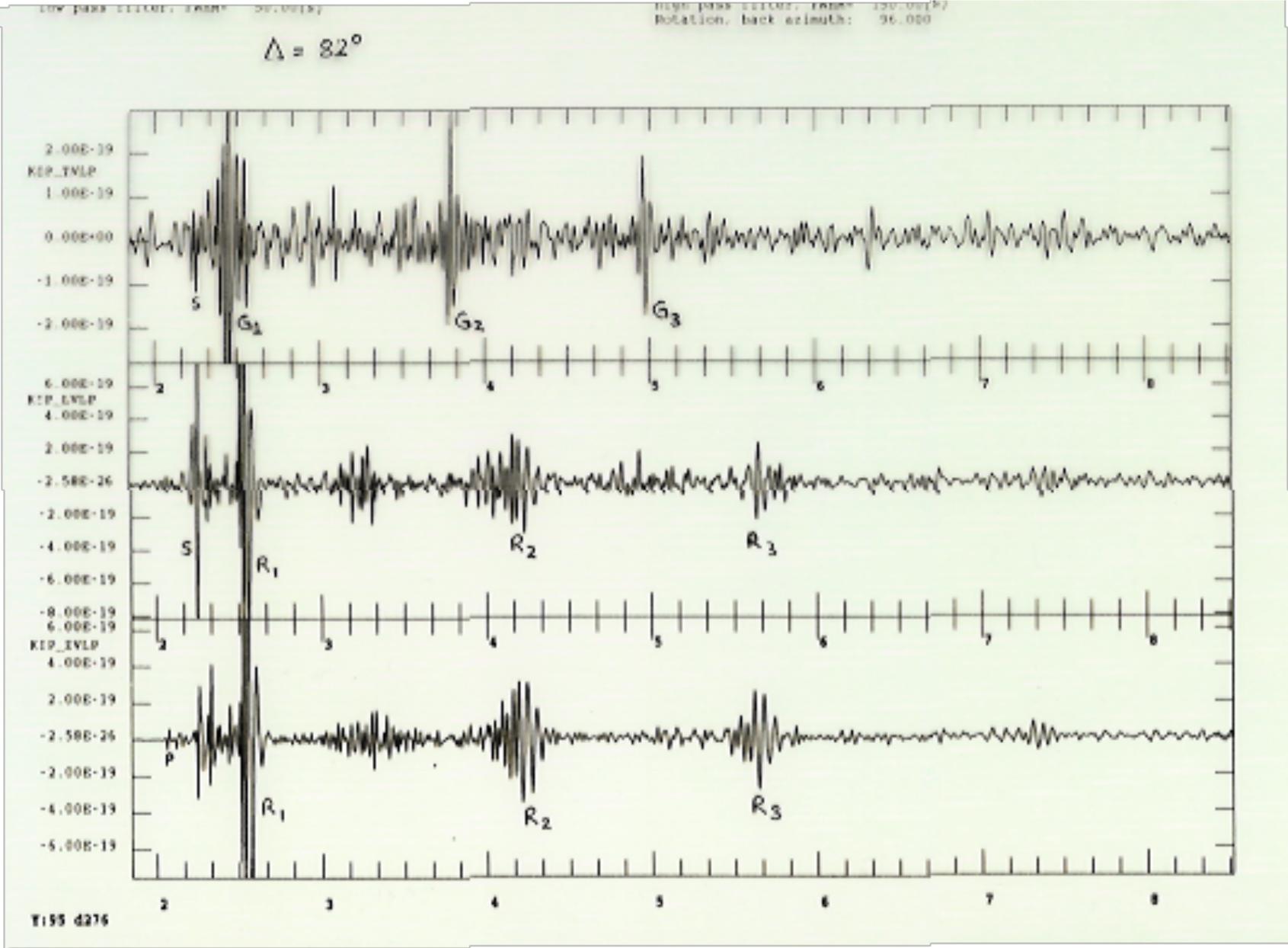
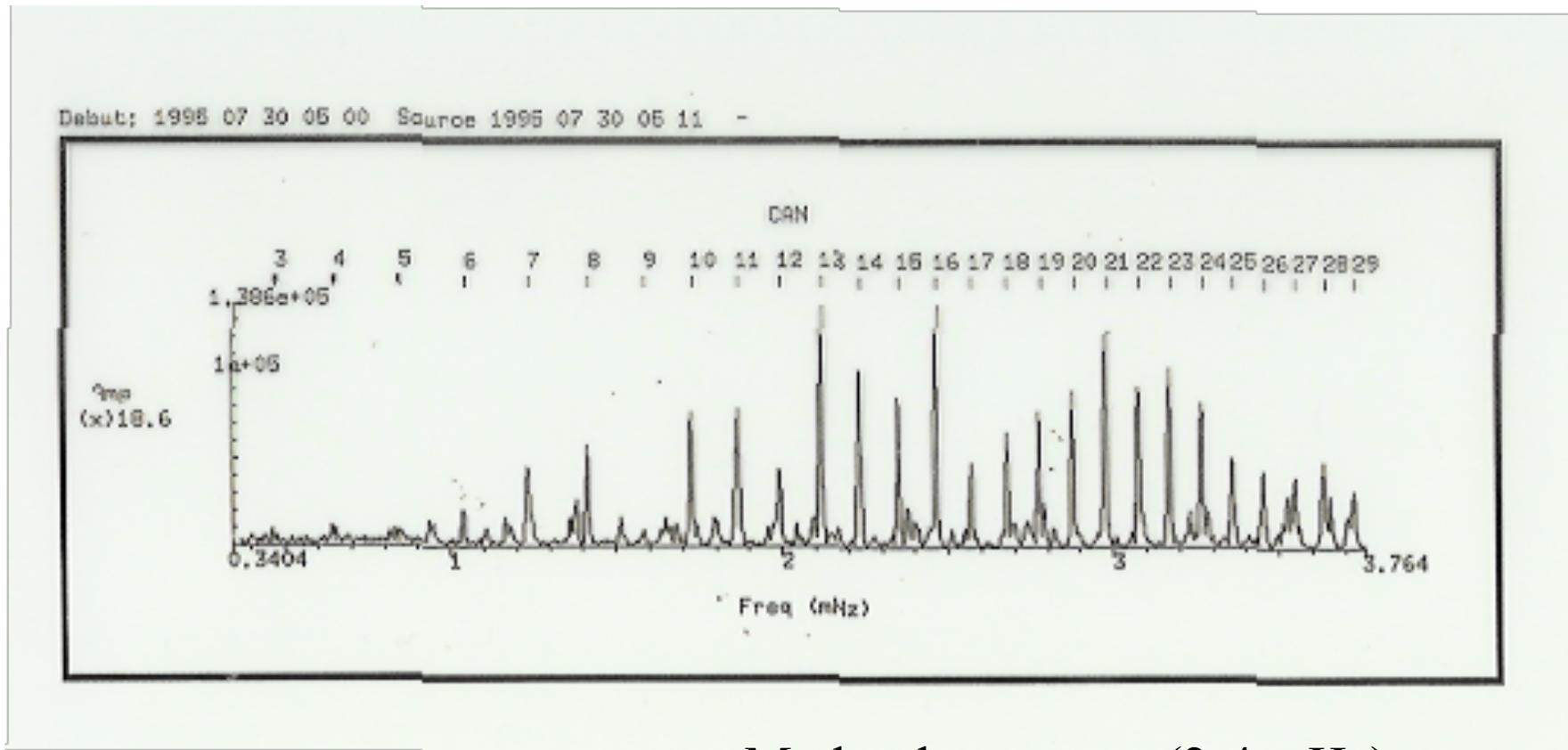


Free oscillations of the earth

Sismogrammes typique d'ondes de surfaces multiples

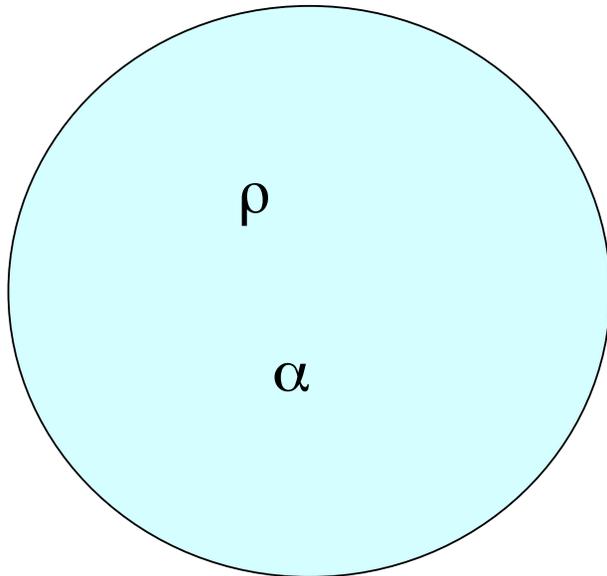


Spectre du sismogramme précédent



Modes du manteau (2-4 mHz)

Oscillations libres d'une sphère fluide homogène



Modes Radiaux

$$u_r(R, \omega)$$

Il existe un ensemble dénombrable
de fréquences

$$\omega_n$$

Les modes propres d'oscillation

Oscillations d'une sphère fluide

Dans une sphère fluide il n'y a pas de cisaillement, donc

$$\sigma_{RR} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi} = -P(R, \theta, \phi)$$

où P est la *pression*.

L'équation des ondes dans la sphère fluide et homogène s'écrit

$$\nabla^2 P = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$$

Conditions aux limites

- Surface libre en $R = R_{\odot}$
- Pression finie à l'origine $R = 0$

Une fois résolu le problème aux oscillations libres, on peut calculer le déplacement $\nabla \cdot \vec{u} = P$.

Example: Oscillations radiales le mode ${}_0S_0$

L'équation des ondes acoustiques en coordonnées sphériques est:

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left[R^2 \frac{\partial P}{\partial R} \right] = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$$

Sa solution harmonique (de pulsation ω), régulière en $R = 0$ est

$$P(R, t) = \frac{\sin[\omega R/\alpha]}{\omega R/\alpha} e^{i\omega t}$$

En appliquant la condition aux limites $P(R_\odot, \omega) = 0$ on obtient l'équation aux valeurs propres

$$\text{Const} \frac{\sin[\omega R_\odot/\alpha]}{\omega R_\odot/\alpha} = 0$$

Un mode propre est la solution $\omega \neq 0$ de cette équation.

Oscillations libres radiales

Il y a un nombre infini, mais dénombrable de valeurs propres pour le mode radial.

Les valeurs et vecteurs propres de la n ème harmonique sont

$${}_n\omega_0 = (n + 1) \frac{\alpha\pi}{R_\odot} \quad {}_ny_0(R) = \frac{\sin[(n + 1)\pi R/R_\odot]}{(n + 1)\pi R/R_\odot}$$

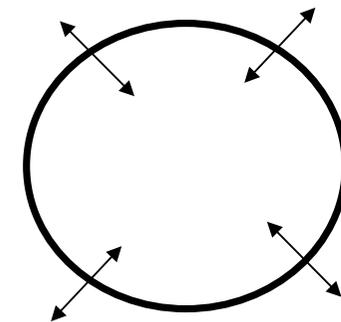
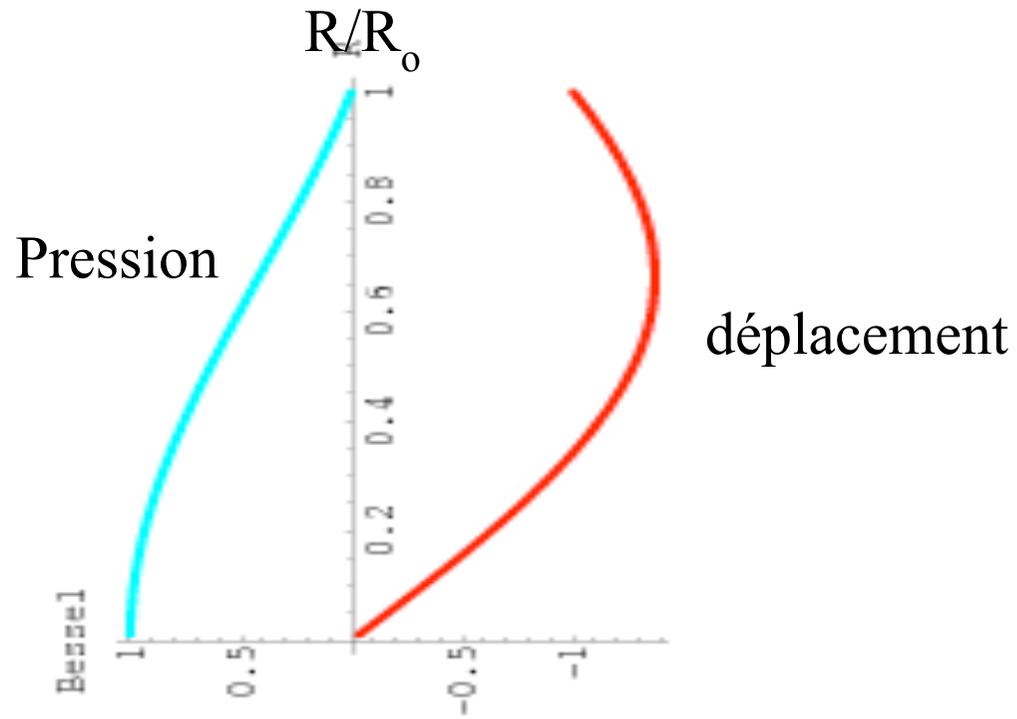
Et leur période ${}_nT_0 = \frac{2R_\odot}{(n+1)\alpha}$.

Interprétation physique La période du mode ${}_nS_0$ est le temps de trajet d'une onde P à travers la terre ($2R_\odot/\alpha$) divisée par $n + 1$.

Le mode radial fondamental ${}_0S_0$ possède une période d'environ 1200s, très proche du temps que met une onde P pour traverser la terre. $T_{PKP}(180^\circ) = 20.2$ min.

