

# Une Petite Introduction l'Identification

Martine Olivi

INRIA Sophia-Antipolis

# Qu'est-ce que l'identification ?

Trouver un modèle mathématique **simple** à partir de données mesurées.

→ calculer : simuler, contrôler

- Modèle. Systèmes linéaires stationnaires (LTI) de dimension finie caractérisés par leur fonction de transfert (matrice rationnelle)  $H(s)$
- Données
  - temporelles :  $u(t_k), y(t_k), k = 1, \dots, N$
  - fréquentielles :  $H(i\omega_k), k = 1, \dots, N$
- Méthodes
  - traitement des données : complétion/interpolation
  - réduction de modèle
    - par projection (balanced truncation, Krylov .. erreur?)
    - par optimization (critère ?)

# Systèmes Linéaires Stationnaires

$$\Sigma : \begin{array}{l} X \rightarrow Y \\ u(t) \rightarrow y(t) \end{array} \quad \begin{array}{l} X, Y \text{ espaces vectoriels;} \\ \text{continu : } t \in \mathbb{R}; \text{ discret : } t \in \mathbb{Z} \end{array}$$

- Linéaire (*principe de superposition*)

$$\Sigma : \begin{cases} u_1 \rightarrow y_1 \\ u_2 \rightarrow y_2 \end{cases} \Rightarrow \Sigma : \begin{cases} u_1 + u_2 \rightarrow y_1 + y_2 \\ \lambda u_1 \rightarrow \lambda y_1 \end{cases}$$

- Stationnaire (*invariant*)

$$\Sigma : \begin{cases} u_1(t) \rightarrow y_1(t) \\ u_1(t + \tau) \rightarrow y_1(t + \tau) \end{cases}$$

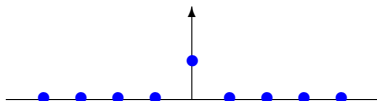
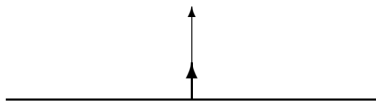
- Causal

$$u_1(t) = u_2(t), \quad t \leq t_0 \Rightarrow y_1(t) = y_2(t), \quad t \leq t_0$$

propriété naturelle lorsque la variable est le temps.

# Convolution

Un système linéaire stationnaire est représenté par un opérateur de convolution



$$\delta(t) \rightarrow h(t)$$

$$u(t) = \int u(\tau)\delta(t - \tau) d\tau$$

$$\delta(t - \tau) \rightarrow h(t - \tau)$$

$$u(t) \rightarrow \int u(\tau)h(t - \tau) d\tau$$

$$\delta_n \rightarrow h_n$$

$$u_n = \sum_k u_k \delta_{n-k}$$

$$\delta_{n-k} \rightarrow h_{n-k}$$

$$u_n = \sum_k u_k h_{n-k}$$

$h$  réponse impulsionnelle caractérise le système.

système causal  $\Leftrightarrow h(t)$  causale :  $h(t) = 0$  pour  $t \leq 0$

# Fonction de transfert

La **transformée de Laplace** de la réponse impulsionnelle  $h(t)$

$$H(s) = \int_0^{\infty} h(t)e^{-st} ds,$$

elle est appelée **fonction de transfert** du système.

- $H(s)$  est définie dans un 1/2-plan droit (causalité)
- si  $h(t)$  intégrable  $\rightarrow H(i\omega)$  **transformée de Fourier**
- $H(s)$  est **analytique**  $\rightarrow$  analyse complexe
- $e^{\lambda t}$  fonctions propres des systèmes LTI :  $e^{\lambda t} \rightarrow e^{\lambda t}H(\lambda)$   
réponse harmonique :  $e^{i\omega t} \rightarrow e^{i\omega t}H(i\omega)$   
**données fréquentielles** :  $H(i\omega_k)$ ,  $k = 1 \dots, N$   
quand on passe des données temporelles aux données fréquentielles, on intègre des hypothèses.

# Normes et stabilité

pour mesurer la distance entre signaux, fonctions de transfert ...

