

Une Approche Variationnelle pour la Classification d'Images par Régions Actives

A Variational Approach for Image Classification based on Active Regions

Christophe Samson¹ Laure Blanc-Féraud¹ Gilles Aubert² Josiane Zerubia¹

¹Ariana projet commun CNRS/INRIA/UNSA, INRIA Sophia Antipolis, 2004 route des lucioles, BP 93, 06902 Sophia Antipolis cedex, France.

{Prenom.Nom}@sophia.inria.fr

membres du GdR ISIS

²Laboratoire J.A. Dieudonné, UMR 6621 CNRS, Université de Nice-Sophia Antipolis, 06108 Nice Cedex 2, France.

Résumé

Nous proposons un modèle de classification supervisée basé sur une approche variationnelle. Ce modèle permet de trouver une partition de l'image, composée de classes homogènes séparées par des interfaces de longueurs minimales. Nous représentons les régions (les classes) de l'image ainsi que leurs frontières par des ensembles de niveaux de fonctions implicites. Nous définissons une fonctionnelle sur ces fonctions dont la minimisation conduit à une partition "optimale" de l'image, i.e. une partition telle que les classes soient réparties selon les observations plus une régularisation par minimisation de la longueur des interfaces. Le système d'EDP couplées associé à la minimisation de cette fonctionnelle est plongé dans un schéma dynamique. Partant d'un ensemble initial d'interfaces, les différents termes des EDP guident l'évolution des interfaces vers une partition optimale au sens défini précédemment. Chaque interface est gouvernée par un jeu de forces internes (régularité des interfaces) et externes (attache aux données, pas de vide entre les régions ni de chevauchement des régions). Nous avons testé ce modèle sur des images synthétiques et réelles.

Mots Clef

Classification d'image, approche variationnelle, étiquetage, régions et contours actifs, formulation par ensembles de niveaux.

Abstract

We present herein a supervised classification model based on a variational approach. This model is devoted to find an optimal partition compound of homogeneous classes with regular interfaces. We represent the regions of the image defined by the classes and their interfaces by level set functions, and we define a functional whose minimum is an "optimal" partition in the sense that the classes are determined according to the observation plus a regularization whose consists of minimizing the length of the interfaces. The coupled PDE's related to the minimization of the functional are considered through a dynamical scheme. Given an initial interface set, the different terms of the PDE's are governing the motion of interfaces such that, at convergence, we get an optimal partition as defined above. Each interface is guided by internal forces (regularity of the interface), and external ones (data term, no vacuum, no region overlapping). Several experiments were conducted on both synthetic and real images.

Keywords

Image classification, variational approach, labelling, active regions, level set formulation.

1 Introduction

La classification concerne de nombreuses applications en traitement des images, et consiste à trouver une partition d'une image en régions homogènes : les classes. La classification est étroitement liée à la segmentation

(voir par exemple [8, 9]) dans le sens où nous obtenons une partition de l'image, mais la classification présente un processus supplémentaire d'étiquetage. Chaque région de la partition obtenue est constituée d'un ensemble de pixels ayant la même étiquette. Nous supposons que le nombre de classes ainsi que leurs paramètres respectifs sont connus (classification *supervisée*), par une pré-estimation par exemple. L'attribut de l'image qui nous intéresse est la distribution spatiale d'intensité (ou niveau de gris), mais d'autres attributs peuvent être envisagés comme ceux concernant la texture par exemple.

De nombreux modèles de classification ont été développés, que ce soit par des approches structurales comme la croissance de régions [11], ou par des approches stochastiques comme dans [1], mais rarement dans un cadre variationnel. Dans [13] nous proposons un modèle variationnel de classification fondé sur la théorie de Cahn-Hilliard, permettant d'obtenir une solution limite composée de classes homogènes séparées par des frontières de longueurs pondérées minimales. L'approche adoptée ici est différente à plusieurs niveaux. A chaque région et sa frontière nous associons une fonction implicite. Nous définissons une fonctionnelle sur l'ensemble des fonctions implicites contraignant la solution à former une partition composée de régions homogènes et d'interfaces de longueurs minimales (partition "optimale"), et la minimisation de cette fonctionnelle est plongée dans un schéma dynamique. Il en résulte un système d'EDP (Equations aux Dérivées Partielles) couplées gouvernant l'évolution des régions et de leurs frontières vers une partition "optimale". Ce modèle est inspiré des travaux de Zhao et *al.* [15] développés en physique sur l'évolution de phases multiples, et s'inscrit dans le cadre général des contours actifs [2, 3] pour la segmentation de régions [16].

Nous commençons par présenter le problème en termes de partition, et par établir les propriétés souhaitées sur la solution (définition de la notion de partition "optimale"). Nous modélisons les régions et l'ensemble d'interfaces par des fonctions implicites, et nous définissons une fonctionnelle sur ces fonctions, dont la solution de minimisation est une partition "optimale". Nous présentons ensuite le schéma dynamique que nous avons implémenté pour minimiser la fonctionnelle. Nous terminons en exposant les résultats obtenus sur des données synthétiques et réelles.

