

Classification et Restauration d'Images par Approche Variationnelle

C. Samson, L. Blanc-Féraud, J. Zerubia

G. Aubert

Ariana - projet commun Cnrs/Inria/Unsa
Inria
2004 route des Lucioles, BP 93
06902 Sophia Antipolis cedex

Laboratoire J.A. Dieudonné
Umr 6621 du Cnrs
Université de Nice Sophia Antipolis
06108 Nice cedex 2

Résumé

Nous proposons un modèle variationnel pour la classification et la restauration d'images. Il s'agit d'attribuer une étiquette à chaque pixel d'une image dégradée. Il existe de nombreux modèles variationnels destinés à la restauration ou à la reconstruction d'images, mais, à notre connaissance, le problème de la classification a été très rarement abordé dans un cadre variationnel. La justification théorique du modèle présenté est basée sur la théorie de transitions de phases rencontrée en mécanique dans les problèmes de type Cahn-Hilliard. Le modèle variationnel qui en découle permet d'obtenir, à travers un algorithme relativement simple et rapide, une image classifiée et restaurée. Les résultats que nous obtenons sur des images synthétiques et réelles sont comparés avec ceux produits par estimation bayésienne des classes, régularisées par un modèle de Potts.

1 Introduction

Les modèles variationnels ainsi que les approches par équations aux dérivées partielles (EDP) ont montré leur efficacité dans de nombreux problèmes tels que la restauration et la détection de contours [1, 6, 15, 16]. En revanche, la classification d'images n'a pas suscité beaucoup de travaux dans le cadre variationnel. La raison en est certainement que la notion discrète d'étiquetage n'est pas adaptée au formalisme continu. L'image originale est dégradée, par conséquent la classification doit être couplée avec un processus de restauration.

Dans ce qui suit, nous proposons un modèle variationnel combinant classification et restauration. La restauration repose sur un lissage anisotrope permettant de préserver les contours. La solution classifiée est composée de régions homogènes séparées par des bords francs, une région étant définie par un ensemble de pixels appartenant à la même classe (i.e. même étiquette). Dans ce contexte, la classification désigne une segmentation avec étiquetage. L'attribut qui est retenu ici pour la classification est la distribution spatiale d'intensité, mais des attributs différents peuvent être choisis (attributs de texture ...). Nous nous plaçons dans le cadre de la classification supervisée : le nombre de classes ainsi que leurs paramètres sont supposés connus. Après avoir décrit le modèle, nous abordons l'aspect théorique en faisant référence aux modèles mécaniques d'évolution de phases de type Cahn-Hilliard [5]. Des tests sont effectués sur des images synthétiques et réelles, et les résultats sont comparés avec

ceux obtenus par une approche stochastique discrète basée sur les champs de Markov.

2 Position du problème

De nombreuses applications en traitement d'images nécessitent l'utilisation de techniques de restauration. Les données observées, notées d , sont souvent dégradées et le processus linéaire de dégradation de l'image source, notée f , peut s'écrire :

$$d(x) = H.f(x) + \eta(x), \quad \forall x \in \Omega, \quad (1)$$

où $\Omega \in \mathbb{R}^n$, η est un bruit additionnel qui sera supposé être blanc gaussien, et H est un opérateur modélisant la réponse impulsionnelle du système d'acquisition. Le principe de la restauration consiste à retrouver f à partir de d . Dans le cadre des approches variationnelles, il s'agit de définir une fonctionnelle J dont le minimum est une image restaurée. Les modèles de lissage anisotrope, comme par exemple [4, 6, 14], ou de diffusion anisotrope, cf. [1, 16], permettent de lisser le bruit tout en préservant les contours (assimilés à de "fortes" discontinuités). Les modèles de lissage anisotrope peuvent être exprimés à travers la minimisation de la fonctionnelle suivante :

$$J(f) = \int_{\Omega} (H.f(x) - d(x))^2 dx + \lambda^2 \int_{\Omega} \varphi(|\nabla f(x)|) dx, \quad (2)$$

avec $|\nabla f(x)|$ représentant le module du gradient de f et λ une constante réelle. La fonction $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ induit un lissage anisotrope si elle possède principalement les deux propriétés suivantes (voir Fig. 1) : si t est proche de zéro, alors φ est de type quadratique (lissage) ; et si t est grand, φ est au plus linéaire (préservation des contours).

