



# Déconvolution d'images satellitaires par paquets d'ondelettes complexes

André Jalobeanu, Laure Blanc-Féraud, Josiane Zerubia

**Projet ARIANA**

**INRIA Sophia Antipolis, France**

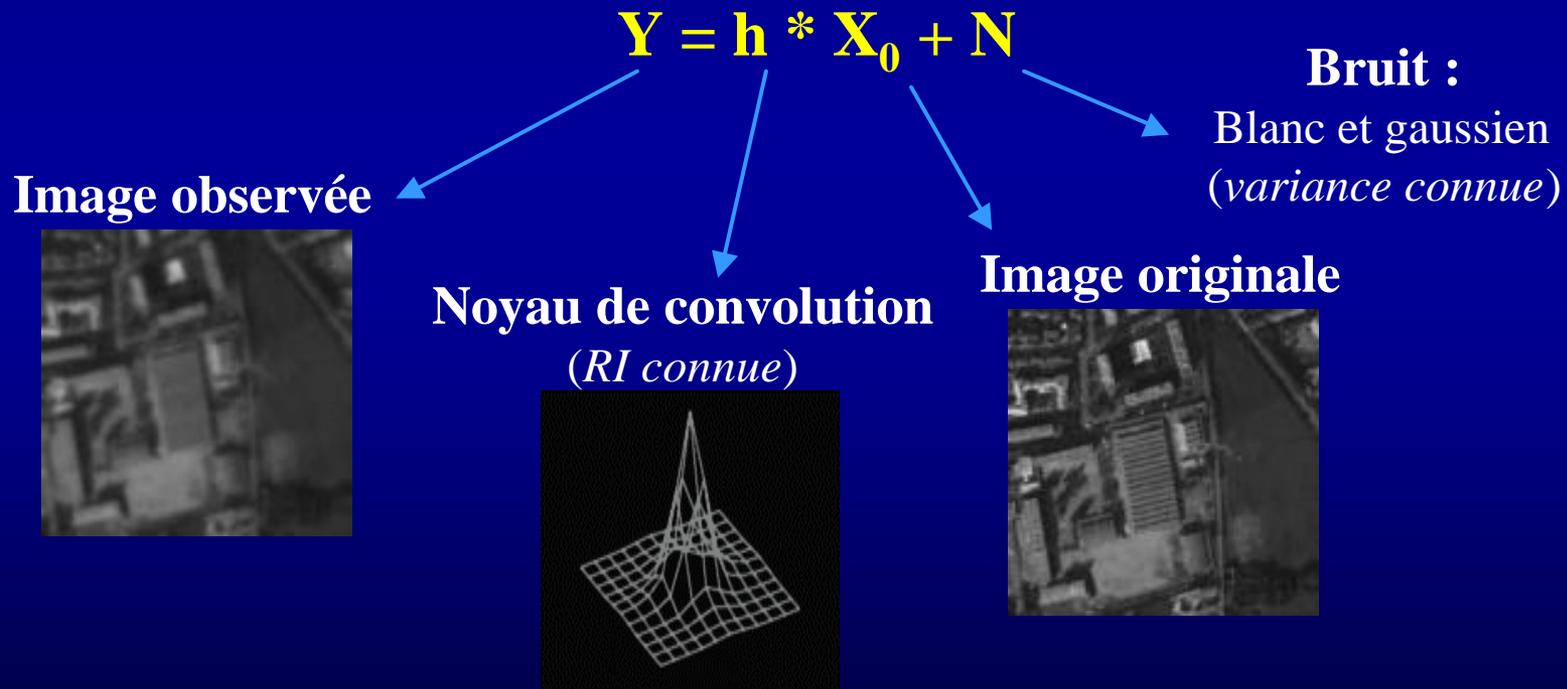
**CNRS / INRIA / UNSA**

**[www.inria.fr/ariana](http://www.inria.fr/ariana)**

- **Position du problème**
- **Représentations efficaces et choix de la base**
- **Transformée en ondelettes complexes**
- **Transformée en paquets d'ondelettes complexes**
- **Seuillage de la transformée**
  - **Différentes méthodes**
  - **Estimation des paramètres**
  - **Deux algorithmes : COWPATH 1 et 2**
  - **Résultats**
- **Conclusion et perspectives**

# Équation d'observation

Les images observées sont **dégradées** :



# Position du problème

**Problème inverse** mal posé [Hadamard 23]

- existence,
- unicité,
- stabilité de la solution ?

Inversion  $\rightarrow$  **amplification du bruit**

Petites erreurs sur  $Y \rightarrow$  grandes erreurs sur  $X$

# Introduction

- **Méthodes monoéchelle** [Geman & McClure 85, Charbonnier 97, ...]

## Régularisation + préservation des contours

Trouver  $X$  qui minimise  $U(X)$  :

$$U(X) = \|Y - h * X\|^2 / 2s^2 + F(X)$$

← Attache aux données

→ Terme de régularisation  
non quadratique

- **Méthodes multiéchelle** [Mallat 89, Bijaoui 94, ...]

Analyse multirésolution → **ondelettes**

- Régularisation de méthodes itératives classiques (statistiques)  
(seuillage d'une transformée invariante par translation)
- Modèles variationnels multirésolution

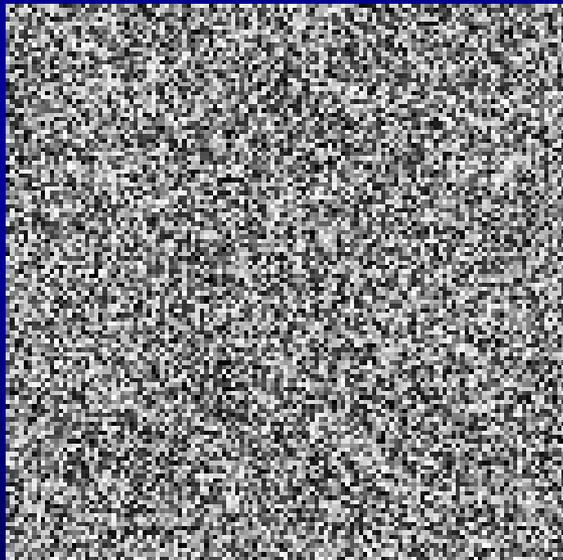
# Introduction

- **Filtrage après inversion** [Donoho, Mallat, Kalifa 99]
  - **Inversion non régularisée** (domaine de Fourier)
  - **Transformée** (changement de base)
  - **Seuillage des coefficients**
  - **Transformée inverse** (retour à l'espace image)

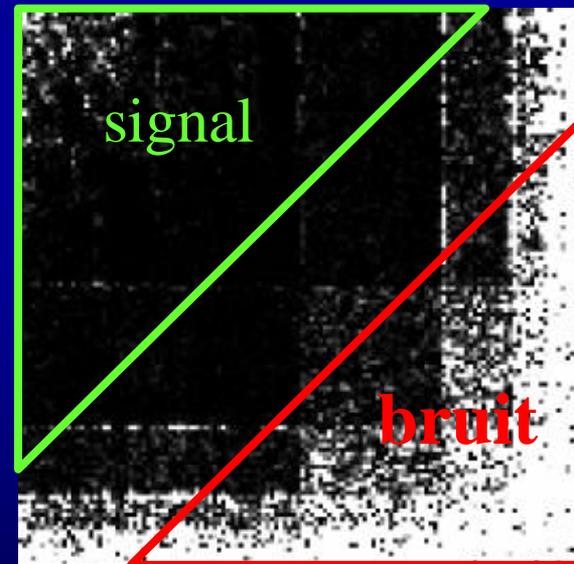
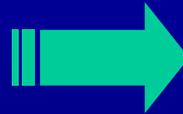
# Représentations pour un filtrage efficace

**Séparation** efficace du signal et du bruit déconvolué :

- représentation compacte du signal
- compression du bruit dans les hautes fréquences



*Image déconvoluée  
sans régularisation*



*Transformée*

# Filtrage du bruit déconvolué

- Annuler les coefficients correspondant au bruit seul
- Seuillage des coefficients contaminés par le bruit



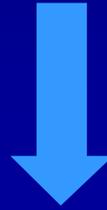
Le bruit déconvolué est **coloré** !

Dans la nouvelle base, les coefficients de la transformée du bruit doivent être **independants** → permet un seuillage **séparé**

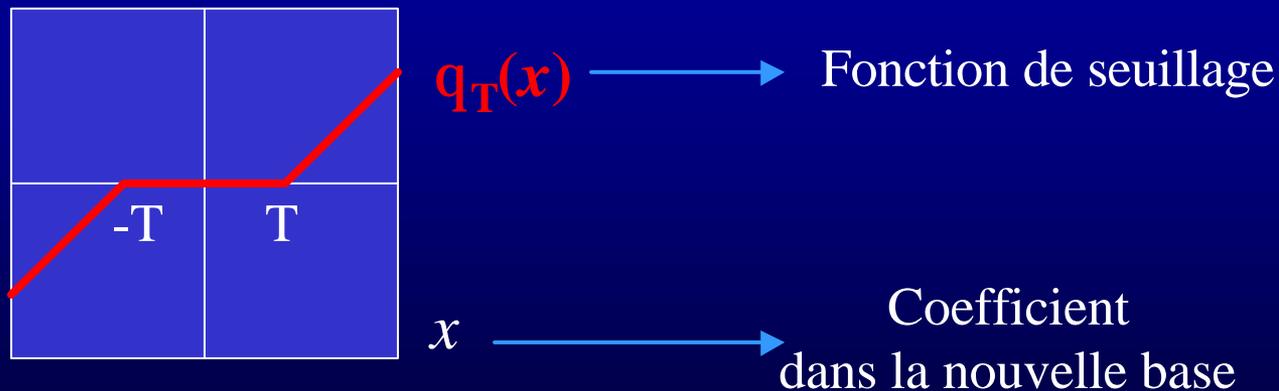
→ **covariance du bruit « presque diagonalisée »** [Kalifa 99]

# Choix de la base

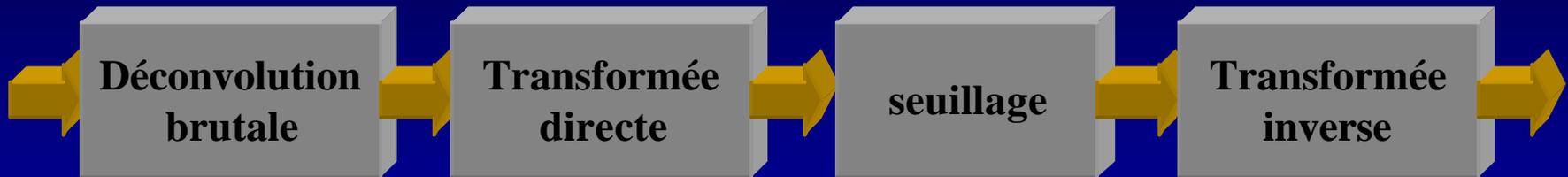
- Représentation compacte
- Covariance du bruit « presque diagonale »



*L'estimateur de seuillage est optimal* [Donoho, Johnstone 94]



# Construction de l'algorithme



## Choix de la base :

- compacité
- diagonalisation
- reconstruction
- propriétés d'invariance

## Choix de la fonction de seuillage

Valeur optimale du seuil ?