2 La classification d'image en tant que problème de partition

Dans ce chapitre, outre la position du problème, nous précisons ce que nous entendons par partition "optimale".

Soit u_0 une image observée telle que $u_0(x)$ désigne

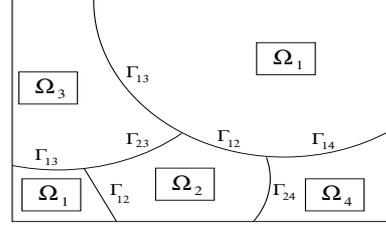


FIG. 1 – Une partition de Ω .

l'intensité (ou niveau de gris) du point x . Nous supposons que la distribution d'intensité dans chaque classe est gaussienne, ainsi une classe est caractérisée par sa moyenne μ_i et son écart-type σ_i , et que le nombre de classes K ainsi que les paramètres $(\mu_i, \sigma_i)_{i=1 \dots K}$ sont connus. L'étiquette assignée à un pixel appartenant à la $i^{\text{ème}}$ classe aura pour valeur μ_i .

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 de frontière régulière par morceaux, et soit $u_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction d'intensité associée aux données observées. Nous notons Ω_i la région (ensemble non nécessairement connexe) définie par

$$\Omega_i = \{x \in \Omega / x \text{ appartient à la } i^{\text{ème}} \text{ classe}\}. \quad (1)$$

Une partition de Ω consiste à trouver l'ensemble $\{\Omega_i\}_{i=1 \dots K}$, tel que (cf. Fig. 1)

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^K \Omega_i \quad \text{et} \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \quad (i \neq j). \quad (2)$$

On note $\Gamma_i = \partial\Omega_i \cap \Omega$ l'intersection de la frontière de Ω_i avec l'ouvert Ω , et nous définissons l'interface entre Ω_i et Ω_j par

$$\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji} = \Gamma_i \cap \Gamma_j \cap \Omega, \quad \forall i \neq j. \quad (3)$$

Nous avons

$$\Gamma_i = \bigcup_{j \neq i} \Gamma_{ij}. \quad (4)$$

Remarquons que dans (3) et (4) nous pouvons avoir $\Gamma_{ij} = \emptyset$. La notation $|\Gamma_i|$ désigne la mesure de Hausdorff unidimensionnelle de Γ_i vérifiant

$$|\Gamma_i| = \sum_{j \neq i} |\Gamma_{ij}| \quad \text{et} \quad |\emptyset| = 0. \quad (5)$$

Le modèle de classification que nous considérons pour une image observée de fonction d'intensité u_0 définie sur Ω doit permettre d'obtenir un ensemble de régions $\{\Omega_i\}_{i=1 \dots K}$ satisfaisant :

CONDITION A : $\{\Omega_i\}_i$ est une partition de Ω :

$$\Omega = \bigcup_i \Omega_i \quad \text{et} \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \quad (i \neq j)$$

CONDITION B : La partition $\{\Omega_i\}_i$ est une classification des données observées u_0 tenant compte de la distribution gaussienne de l'intensité au sein des classes (terme d'attache aux données) : dans Ω_i on a $u_0 \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i)$

$$\text{minimiser } \sum_i \int_{\Omega_i} \left(\frac{u_0 - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2 \text{ par rapport à } \Omega_i.$$

CONDITION C : La partition est "régulière" dans le sens où la somme des longueurs des interfaces Γ_{ij} est minimale :

$$\text{minimiser } \sum_{i,j} \xi_{ij} |\Gamma_{ij}| \text{ par rapport à } \Gamma_{ij},$$

les réels ξ_{ij} étant fixés.

Le modèle classification proposé devra prendre en compte ces trois conditions.

3 Formulation du problème par ensembles de niveaux

Le modèle que nous proposons est basé sur un ensemble d'interfaces et de régions actives, et l'approche que nous adoptons s'inspire de celle proposée par Zhao *et al.* [15]. Nous utilisons une description des régions Ω_i et de leurs interfaces à l'aide de fonctions implicites. L'évolution des interfaces (et des régions) est guidée par des forces contraignant la solution de classification à respecter les CONDITIONS A, B et C présentées dans le chapitre précédent.

3.1 Préliminaires

Soit $\Phi_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction Lipschitzienne associée à la région Ω_i (on suppose que de telles fonctions existent) telle que¹

$$\begin{cases} \Phi_i(x) > 0 & \text{si } x \in \Omega_i \\ \Phi_i(x) = 0 & \text{si } x \in \Gamma_i \\ \Phi_i(x) < 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (6)$$

La région Ω_i ainsi que sa frontière Γ_i sont complètement définie par la fonction implicite Φ_i , respectivement par ses valeurs strictement positives et son ensemble de niveau zéro.