Mode radial dans une sphère fluide

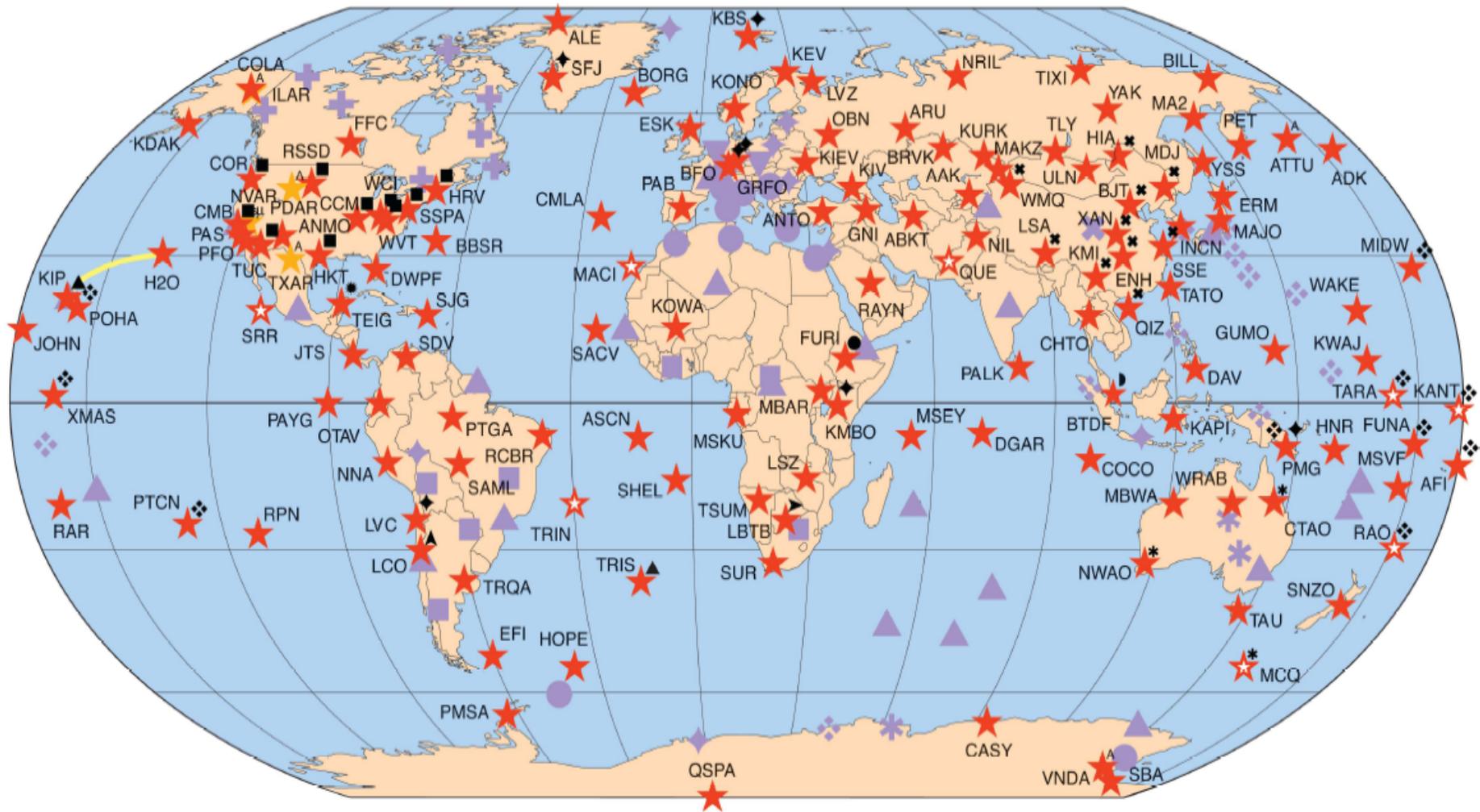
Mode radial ${}_0S_0$



$$T = 2R_0/\alpha \sim 1280 \text{ s}$$

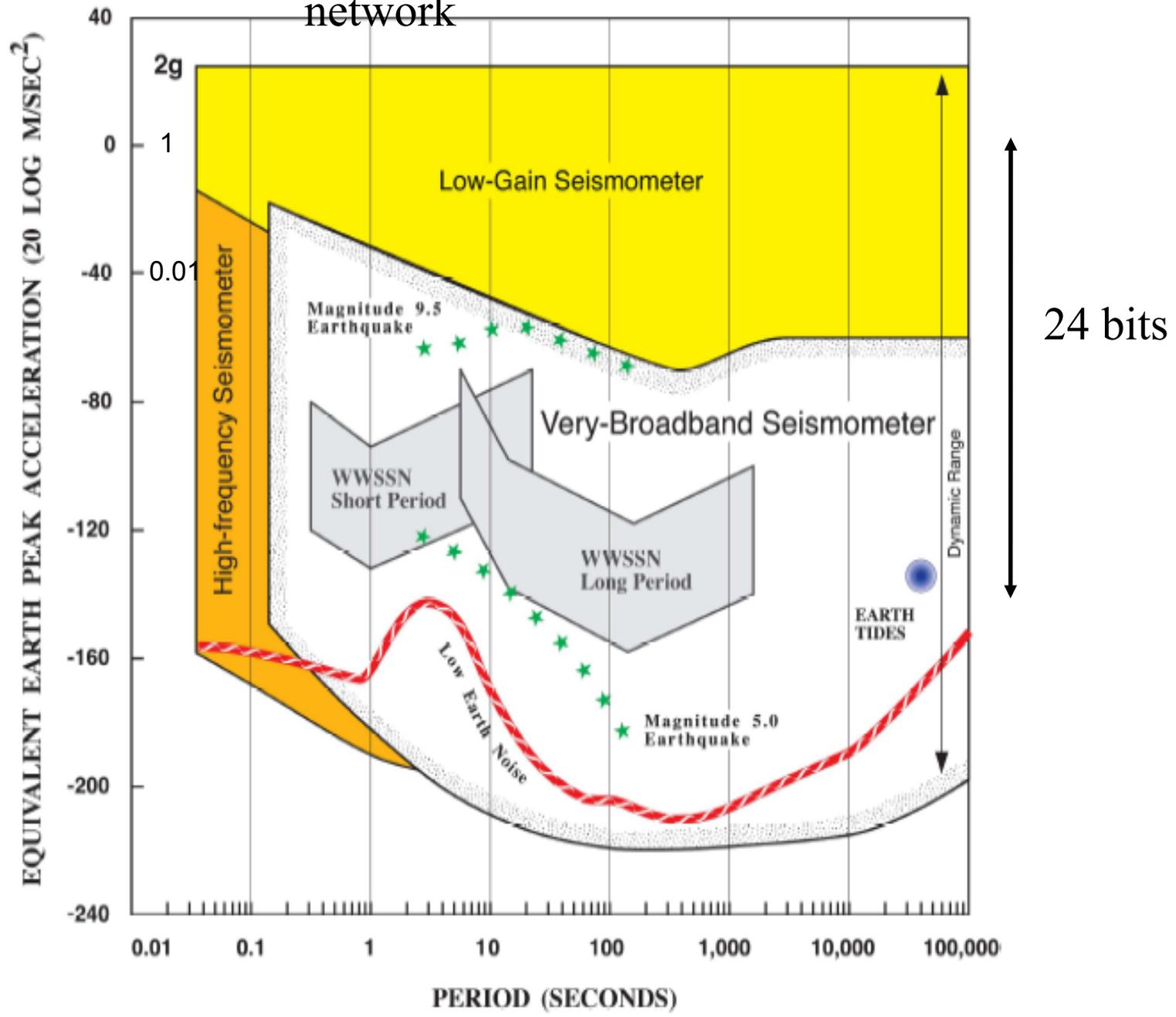
Observation des oscillations libres sur la terre

Eos, Vol. 85, No. 23, 8 June 2004



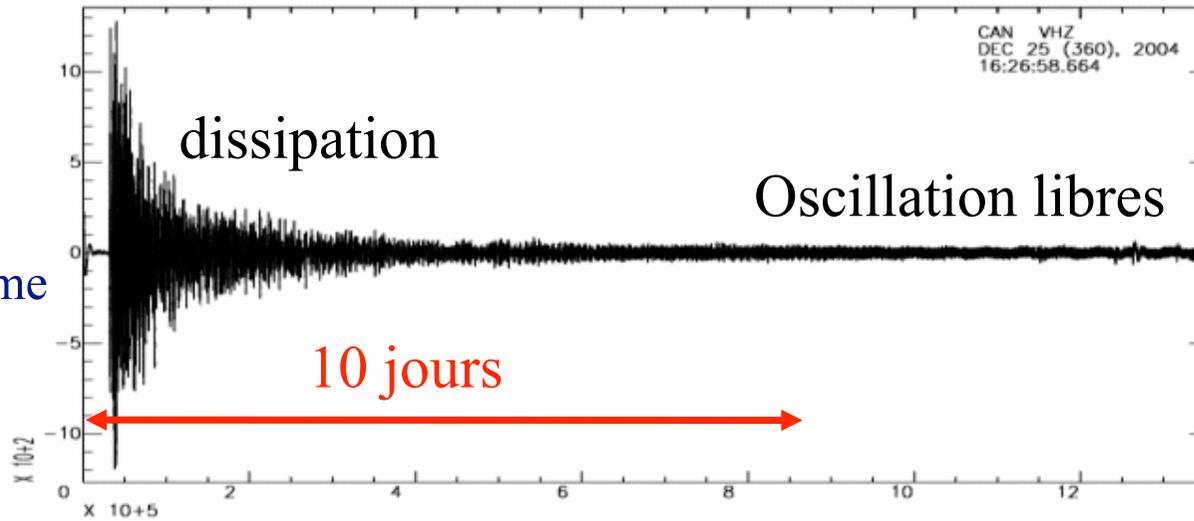
IRIS	Affiliate	IRIS International & National Cooperative Sites													
Current	Array	Geoscope	Japan	Mednet	Geofon/AWI/BGR/BFO	China/USGS	Mexico	Singapore	Botswana	Andes	Australia	USNSN	AFTAC	SMU	
★	★	▲	◆	●	★	*	*	★	▲	★	★	■	★	★	

Standard Instrument Response for the IRIS network



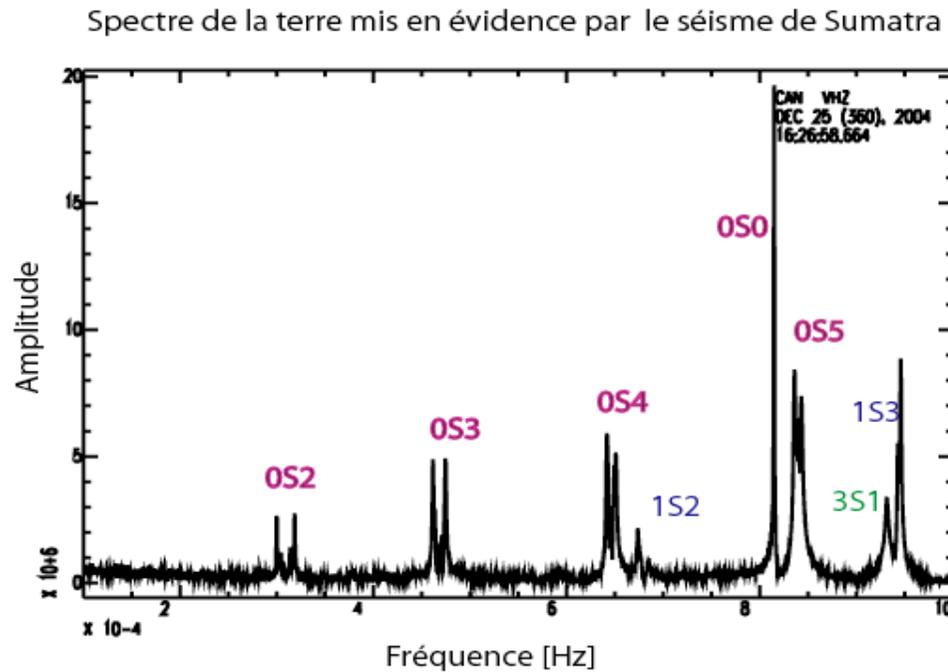
Observation des oscillations libres après le Séisme de Sumatra

Le
sismogramme



Station de
Canberra
en
Australie

et son spectre
de Fourier

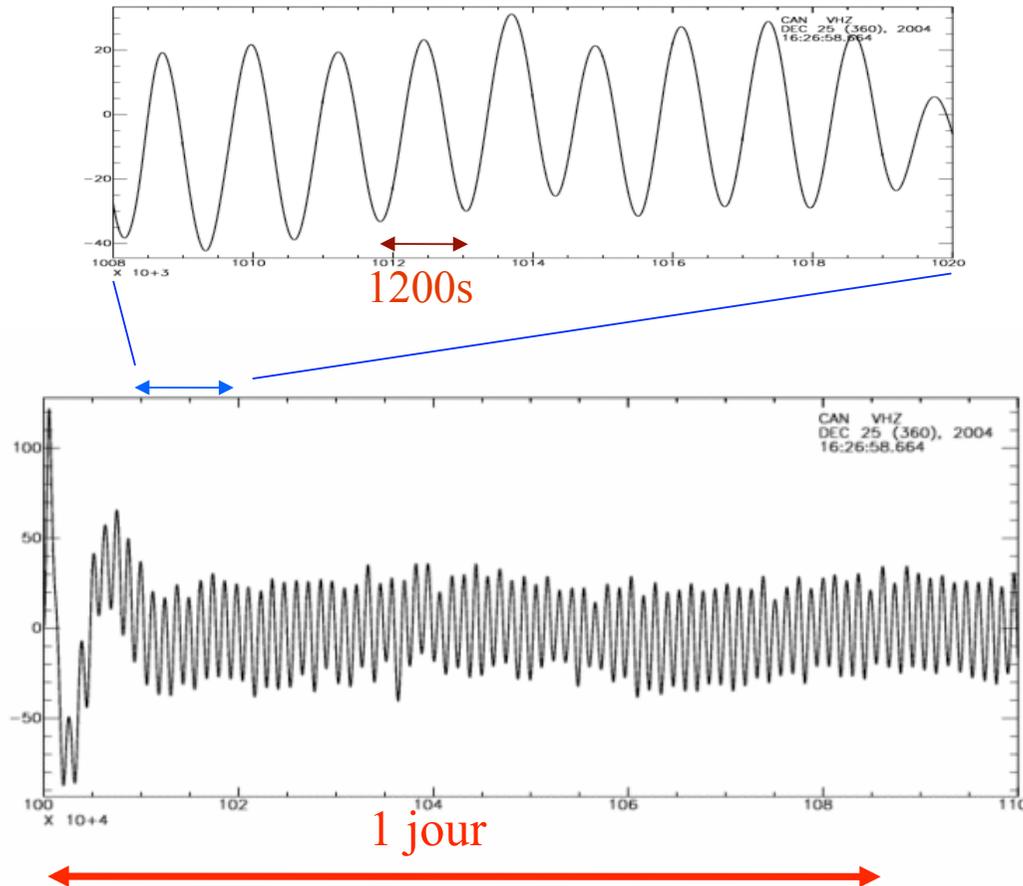


How big is really BIG

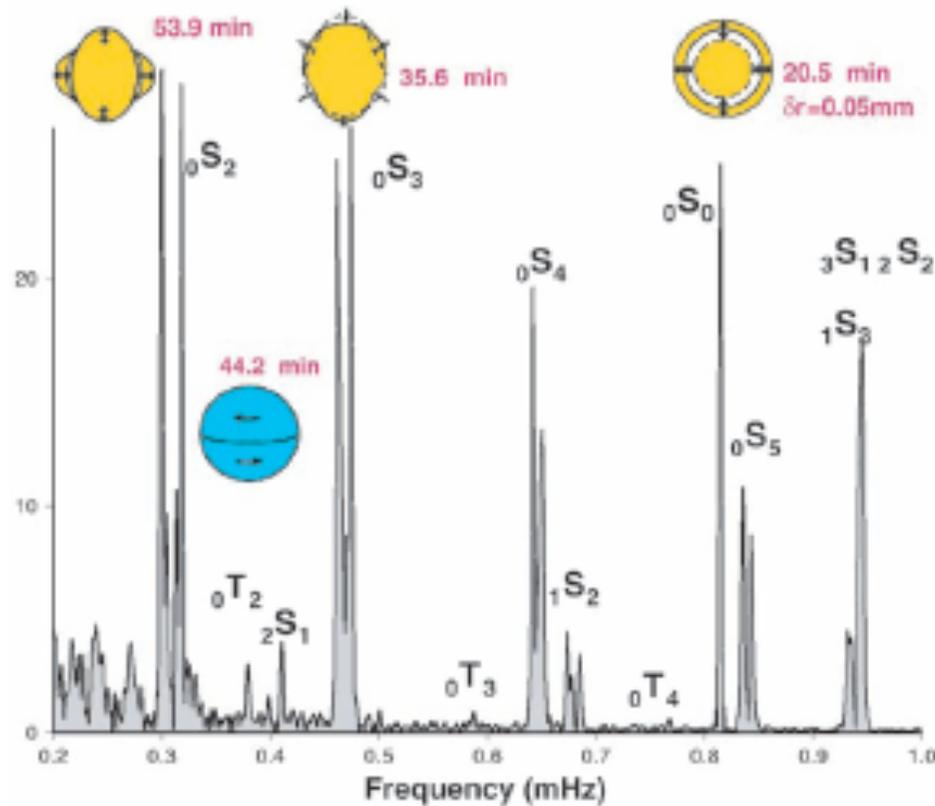
Oscillations libres 11 jours après le séisme de Sumatra

Mode 0S0

Période 1200s



Séisme de Sumatra du 24 décembre 2004



nS_l Spheroidal mode

n nombre radial

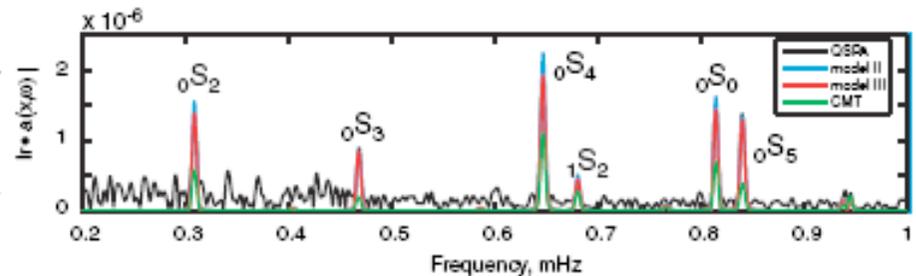
$n=0$ mode fondamentale

$n>0$ harmonique

l nombre azimuthal

Fig. 1. Schematic of the motion of free oscillations ${}_0S_2$, ${}_0T_2$, ${}_0S_3$ and ${}_0S_0$ superimposed on a spectrum computed from 240 hours of vertical seismic motions recorded at the CAN (Canberra, Australia) station of the Geoscope Network. For comparison, fig. 51 plots the acceleration spectrum from the superconducting gravimeter collocated with CAN.

Fig. 2. Free-oscillation spectra for GSN station QSPA, whose sensor lies within an ice borehole in the quiet sector of the South Pole station. Only $m = 0$ free oscillations are nonzero at Earth's poles, leading to sharply defined single resonance peaks for modes ${}_0S_l$ and ${}_0T_l$ with period $T > 1000$ s. A vertical-motion data series of 106 hours was analyzed. Predicted spectra are plotted with colored lines from Harvard CMT mechanism and two finite rupture models from (4).



Oscillations libres azimuthales : mode ${}_0S_\ell$

L'équation des ondes acoustiques en coordonnées sphériques est:

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left[R^2 \frac{\partial P}{\partial R} \right] + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial P}{\partial \theta} \right] = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$$

Sa solution harmonique (de pulsation ω), régulière en $R = 0$ est

$$P(R, t) = j_\ell(\omega R/\alpha) P_\ell(\cos \theta) e^{i\omega t}$$

- j_ℓ est une fonction de Bessel sphérique d'ordre ℓ
- $P_\ell(\theta)$ est un polynôme de Legendre d'ordre azimuthal ℓ

En appliquant la condition aux limites $P(R_\odot, \omega) = 0$ on obtient l'équation aux valeurs propres

$$j_\ell(\omega R/\alpha) = 0$$

Un mode propre est la solution $\omega \neq 0$ de cette équation.