**Stabilité** : entrée bornée  $\longrightarrow$  sortie bornée

très important pour que le système ne risque pas de se détruire (résonance)

Les **normes** usuelles :

- convergence uniforme  $L^\infty$ ,  $\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)|\}$
- convergence en moyenne  $L^1$ ,  $\|f\|_1 = \int |f(t)| dt$
- énergie  $L^2$ ,  $\|f\|_2 = \left(\int |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}$

**Espaces de Hardy** associés :  $H^p$  espace de fonctions  $L^p$  traces de fonctions analytiques dans le 1/2 plan droit (fonctions de transfert)

**BIBO stabilité** :  $L^\infty \longrightarrow L^\infty \Leftrightarrow h(t) \in L^1 \quad \|y\|_\infty \leq \|h\|_1 \|u\|_\infty$

# Un exemple

ressort amorti

$$my''(t) + cy'(t) + ky(t) = u(t), \quad y(0) = y'(0) = 0$$

↓ Laplace

$$Y(s) = H(s)U(s), \quad H(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

poles:  $-\frac{c}{2m} \pm \frac{\Delta^{1/2}}{2m}$  système stable pour  $c \neq 0$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -c/m \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} \text{ état}$$

paramètres physiques à partir d'une réalisation particulière

# Systeme LTI d'ordre fini

- Représentation interne :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}, \quad u(t) \in \mathbb{R}^m, y(t) \in \mathbb{R}^p, x(t) \in \mathbb{R}^n$$

↓ Laplace

$$Y(s) = H(s)U(s), \quad H(s) = D + C(sI - A)^{-1}B$$

Réponse impulsionnelle :  $h(t) = Ce^{At}B + D\delta$

- $(A, B, C, D)$  réalisation de  $H(s)$

Une matrice rationnelle finie at l'infini admet une réalisation pas unique:  $(TAT^{-1}, TB, CT^{-1}, D)$

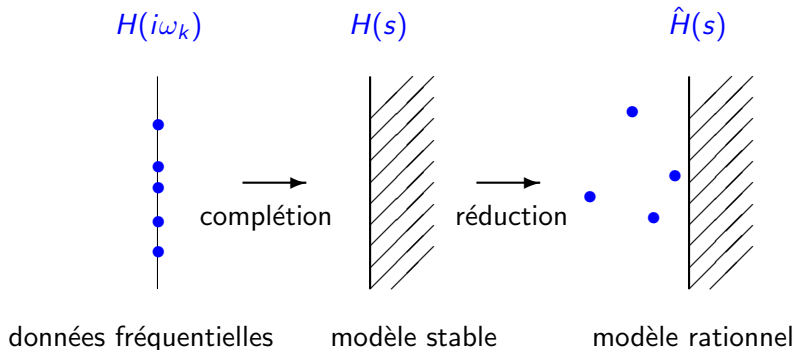
réalisation minimale:  $A$  de taille minimale (degré de McMillan)

poles de  $H(s)$  = valeurs propres de  $A$

systeme stable : valeurs propres de  $A$  dans 1/2 plan gauche



# Schema d'identification

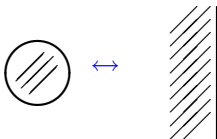


**complétion** : interpolation contrainte

**réduction** : approximation rationnelle

# Transformation continu-discret

$$z \rightarrow s = \frac{1+z}{1-z}$$



$$H_d(z) = H_c(s)$$

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k \\ y_k = C_d x_k + D_d u_k \end{cases} \quad \begin{cases} x'(t) = A_c x(t) + B_c u(t) \\ y(t) = C_c x(t) + D_c u(t) \end{cases}$$

$H_d$  stable :  $\sigma(A_d) \subset \mathbb{D}$                        $H_c$  stable :  $\sigma(A_c) \subset \mathbb{C}^-$

preserve le degré de McMillan :  $\deg(H_d) = \deg(H_c)$

# Complétion

calculer  $F(z)$  à partir des données ponctuelles  $F(e^{i\theta_k}), k = 1 \dots N$   
par exemple ces coeffs. de Fourier  $F_l : F(z) = \sum_{l=1}^N F_l z^{-l}$

**Shannon** :  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  à spectre borné  $\hat{f}(\lambda) = 0$  pour  $\lambda \notin [-\Lambda, \Lambda]$   
 $a \leq \frac{1}{2\Lambda}$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(na)s(t - na), s(x) = \frac{\sin \frac{\pi}{a}x}{\frac{\pi}{a}x}$$

difficultés: données sur un arc  $I \subset \mathbb{T}$ , valeur à l'infini mal connue

- en résolvant le système linéaire  $F(e^{i\theta_k}) = \sum_{l=1}^N F_l e^{-i\theta_k l}$