On note δ_α et H_α les approximations d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}^+$ des distributions de Dirac et de Heaviside :

$$\delta_\alpha(s) = \begin{cases} \frac{1}{2\alpha} \left(1 + \cos\left(\frac{\pi s}{\alpha}\right) \right) & \text{si } |s| \leq \alpha \\ 0 & \text{si } |s| > \alpha \end{cases} \quad (7)$$

¹. Par soucis de clarté, nous omettrons parfois la variable spatiale x

$$H_\alpha(s) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{s}{\alpha} + \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi s}{\alpha}\right) \right) & \text{si } |s| \leq \alpha \\ 1 & \text{si } s > \alpha \\ 0 & \text{si } s < -\alpha \end{cases} \quad (8)$$

et nous avons

$$\begin{cases} \delta_\alpha \xrightarrow{\mathcal{D}'(\Omega)} \delta & \text{lorsque } \alpha \rightarrow 0^+ \\ H_\alpha \xrightarrow{\mathcal{D}'(\Omega)} H & \text{lorsque } \alpha \rightarrow 0^+ \end{cases}$$

où $\mathcal{D}'(\Omega)$ est l'espace des distributions définies sur Ω . D'après (6),(7) et (8) nous obtenons

$$\{x \in \Omega / \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} H_\alpha(\Phi_i(x)) = 1\} = \Omega_i \quad (9)$$

$$\{x \in \Omega / \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \delta_\alpha(\Phi_i(x)) \neq 0\} = \Gamma_i. \quad (10)$$

3.2 Expression de la fonctionnelle

D'après la définition des fonctions Φ_i dans (6) et en utilisant (9) et (10), une partition $\{\Omega_i\}_i$ respectant les CONDITIONS A, B et C établies dans la section 2 peut être obtenue par la minimisation d'une fonctionnelle globale définie sur les fonctions Φ_i . Cette fonctionnelle contient trois termes, chaque terme étant la traduction d'une des trois conditions A, B ou C.

• FONCTIONNELLE ASSOCIÉE À LA CONDITION A (condition de partition) :

On définit la fonctionnelle suivante :

$$F_\alpha^A(\Phi_1, \dots, \Phi_K) = \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^K H_\alpha(\Phi_i) - 1 \right)^2 dx, \quad (11)$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}^+$. La minimisation de F_α^A , lorsque $\alpha \rightarrow 0^+$, pénalise la formation de régions "vides" (pixels sans étiquette) ainsi que le recouvrement de régions (pixels ayant plus d'une étiquette).

• FONCTIONNELLE ASSOCIÉE À LA CONDITION B (attache aux données) :

Prenant en compte les observations u_0 ainsi que la distribution gaussienne de l'intensité dans les classes, nous considérons la fonctionnelle suivante :

$$F_\alpha^B(\Phi_1, \dots, \Phi_K) = \sum_{i=1}^K e_i \int_{\Omega} H_\alpha(\Phi_i) \frac{(u_0 - \mu_i)^2}{\sigma_i^2} dx, \quad (12)$$

avec $e_i \in \mathbb{R}^+$, $\forall i$. La famille $\{\Phi_i\}_i$ minimisant F_α^B lorsque $\alpha \rightarrow 0^+$ conduit à des régions $\{\Omega_i\}_i$ satisfaisant la CONDITION B.

• FONCTIONNELLE ASSOCIÉE À LA CONDITION C (minimisation de la longueur des interfaces):
Nous voulons minimiser :

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j} \xi_{ij} |\Gamma_{ij}| \quad \text{avec } \xi_{ij} \in \mathbb{R}^+ \quad \forall i,j. \quad (13)$$

Le facteur $\frac{1}{2}$ traduit la symétrie $\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji}$ et sera introduit dans la pondération ξ_{ij} . Nous ramenons la minimisation de la longueur des interfaces à celle de la longueur des frontières (que nous savons exprimer à l'aide des fonctions Φ_i):

$$\sum_{i=1}^K \gamma_i |\Gamma_i| \quad \text{avec } \gamma_i \in \mathbb{R} \quad \forall i. \quad (14)$$

D'après (13) et (14), nous obtenons la contrainte $\xi_{ij} = \gamma_i + \gamma_j$. Cette contrainte permet de déterminer la valeur des paramètres γ_i dans le problème de minimisation de la longueur des frontières, afin de retomber sur le problème concernant la minimisation de la longueur des interfaces. Le lemme donné ci-dessous permet d'écrire la minimisation de (14) comme la minimisation de la fonctionnelle (lorsque $\alpha \rightarrow 0^+$):

$$F_\alpha^c(\Phi_1, \dots, \Phi_K) = \sum_{i=1}^K \gamma_i \int_{\Omega} \delta_\alpha(\Phi_i) |\nabla \Phi_i| dx. \quad (15)$$

Lemme : *Posons*

$$L_\alpha(\Phi_i) = \int_{\Omega} \delta_\alpha(\Phi_i(x)) |\nabla \Phi_i(x)| dx.$$

Nous avons

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} L_\alpha(\Phi_i) = \int_{\Phi_i=0} ds = |\Gamma_i|.$$