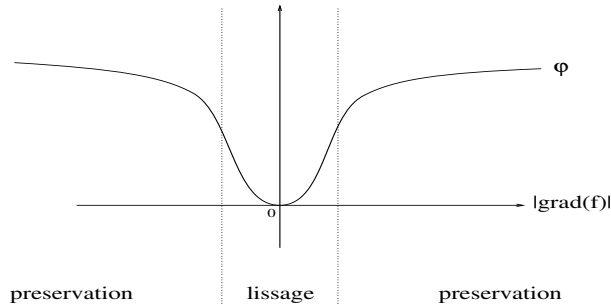


FIG. 1 – Allure générale de la fonction régularisante φ .

Outre la restauration, le modèle doit permettre d'étiqueter simultanément l'image. Nous faisons un certain nombre d'hypothèses simplificatrices dans un premier temps :

- les classes ont une distribution gaussienne, ainsi une classe C_i est caractérisée par sa moyenne μ_i et son écart-type σ_i ,
- M est le nombre de classes, $\mu = \{\mu_i\}_{i=1..M}$ et $\sigma = \{\sigma_i\}_{i=1..M}$ représentent les vecteurs de paramètres associés aux M classes. Les paramètres M , μ et σ sont supposés connus, la classification est alors dite supervisée.

3 Modèle proposé

D'après ce qui précède, nous introduisons la fonctionnelle suivante [17]:

$$J_\epsilon(f) = \int_{\Omega} (H.f(x) - d(x))^2 dx + \lambda^2 E_\epsilon(f),$$

$$\text{avec } E_\epsilon(f) = \underbrace{\epsilon \int_{\Omega} \varphi(|\nabla f(x)|) dx}_{\text{restauration}} + \frac{1}{\epsilon} \underbrace{\int_{\Omega} W(f(x); \mu, \sigma) dx}_{\text{contrainte de niveaux}}, \quad (3)$$

et le problème de minimisation associé :

$$\mathcal{P}_\epsilon : \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \inf_g J_\epsilon(g).$$

La fonctionnelle E_ϵ contient un terme de restauration ainsi qu'un terme de contrainte de niveaux induisant un processus de classification. Le potentiel W possède M puits centrés sur les moyennes des classes μ_i (cf. Fig 2). Nous représentons l'étiquette désignant la classe C_i par la valeur de sa moyenne μ_i . W permet de restreindre l'espace des valeurs admissibles de f , initialement \mathbb{R} , à l'ensemble des M étiquettes. Formellement, ϵ est un paramètre de Γ -convergence initialement petit et tendant vers 0 par valeurs positives (voir [11] pour plus de détails sur ce type de convergence variationnelle). Concrètement, la décroissance de ϵ se traduit par une phase préliminaire de restauration, s'atténuant progressivement alors que le terme de classification devient prépondérant.

La fonctionnelle E_ϵ dans (3) se rencontre dans de nombreux travaux sur les transitions de phases en mécanique et plus particulièrement dans les modèles de type Cahn-Hilliard [5], comme par exemple dans [2, 8, 18]. Ces travaux ont pour objet l'étude de la Γ -convergence de la suite de fonctionnelles E_ϵ . Sous certaines conditions sur W et φ , cette suite de fonctionnelles converge (au sens de la Γ -convergence) vers une fonctionnelle E_0 dont la minimisation conduit à une image f_0 composée de régions homogènes $R_i = \{x \in \Omega / f_0(x) = \mu_i\}$ séparées par des interfaces de longueurs minimales. W et φ dans (3) doivent vérifier, pour l'essentiel, les propriétés suivantes : W est quadratique autour de chaque minimum, nulle en chaque minimum, à croissance au moins linéaire à l'infini (cf. Fig. 2), et φ doit avoir un comportement au moins quadratique à l'infini. Pour plus de détails, consulter [2, 8, 18] ainsi que [17] .

La solution du problème limite J_0 peut être obtenue par minimisation successive des fonctionnelles J_ϵ . Lorsque la suite des minimas f_ϵ de J_ϵ converge lorsque $\epsilon \rightarrow 0^+$, l'image limite f_0 est minimum de J_0 . C'est une image qui tient compte des données d et se compose de classes homogènes dont les frontières sont régulières. Nous avons construit W de telle sorte que W soit quadratique par morceaux, $W \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, et $W(\mu_i) = 0, \forall i = 1..M$. Cependant, concernant les propriétés de φ , il s'avère qu'un comportement au moins quadratique à l'infini empêche une préservation des discontinuités de l'image. Les fonctions régularisantes φ utilisées afin d'obtenir un lissage préservant les contours sont généralement à croissance linéaire ou constante à l'infini (voir Fig. 1).