Oscillations libres ${}_n S_2$

$$P_2(\cos \theta) = \frac{1}{3}(3 \cos^2 \theta - 1)$$

$$j_2(x) = \left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right) \sin x - \frac{3}{x^2} \quad \text{ou} \quad x = \omega R / \alpha$$

Il y a un nombre infini, mais dénombrable de valeurs propres pour le mode radial. Le mode ${}_0 S_2$ se produit quand $x \simeq 1.8\pi$

Les valeurs et vecteurs propres de ${}_0 S_2$ sont

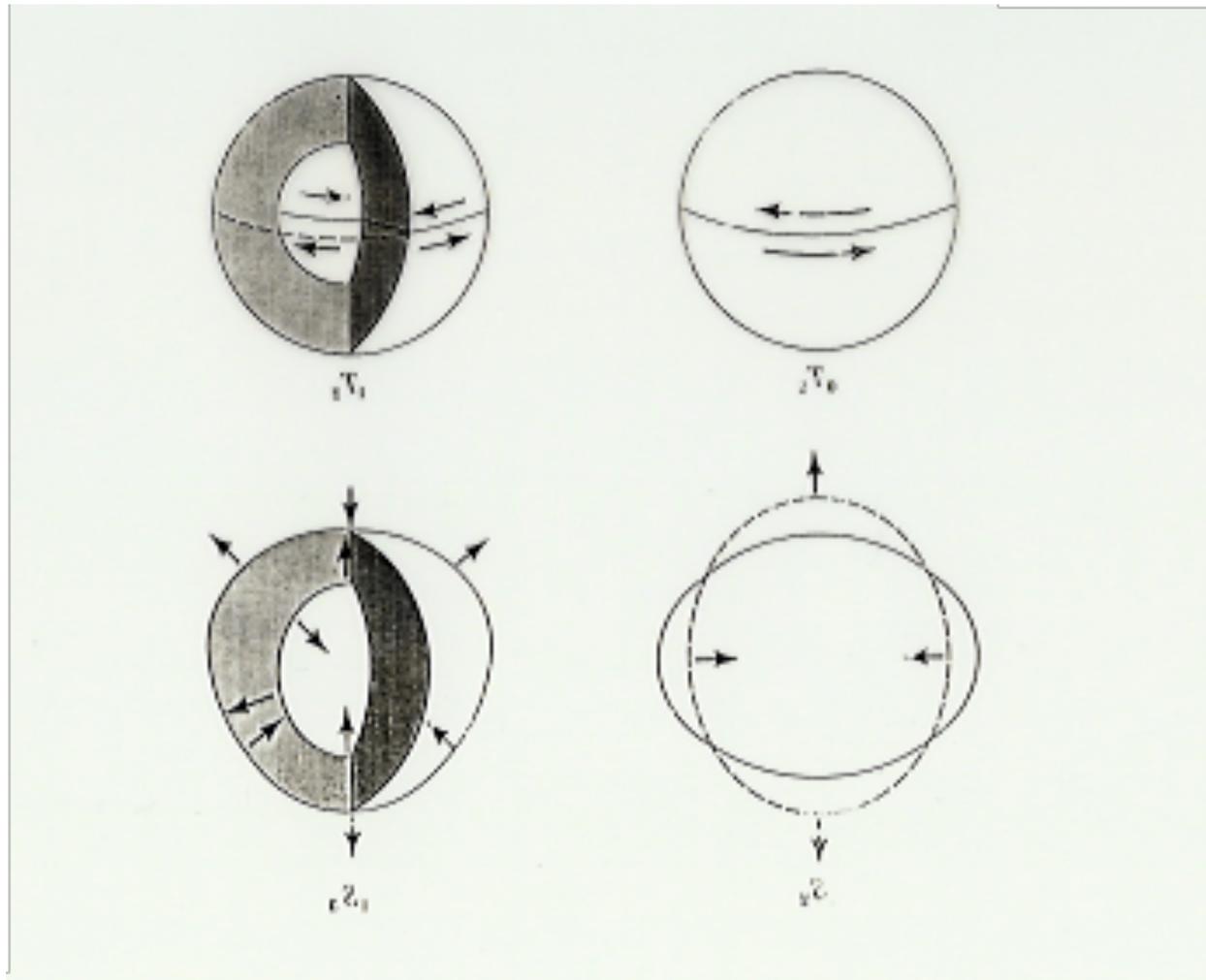
$${}_0 \omega_2 = 1.8 \frac{\alpha \pi}{R_\odot} \quad {}_0 y_2(R) = j_2(1.8\pi R / R_\odot)$$

Et la période est ${}_0 T_2 = \frac{2R_\odot}{1.8\alpha}$.

Interprétation physique La période du mode ${}_0 S_2$ est le temps de trajet d'une onde P à travers la terre ($2R_\odot / \alpha$) divisée par 1.8.

Très différent de la terre, pourquoi? Les ondes S!

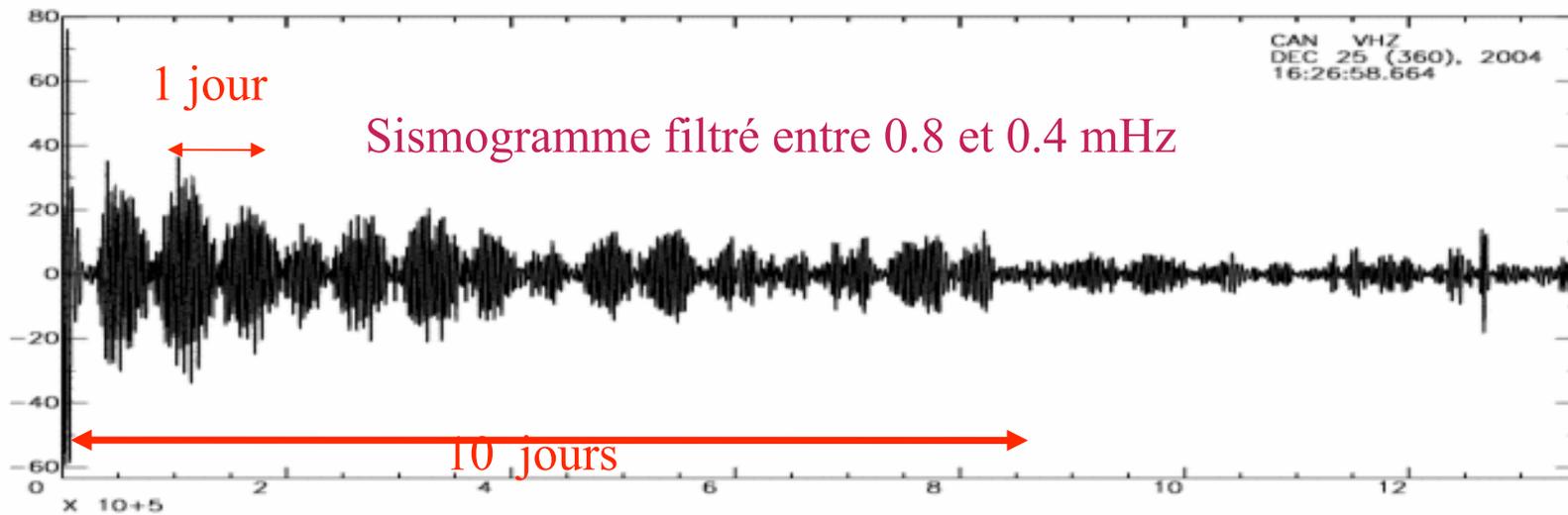
Quelques modes typiques dépendant de l'Azimuth θ



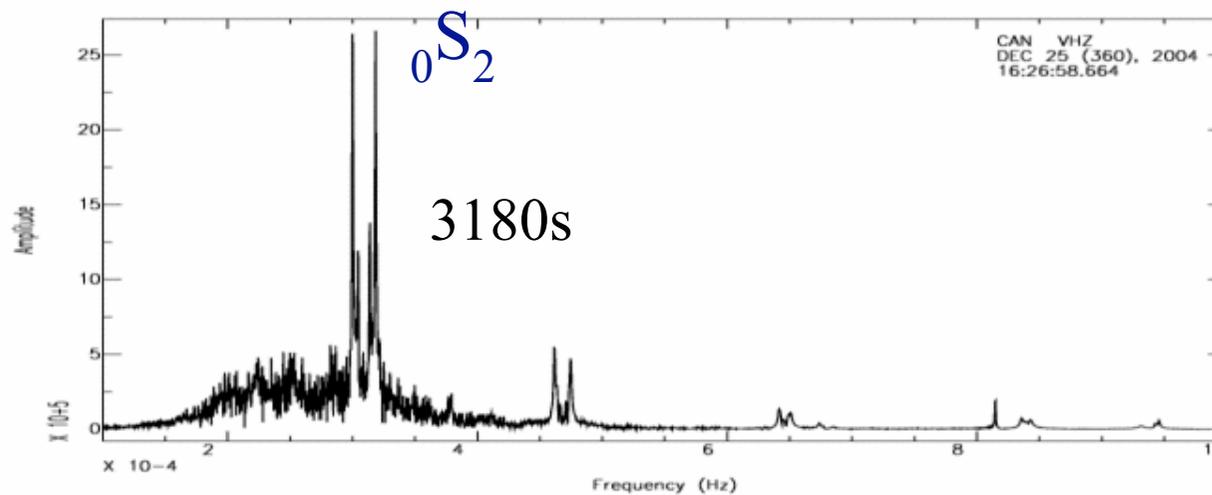
${}_{\theta}T_1$

${}_{\theta}S_2$

Observation du mode ${}_0S_2$ après le séisme de Sumatra



Splitting du mode ${}_0S_2$ dû à la rotation de la terre

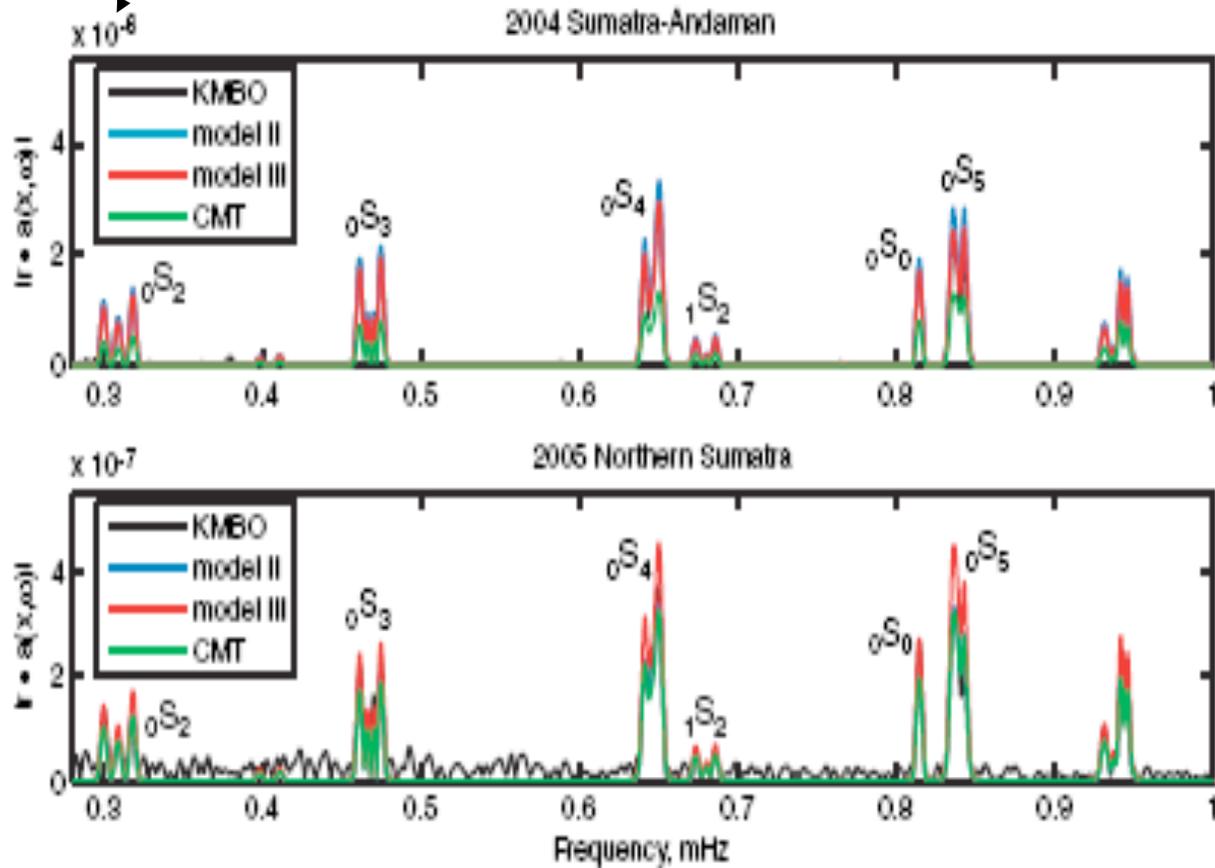


Spectre

Spectres des deux grands séismes 24/12/04 et 28/03/05

10 fois plus grand!

Fig. 8. Spectrum comparison for the 26 December 2004 Sumatra-Andaman and 28 March 2005 Northern Sumatra earthquakes using 127-hour records of vertical motion recorded at station KMBO (Kilima Mbogo, Kenya). Spectral predictions of the Harvard CMT solutions are graphed as well as spectra predicted from finite-rupture models from (4). Note the greater success of the CMT solution for the 2005 event, consistent with a smaller less complex rupture process.



KMBO Kenya

Oscillations libres d'une sphère élastique

Suivant le modèle de la sphère fluide, écrivons un mode propre de la terre en séparant les variables :

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(r, \theta, \phi, \omega) &= \mathbf{y}_v(r, \ell, \omega) \mathcal{V} Y_\ell^m(\theta, \phi) e^{i\omega t} \\ \sigma(r, \theta, \phi, \omega) &= \mathbf{y}_\sigma(r, \ell, \omega) \mathcal{S} Y_\ell^m(\theta, \phi) e^{i\omega t}\end{aligned}$$

où:

\mathbf{v} and σ sont le vecteur vitesses de particule et le tenseur de contraintes, respectivement.

$Y_\ell^m(\theta, \phi) = P_\ell^m(\cos \theta) e^{-im\phi}$ is a spherical harmonic function ($-\ell < m < \ell$).

$y_v(r)$ et $y_\sigma(r)$ sont les vecteurs propres, variation verticale du mode.

\mathcal{V} et \mathcal{S} sont deux opérateurs différentiels simples.

Harmoniques sphériques $Y_l^m(\theta, \phi)$

$$|Y_0^0(\theta, \phi)|^2$$



$$|Y_1^0(\theta, \phi)|^2$$



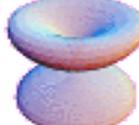
$$|Y_1^1(\theta, \phi)|^2$$



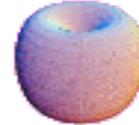
$$|Y_2^0(\theta, \phi)|^2$$



$$|Y_2^1(\theta, \phi)|^2$$



$$|Y_2^2(\theta, \phi)|^2$$



$$|Y_3^0(\theta, \phi)|^2$$



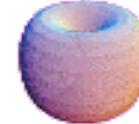
$$|Y_3^1(\theta, \phi)|^2$$



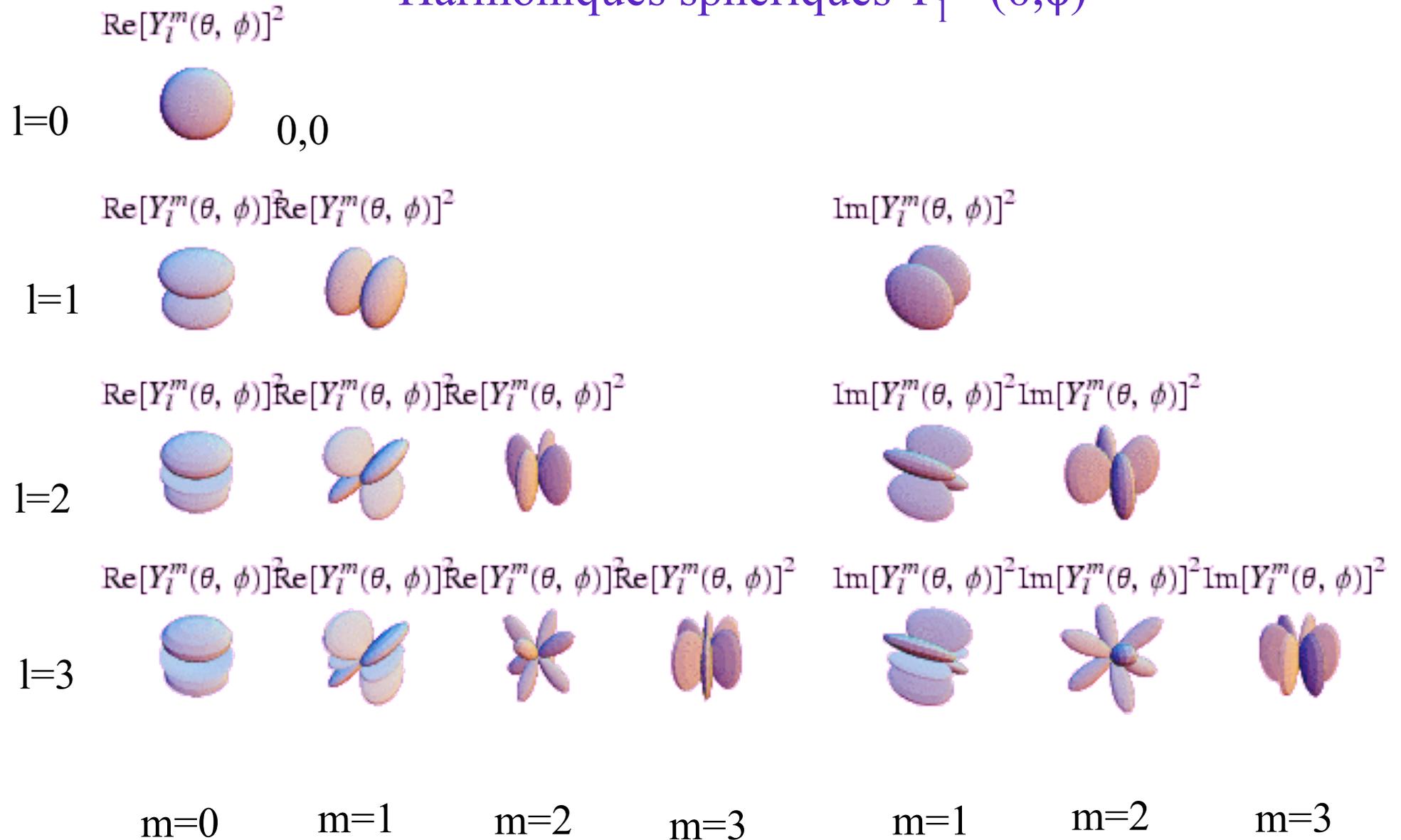
$$|Y_3^2(\theta, \phi)|^2$$



$$|Y_3^3(\theta, \phi)|^2$$



Harmoniques sphériques $Y_l^m(\theta, \phi)$



Problème des Modes Propres

Le problème aux valeurs propres se réduit à trouver la solution de l'équation :

$$\begin{aligned}\frac{dy_r}{dr}(r) &= a_{11}(r)y_v(r) + a_{12}(r)y_\sigma(r) \\ \frac{dy_\sigma}{dr}(r) &= a_{21}(r)y_v(r) + a_{22}(r)y_\sigma(r)\end{aligned}$$

Pour chaque ω , ℓ et m .