Preuve : En utilisant la formule de la co-aire [4] appliquée à $L_\alpha(\Phi_i)$, on a

$$\begin{aligned} L_\alpha(\Phi_i) &= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\Phi_i=\rho} \delta_\alpha(\Phi_i(x)) ds \right] d\rho \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left[\delta_\alpha(\rho) \int_{\Phi_i=\rho} ds \right] d\rho \end{aligned} \quad (16)$$

En posant $h(\rho) = \int_{\Phi_i=\rho} ds$, nous obtenons

$$\begin{aligned} L_\alpha(\Phi_i) &= \int_{\mathbb{R}} \delta_\alpha(\rho) h(\rho) d\rho \\ &= \frac{1}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \left(1 + \cos\left(\frac{\pi\rho}{\alpha}\right) \right) h(\rho) d\rho \end{aligned} \quad (17)$$

Si nous prenons $\theta = \frac{\rho}{\alpha}$, on obtient

$$L_\alpha(\Phi_i) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(1 + \cos(\pi\theta) \right) h(\alpha\theta) d\theta$$

Par conséquent, lorsque $\alpha \rightarrow 0$ nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} L_\alpha(\Phi_i) &= \frac{1}{2} h(0) \int_{-1}^1 \left(1 + \cos(\pi\theta) \right) d\theta \\ &= h(0) = \int_{\Phi_i=0} ds = |\Gamma_i| \end{aligned} \quad (18)$$

• FONCTIONNELLE GLOBALE :

La somme $F_\alpha^A + F_\alpha^B + F_\alpha^c$ donne la fonctionnelle suivante:

$$\begin{aligned} F_\alpha(\Phi_1, \dots, \Phi_K) &= \sum_{i=1}^K e_i \int_{\Omega} H_\alpha(\Phi_i) \frac{(u_o - \mu_i)^2}{\sigma_i^2} dx \\ &+ \sum_{i=1}^K \gamma_i \int_{\Omega} \delta_\alpha(\Phi_i) |\nabla \Phi_i| dx \\ &+ \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^K H_\alpha(\Phi_i) - 1 \right)^2 dx. \end{aligned} \quad (19)$$

Lorsque $\alpha \rightarrow 0^+$, la solution $\{\Phi_i\}_i$ minimisant la fonctionnelle $F_\alpha(\Phi_1, \dots, \Phi_K)$, si elle existe² et d'après (6), constitue une classification composée de classes homogènes (les régions Ω_i) séparées par des interfaces de longueurs minimales (les frontières Γ_i).

3.3 Remarque concernant la minimisation de longueur

Soit la fonctionnelle de longueur suivante :

$$L(C) = \int_0^1 \left| \frac{\partial C(p)}{\partial p} \right| dp \quad (20)$$

où $C(p)$ est un ensemble de courbes fermées paramétrées ($p \in [0; 1]$) définies sur Ω . Alors, en considérant la minimisation de la longueur à travers un schéma dynamique, la longueur décroît le plus rapidement lorsque les courbes évoluent temporellement selon l'équation³

$$\frac{\partial C(p; t)}{\partial t} = \kappa \vec{N}, \quad (21)$$

où κ est la courbure locale de $C(p; t)$ et \vec{N} représente la normale interne. L'évolution de courbes selon (21) est connue sous le nom de *mean curvature motion* (voir [6] par exemple). L'EDP (21) peut être formulée à l'aide d'ensembles de niveaux de fonctions implicites [10], cette formulation étant mieux adaptée à la gestion de la division/fusion de contours. Soit $d : \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que, à partir des valeurs $d(x; t)$, on puisse déterminer si x est intérieur, extérieur ou appartient au contour $C(p; t)$. Supposons que

2. si elle existe, la solution $\{\Phi_i\}_i$ doit être trouvée dans l'espace $\{\Phi_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R} / |\nabla \Phi_i| \in L^1(\Omega)\}$

3. on suppose les conditions extrémales $C(0; t) = C(1; t)$ et $\frac{\partial C(0; t)}{\partial t} = \frac{\partial C(1; t)}{\partial t}$

$C(p; t) = \{x \in \Omega / d(x; t) = 0\}$. L'EDP (21) reformulée à l'aide d'ensemble de niveaux de d devient

$$\frac{\partial d(x; t)}{\partial t} = \text{div}\left(\frac{\nabla d}{|\nabla d|}\right)|\nabla d|, \quad (22)$$

avec $\text{div}\left(\frac{\nabla d}{|\nabla d|}\right)$ désignant la courbure locale des ensembles de niveaux de d . L'équation (22) a été étudiée dans [5] par exemple. Cette formulation de la *mean curvature motion* par ensembles de niveaux de d autorise la cassure ainsi que la fusion des contours, ce qui n'est pas possible avec la formulation (21). A partir du moment où le contour $C(p; t)$ est représenté par le niveau 0 de la fonction d , nous pouvons nous intéresser uniquement à l'évolution des niveaux de d compris dans une bande étroite (de largeur 2α) autour du niveau 0. La formulation (22) est obtenue par une "**reformulation**" de (21), alors que dans notre cas, nous formulons **directement** la fonctionnelle de longueur F_α^c à l'aide d'ensembles de niveaux zéros des fonctions Φ_i . Les équations d'Euler-Lagrange conduisent à K EDP de la forme:

$$\frac{\partial \Phi_i(x; t)}{\partial t} = \text{div}\left(\frac{\nabla \Phi_i}{|\nabla \Phi_i|}\right)\delta_\alpha(\Phi_i). \quad (23)$$