4 Minimisation

Le principe de minimisation de l'équation (3) consiste à initialiser $\epsilon_{k=0}$, minimiser J_{ϵ_k} pour obtenir $f_{\epsilon_k}^{min}$, puis à faire décroître ϵ ($\epsilon_k \rightarrow \epsilon_{k+1}$), en répétant ce schéma jusqu'à convergence ($f_{\epsilon_{k+1}}^{min} \simeq f_{\epsilon_k}^{min}$). Pour ϵ fixé, la stratégie de minimisation de J_ϵ repose sur la méthode de régularisation semi-quadratique [6, 9] permettant de s'affranchir du problème inhérent à la non-linéarité des équations d'Euler Lagrange associées à (3). Cette méthode stipule que, sous certaines conditions dont la principale est

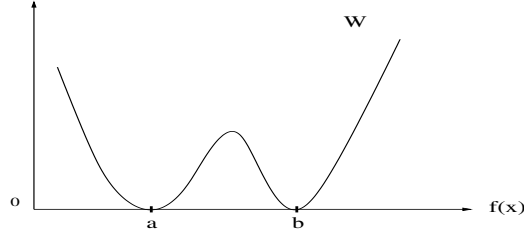


FIG. 2 – Illustration du potentiel W pour deux puits $\mu_1 = a$ et $\mu_2 = b$.

$\varphi(\sqrt{t})$ strictement concave, $\varphi(t) = \inf_{b \in [0;1]} (bt^2 + \psi(b))$ où b est une variable auxiliaire duale associée à f et ψ est une fonction décroissante strictement convexe déduite de φ . L'infimum est donné par $b = \frac{\varphi'(t)}{2t}$. La variable b marque la présence de discontinuités de telle sorte que $b(x) \sim 0$ si x est sur une discontinuité et $b(x) > 0$ ailleurs. De plus, nous avons :

$$J_\epsilon(f) = \min_{b \in [0;1]} J_\epsilon^*(f, b),$$

$$\text{avec } J_\epsilon^*(f, b) = \int_{\Omega} (Hf - d)^2 dx + \lambda^2 \left\{ \epsilon \int_{\Omega} [b|\nabla f|^2 + \psi(b)] dx + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} W(f) dx \right\}. \quad (4)$$

L'intégrande de $J_\epsilon^*(f, b)$ est convexe en b (lorsque f est fixé), quadratique par morceaux en f et quadratique selon ∇f (pour b fixé). J_ϵ^* est minimisée alternativement par rapport à f puis par rapport à b à travers le schéma algorithmique suivant :

initialiser f_0

initialiser ϵ_0

• repeter :

$$\epsilon_{k+1} = \alpha \epsilon_k \text{ avec } \alpha < 1 \text{ et } f_{\epsilon_{k+1}}^0 = f_{\epsilon_k}^{\min}$$

↪ repeter

$$f = f_{\epsilon_k}^l, b = b_{\epsilon_k}^l, \text{ incrementer } l$$

$$\diamond \min_b J^*(f, b) \text{ avec } f \text{ fixe}$$

$$b = \frac{\varphi'(|\nabla f|)}{2|\nabla f|}$$

$$\diamond \min_f J^*(f, b) \text{ pour } b \text{ fixe, i.e. résoudre l'EDP:}$$

$$H^* Hf - \lambda^2 \left\{ \epsilon \operatorname{div}(b \nabla f) + \frac{1}{2\epsilon} W'(f) \right\} = H^* d$$

$$\hookrightarrow \text{jusqu'à convergence sur } f = f_{\epsilon_k}^l \rightarrow f_{\epsilon_k}^{\min}$$

• faire décroître ϵ jusqu'à convergence sur $f_{\epsilon_k}^{\min}$

Dans nos expériences, α est de l'ordre de 0.9.

5 Résultats expérimentaux

Le modèle est testé sur des données réelles et synthétiques, et les résultats sont comparés avec ceux obtenus par un modèle stochastique 4 connexe discret. Les tests ont été effectués sur un processeur cadencé à 166 mhz.¹ Sauf si cela est mentionné explicitement, l'opérateur H dans (3) est égal à l'identité. La fonction régularisante φ utilisée est celle introduite dans [10] : $\varphi(t) = \frac{t^2}{1+t^2}$.