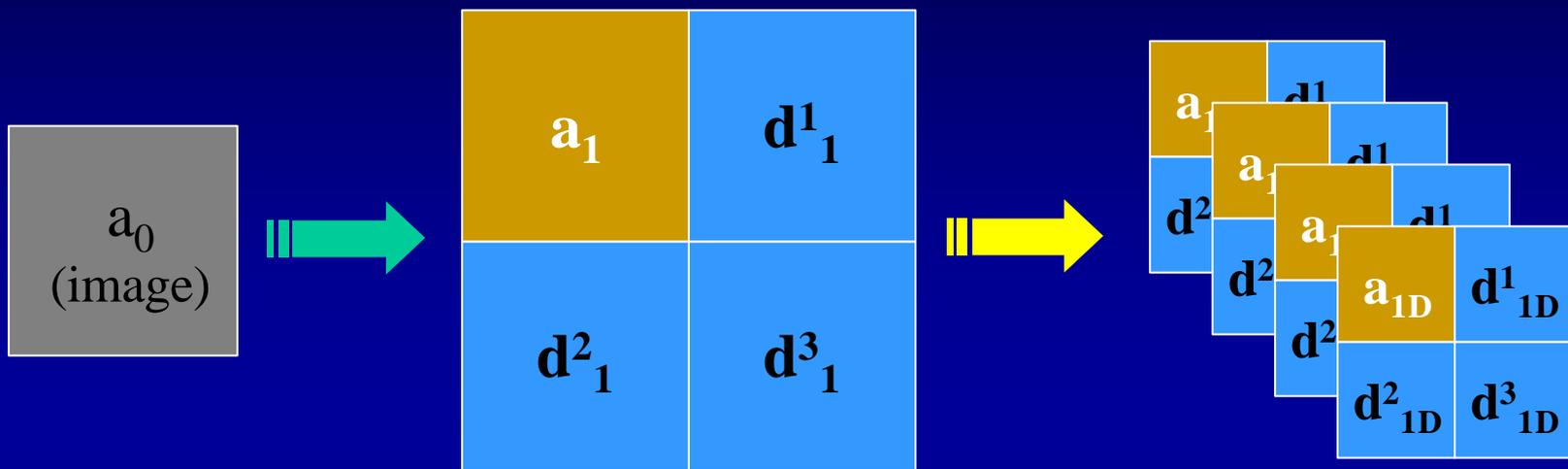
# Ondelettes complexes

## *Propriétés :*

- ☆ Invariance par translation
- ☆ Sélectivité directionnelle
- ☆ Reconstruction parfaite
- ☆ Algorithme rapide  $O(N)$

- **quad-arbre** (4 arbres d'ondelettes parallèles) [Kingsbury 98]
- filtres **décalés** d' $\frac{1}{2}$  et  $\frac{1}{4}$  de pixel entre les arbres
- combinaison des arbres  $\rightarrow$  coefficients **complexes**
- Ondelettes **biorthogonales**
- Implantation par **banc de filtres**

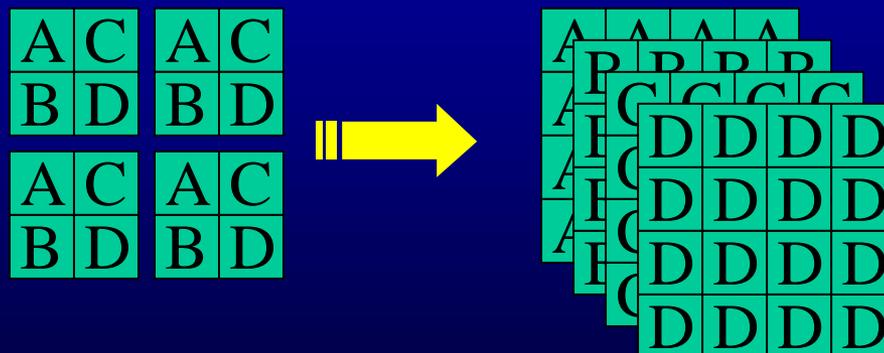
# Quad-arbre : 1<sup>er</sup> niveau



*Transformée non decimée*

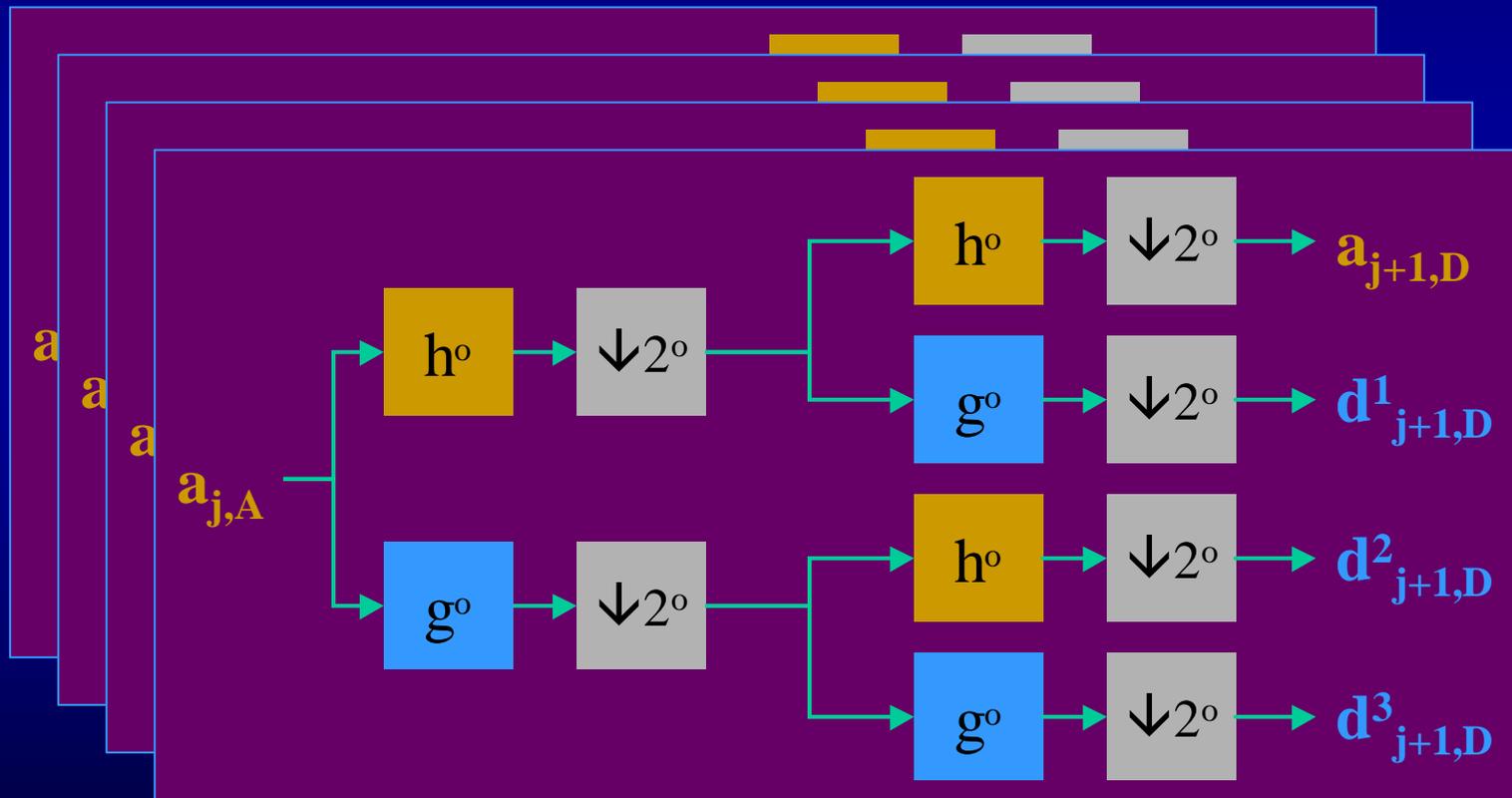
Arbres parallèles ABCD

Reconstruction parfaite :  
moyenne  
 $(A+B+C+D)/4$

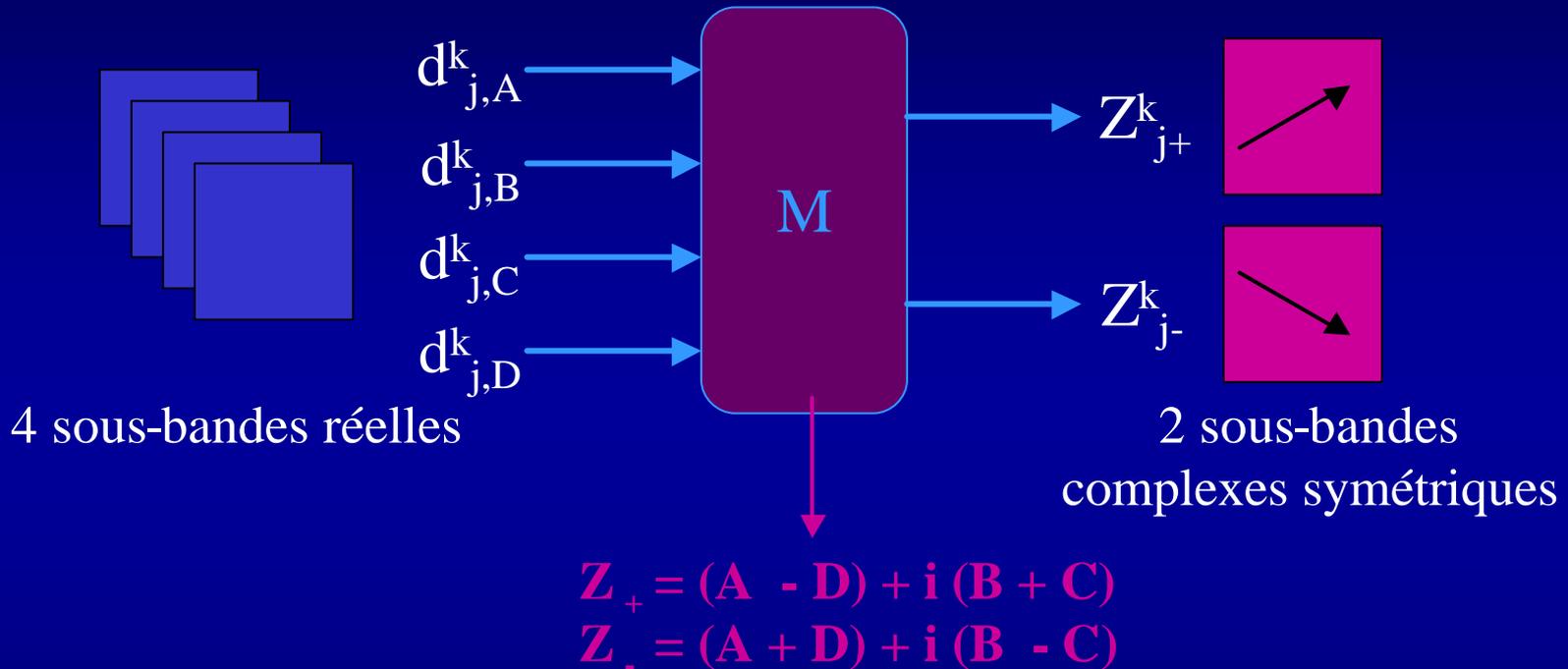


# Quad-arbre : niveau j

Filtres de **longueur différente** :  $h^o, g^o, h^e, g^e \rightarrow$  décalage  $<$  pixel