Comparé à (22), on voit immédiatement dans (23) l'existence d'une bande "naturelle", à travers l'opérateur δ_α , dont la largeur est fixée par la valeur de α (dans le cas où les fonctions Φ_i sont des fonctions de distance signées du type (6)).

4 Schéma dynamique d'évolution

Les équations d'Euler Lagrange associées à la minimisation de F_α donnent K EDP couplées ($i = 1 \dots K$), avec des conditions de Neumann aux bords $\partial\Omega$ de Ω ($\frac{\partial \Phi_i}{\partial \bar{n}}(x; t) = 0, \forall x \in \partial\Omega$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_\alpha}{\partial \Phi_i} &= \delta_\alpha(\Phi_i) \left[e_i \frac{(u_0 - \mu_i)^2}{\sigma_i^2} - \gamma_i \text{div}\left(\frac{\nabla \Phi_i}{|\nabla \Phi_i|}\right) \right. \\ &\quad \left. + \lambda \left(\sum_{i=1}^K H_\alpha(\Phi_i) - 1 \right) \right] \\ &= 0, \end{aligned} \quad (24)$$

où div est l'opérateur de divergence, et $\text{div}\left(\frac{\nabla \Phi_i}{|\nabla \Phi_i|}\right)$ représente la courbure moyenne de la fonction Φ_i au point x . Remarquons que le terme $\delta_\alpha(\Phi_i)$ dans (24) délimite une bande "naturelle" B_α^i dans laquelle la $i^{\text{ème}}$ EDP est non nulle (lorsque Φ_i est une fonction de distance signée): $B_\alpha^i = \{x \in \Omega / |\Phi_i(x; t)| \leq \alpha\}$. Nous plongeons (24) dans un schéma dynamique, et nous obtenons un système de K EDP couplées:

$$\Phi_i^{t+1} = \Phi_i^t - dt \left(\delta_\alpha(\Phi_i) \left[e_i \frac{(u_0 - \mu_i)^2}{\sigma_i^2} - \gamma_i \text{div}\left(\frac{\nabla \Phi_i}{|\nabla \Phi_i|}\right) \right] \right)$$

$$+ \lambda \left(\sum_{i=1}^K H_\alpha(\Phi_i) - 1 \right) \Big], \quad i = 1 \dots K \quad (25)$$

avec dt représentant le pas de temps.

Les fonctions Φ_i sont initialement des fonctions de distance signées, mais comme pour (22), les EDP (23) et (25) détruisent la régularité des fonctions de distances et nous devons régulièrement régulariser les K fonctions Φ_i afin qu'elles demeurent des fonctions de distance. Cette régularisation est effectuée en utilisant l'EDP définie dans [14].

5 Résultats expérimentaux

Nous présentons des résultats obtenus sur des données synthétiques et réelles. De nombreux autres résultats ont été obtenus et présentés dans [12].

Les données synthétiques présentées sur la Fig. 2 proviennent du GdR ISIS. Cette portion d'image contient 3 classes de paramètres μ_i et σ_i donnés. Nous initialisons 3 fonctions Φ_i dont les Ensembles de Niveaux Zéro (que nous appellerons **ENZ** par la suite) sont des cercles. Nous montrons sur la Fig. 2 l'évolution des ENZ, et la classification finale est donnée en fausses couleurs. Nous avons donné un faible poids aux paramètres γ_i pour permettre de retrouver les contours perturbés de l'objet de classe 3 situé à droite de l'image des données. Les pixels noirs de l'image de la classification correspondent à des pixels non classés.

Les données SPOT de la Fig. 3 proviennent du CNES. Les paramètres des 4 classes ont été estimés dans [1]. Comme précédemment, nous montrons l'évolution des ENZ ainsi que le résultat de classification en fausses couleurs. L'initialisation des ENZ est effectuée par une méthode automatique permettant de disposer une série de "germes" de Φ_i initiaux sur l'image. Cette méthode consiste à faire glisser une fenêtre sur les données u_0 . Dans chaque fenêtre, on calcule la moyenne m des pixels et on cherche l'indice k tel que $k = \arg \min_j (m - \mu_j)^2$. Cela nous permet d'initialiser dans chaque fenêtre une fonction Φ_k (de niveaux circulaires) correspondant à la classe la plus proche. Bien entendu, la taille de la fenêtre est liée à la taille minimale des objets isolés que nous pourrions détecter. Bien qu'extrêmement simple, cette méthode d'initialisation est automatique, accélère la vitesse de convergence si la taille de la fenêtre est petite, et son effet "moyennant" la rend peu sensible au bruit.