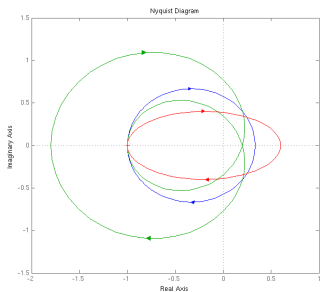
- en minimisant un critère quadratique

$$\min_{\deg \hat{F}=N} \sum_{k=1}^N |\hat{F}(e^{i\theta_k}) - F(e^{i\theta_k})|^2$$

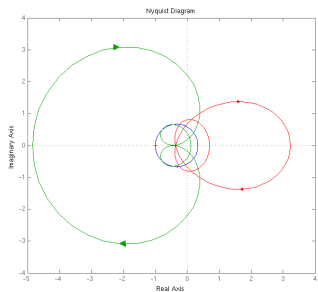
- en résolvant un problème extrémal borné

$$\min_{\|\hat{F}\|_{\mathbb{T} \setminus I} \leq M} \|F - \hat{F}\|_I^2$$

# Interpolation



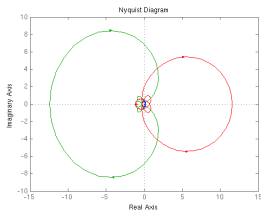
3 points d'interpolation



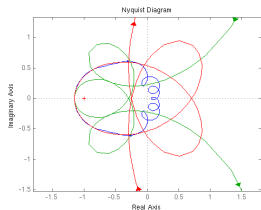
4 points d'interpolation

Interpolation de la fonction  $\frac{1}{1-2z}$  (bleu) à partir de 3 puis 4 points d'interpolation en tenant compte (rouge) ou non (vert) de la valeur à l'infini (0). Lorsque le nombre de points augmente, l'interpolant devient de plus en plus grand.

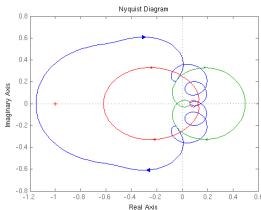
# Interpolation



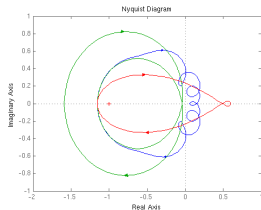
points:  $-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}$  degré: 5



zoom



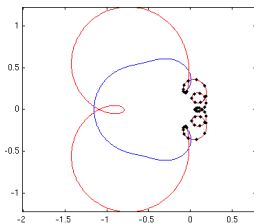
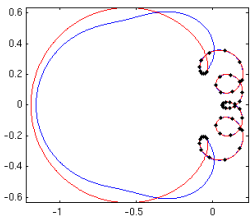
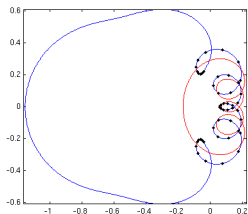
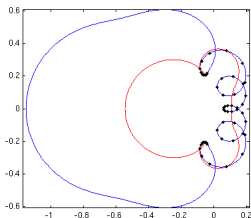
points:  $\frac{\pi}{2}, 0, \frac{3\pi}{2}$  degré: 3



points:  $-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}$  degré: 3

Interpolation d'une fonction de degré 12 (Karlsson)

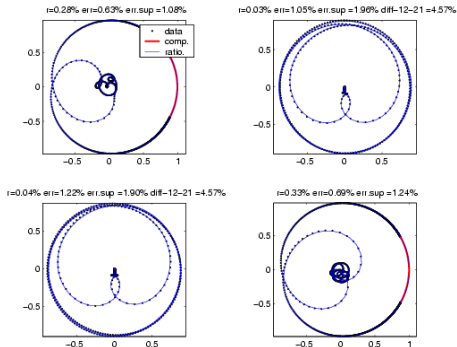
# Moindres carrés



Aucun contrôle sur le comportement de l'approximant en dehors de la bande où sont données les valeurs de la fonction (deg 3,4,6,8)

# Problèmes extrémaux bornés

filtre hyperfréquence 800 valeurs ponctuelles



Presto-HF (Seyfert) Hyperion (Grimm)

# Approximation Rationnelle en norme $L^2$

Etant donné

- $F(z) \in H^2$ ,  $F(z) = \sum_{i=0}^{\infty} F_i z^{-i}$
- $n$  entier positif

trouver  $H$  rationnelle **stable** de degré de McMillan  $\leq n$  qui minimise

$$\|F - H\|^2 = \frac{1}{2\pi} \text{Tr} \left\{ \int_0^{2\pi} (F - H)(e^{it})(F - H)(e^{it})^* dt \right\}$$