A ces équations on ajoute des conditions aux limites:

- Surface libre en $R = a$
- Continuité des vitesses et contraintes dans les discontinuités internes.
- Solution convergente au centre de la terre.

Ceci définit un problème aux valeurs propres. Les valeurs propres sont les pulsations.

$${}_n\omega_\ell^m \quad {}_n\omega_\ell$$

Et les vecteurs propres sont

$${}_ny_\ell^m(r) \quad {}_ny_\ell(r)$$

Dans une terre strictement sphérique la pulsation est la même pour tous les m .

Construction de sismogrammes synthétiques

On connaît plus de 2000 de ces modes avec une précision d'une fraction de %.

Un sismogramme synthétique est la somme des modes

$$\mathbf{v}(r, \theta, \phi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} {}_n C_{\ell}^m(r) \mathcal{V} Y_{\ell}^m(\theta, \phi) e^{i n \omega_{\ell}^m t}$$

où ${}_n C_{\ell}^m(r)$ est proportionnel au tenseur de Moments sismiques de la source.

$$\mathbf{M}_o(\omega)$$

Donc les sismogrammes synthétiques contiennent de l'information sur

1. La structure de la terre à travers les pulsations ou périodes propres → Modèle PREM
2. la source à travers l'amplitude et donc le → le CMT (Moment sismique au centroïde)

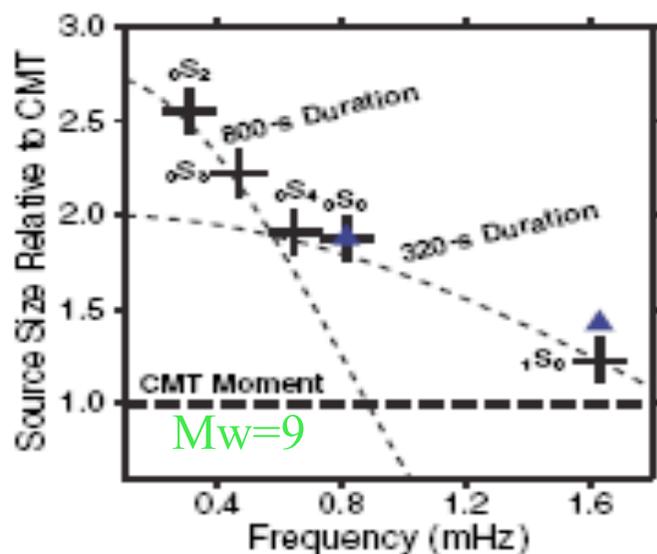


Fig. 5. The measured amplitudes of several long-period free oscillations, expressed in terms of their amplitude excess relative to the Harvard CMT solution. Crosses indicate estimates from GSN stations; triangles are estimated independently with the use of data from Geoscope stations. The largest amplification is associated with the mode $4S_0$, whose amplitude seems to require roughly 2.6 times the CMT moment estimated from 300- to 500-s surface waves. Superimposed on the measurements are theoretical source spectra for constant-rupture sources of duration τ , which follow $\sin(\pi\tau f)/(\pi\tau f)$ dependence. Deviations in source geometry and fluctuations in rupture rate would cause the source spectrum to depart from this simple model. Nevertheless, modal excitation suggests that the Sumatra-Andaman earthquake involved fault slip on more than one time scale.

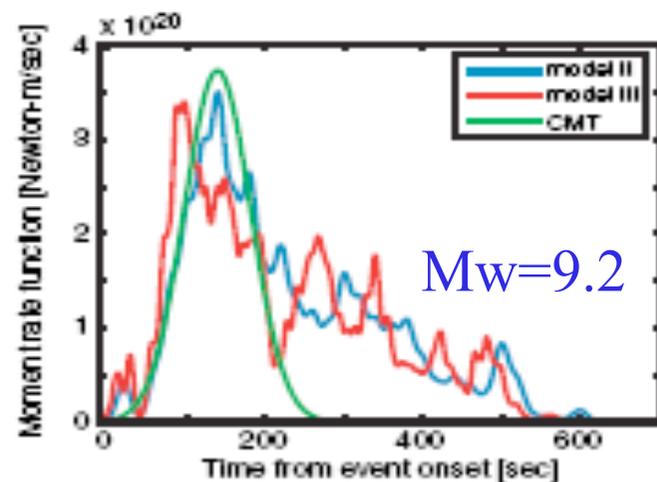
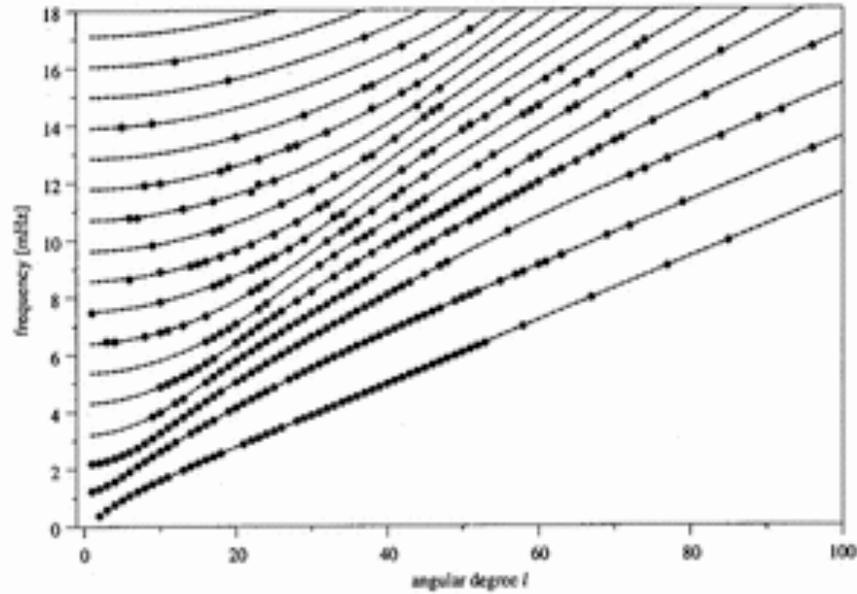


Fig. 6. Moment-rate functions (MRFs) for the 26 December Sumatra-Andaman earthquake. The MRF associated with the Harvard CMT is given by the green line, the MRF of finite-fault inversion II of (4) is denoted by the blue line, and the MRF of finite-fault inversion III of (4) is denoted by the red line.

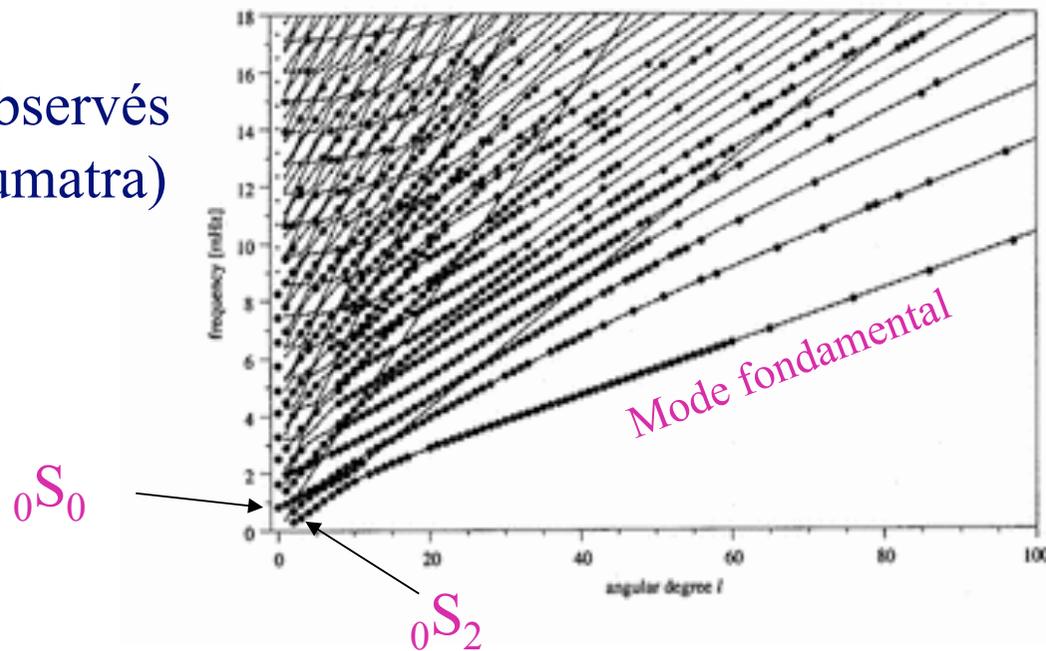
Spectroscopie de la terre

Modes calculés
(petits cercles)



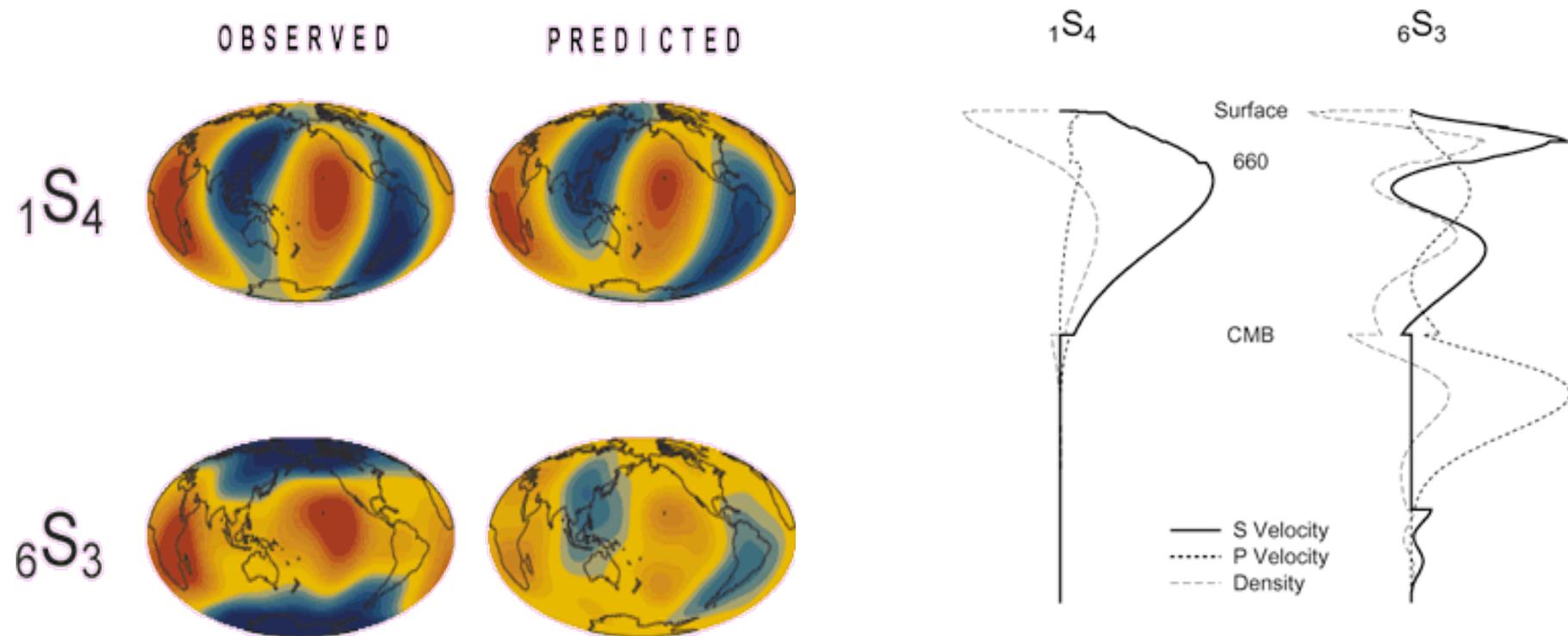
roidal modes

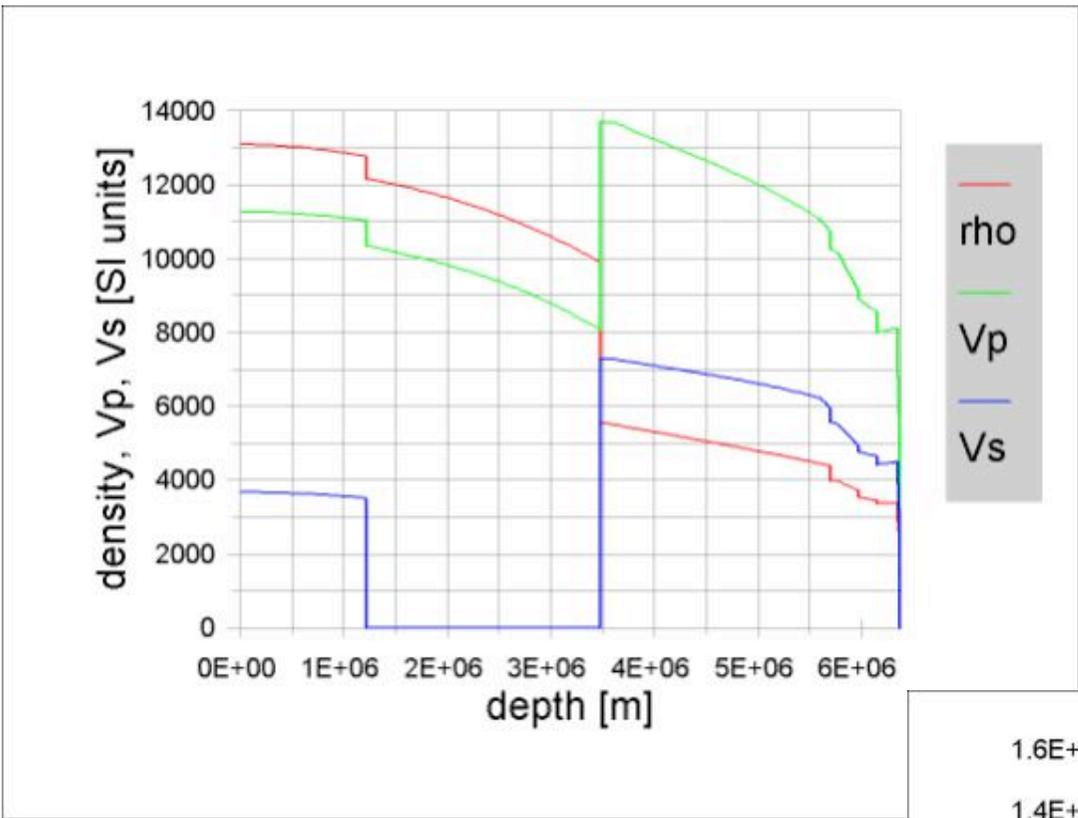
Modes observés
(avant Sumatra)