La Fig. 4 montre les résultats obtenus sur une image IRM de cerveau fournie par le Dr Dormont de l'Hôpital de La Pitié Salpêtrière. Les paramètres μ_i et σ_i des 4 classes ont été estimés au préalable. L'initialisation des Φ_i est effectuée automatiquement en disposant des "germes" de taille 5×5 . Sur la Fig. 4, nous présentons le résultat de classification en fausses couleurs, l'évo-

lution des ENZ ainsi que l'évolution des classes délimitées par les ENZ.

6 Conclusion

Nous avons présenté un modèle variationnel, fondé sur une approche par ensemble de niveaux, pour la classification supervisée d'images. La formulation par ensemble de niveaux de fonctions implicites est un moyen de pouvoir modéliser chaque région ainsi que chaque interface à l'aide de fonctions continues définies sur le support entier de l'image. La minimisation de la fonctionnelle proposée conduit à résoudre un système d'EDP couplées à travers un schéma dynamique. Chaque EDP guide l'évolution des interfaces et de la région associée par un jeu de forces internes (minimisation de la longueur des interfaces) et externes (attache aux données, pas de vide entre les régions ni de recouvrement de régions). Nous avons montré des résultats sur des images synthétiques et réelles. Pour prendre explicitement en compte une dégradation des données, nous proposons un moyen d'introduire dans la fonctionnelle un terme supplémentaire de restauration :

$$G_\alpha(u, \Phi_1, \dots, \Phi_K) = \sum_{i=1}^K \gamma_i \int_{\Omega} \delta_\alpha(\Phi_i) |\nabla \Phi_i| dx + \frac{\lambda_1}{2} \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^K H_\alpha(\Phi_i) - 1 \right)^2 dx + \sum_{i=1}^K e_i \int_{\Omega} H_\alpha(\Phi_i) \frac{(u - \mu_i)^2}{\sigma_i^2} dx + \Lambda \left[\int_{\Omega} (Ru - u_o)^2 + \lambda_2 \int_{\Omega} \varphi(|\nabla u|) \right]$$

φ étant une fonction régularisante et R la réponse impulsionnelle du système physique traversé par la source. Nous minimisons G_α alternativement par rapport à u (restauration) et par rapport aux Φ_i (classification). Les premiers résultats sont encourageants, et nous étudierons ce modèle plus précisément par la suite.

Les prochaines étapes concernant la poursuite de ces travaux concerneront l'extension aux données multispectrales (avec des applications à l'imagerie satellitaire multi-canaux), ainsi que l'estimation des paramètres des classes.

Références

- [1] M. Berthod, Z. Kato, S. Yu, and J. Zerubia. "Bayesian image classification using Markov random fields". *Image and Vision Computing*, 14(4):285–293, 1996.
- [2] V. Caselles, F. Catte, T. Coll, and F. Dibos. "A geometric model for active contours". *Numerische Mathematik*, 66:1–31, 1993.
- [3] V. Caselles, R. Kimmel, and G. Sapiro. "Geodesic active contours". *International J. of Computer Vision*, 22(1):61–79, 1997.
- [4] L. C. Evans and R. F. Gariepy. "Measure theory and fine properties of functions". CRC Press, 1992.
- [5] L.C. Evans and J. Spruck. "Motion of level sets by mean curvature. II". *Trans. of the American Mathematical Society*, 330(1):321–332, 1992.
- [6] S. Kichenassamy, A. Kumar, P. Olver, A. Tannenbaum, and A. Yezzi Jr. "Conformal curvature flows: from phase transitions to active vision". *Arch. Rational Mech. Anal.*, 134:275–301, 1996.
- [7] R. Malladi, J.A. Sethian, and B.C. Vemuri. "Evolutionary fronts for topology independent shape modeling and recovery". In *Proc. of the 3rd ECCV*, pages 3–13, Stockholm, Sweden, 1994.
- [8] J.-M. Morel and S. Solimini. "Variational methods in image segmentation". Birkhäuser, 1995.
- [9] D. Mumford and J. Shah. "Boundary detection by minimizing functionals". In *Proc. IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition*, San Francisco, 1985.
- [10] S. Osher and J.A. Sethian. "Fronts propagating with curvature dependent speed: algorithms based on the Hamilton-Jacobi formulation". *J. of Computational Physics*, 79:12–49, 1988.
- [11] T. Pavlidis and Y.-T. Liow. "Integrating region growing and edge detection". In *Proc. of IEEE CVPR*, 1988.
- [12] C. Samson, L. Blanc-Féraud, G. Aubert, and J. Zerubia. "Multiphase evolution and variational image classification". INRIA Research Report RR-3662 (<http://www.inria.fr/RRRT/RR-3662.html>), April 1999.
- [13] C. Samson, L. Blanc-Féraud, G. Aubert, and J. Zerubia. "Simultaneous image classification and restoration using a variational approach". In *Proc. of IEEE CVPR, Fort-Collins, USA*, June 1999.
- [14] M. Sussman, P. Smereka, and S. Osher. "A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow". *J. of Computational Physics*, 114:146–159, 1994.
- [15] H-K. Zhao, T. Chan, B. Merriman, and S. Osher. "A variational level set approach to multiphase motion". *J. of Computational Physics*, 127:179–195, 1996.
- [16] S. C. Zhu and A. Yuille. "Integrating region growing and edge detection". *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 18(9):884–900, 1996.