# Coefficients complexes



L'ondelette continue n'est pas une fonction complexe.  
Ce ne sont pas *exactement* des ondelettes complexes !

# Nécessité des paquets d'ondelettes

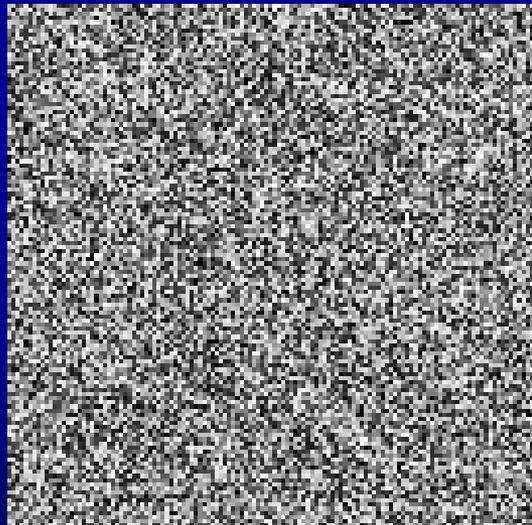
Ondelettes complexes :



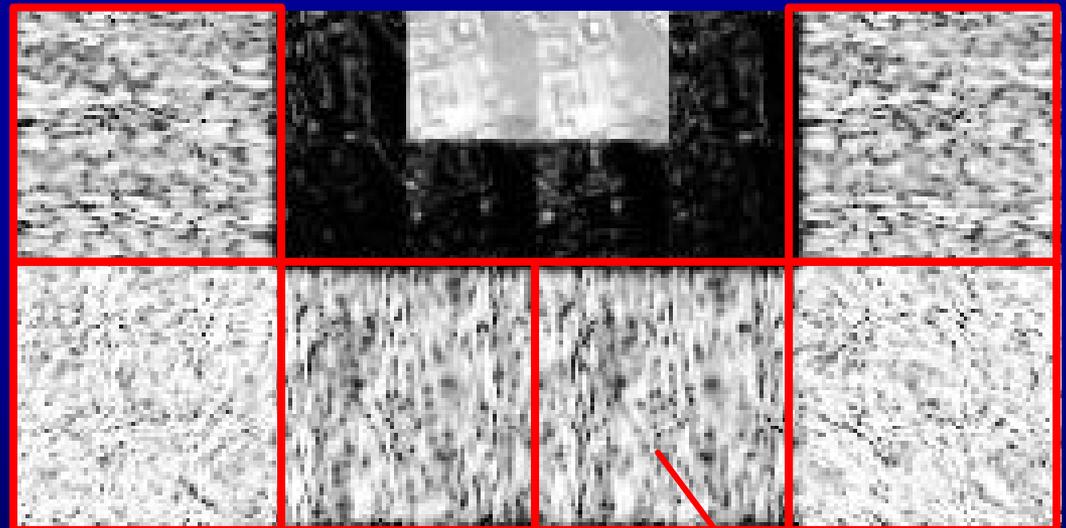
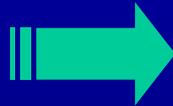
Représentation compacte



Mauvaise représentation du bruit déconvolué



*Image déconvoluée sans régularisation*

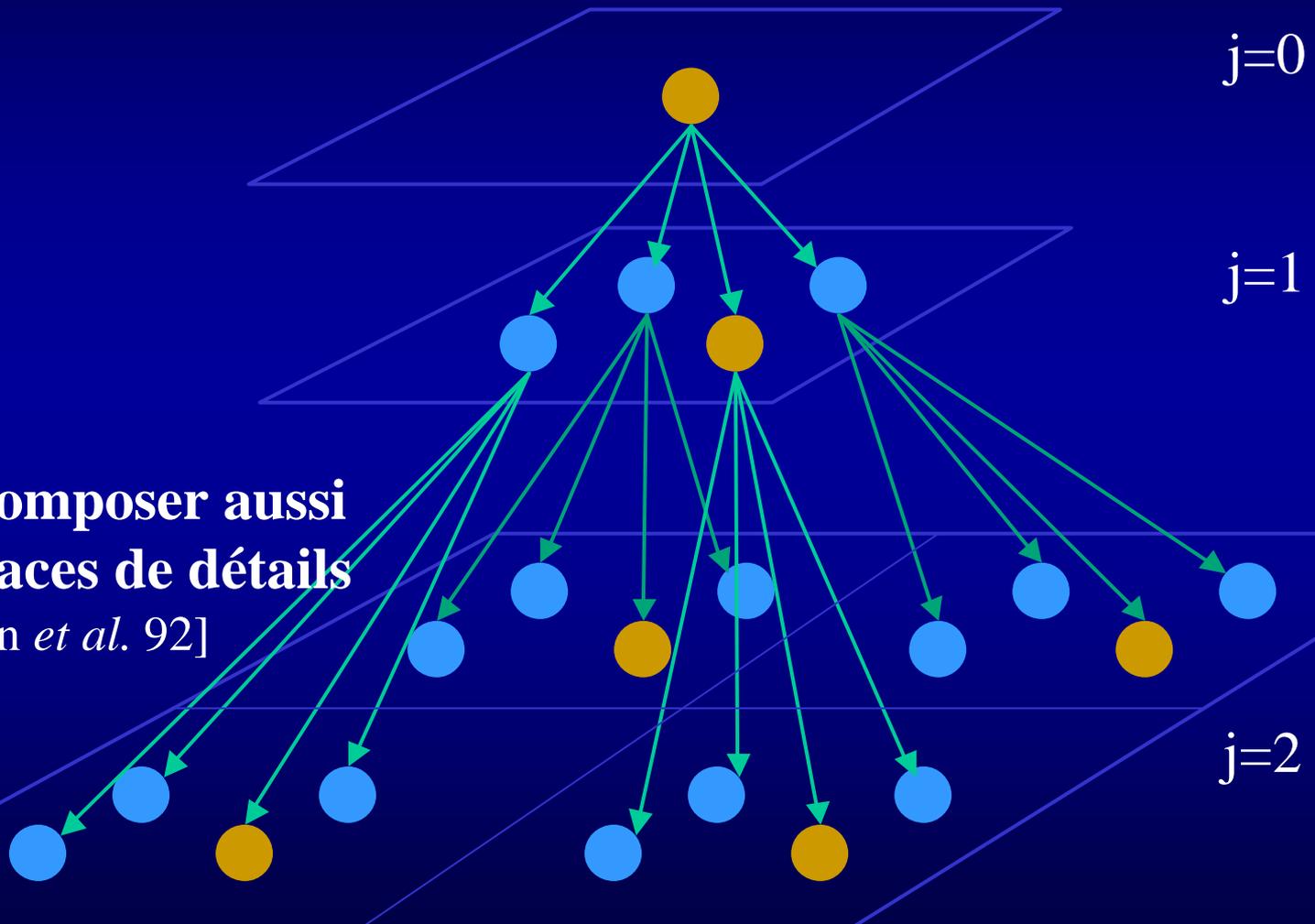


*Transformée*

**Hautes fréquences non récupérables**

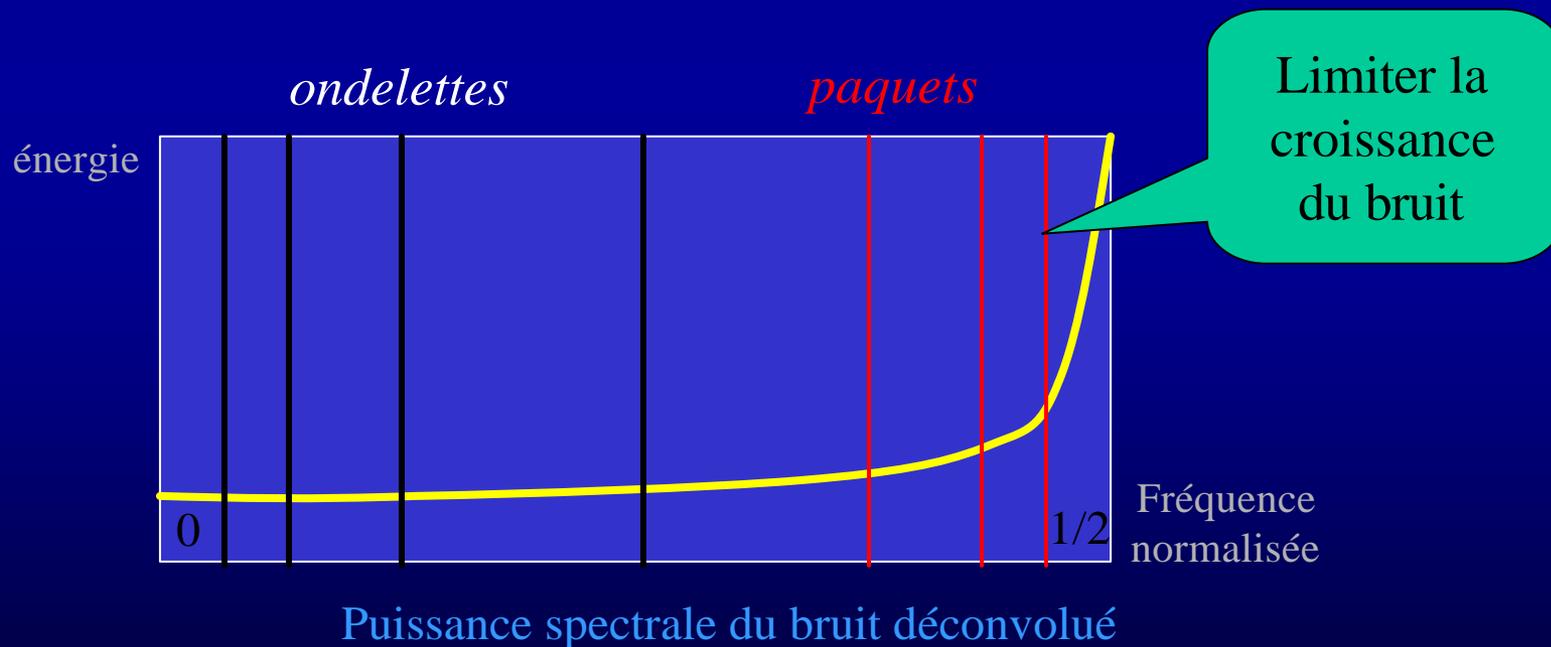
# Paquets d'ondelettes

→ décomposer aussi  
les espaces de détails  
[Coifman *et al.* 92]