1. Pour plus de détails sur les résultats expérimentaux, le lecteur peut consulter le rapport de recherche [17] ainsi que la page web <http://www.inira.fr/ariana/demos/classif-variationnelle/francais/page1.html>.

5.1 Comparaison avec un modèle stochastique

La classification a été largement abordée dans le cadre des approches stochastiques discrètes comme dans [3, 7, 12, 13]. Dans [3] par exemple, les auteurs définissent un modèle basé sur la théorie des champs de Markov. Soit S l'ensemble des N sites considérés et Λ l'ensemble des M étiquettes possibles. Soit C l'ensemble des cliques tel que le champ de Markov défini soit du premier ordre. Un étiquetage global L de l'image consiste à assigner une étiquette L_s à chaque site s . Un site s appartient à la classe C_{L_s} de moyenne μ_{L_s} et d'écart-type σ_{L_s} . En utilisant le théorème de Bayes, l'estimation \hat{L} de l'étiquetage global L au sens du Maximum a Posteriori est donné par :

$$\hat{L} = \arg \min_L E(L), \text{ avec } E \text{ l'énergie globale définie par :}$$

$$E(L) = \frac{1}{T} \left[\sum_{s=1}^N \left(\ln \sqrt{2\pi} \sigma_{L_s} + \frac{(O_s - \mu_{L_s})^2}{2\sigma_{L_s}^2} \right) + \beta \sum_{\{s,r\} \in C} \delta(L_s, L_r) \right], \quad (5)$$

où β est le poids de la régularisation (a Priori de type Potts) et δ la distribution de Dirac, ainsi les configurations où 2 voisins ont des étiquettes identiques sont favorisées (contraintes d'homogénéité). L'algorithme d'optimisation repose sur un recuit simulé avec dynamique de Metropolis (T joue le rôle de la température).

Notons que l'inconnue du modèle est l'étiquetage et non l'image elle-même comme dans l'approche variationnelle proposée.

5.2 Images synthétiques

La première image synthétique provient du GDR-PRC ISIS (figure 3). Elle est de taille 256*256 pixels. Nous avons choisi 8 classes dont 6 relatives au dégradé situé en haut à droite de l'image, ainsi que deux niveaux de bruit pour avoir des données dont le rapport (en variances) signal sur bruit S/B atteint 10dB et 5dB. La variance des classes est celle du bruit gaussien introduit. La principale difficulté provient du fait que 3 classes sont très proches (mélange de gaussiennes), et par conséquent difficilement différenciables. Sur la figure 3 est présentée la classification "parfaite", obtenue sur des données non bruitées, nous servant de vérité pour juger de la qualité des résultats. La figure 4 présente les résultats de classification pour le modèle variationnel proposé ainsi que pour le modèle stochastique. Les paramètres choisis pour les deux modèles sont ceux offrant le meilleur compromis concernant le nombre de pixels mal classés. Nous pouvons constater que le mélange de classes est mieux géré par l'approche variationnelle quel que soit le niveau de bruit. Dans le cas de l'approche variationnelle, les pixels mal classés proviennent en majorité des contours, du fait de la préservation des contours lors du lissage.

La seconde image est de taille 128*128 pixels et comporte 4 niveaux de gris. La figure 5 montre l'image originale qui nous sert également de "vérité de classification" dans le cas de 4 classes. La figure 6 présente les différents résultats de classification pour les niveaux de bruit 10dB, 5dB, et 0dB. On peut constater que pour des données bruitées à 10dB, les résultats sont sensiblement identiques quelle que soit le modèle utilisé. En revanche, pour des données à 5dB, la régularisation de Potts sur les étiquettes offre de meilleurs résultats de classification que la régularisation sur les niveaux de gris utilisée dans l'approche variationnelle. Dans cette approche, les pixels de bruit dont le gradient est de l'ordre des discontinuités de l'image ne sont pas supprimés du fait de la préservation des contours (cf. images e et h de la figure 6). En revanche à 0dB, la variance des classes étant égale à celle du bruit, on retrouve le problème du mélange de classes d'où les mauvais résultats obtenus par le modèle stochastique. Les temps de calcul pour l'image bruitée à 5 db sont de 9s pour le modèle variationnel

(22 itérations sur ϵ) et de 66s pour la classification par modèle stochastique (1000 itérations du recuit simulé). C'est en moyenne le rapport de temps de calcul constaté entre les deux algorithmes.