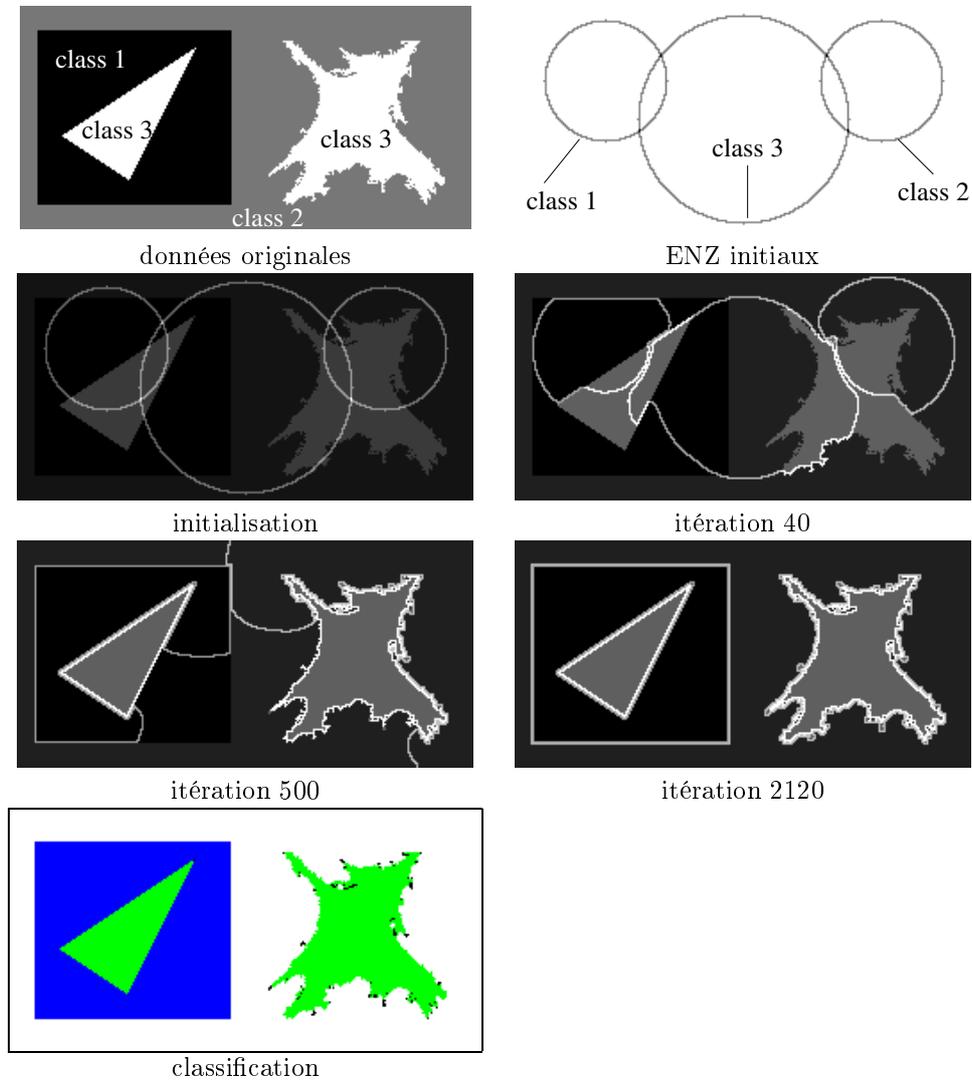
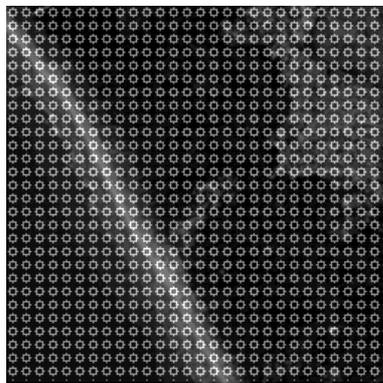


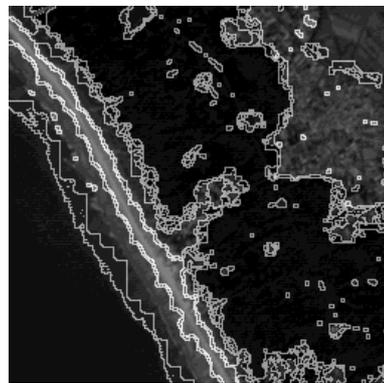
FIG. 2 – Evolution des ensembles de niveaux zero (ENZ) des fonctions Φ_i , et résultat de classification sur une image synthétique contenant 3 classes ($\mu_1 = 100.0$, $\mu_2 = 128.0$ et $\mu_3 = 160.0$). Les paramètres choisis sont: $\lambda = 5.0$, $dt = 0.2$, et pour tous les i nous avons $\gamma_i = 0.1$ et $e_i = 0.01$. La dernière figure est le résultat de classification en fausse couleurs.