Avantages:

- interprétation stochastique : minimise la variance de l'erreur  
→ données bruitées
- dérive d'un produit scalaire : différentiabilité, propriété de la projection



# En pratique

La fonction  $F(z)$  est donnée par :

- une **réalisation**

$$F(z) = D + C(zI - A)^{-1}B, \quad A \ N \times \ N$$

- un nombre fini de **coefficients de Fourier**

$$F(z) = \sum_{i=0}^N F_i z^{-i}$$

- des **valeur ponctuelles** sur le cercle (moindre carrés)

$$F(e^{i\theta_k}), \quad k = 1, \dots, N$$

la méthode: optimisation à partir d'un modèle initial

# Initialisation

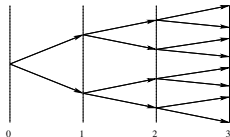
norme  $L^2$  : beaucoup de minimum locaux ...  
comment trouver le meilleur ?

- on calcule un 'bon' modèle initial par une méthode de projection (balanced truncation)
- on calcule un grand nombre de minimum locaux en itérant sur le degré

min  $\text{deg } n$



pts init.  $\text{deg } n + 1$



loc. min.

# Balanced truncation

Opérateur de Hankel

$$\Gamma : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$$
$$u_-(t) \xrightarrow{\mathcal{C}} x(0) \xrightarrow{\mathcal{O}} y_+(t)$$

Les Grammiens

- commandabilité :  $P = \int_0^\infty e^{At} B B^* e^{A^* t} dt$ ;  $P > 0 \Leftrightarrow \mathcal{C}$  surj.

$$\begin{cases} \hat{u}(t) = B^* e^{-A^* t} P^{-1} x_0 \\ \|\hat{u}\|_2^2 = x_0^* P^{-1} x_0 \end{cases} \text{ sol. de } \begin{cases} \min \|u\|_2 \\ u(t) \xrightarrow{\mathcal{C}} x_0 \end{cases}$$

- observabilité :  $Q = \int_0^\infty e^{A^* t} C^* C e^{At} dt$ ;  $Q > 0 \Leftrightarrow \mathcal{O}$  inj.

$$x_0 \xrightarrow{\mathcal{O}} y \quad \|y\|^2 = x_0^* Q x_0$$

Réalisation balancée:  $P = Q = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$

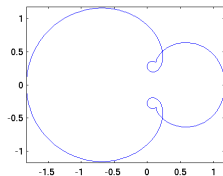
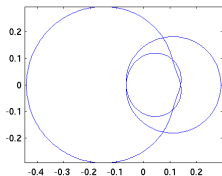
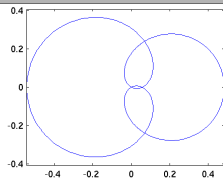
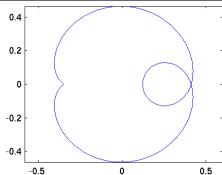
$\sigma_i$  v.p. de  $P$  petite  $\leftrightarrow x_i$  difficile à atteindre

$\sigma_i$  v.p. de  $Q$  petite  $\leftrightarrow x_i$  difficile à observer

On élimine les états correspondant aux plus petites v.p.

# Un moteur automobile

Reference system



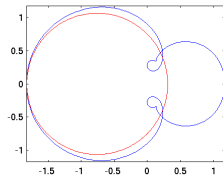
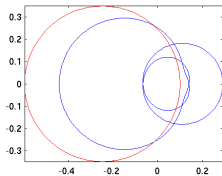
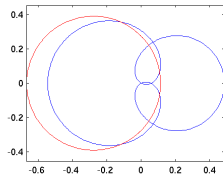
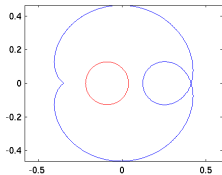
Approximant degree

None

degré 12 donné par une réalisation  
Hung, MacFarlane; Glover; Yan, Lam

# Approximant degré 1

Degree 1 - 1 minimum - Best J=0.541720

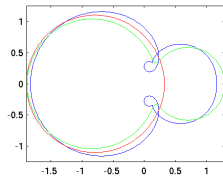
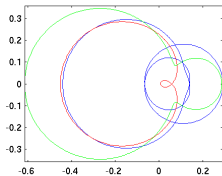
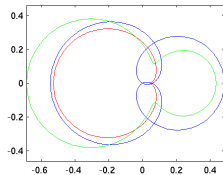
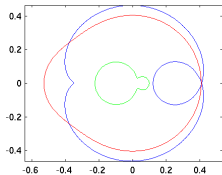