A titre indicatif, la figure 7 présente un résultat lorsque H dans (3) est un noyau de convolution gaussien de taille 11×11 pixels et de variance 1.19, auquel on ajoute un bruit gaussien de telle sorte que le S/B soit de 10dB. L'image originale ainsi que la vérité de classification sont celles de la figure 5. L'approche stochastique classique développée ici ne permet pas de prendre en compte la convolution.

5.3 Images réelles

La figure 8 présente un résultat de classification sur une image satellitaire SPOT. Nous avons choisi 4 classes pour cette image. Le niveau de bruit est faible, et la régularisation aura essentiellement un rôle d'homogénéisation des régions (lissage des petites structures). Les résultats obtenus avec un modèle variationnel sont très proches de ceux donnés par un modèle stochastique, seul le temps d'exécution (environ 5 à 6 fois plus rapide) permet d'opter pour le modèle variationnel proposé.

6 Conclusion

Nous avons présenté un modèle variationnel de classification couplée avec un processus de restauration. La justification théorique de ce modèle repose en grande partie sur les travaux concernant les modèles de Cahn-Hilliard en mécanique. L'algorithme qui en découle est relativement simple à mettre en oeuvre et rapide, même si nos efforts n'ont pas encore porté sur l'optimisation algorithmique. D'après les tests effectués, nous constatons que, pour les images choisies et pour les paramètres des classes sélectionnées, le modèle variationnel proposé gère mieux les mélanges de classes que ne le fait le modèle stochastique présenté au dernier paragraphe. De plus, le temps d'exécution est en moyenne 6 fois plus rapide. Cependant, nous constatons que pour des niveaux de bruit élevés, et s'il n'y a pas de mélanges de classes, la régularisation de Potts portant sur l'image des étiquettes permet une meilleure suppression des pixels de bruit isolés que ne le permet le lissage anisotrope portant sur l'intensité dans le modèle variationnel. Les prochaines étapes de ce travail de recherche sont l'amélioration du modèle de contour, le passage au multispectral et à l'imagerie couleur, ainsi que l'estimation des paramètres des classes (classification supervisée).

Remerciements

Nous remercions GDR-PRC ISIS pour l'image synthétique de la figure 3, ainsi que le CNES pour l'image SPOT.

Références

- [1] L. Alvarez, P.-L. Lions, and J.-M. Morel. "Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion". *SIAM J. of Numerical Analysis*, 29(3):845–866, 1992.
- [2] S. Baldo. "Minimal interface criterion for phase transitions in mixtures of Cahn-Hilliard fluids". *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 7:67–90, 1990.
- [3] M. Berthod, Z. Kato, S. Yu, and J. Zerubia. "Bayesian image classification using Markov random fields". *Image and Vision Computing*, 14(4):285–293, 1996.
- [4] A. Blake and A. Zisserman. "*Visual reconstruction*". M.I.T. Press, 1987.

- [5] J. W. Cahn and J. E. Hilliard. “Free energy of a nonuniform system. I. Interfacial free energy”. *J. of Chemical physics*, 28(1):258–267, 1958.
- [6] P. Charbonnier, L. Blanc-Féraud, G. Aubert, and M. Barlaud. “Deterministic edge-preserving regularization in computed imaging”. *IEEE Trans. on Image Processing*, 6(2):298–311, February 1997.
- [7] X. Descombes, R. Morris, J. Zerubia, and M. Berthod. “Estimation of Markov random field prior parameters using Markov chain Monte Carlo maximum likelihood”. *IEEE Trans. on Image Processing*, To appear, 1999.
- [8] I. Fonseca and L. Tartar. “The gradient theory of phase transitions for systems with two potential wells”. *Proc. of the Royal Society of Edinburgh*, 111A(11):89–102, 1989.
- [9] D. Geman and G. Reynolds. “Constrained restoration and the recovery of discontinuities”. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14(3):367–383, 1992.
- [10] S. Geman and D.-E. McClure. “Bayesian image analysis: an application to single photon emission tomography”. *Proc. Statist. Comput. Sect.*, Washington DC, Amer. Statist. Assoc.:11–18, 1985.
- [11] E. De Giorgi. “Convergence problems for functionals or operators”. *Proc. of the International Meeting on Recent Methods in Nonlinear Analysis, Pitagoria, Ed. Bologna*, 1978.
- [12] S. Lakshmanan and H. Derin. “Simultaneous parameter estimation and segmentation of Gibbs random fields using simulated annealing”. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11:799–813, August 1989.
- [13] B. Manjunath and R. Chellappa. “Unsupervised texture segmentation using Markov random fields models”. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13:478–482, May 1991.
- [14] R. March and M. Dozio. “A variational method for the recovery of smooth boundaries”. *Image and Vision Computing*, 15:705–712, 1997.
- [15] J.-M. Morel and S. Solimini. “*Variational methods in image segmentation*”. Birkhäuser, 1995.
- [16] P. Perona and J. Malik. “Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion”. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(7):629–639, 1990.
- [17] C. Samson, L. Blanc-Féraud, G. Aubert, and J. Zerubia. “Image classification using a variational approach”. INRIA Research Report RR-3523 (<http://www.inria.fr/RRRT/RR-3523.html>), October 1998.
- [18] P. Sternberg. “Vector-valued local minimizers of nonconvex variational problems”. *J. of Mathematics*, 21:799–807, 1991.