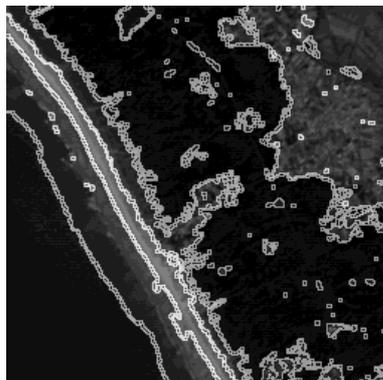
données SPOT



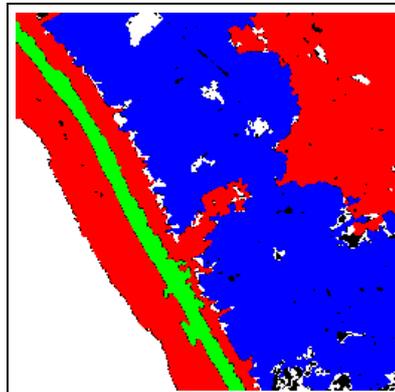
initialisation



itération 50

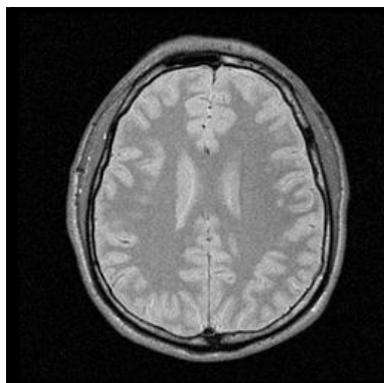


itération 300

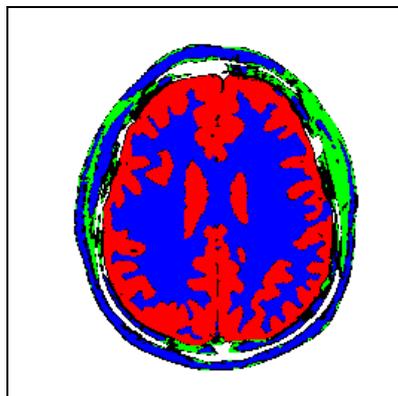


classification

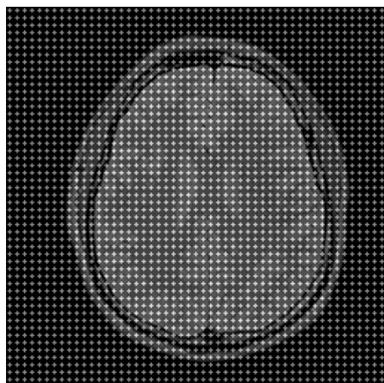
FIG. 3 – Image SPOT contenant 4 classes. Initialisation des ENZ par "germes" (sur des fenêtres de taille 9×9). Nous présentons 3 étapes de l'évolution des ENZ, ainsi que le résultat final de classification en fausses couleurs.



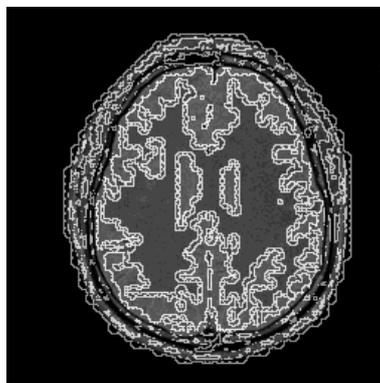
données IRM



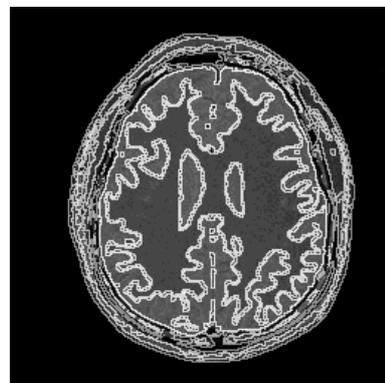
classification



initialisation



itération 10



itération 200

FIG. 4 – Données IRM de cerveau, 4 classes ont été choisies. Initialisation des ENZ par "germes" (sur des fenêtres de taille 5×5). Nous montrons 3 étapes de l'évolution des ENZ (en haut) et les images des régions correspondantes (en bas). Le résultat final de classification est en fausses couleurs.