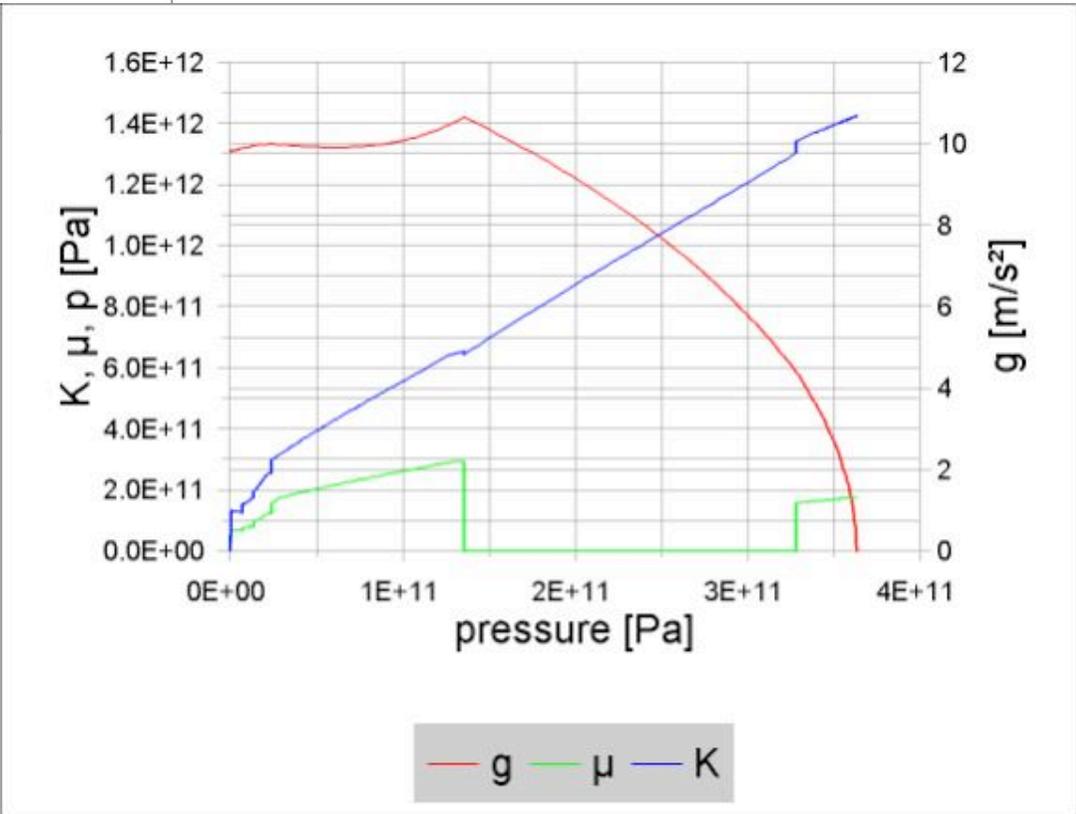
heroidal modes

Deux modes peu ordinaires

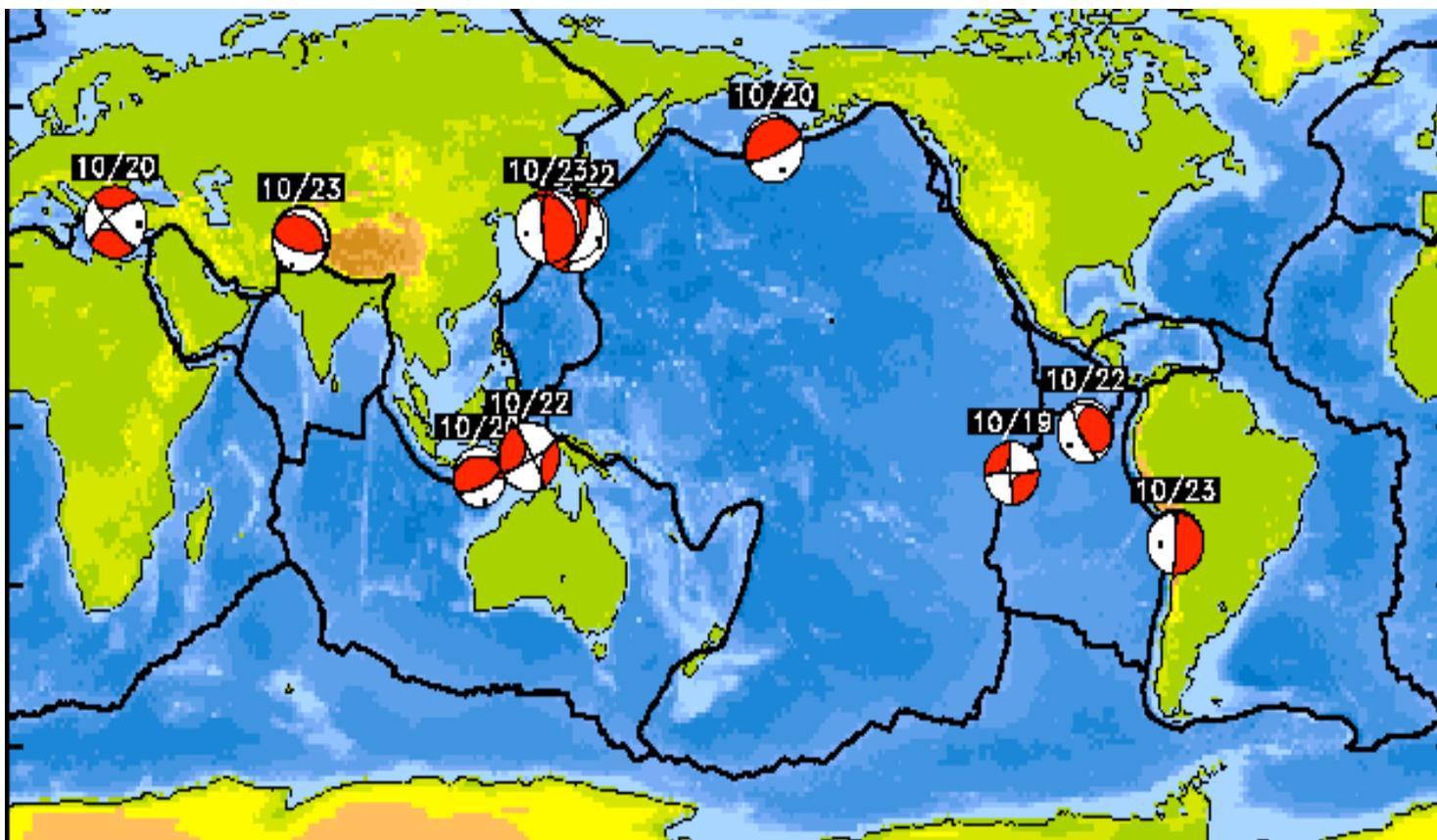




PREM !

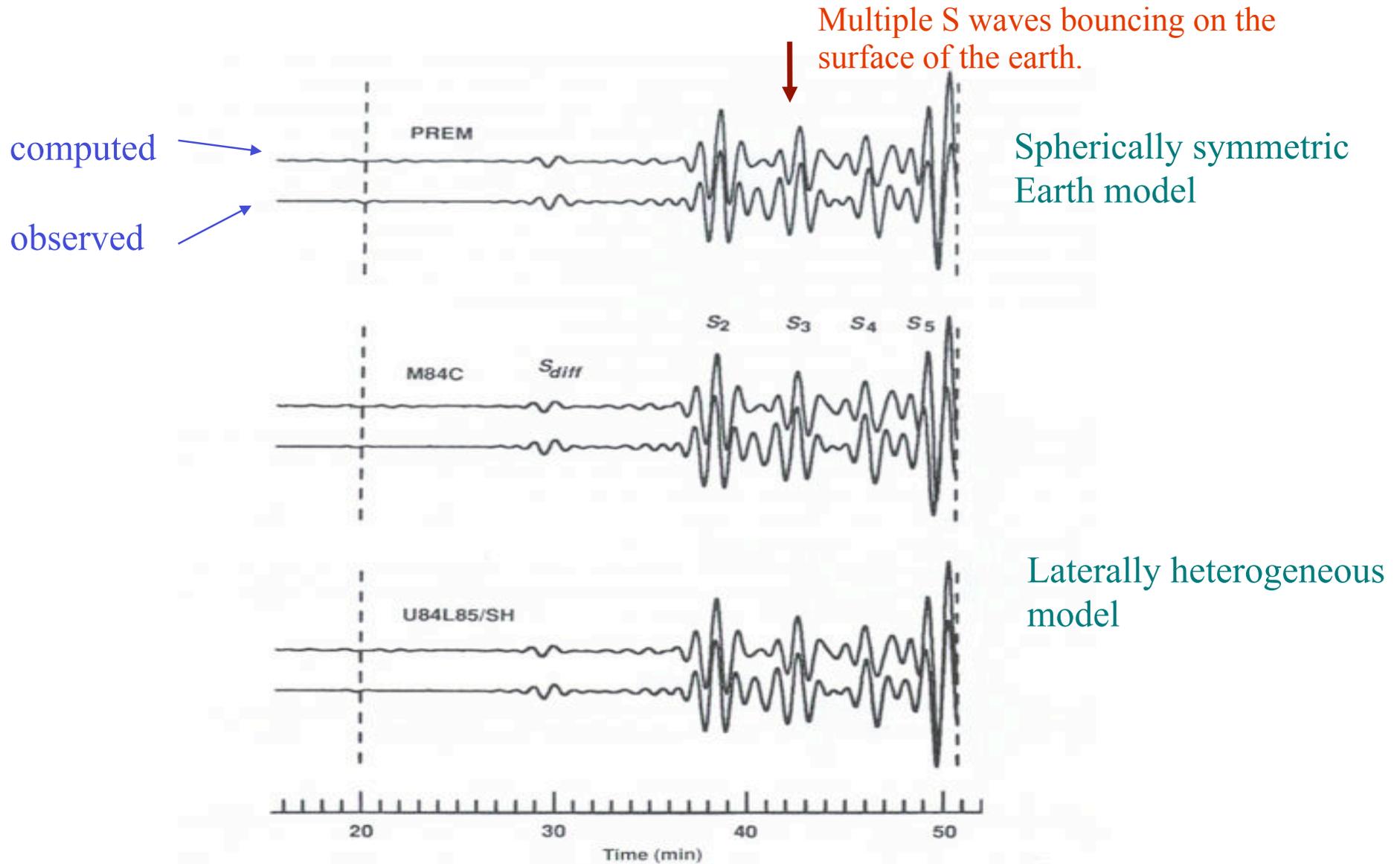


Séismes des deux dernières semaines de octobre 2005

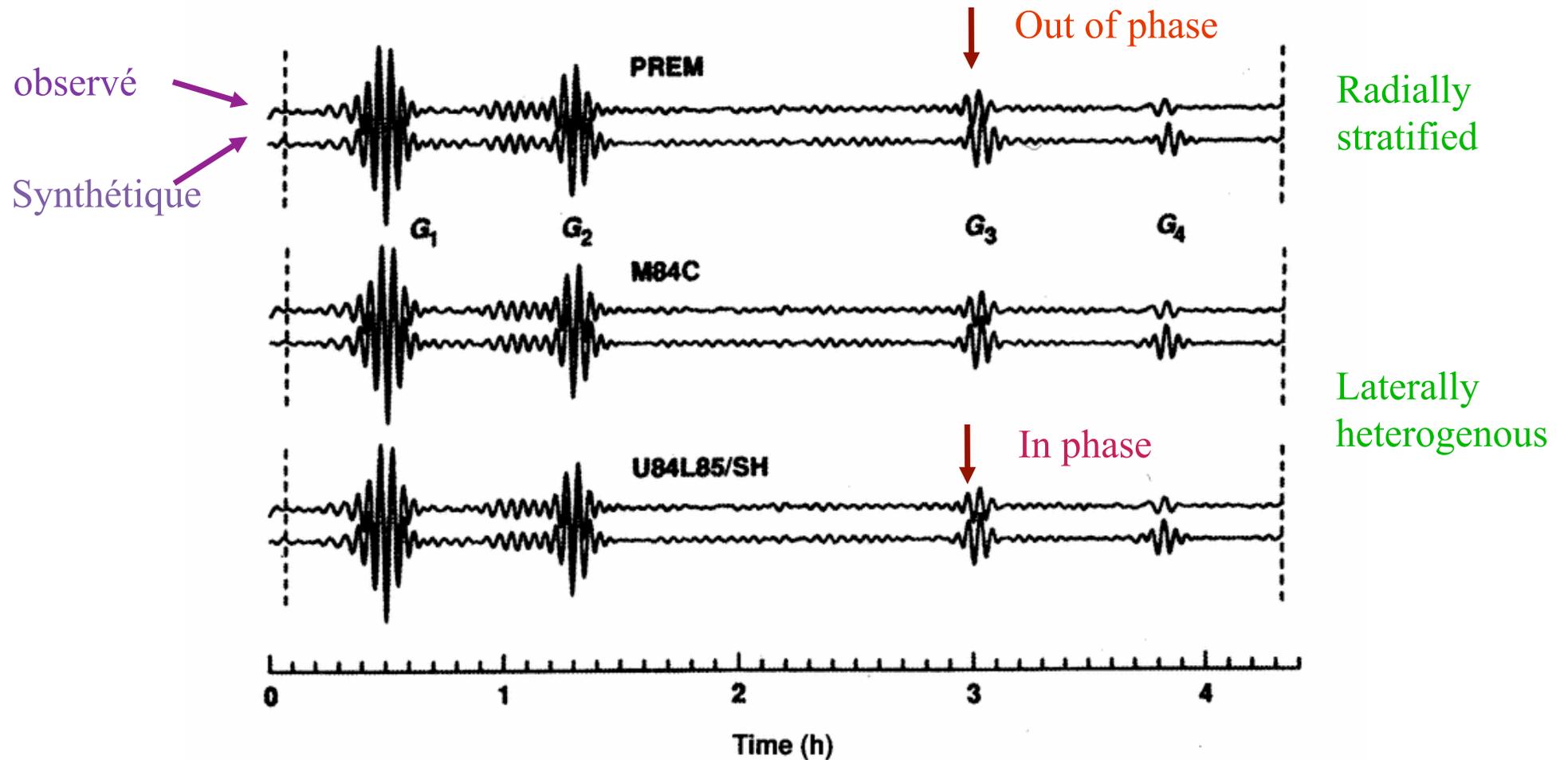


Ces séismes sont localisés et leur mécanisme au foyer est déterminé en utilisant la méthode spectrale de calcul de sismogrammes synthétiques.

Simulation de sismogrammes synthétiques par sommation de modes.

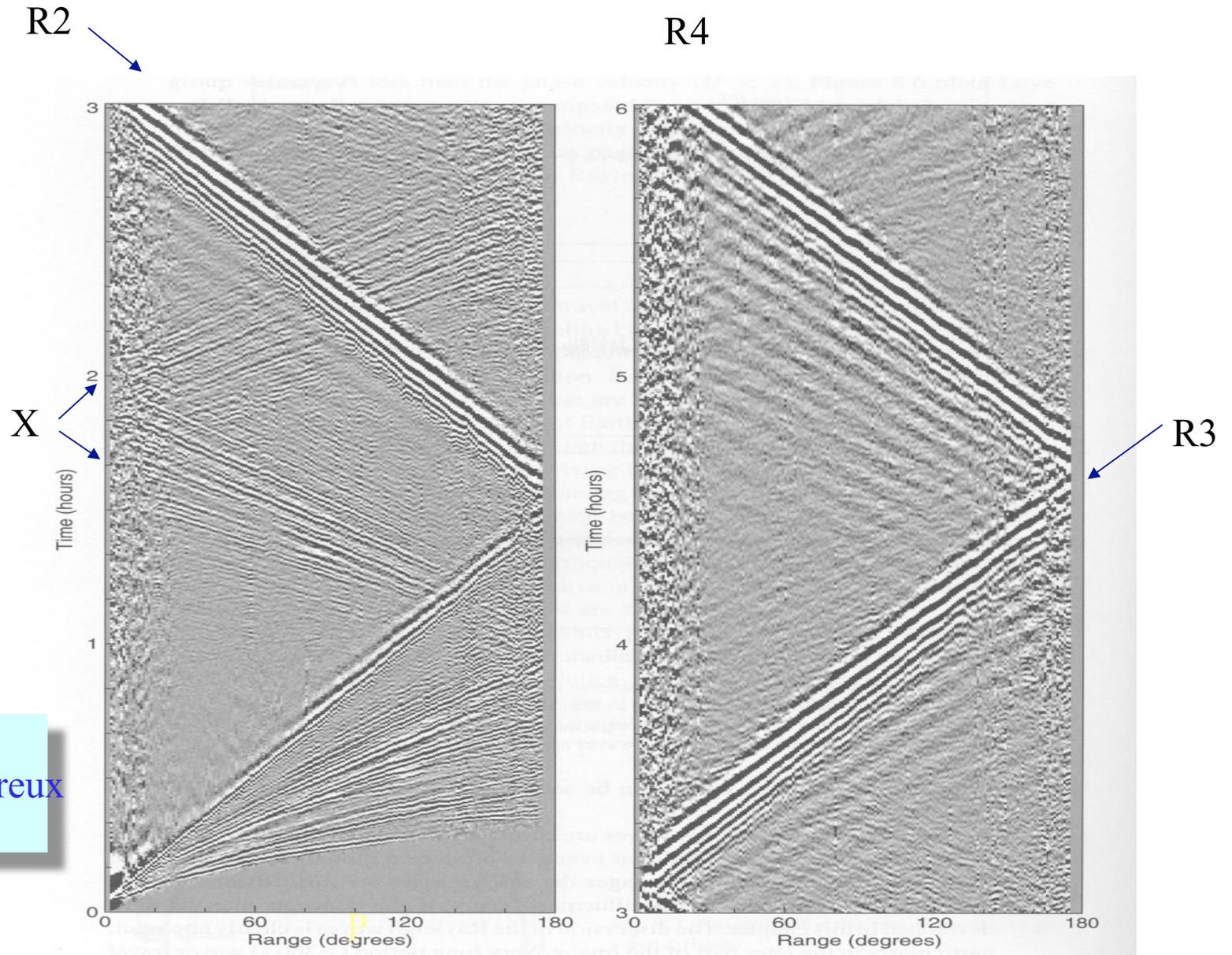


Modélisation des passages multiples d'ondes de Love



➤ D'après Dziewonski et al.