# Choix de l'arbre

- Absence d'unicité de l'arbre de décomposition
- dépend de l'application
- déconvolution : l'arbre doit s'adapter au bruit déconvolué



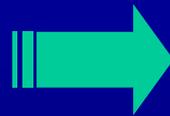
# Paquets d'ondelettes complexes (CWP)

→ décomposer les espaces de détails  
de la transformée en ondelettes complexes

*pour chaque arbre A,B,C,D*



*Image originale*



*Transformée*

# Paquets d'ondelettes complexes (CWP)

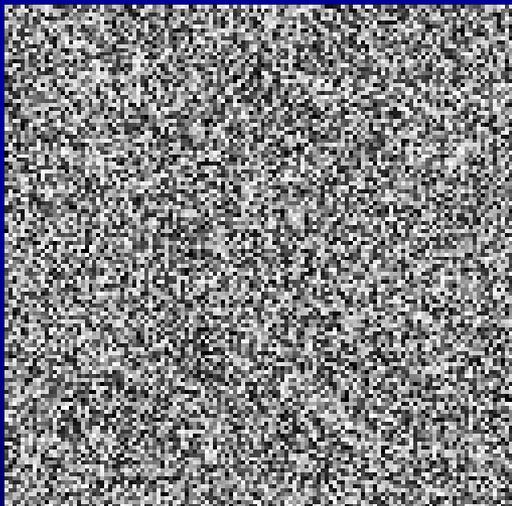
Paquets  
d'ondelettes  
complexes :



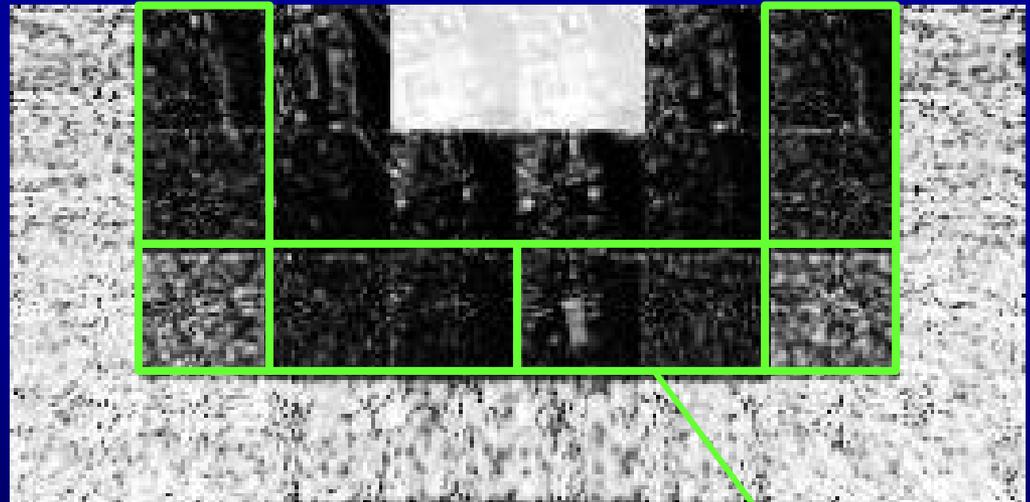
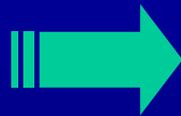
Représentation compacte



Bonne représentation du bruit déconvolué



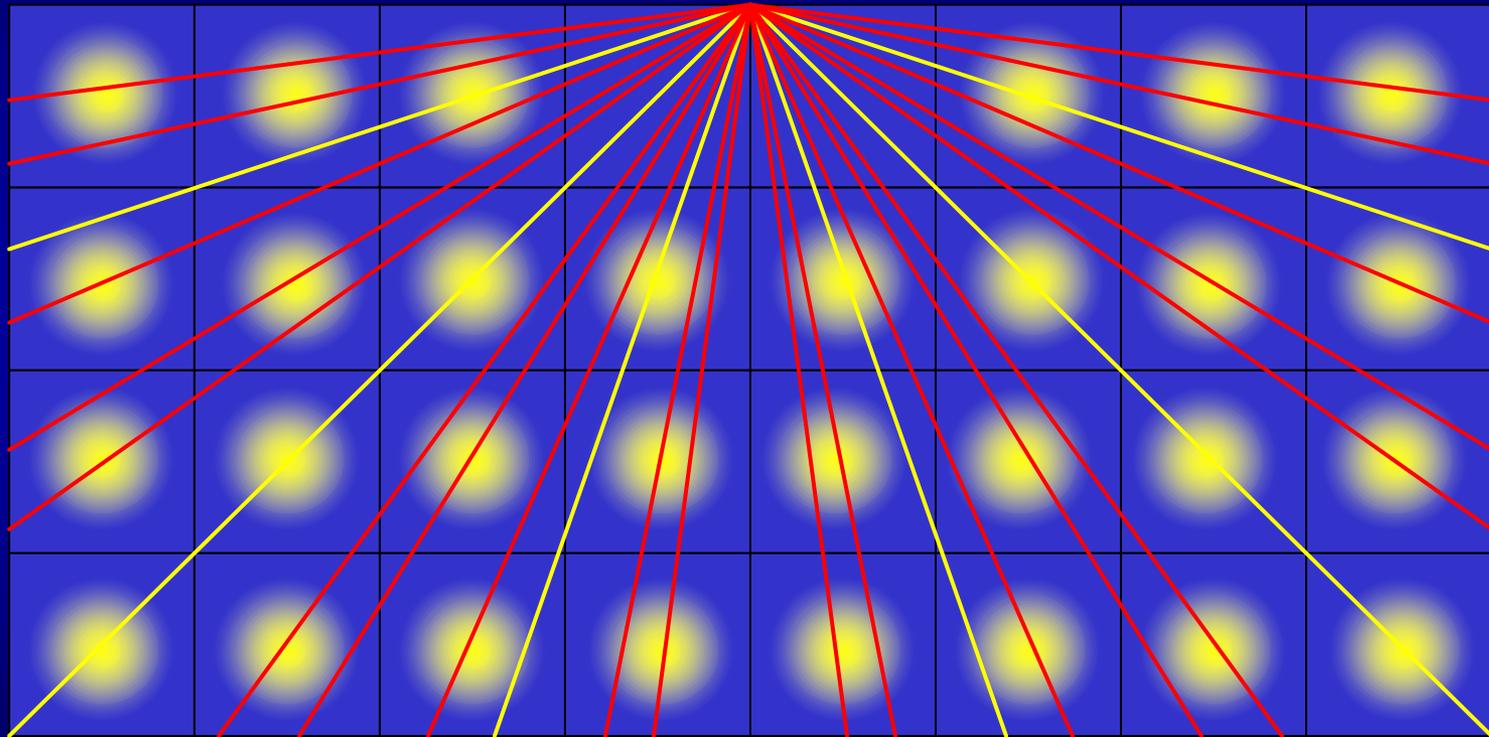
*Image déconvoluée  
sans régularisation*