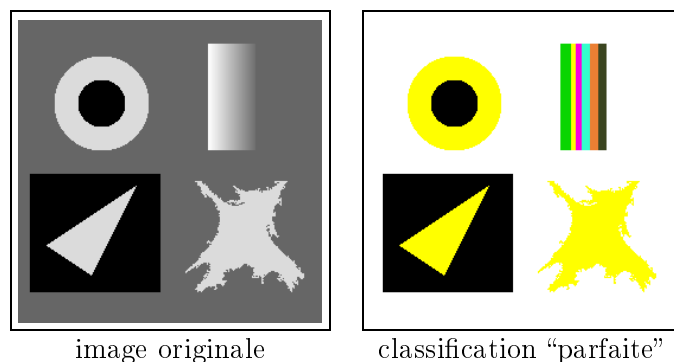


FIG. 3 – Image originale et "vérité" de classification pour les 8 classes choisies (image couleur).

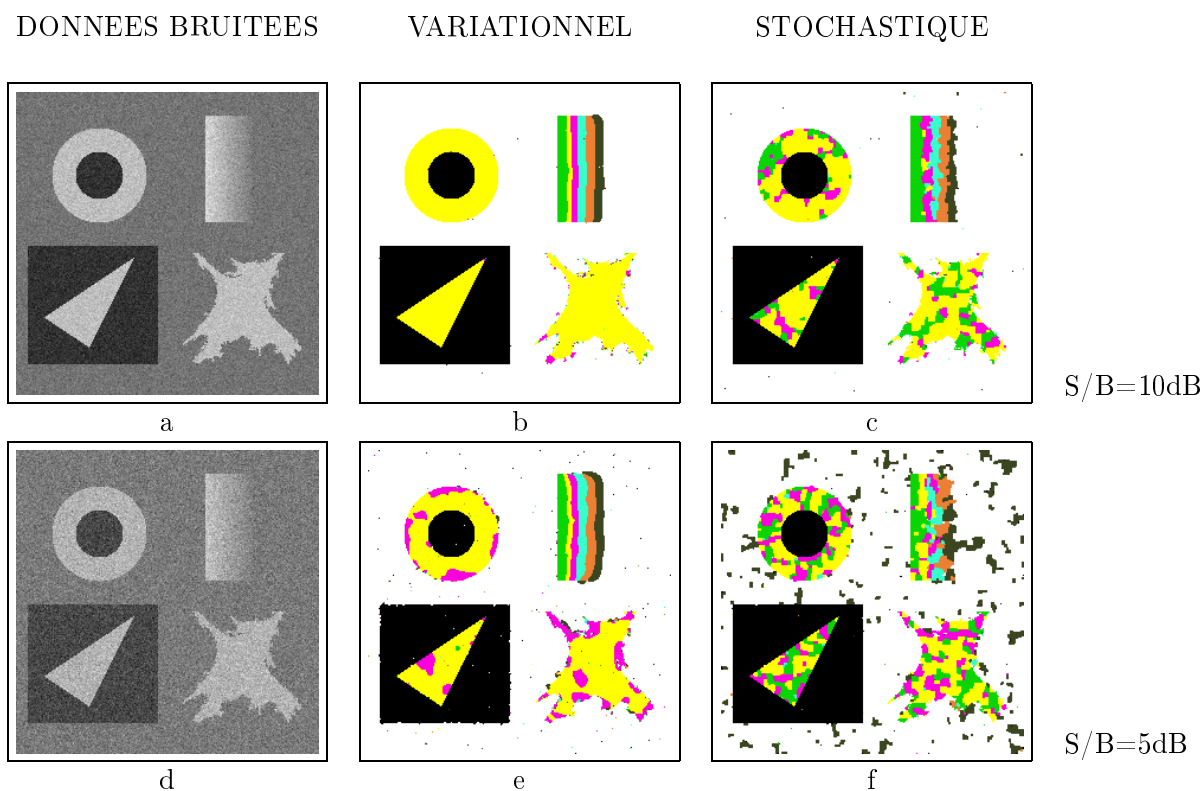


FIG. 4 – Résultats de classifications (images couleurs) avec 8 classes sur des données bruitées à 10dB (a) et à 5dB (d). La classification parfaite de la figure 3 nous sert de référence pour juger de la qualité des résultats. Les figures b et e représentent les résultats obtenus par le modèle variationnel proposé pour des données respectivement bruitées à 10dB et 5dB. Les figure c et f sont les résultats obtenus par le modèle stochastique présenté au paragraphe précédent.

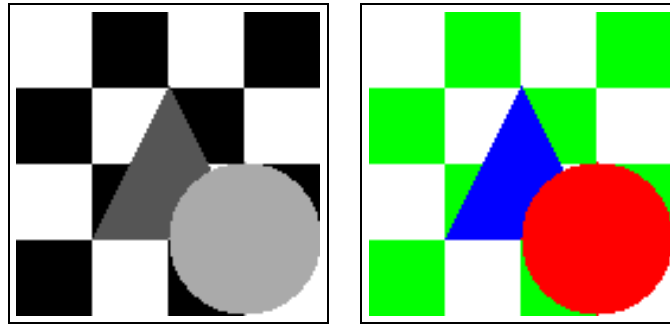


FIG. 5 – Image originale et classification parfaite pour 4 classes (image couleur).