Approximant degree

1

# Approximant degré 2

Degree 2 - 2 minima - Best J=0.383171

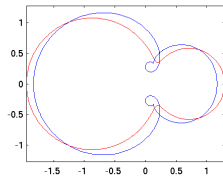
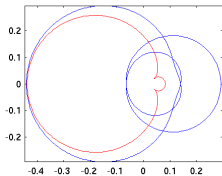
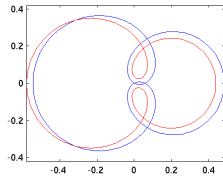
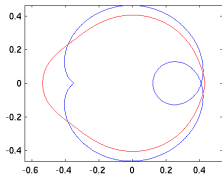


Approximant degree

2

# Approximant degré 3

Degree 3 - 1 minimum - Best J=0.225433

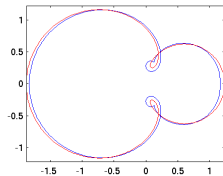
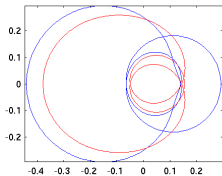
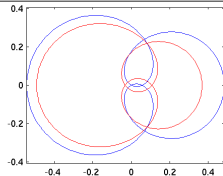
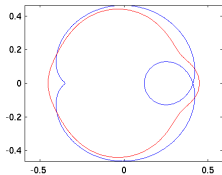


Approximant degree

3

# Approximant degré 4

Degree 4 - 1 minimum - Best J=0.134999



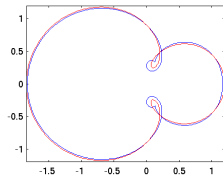
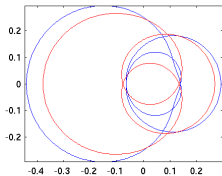
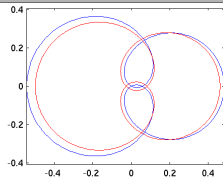
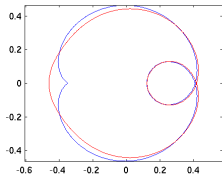
Approximant degree

4



# Approximant degré 5

Degree 5 - 1 minimum - Best J=0.078272

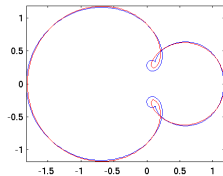
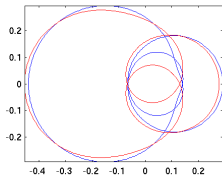
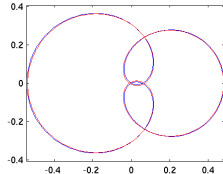
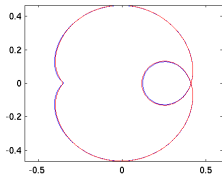


Approximant degree

5

# Approximant degré 6

Degree 6 - 1 minimum - Best J=0.052608

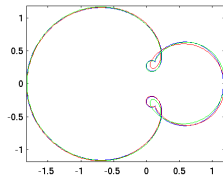
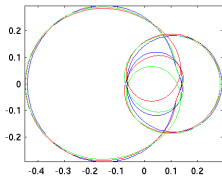
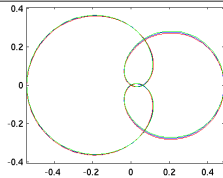
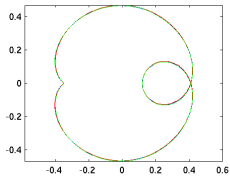


Approximant degree

6

# Approximant degré 7

Degree 7 - 2 minima - Best J=0.037284

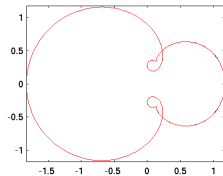
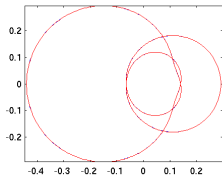
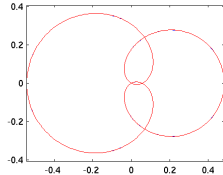
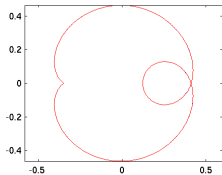


Approximant degree

7

# Approximant degré 8

Degree 8 - 1 minimum - Best J=0.000409



Approximant degree

8