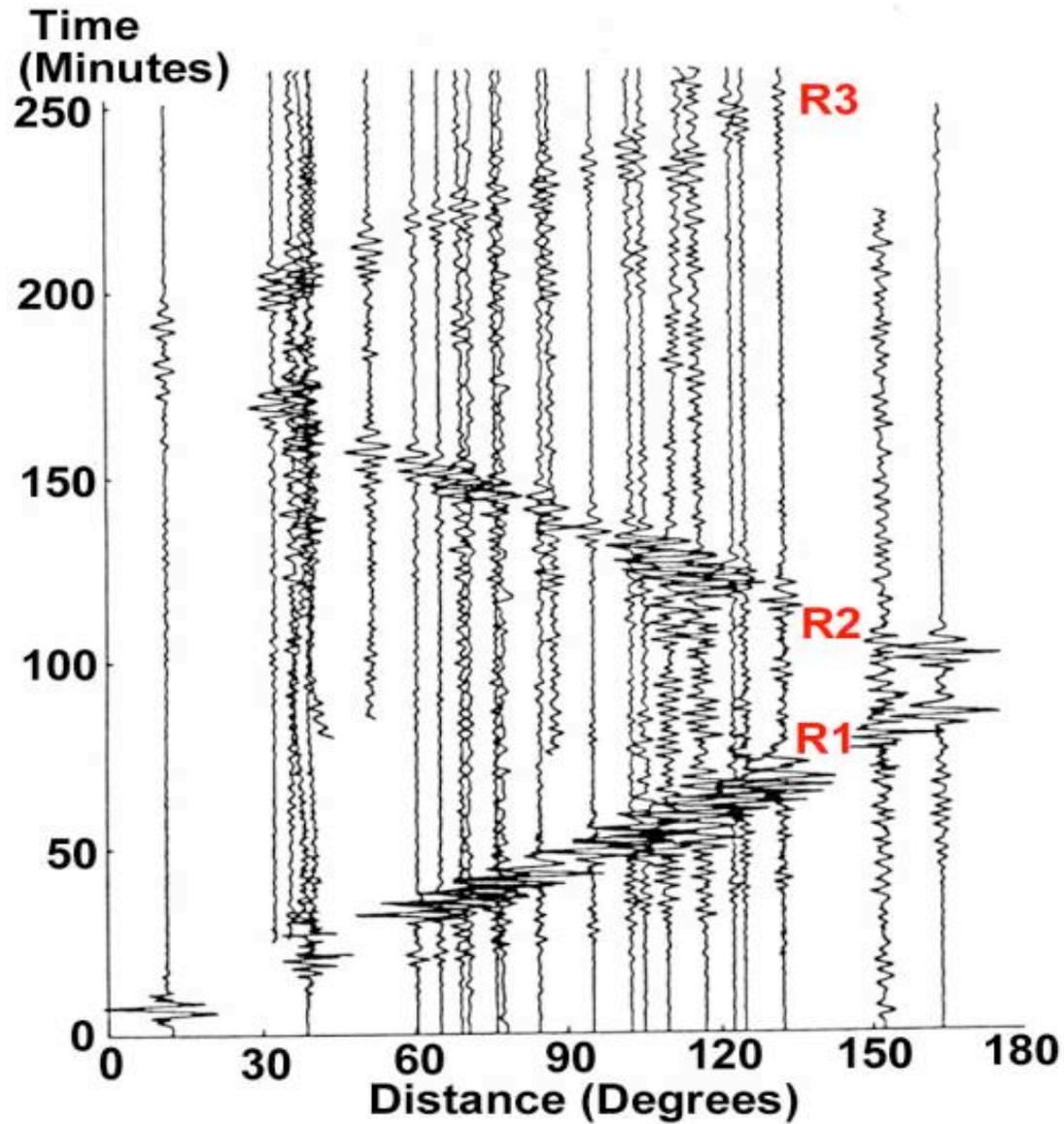
Section Sismique Globale



Dans cette section on a sommé nombreux sismogrammes

D'après Shearer, 2000

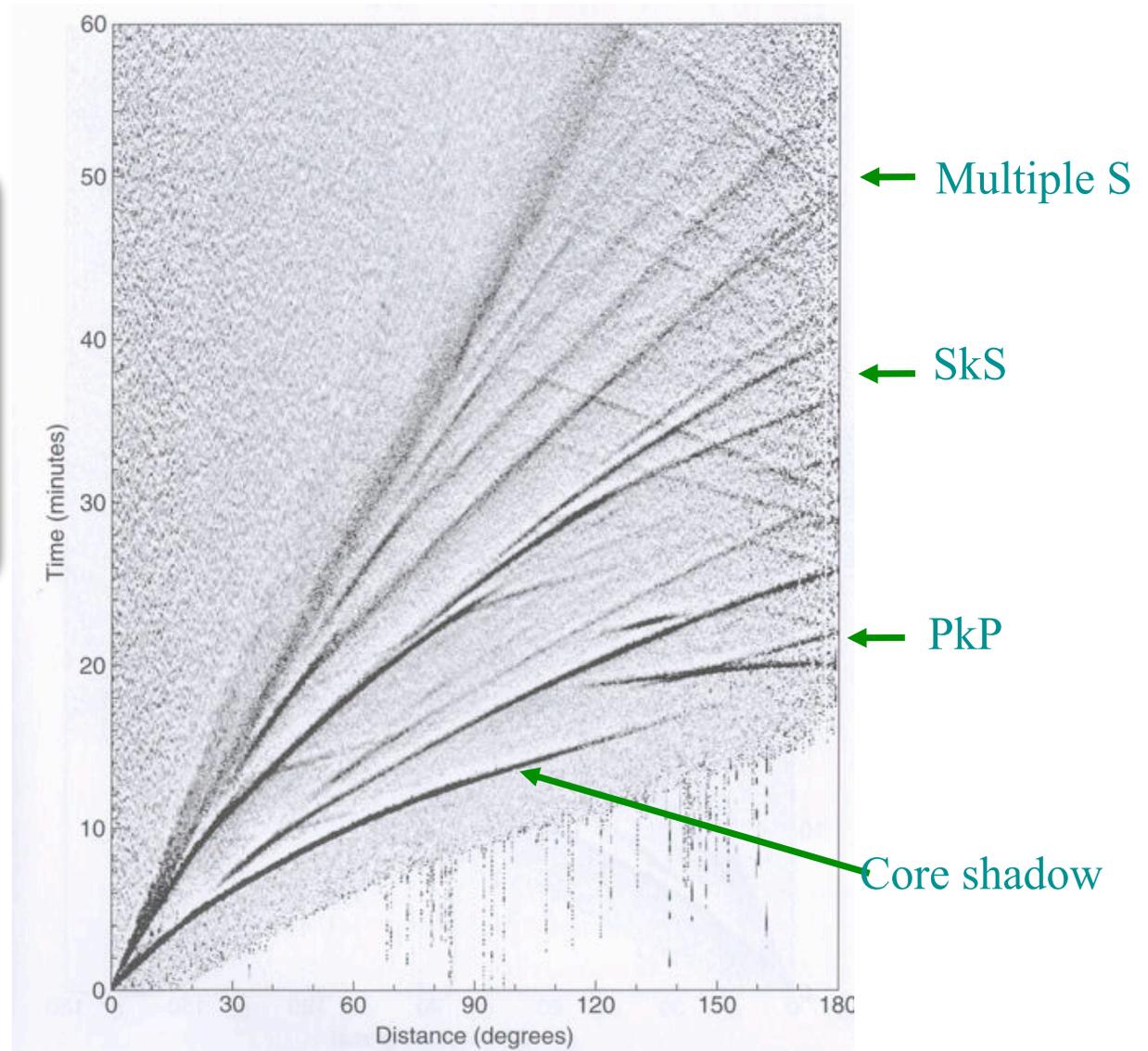
Ondes de surface pour le séisme de Loma Prieta (Octobre 1989)



Hodochrones de la terre globale

$R \sim 4 \text{ km/s}$

La terre est un milieu élastique stratifié avec des perturbations latérales de l'ordre de 1-5%



D'après Shearer, 2000

Surface Waves and earth's structure

Wave equation in time domain

We study

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \quad (1)$$

In the Fourier domain -

$$\frac{\omega^2}{c^2} u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \quad (2)$$

Solution in Fourier domain:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left(u^+(\omega) e^{i\omega(t-x/c)} + u^-(\omega) e^{i\omega(t+x/c)} \right) \quad (3)$$

Chacun des termes représente une onde plane qui avance dans la direction positive (+) ou negative (-) de l'axe x .