*Transformée*

**hautes fréquences  
récupérables**

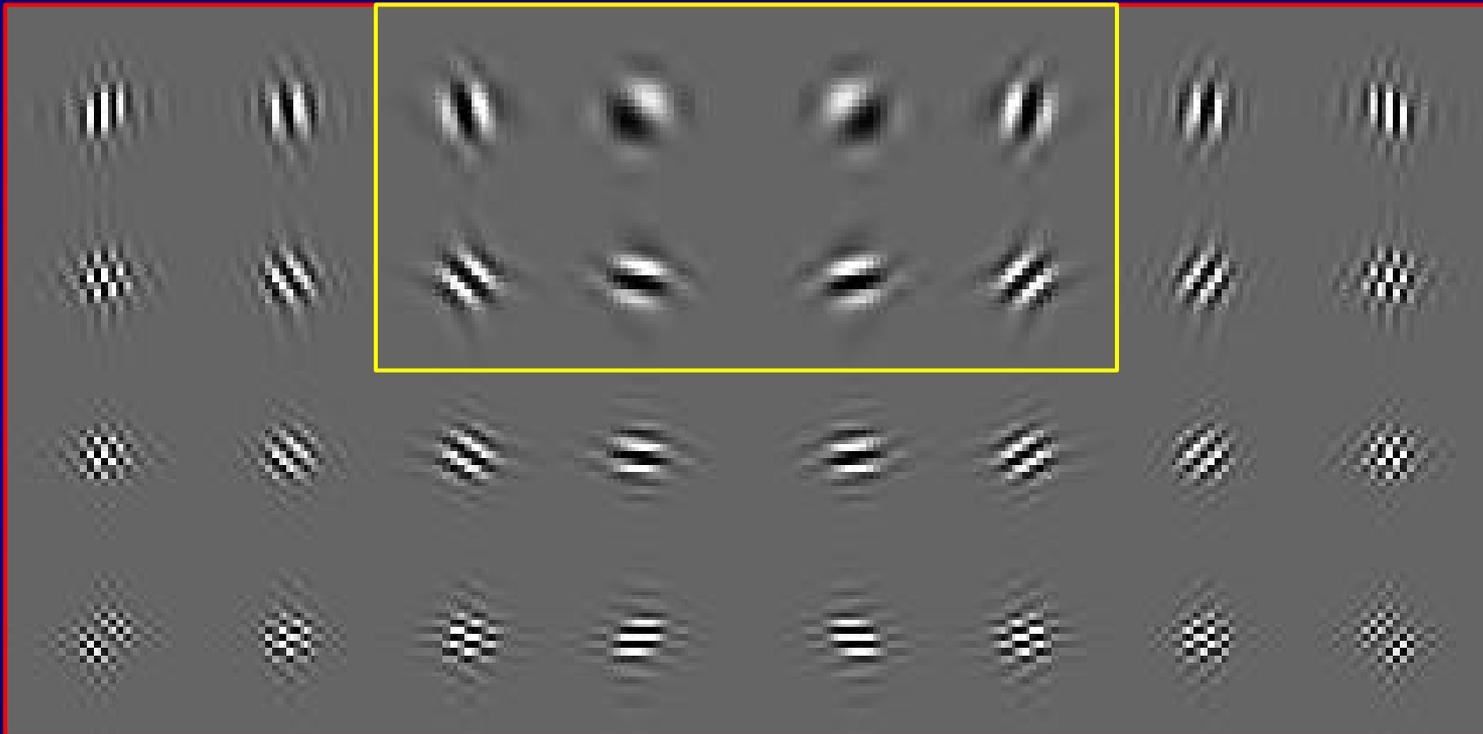
# Partition du plan fréquentiel



# Sélectivité directionnelle

## réponses impulsionnelles – partie réelle

Ondelettes complexes

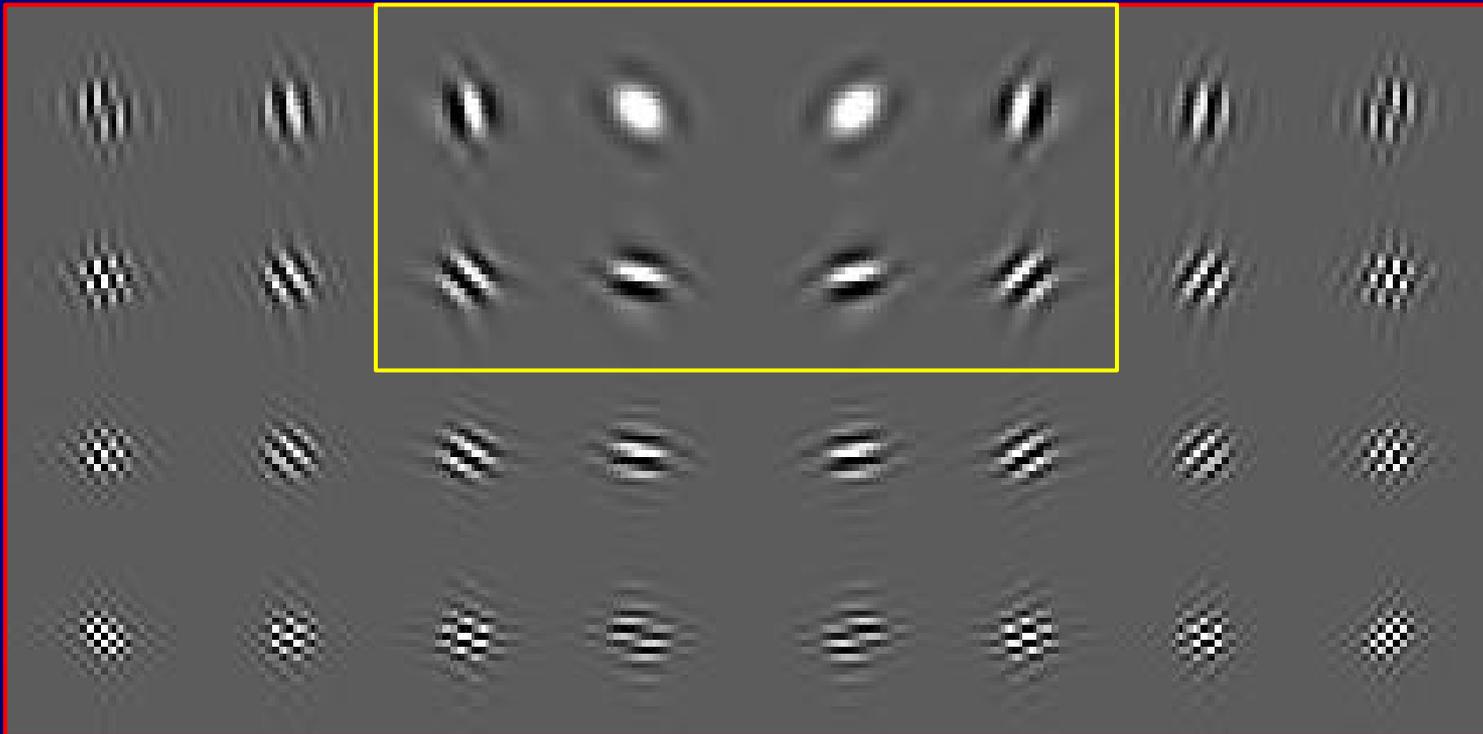


Paquets d'ondelettes complexes

# Sélectivité directionnelle

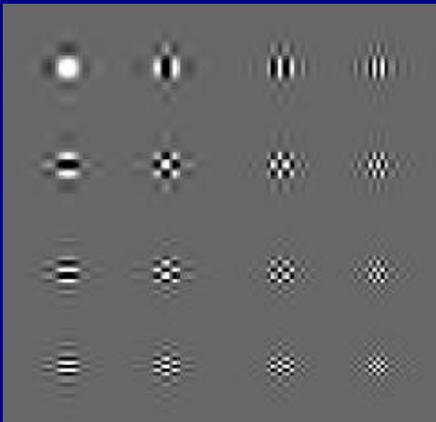
réponses impulsionnelles – partie imaginaire

Ondelettes complexes



Paquets d'ondelettes complexes

# Comparaison avec les paquets d'ondelettes réels



Réponses  
impulsionnelles



**Pas d'invariance par translation**

→ artefacts (moyenne sur translations)



**Pas d'invariance par rotation**

Directions privilégiées : horizontale / verticale

→ mauvaise représentation des textures  
orientées (diagonales)

# Exemple

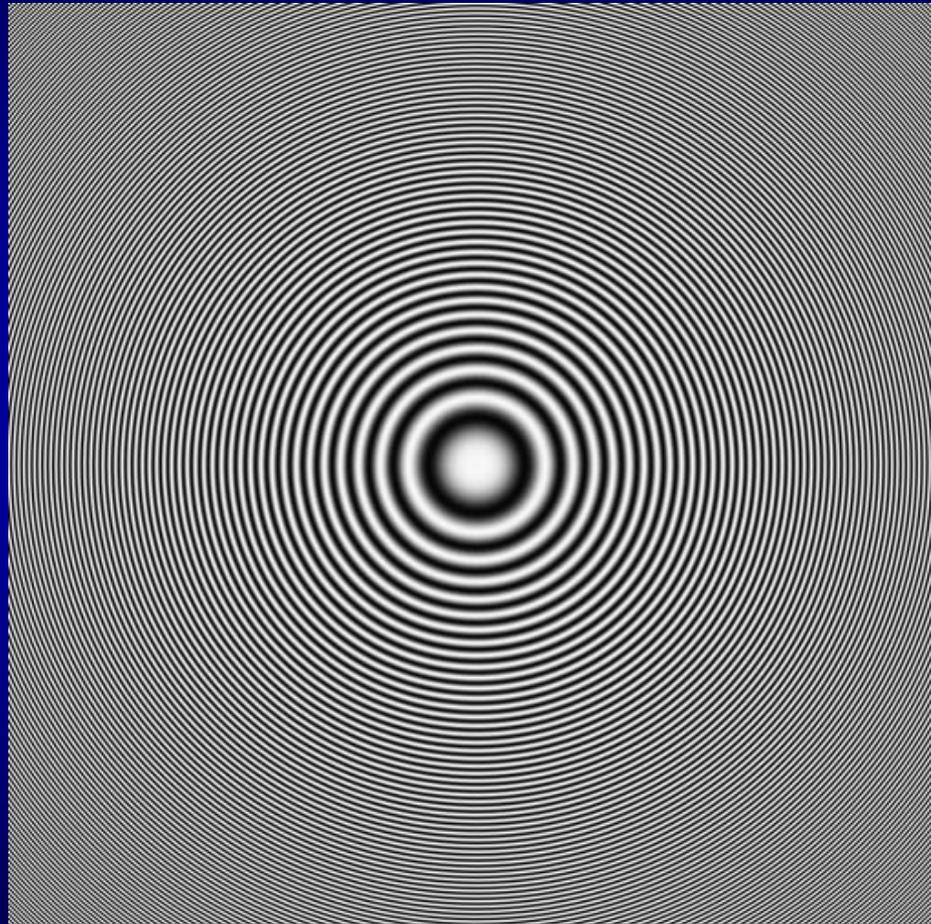
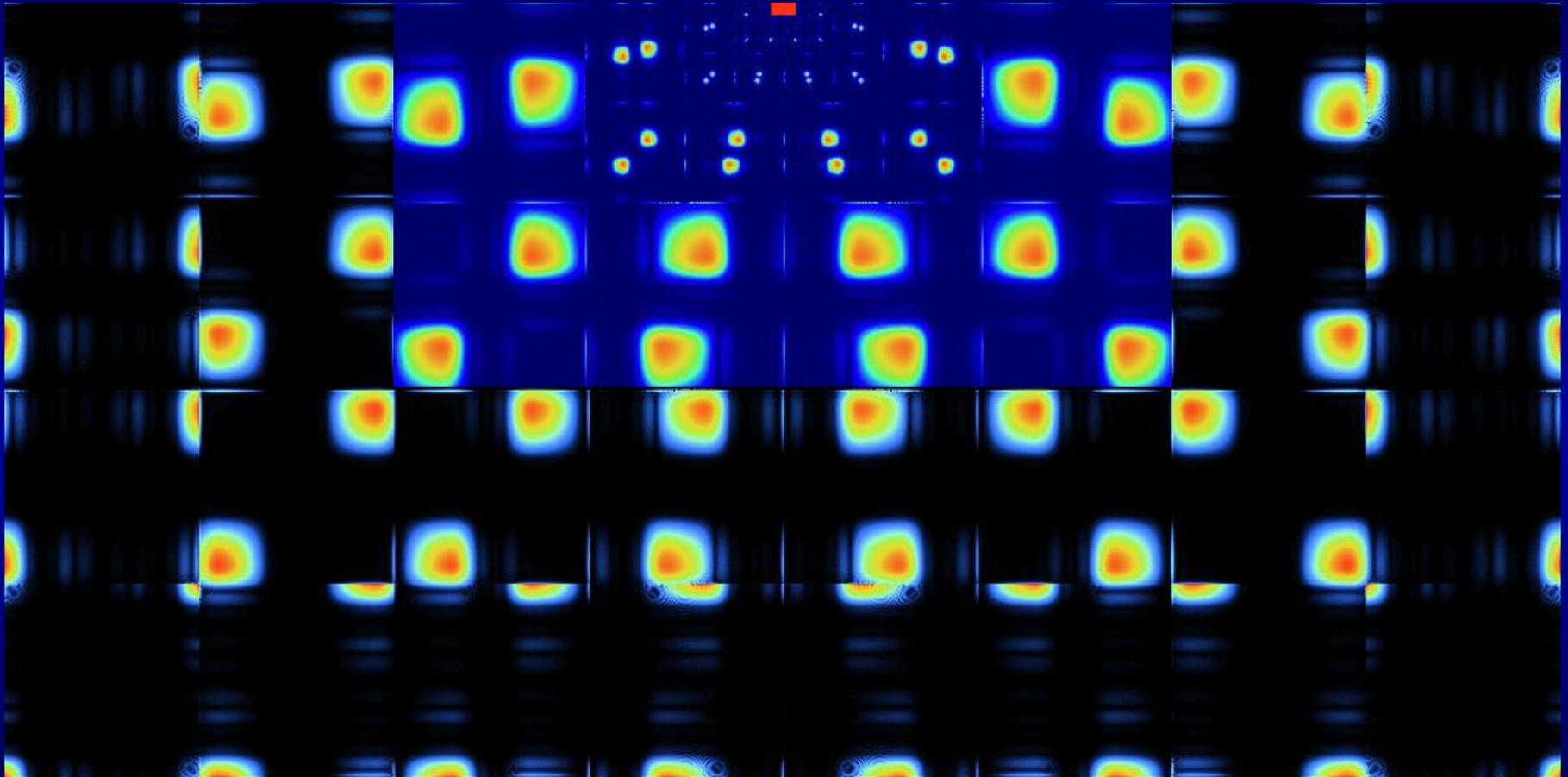


