermyn, Z. Kato & J. Zerubia : *An Improved 'Gas of Circles' Higher-Order Active Contour Model and Its Application to Tree Crown Extraction*, Indian Conference on Computer Vision Graphics and Image Processing, Madurai, Inde, 2006.
- [23] A. El Ghouli, I. Jermyn & J. Zerubia : *Phase diagram of a long bar under a higher-order active contour energy : application to hydrographic network extraction from VHR satellite images*, International Conference on Pattern Recognition, Glasgow, Royaume-Uni, 2008.
- [24] G. Ducret, I. Jermyn & J. Zerubia : *Détection de formes complexes en utilisant les contours actifs d'ordre supérieur*, INRIA - Rapport de Contrat EADS / MBDA, 2008.
- [25] T. Chan & J. Shen : *Image Processing And Analysis*, SIAM, 2005.
- [26] G. Allaire : *Analyse Numérique et Optimisation*, les Éditions de l'École Polytechnique, 2007.
- [27] T. Blaskovics, Z. Kato, & I. H. Jermyn : *A Markov random field model for extracting near-circular shapes*, IEEE International Conference on Image Processing, Le Caire, Egypte, 2009.