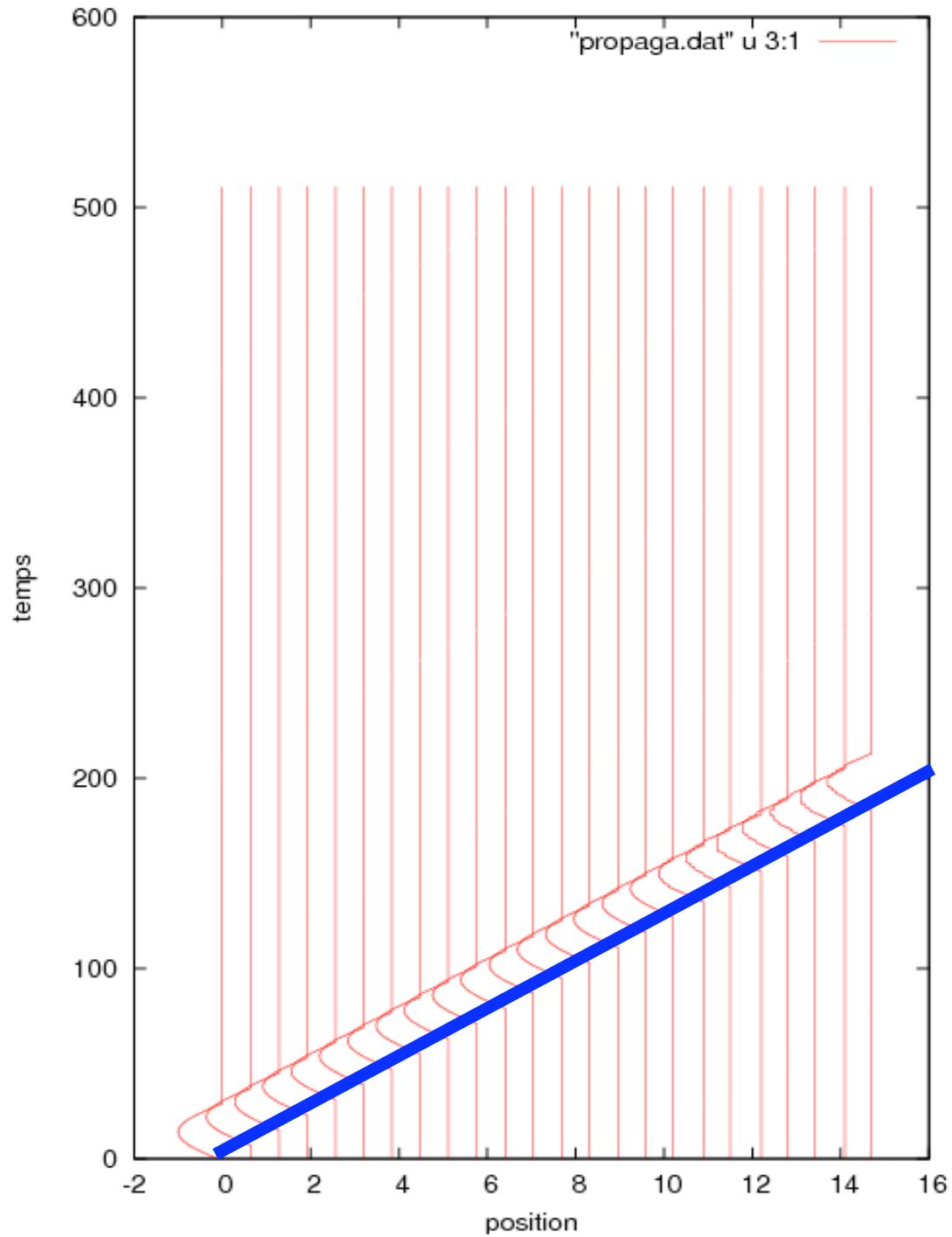
Onde non dispersive

Considerons seulement le terme +

Alors

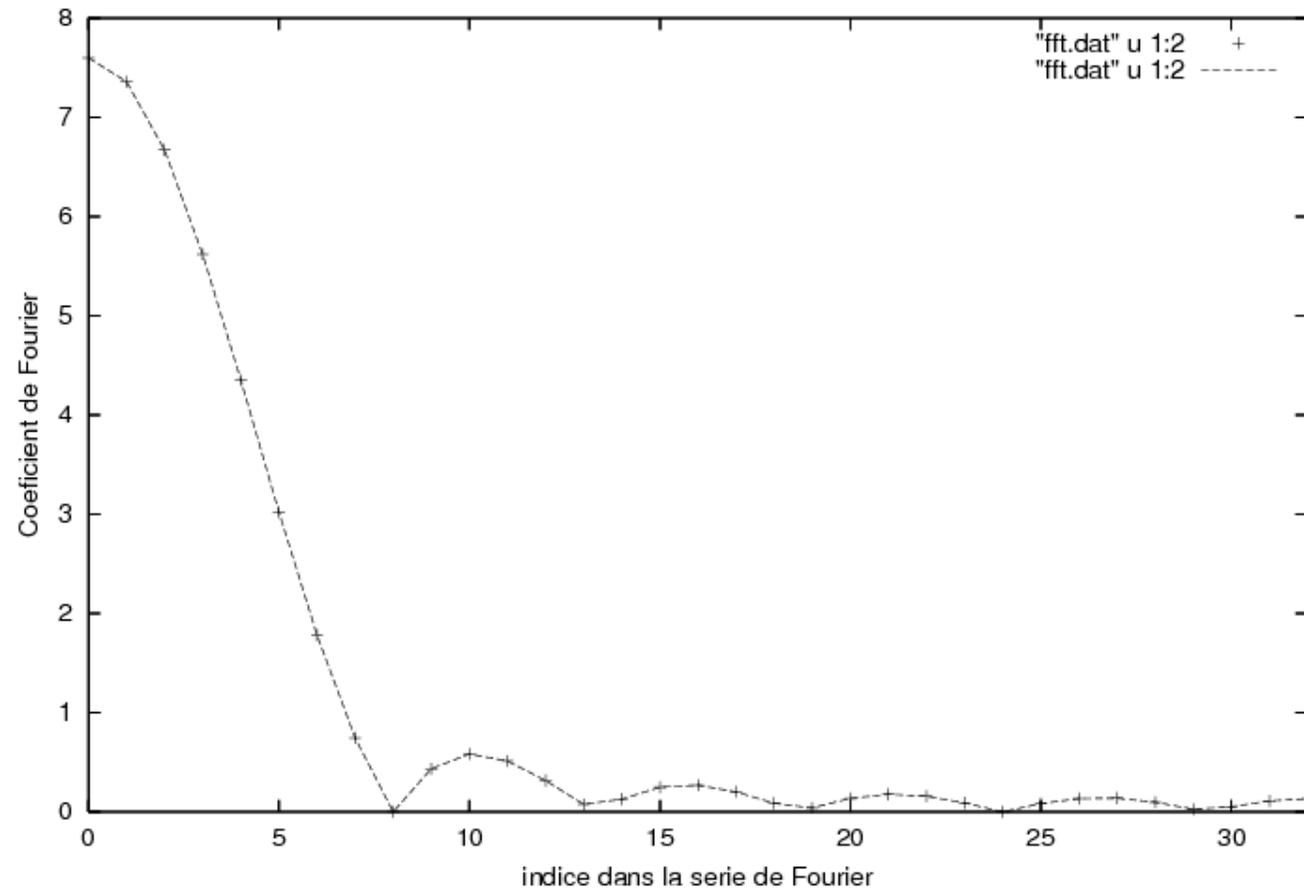
$$u(x, t) = u^+(t - x/c) \quad (4)$$

propagation d'onde non dispersive

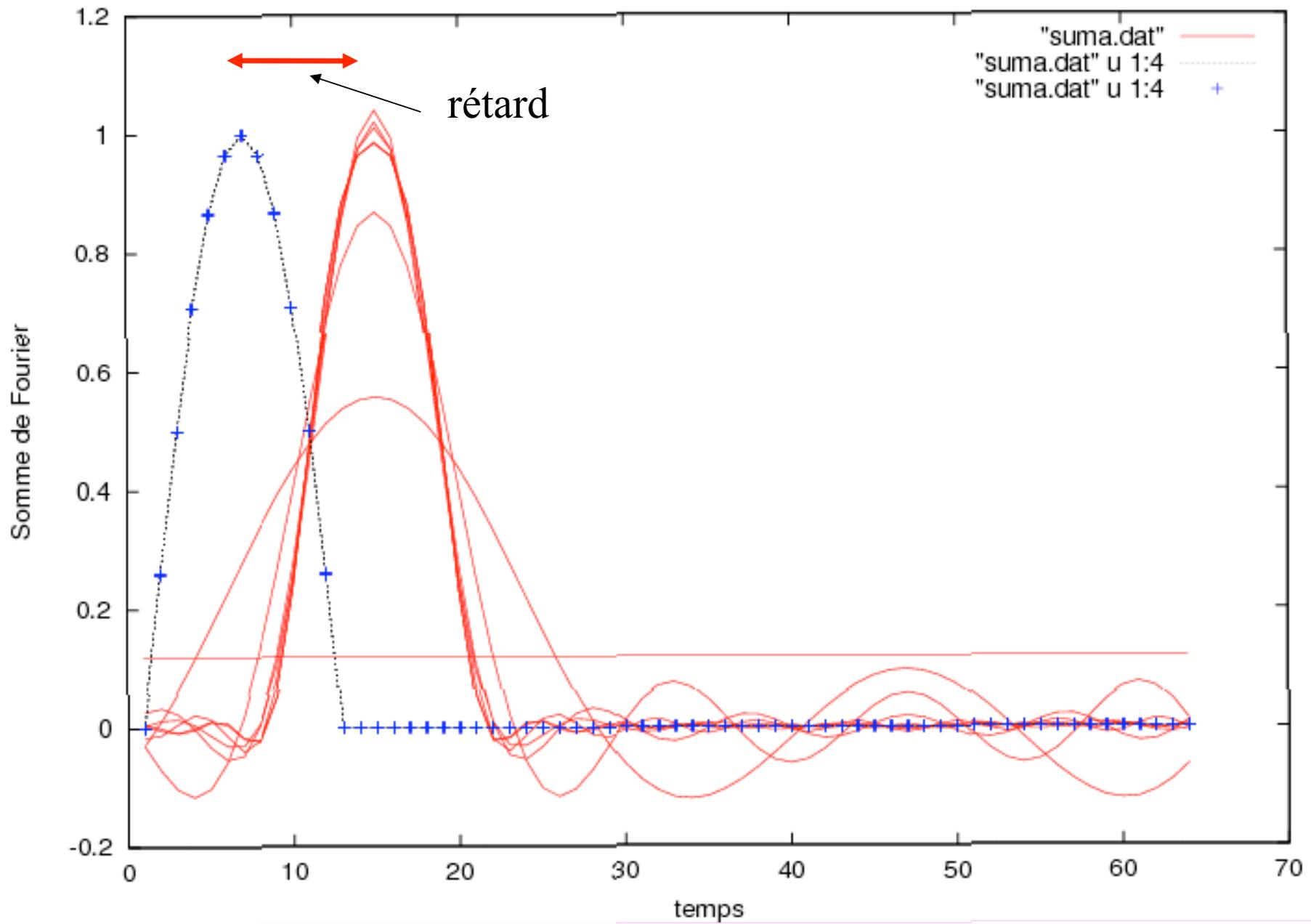


Vitesse constante

Transformee de Fourier d'une porte



Transformée de Fourier du signal arc de cosinus



Onde dispersive

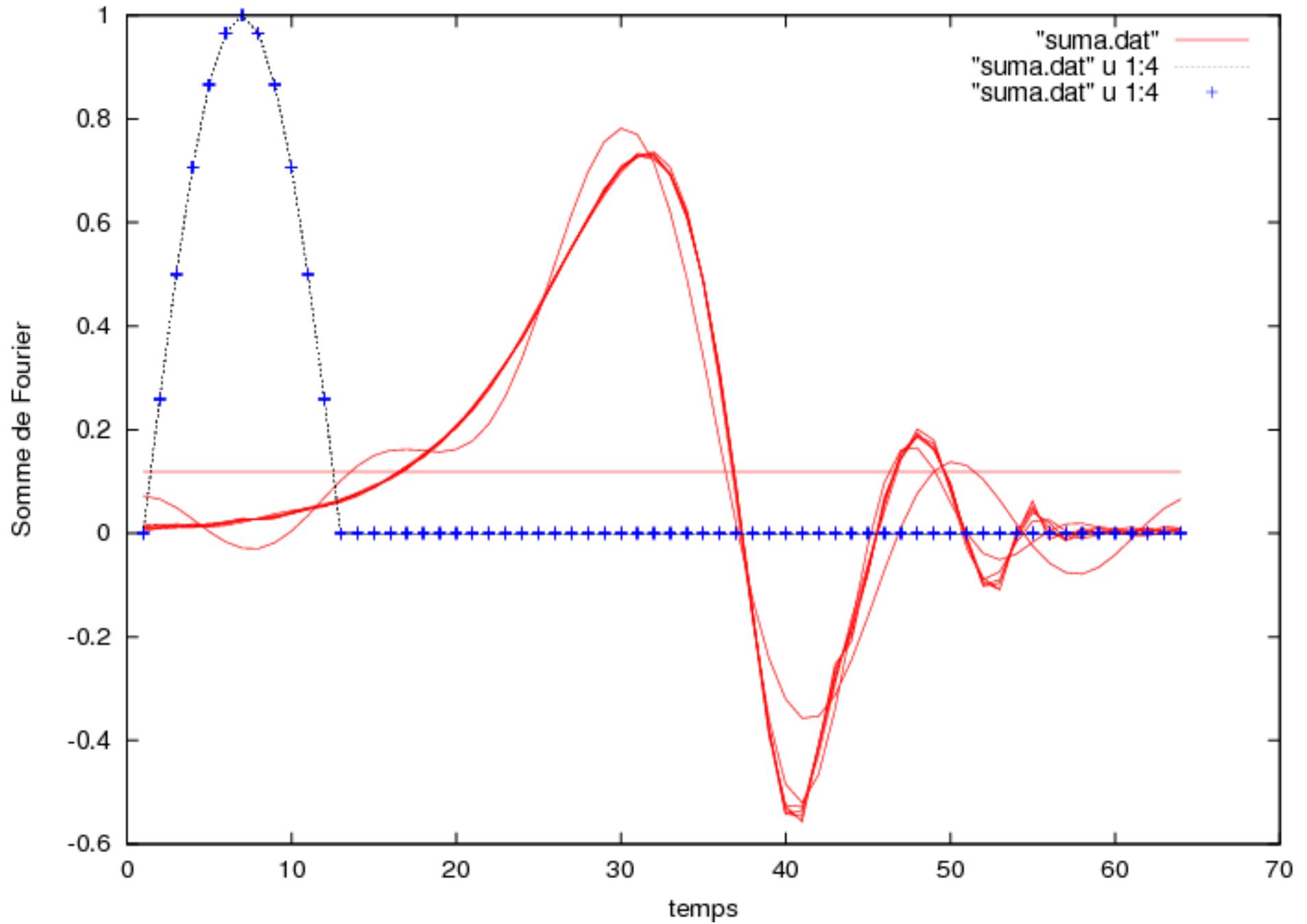
En présence de dispersion la vitesse de propagation est une fonction de la fréquence

$$c(\omega) \quad (5)$$

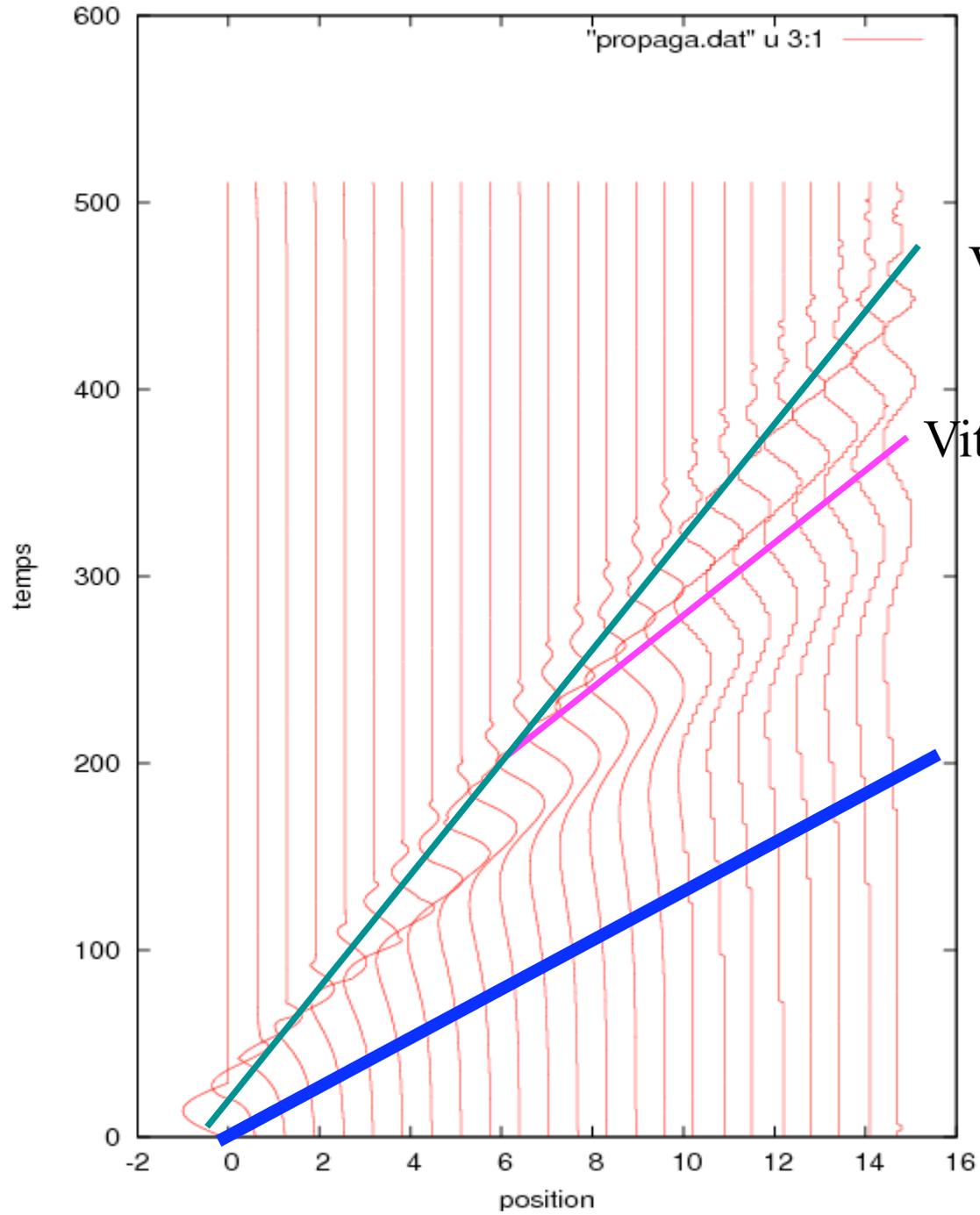
La propagation d'ondes se calcule toujours avec la TdF (2) mais la *forme d'onde* change au cours du trajet.

L'onde se disperse.

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u^+(\omega) e^{i[\omega t - x/c(\omega)]} d\omega \quad (6)$$



propagation d'onde non dispersive



Vitesse de groupe

Vitesse de phase

Vitesse de groupe typiques pour des océans et continents

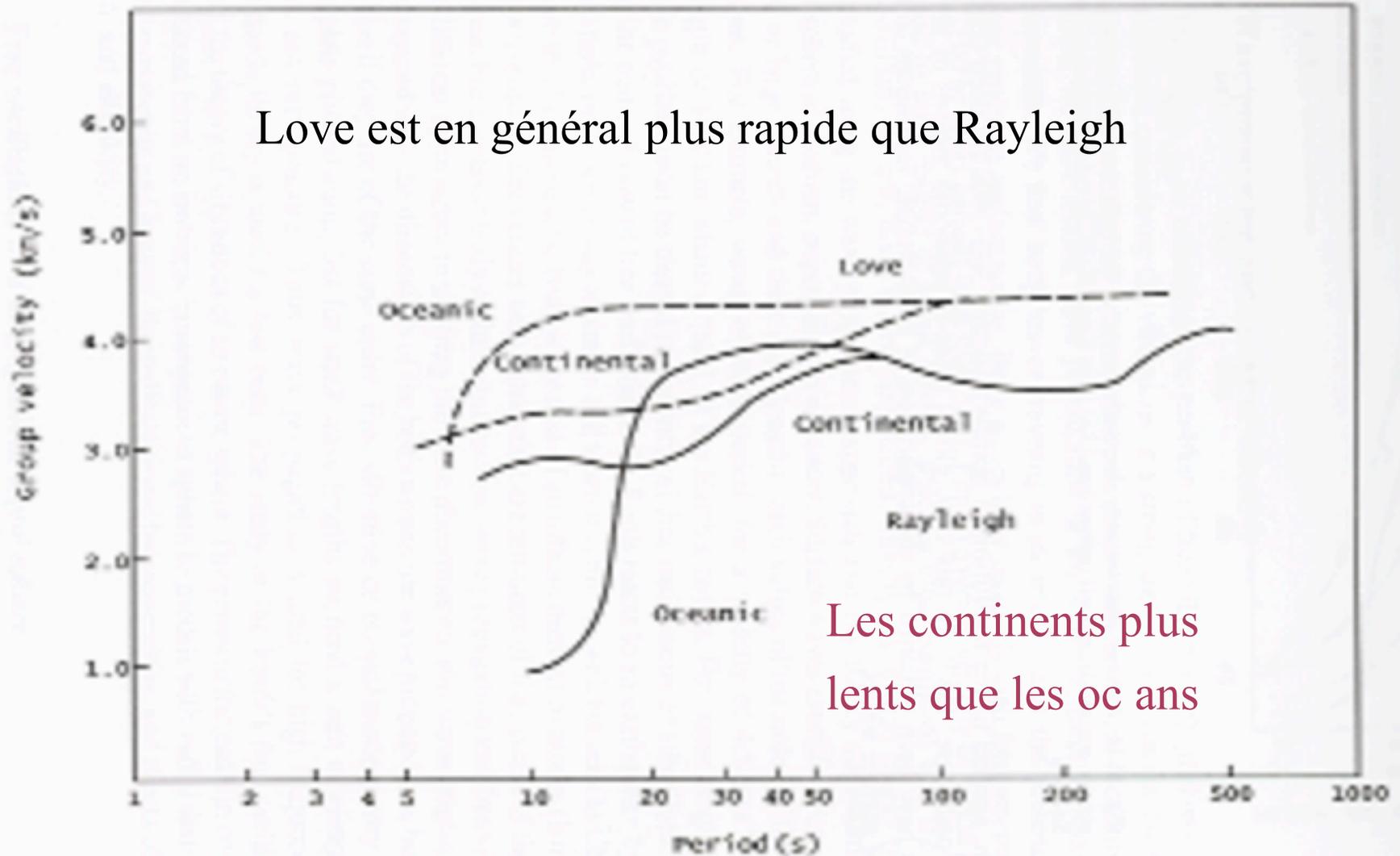
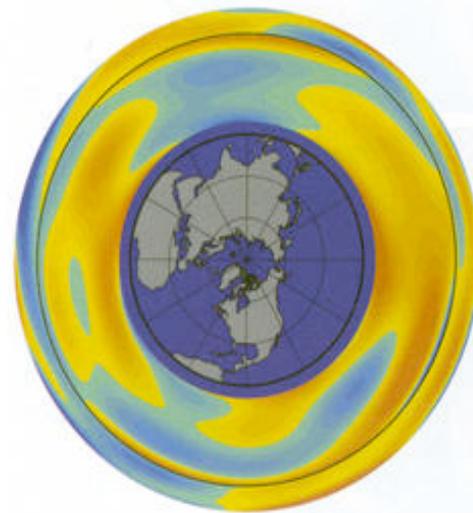


Fig. 12.13. Group velocity dispersion curves for Rayleigh and Love waves (modified from Bullen and Bolt (1985)).