Image test, 512x512

# Exemple



Transformée en paquets d'ondelettes complexes, niveau 6

# Seuillage de la transformée

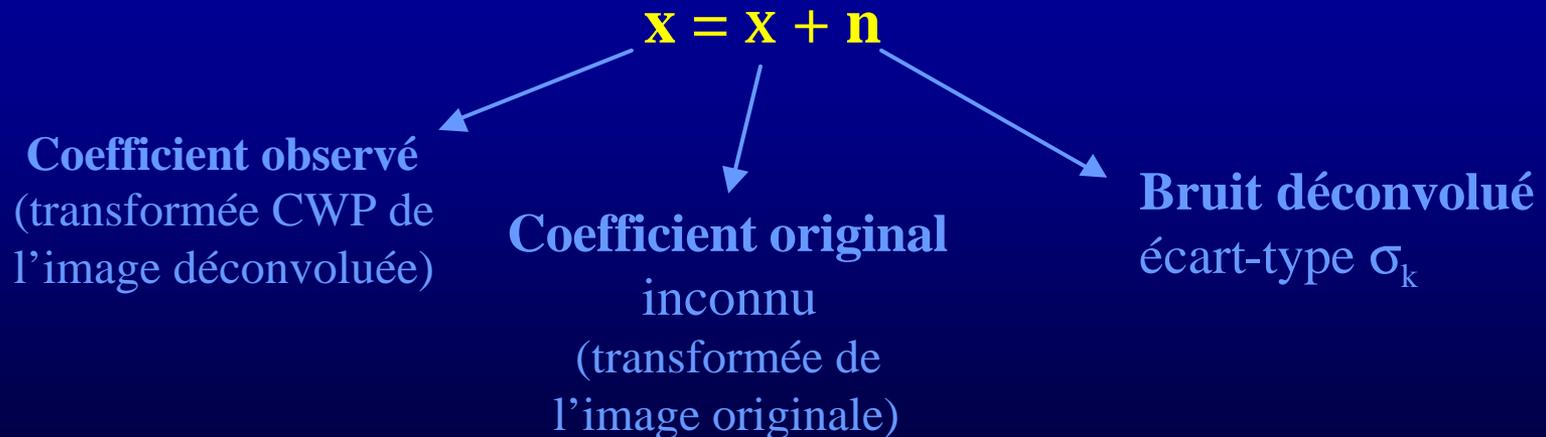
Filtrer uniquement le module  $\rightarrow$  invariance par translation

$$\hat{x} = \theta_T(x) = x a_T(|x|)$$

rappel - les images observées sont dégradées :

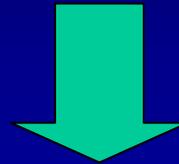
$$Y = h * X_0 + N$$

Chaque coefficient de la sous-bande  $k$   
de la transformée en ondelettes complexes est dégradé :



# Fonctions de seuillage

Données : image déconvoluée sans régularisation



## Fixer une fonction de seuillage $q_T$

Calcul du seuil optimal :  
minimiser un risque

- Risque minimax [Donoho 94]
- modélisation des sous-bandes

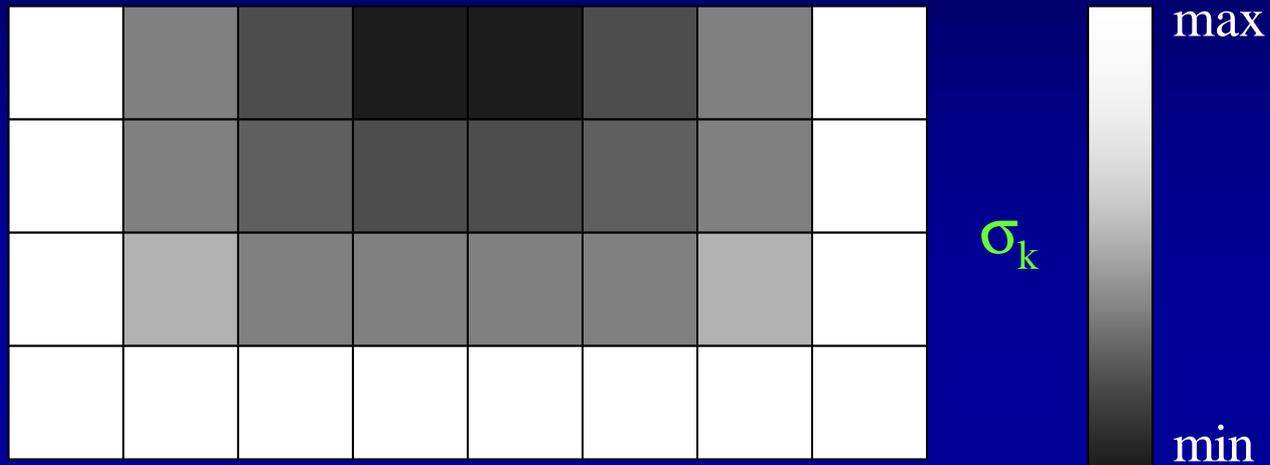
## Méthodes bayésiennes :

Estimation des coefficients par  
**MAP**  $\rightarrow$  fonction  $q_T$

Modèle pour les sous-bandes :

- Gaussien généralisé homogène
- Gaussien adaptatif

# Variance du bruit déconvolué



Estimation de  $\sigma_k$  :

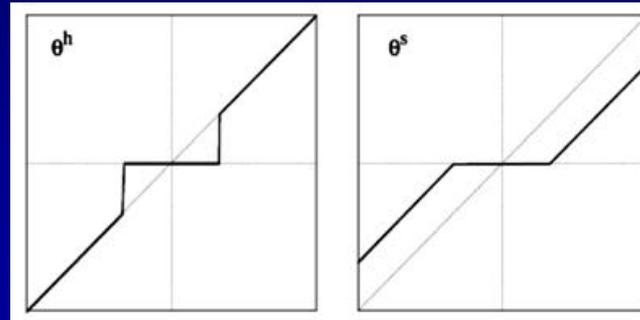
- simulation (transformée d'un bruit blanc)
- calcul direct, avec  $h$  et  $\sigma$  connus

$$\sigma_k^2 = \sigma^2 \sum_{i,j} \left| \frac{\text{FFT}[R_k]_{ij}}{\text{FFT}[h]_{ij}} \right|^2$$

*Réponse impulsionnelle  
pour la sous-bande  $k$*

# Risque optimal

- Imposer une fonction de seuillage  $q_T$



- **Minimiser le risque** de l'estimateur de seuillage

$$r(\hat{X}, X_0) = E \left[ \left\| \hat{X} - X_0 \right\|^2 \right] = E \left[ \sum_m |\theta_T(x) - \xi|^2 \right]$$

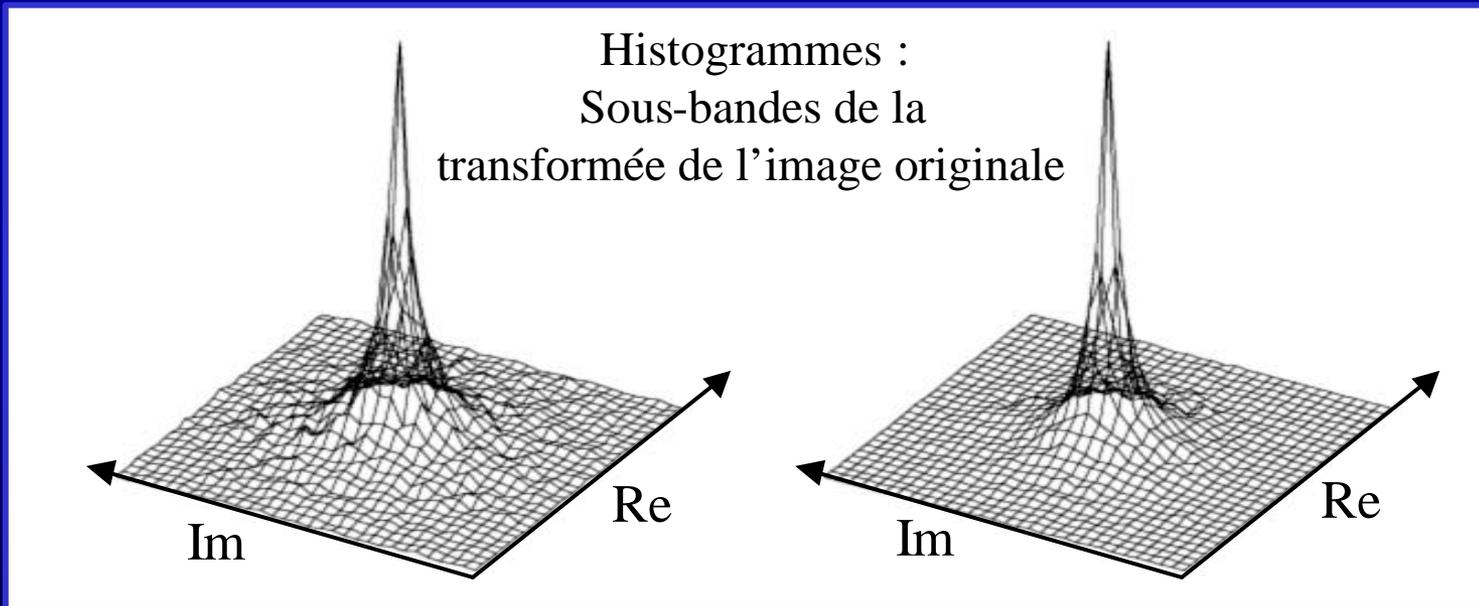
- Résultats théoriques [Donoho, Johnstone 94]  
*non applicables en pratiques (seuil trop grand)* [Kalifa 99]
- **Modélisation des sous-bandes** (Gaussienne Généralisée [Mallat 89])  
→ estimation des paramètres du modèle