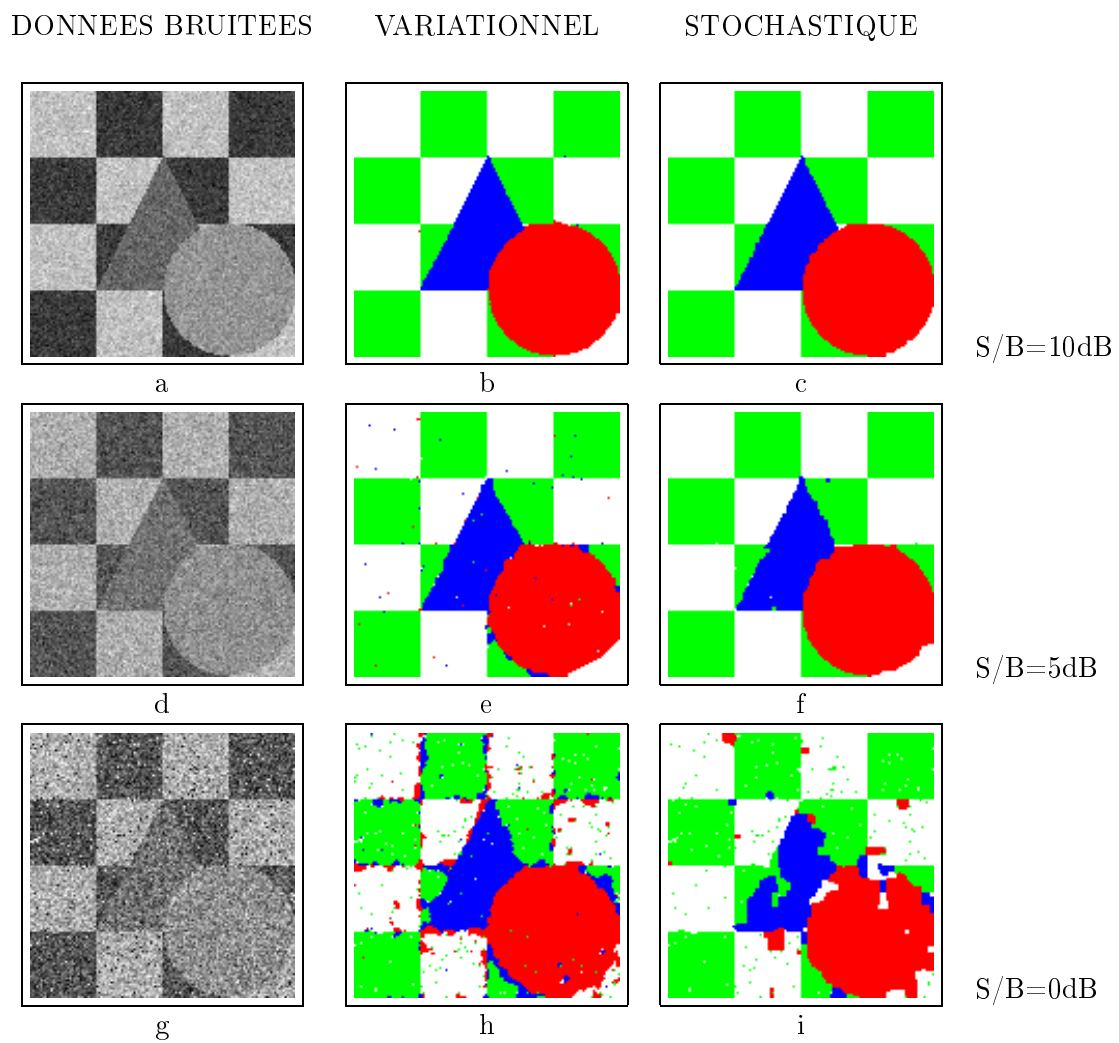


FIG. 6 – Résultats de classifications (images couleurs) avec 4 classes sur des données bruitées à 10dB, à 5dB et à 0dB.

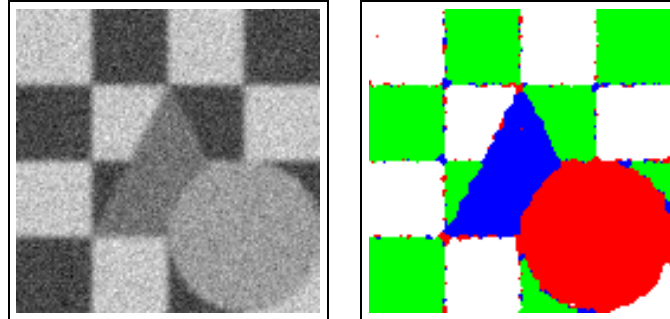


FIG. 7 – Image originale de la figure 5 dans une version floue et bruitée ($S/B=10dB$) et classification obtenue d'après le modèle variationnel donné par (3).