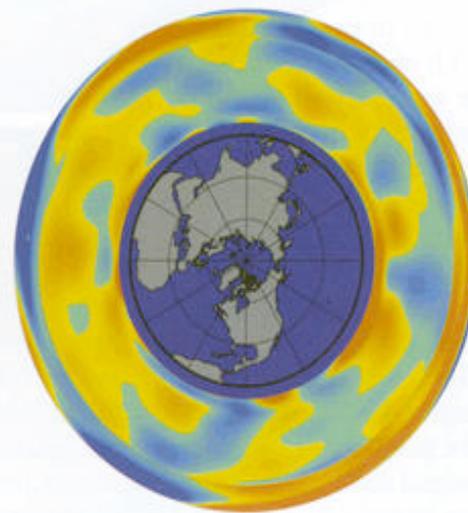
Le premier modèle latéralement hétérogène M84C

Proposé par Dziewonski et Woodhouse (1985)
Ce modèle contient des harmoniques d'ordre < 8

Perturbation des P



Perturbation des S



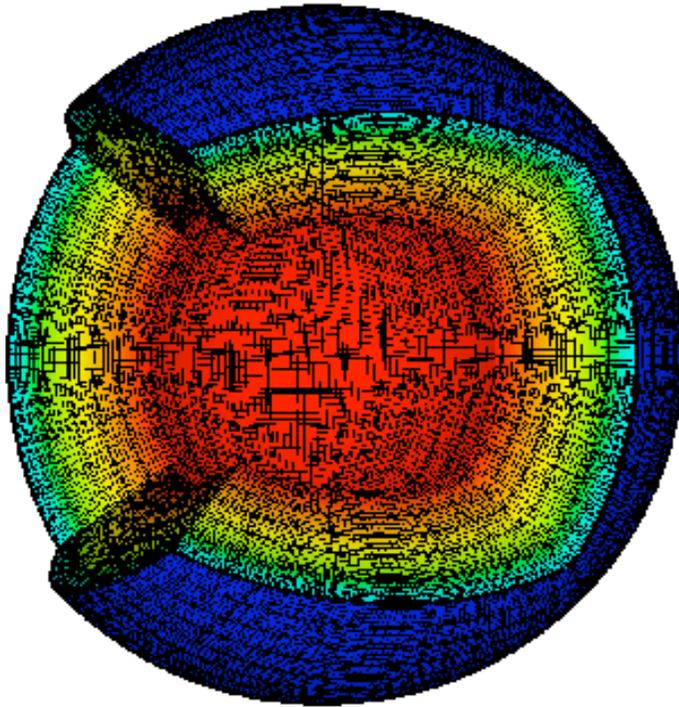
-4%

4%

D'après Dziewonski et al, 2000

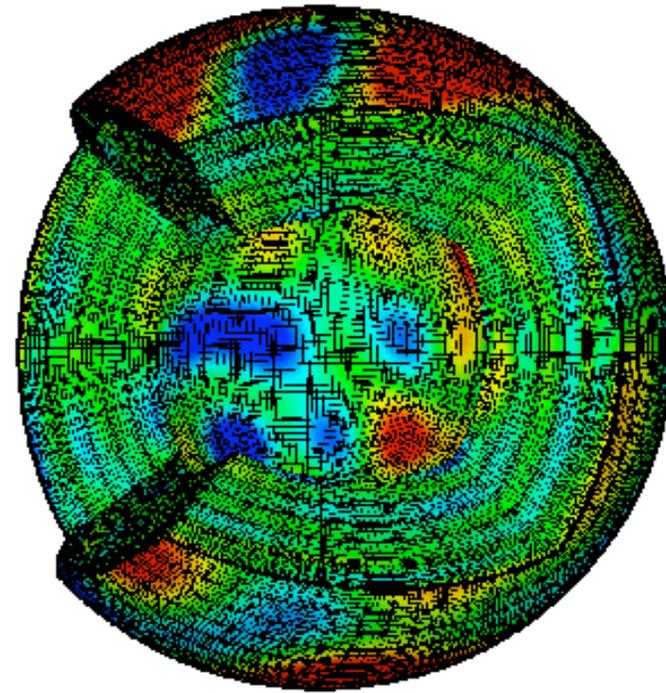
Global models of P and S waves

PREM



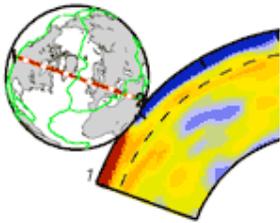
Spherically symmetric

SAW12D

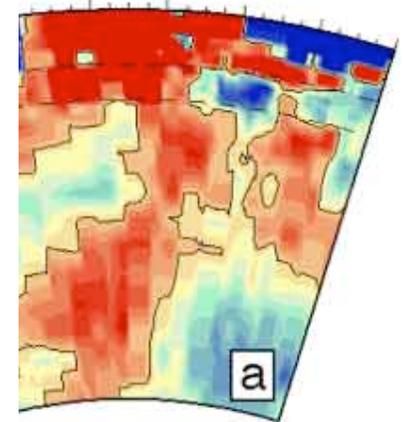
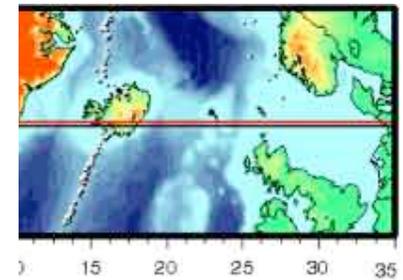
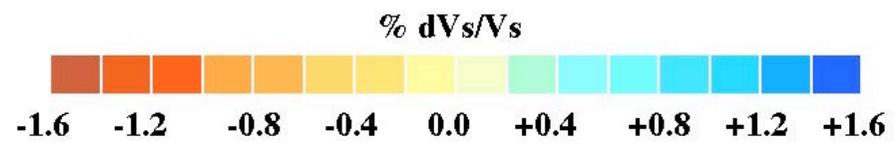
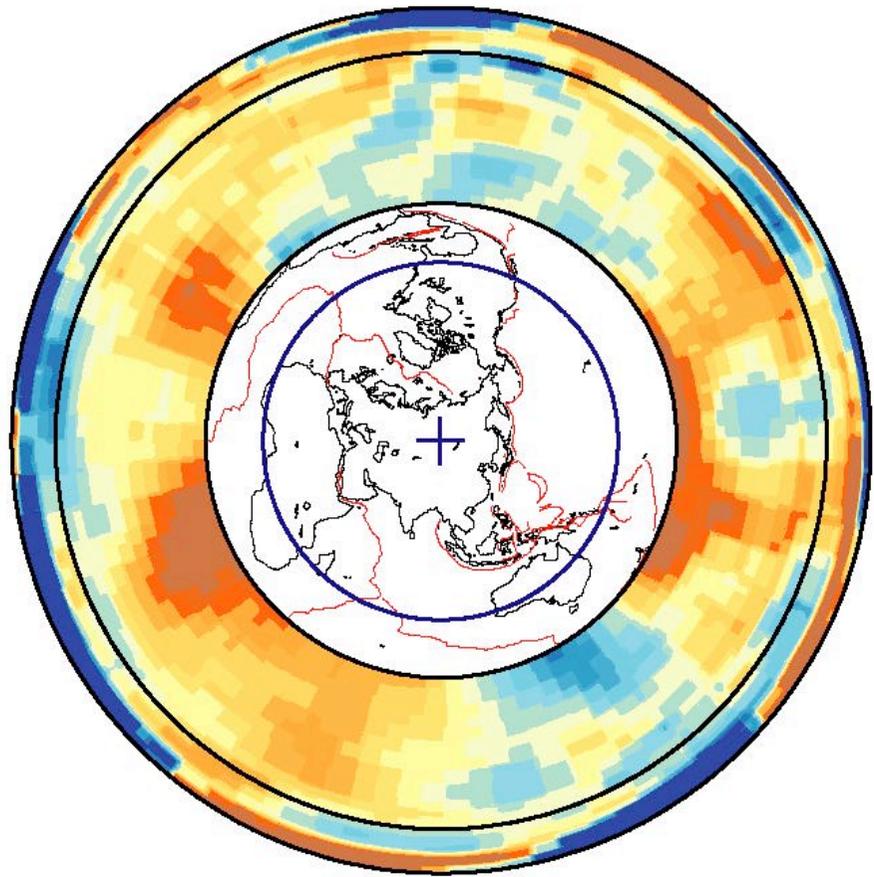


Laterally heterogeneous

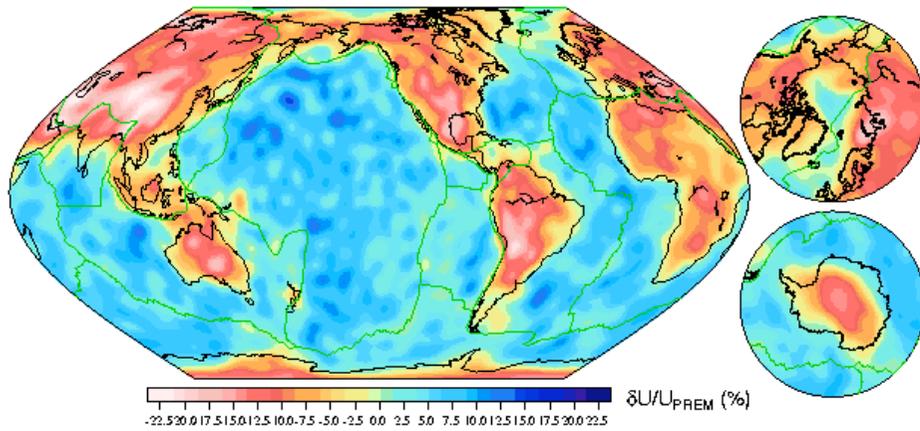
D'après Chaljub et Vilotte, 1999



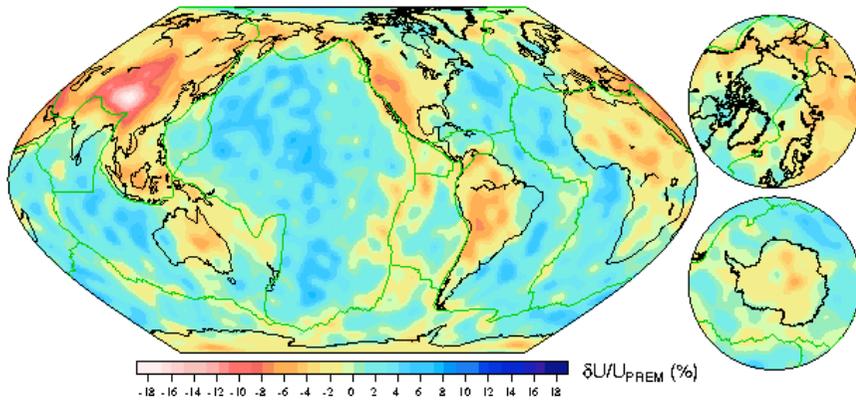
SB4L18



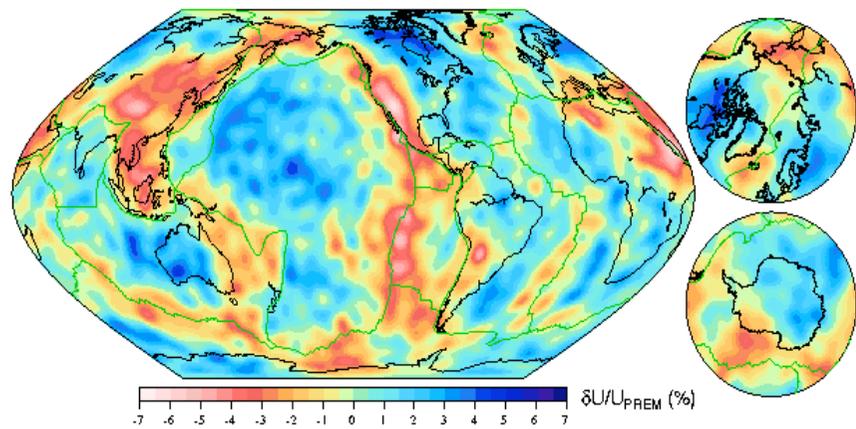
Vitesse des ondes de Love



$T=40$ s

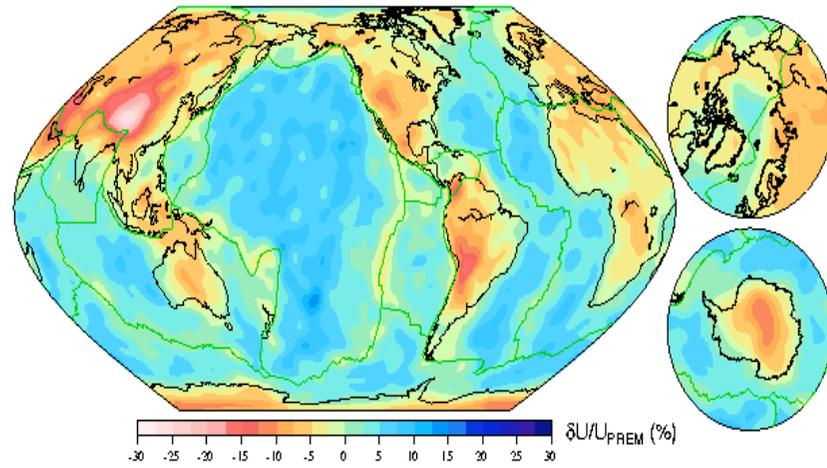


$T=70$ s

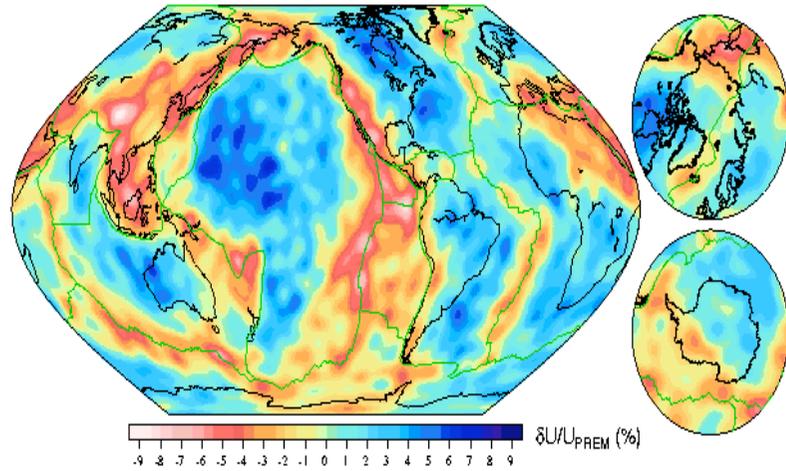


$T=150$ s

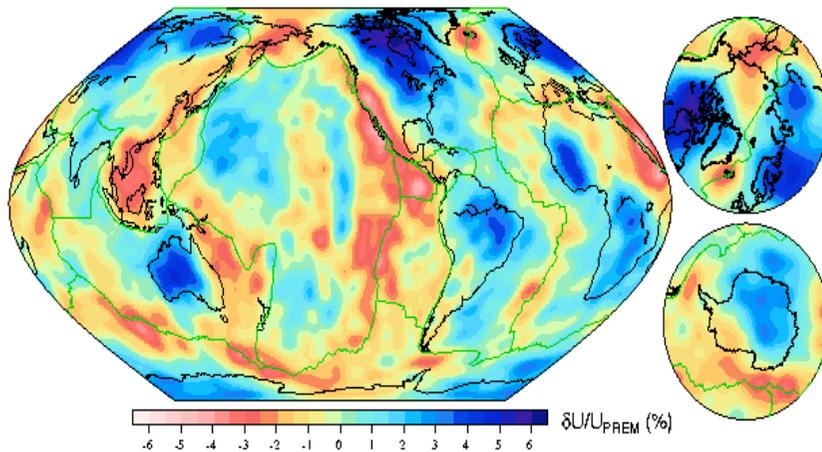
Vitesse des ondes de Rayleigh



$T=40s$

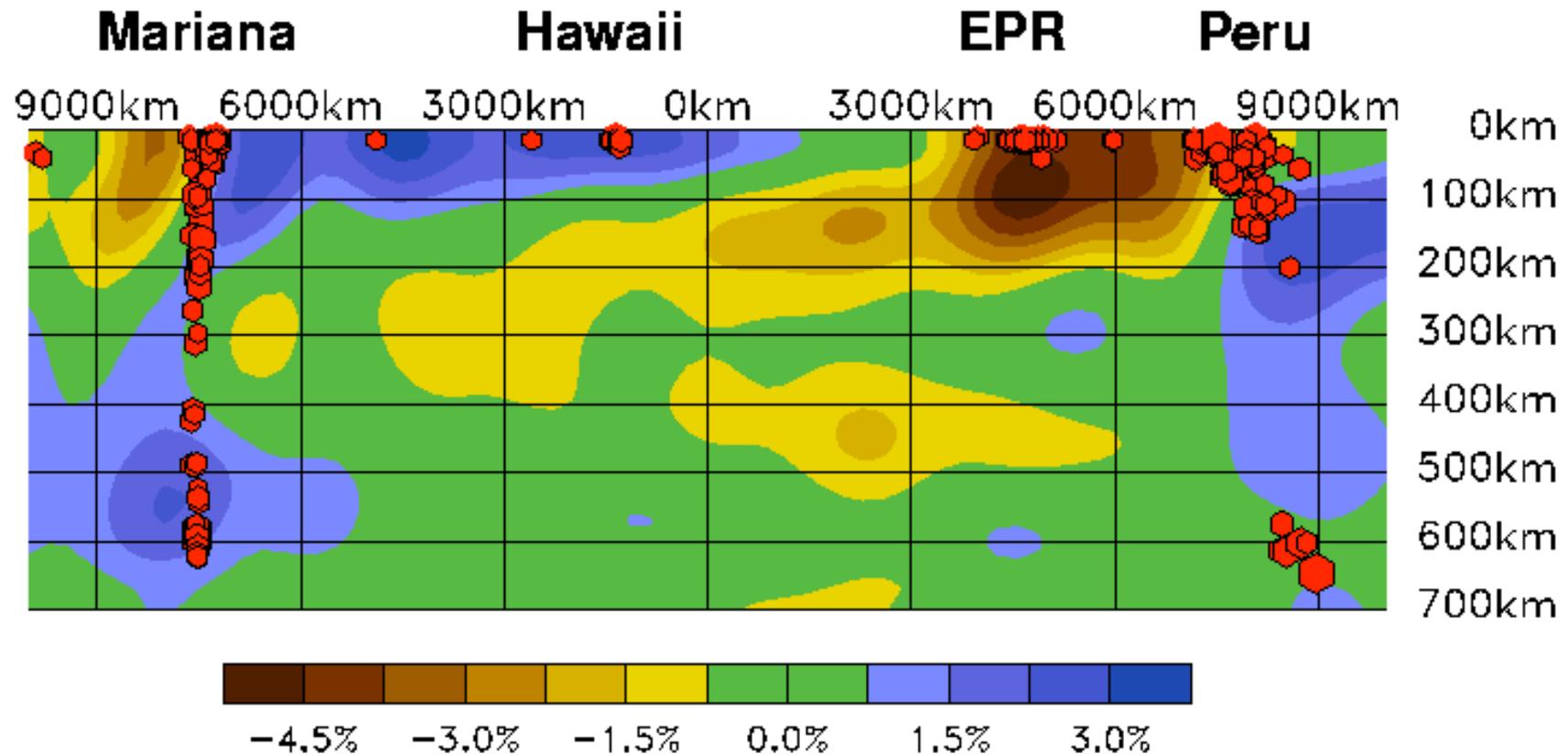


$T=70s$



$T=150s$

The oceanic lithosphere and asthenosphere of the Pacific



SB4L18-Upper Mantle