# Modélisation des sous-bandes

Gaussienne Généralisée :  $P(\xi) = \frac{1}{Z_{\alpha,p}} e^{-|\xi/\alpha|^p}$

$\alpha, p$  paramètres du modèle

Étude expérimentale :



# Méthodes bayésiennes

- Modélisation des sous-bandes  
→ estimation des paramètres
- On n'impose pas la fonction de seuillage
- estimer  $\mathbf{x}$  par **Maximum A Posteriori** (MAP)

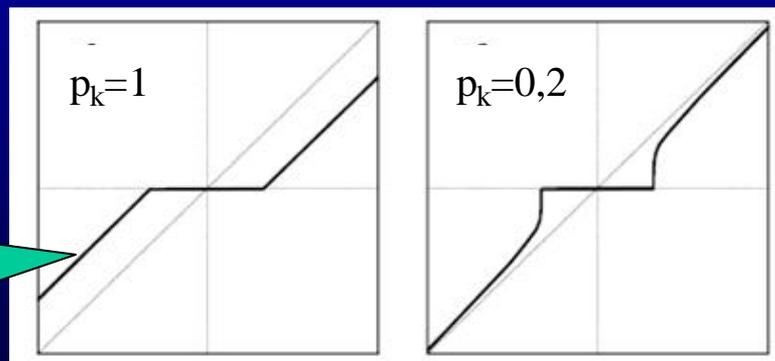
$$\text{Max } P(\xi|\mathbf{x}) = \text{Max } P(\mathbf{x}|\xi)P(\xi)$$

$$\left. \begin{array}{l} P(\xi) \propto e^{-|\xi/\alpha|^p} \\ P(\mathbf{x}|\xi) \propto e^{-|\mathbf{x}-\xi|^2/2\sigma^2} \end{array} \right\} \longrightarrow \hat{\mathbf{x}} = \text{Min}_{\xi} \left[ |\mathbf{x}-\xi|^2/2\sigma^2 + |\xi/\alpha|^p \right]$$

Estimation des paramètres  $\alpha, p$  : maximum de vraisemblance, etc.

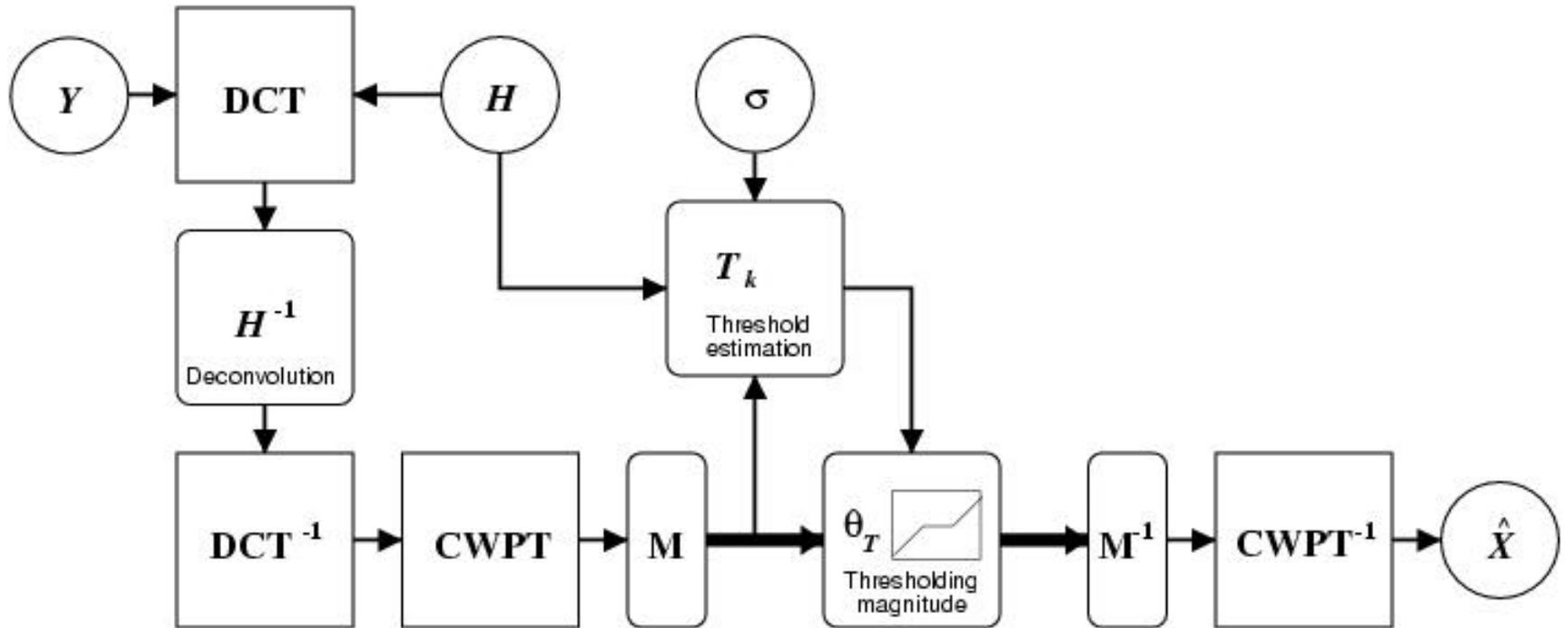
$$\hat{\mathbf{x}} = \theta(\mathbf{x})$$

Fonctions de seuillage classiques pour certaines valeurs de  $p_k$



# COWPATH 1.0

« **CO**mplex **W**avelet **P**ackets **A**utomatic **Th**resholding »



# Modèle gaussien inhomogène

Insuffisance des modèles homogènes  
(zones constantes / contours / textures)

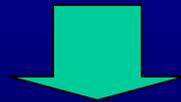


Paramètre  $s_{ij}$  : dépend de la position du coefficient  $\xi_{ij}$

$$P(\xi_{ij}) = \frac{1}{2\pi s_{ij}^2} e^{-|\xi_{ij}|^2 / 2s_{ij}^2}$$

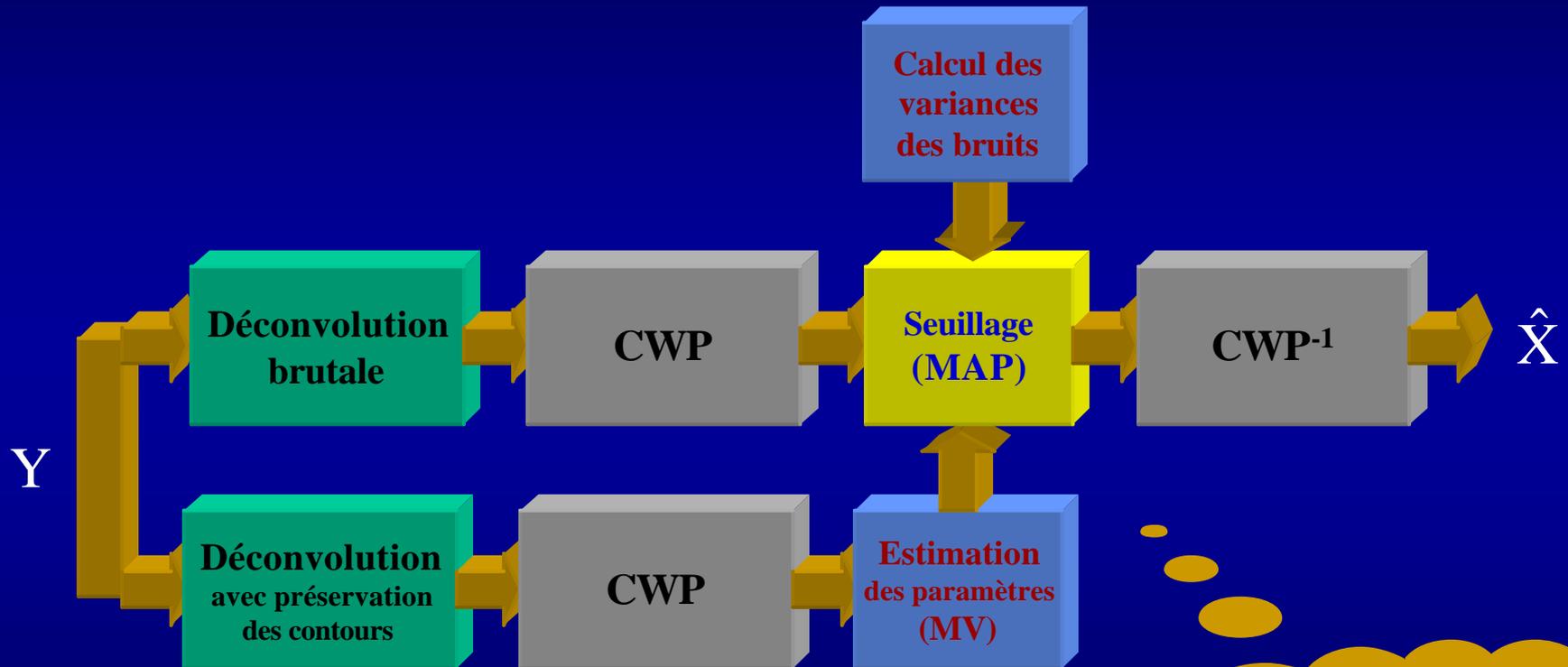


Problèmes d'estimation des paramètres  $s_{ij}$   
(données insuffisantes / nombre de paramètres inconnus !)