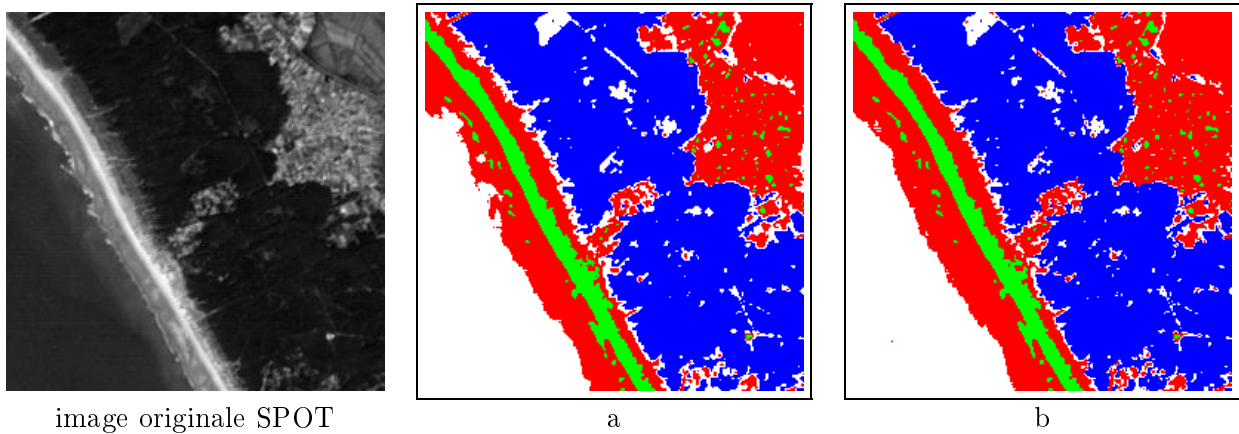


FIG. 8 – Résultat de classification par les deux modèles présentés sur une image satellitaire SPOT contenant 4 classes. Figure a : classification obtenue par le modèle variationnel proposé, et figure b : classification obtenue par le modèle stochastique de comparaison (images couleurs).