**Méthode hybride : estimation des paramètres  
à partir d'une « bonne » approximation de l'image originale**  
*Maximum de vraisemblance en données complètes*

# COWPATH 2.0



Temps de calcul  
3,5s sur un PII 400  
( $\phi$  quadratique)



Nîmes, image originale 512 x 512 © CNES



Nîmes, image floue et bruitée ( $\sigma \sim 1.4$ )



Nîmes déconvoluée par COWPATH 1



Nîmes déconvoluée par COWPATH 2



Nîmes déconvoluée par COWPATH 2 - zoom



Nîmes, déconvolution par paquets d'ondelettes réels [Kalifa, Mallat 99]



Nîmes, déconvolution par RHEA (fonction  $\varphi$  non quadratique [Jalobeanu 98])

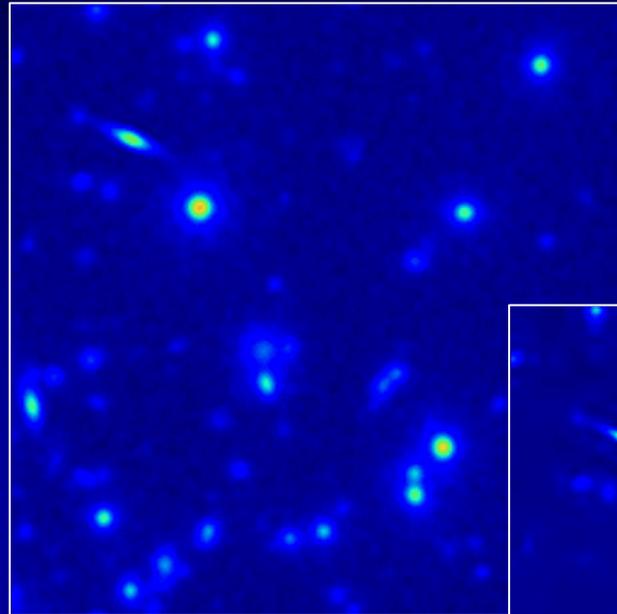
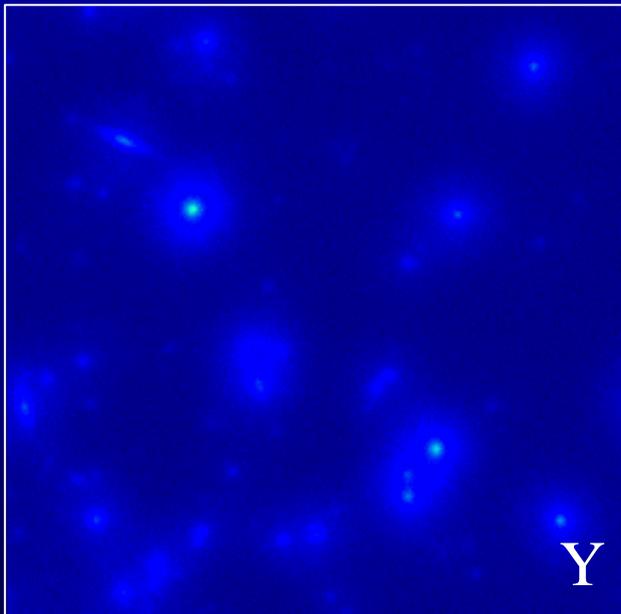
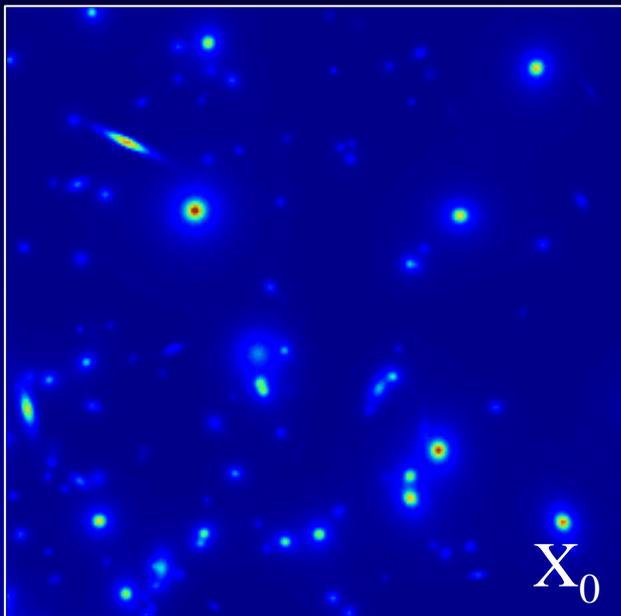


Nîmes, déconvolution avec régularisation quadratique (~Wiener)

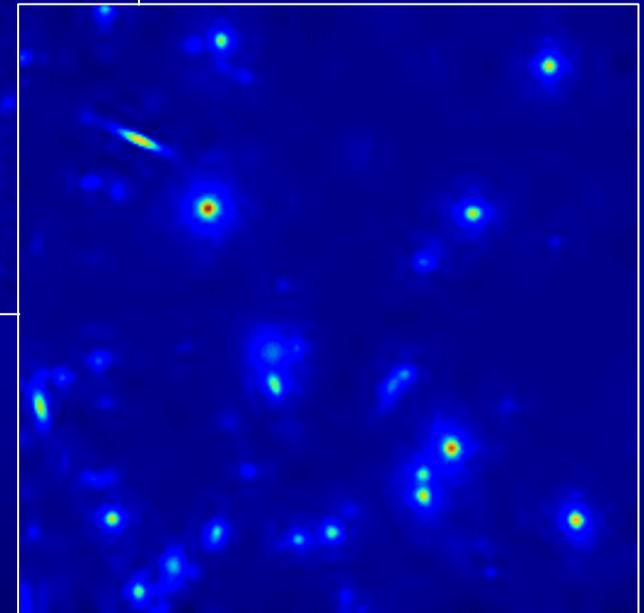


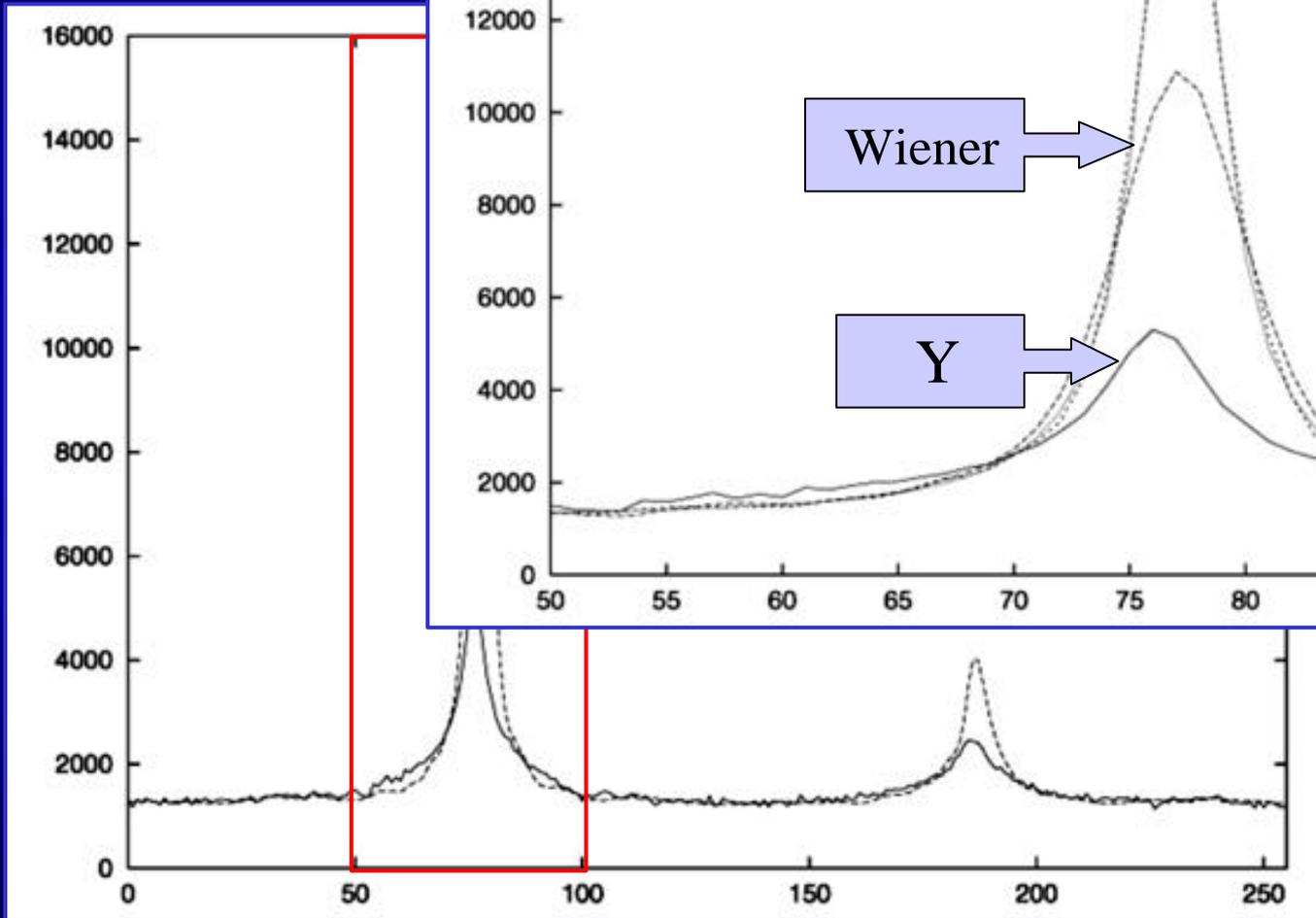
Comparaison des résultats

# Résultats en Astronomie (RI Hubble)



Déconvolution  
avec  
régularisation  
quadratique  
(~Wiener)





# Conclusions et perspectives

## Amélioration des résultats :

- ✱ **Adapter la structure de l'arbre au problème**
  - prise en compte des images et des réponses impulsionnelles
- ✱ **Meilleure modélisation des sous-bandes**
  - Modèle gaussien généralisé adaptatif ?
- ✱ **Terme d'attache aux données plus précis**
  - les coefficients du bruit ne sont pas indépendants
- ✱ **Prendre en compte l'interaction entre les échelles**
  - Arbres de Markov cachés [Nowak *et al.* 98]

## Méthode hybride : DEPA [Jalobeanu *et al.* 00]

Résultat de COWPATH → estimation des paramètres d'un modèle de régularisation **adaptatif**