



المدرسة الوطنية للمهندسين بتونس
école nationale d'ingénieurs de Tunisie

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

présentée par

Moncef MAHJOUB

pour l'obtention du titre de

Docteur en Mathématiques Appliquées

Intitulée :

**Approximation harmonique dans une couronne
et applications à la résolution numérique
de quelques problèmes inverses**

Soutenue le 02-02-2008 devant le jury composé de :

Mme	Amel BEN ABDA,	Présidente
Mrs	Tuong HA-DUONG,	Rapporteur
	Frank WIELONSKY,	Rapporteur
	Slim CHAABANE,	Membre
	Mohamed JAOUA,	Directeur de Thèse
Mme	Juliette LEBLOND,	Directeur de Thèse

REMERCIEMENTS

En achevant la rédaction de ce manuscrit, j'ai eu besoin de cet espace pour m'adresser aux personnes qui de près ou de loin, participés à l'aboutissement de la thèse. C'est cependant, parceque toutes les personnes cités ici ont apporté une contribution que je voulais leur rendre hommage et leur témoigner ma reconnaissance.

Je tiens à remercier chaleureusement Madame Amel Ben Abda et Monsieur Mohamed Jaoua pour m'avoir accueilli au sein du laboratoire LAMSIN, qui ont successivement dirigé mes travaux de DEA et de thèse. Je tiens aussi à remercier Madame Juliette Leblond, directeur de recherche à l'INRIA Sophia Antipolis, pour avoir accepté de co-diriger ma thèse et pour m'avoir accueilli chaleureusement au sein de son équipe de recherche à l'INRIA Sophia Antipolis, projet APICS, lors de plusieurs séjours scientifiques. Je les remercie tous les trois, pour leur enthousiasme, leur disponibilité et leur confiance en mes compétences pour mener à bien ces travaux et surtout pour les nombreuses opportunités qu'ils m'ont offert de faire connaître mes travaux en m'encourageant à participer à de nombreuses conférences.

Je souhaite remercier sincèrement chacun des membres du jury. Je remercie Madame Amel Ben Abda, professeur à l'ENIT, pour avoir accepté de présider mon jury de thèse et pour l'intérêt qu'elle a manifesté à mes travaux et pour les perspectives enrichissantes qu'elle a proposées. Je remercie Monsieur le professeur Tuong Ha Duong pour avoir accepté d'être rapporteur de cette thèse, pour son vif intérêt pour mes travaux. Je remercie Monsieur le professeur Franck Wielonsky d'avoir accepté d'être rapporteur de cette thèse, de son intérêt pour mes travaux et de ses commentaires pertinents et constructifs sur ce manuscrit. Je voudrais remercier Monsieur Slim Chaabane, Maître de conférence à la Faculté des Sciences de Sfax pour avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse. Je voudrais remercier tout particulièrement Monsieur le professeur Jonathan R. Partington de l'université de Leeds, pour la part importante qu'il a prise dans les travaux présentés ici, lors de nos nombreuses rencontres, et de ses remarques et suggestions pertinentes qui ont permis d'enrichir ce manuscrit et d'en étendre les applications.

Je remercie aussi chaleureusement Monsieur Jean-Paul Marmorat, directeur de recherche au CMA de l'Ecole des Mines de Paris Sophia Antipolis, de l'enthousiasme avec lequel il a partagé son expertise de Matlab et contribué à la partie concernant la programmation numérique. Je le remercie pour sa disponibilité et pour son amitié.

De nombreuses autres personnes ont participé à l'aboutissement des ces travaux de recherche. J'espère de ne pas avoir oublié personne et je prie, d'avance, ceux et celles qui ne sont pas cités ici, de bien vouloir m'en excuser.

Un laboratoire de recherche de modélisation mathématiques et numérique dans les sciences de l'ingénieur "LAMSIN" ne serait rien sans une bonne équipe de recherche. J'adresse ici mes remerciements sincères à tous les membres de "LAMSIN", où j'ai eu la chance et l'immense plaisir de partager ma demeure avec eux. Qu'ils sachent la profonde affection que je porte à chacun d'entre eux et les sentiments sincères que m'inspire le souvenir de tout ce que nous avons partagé et de tout ce qu'ils m'ont apportés.

Je remercie Mme Anissa Marco, Aziza Faidi, Chiheb Zarrouk, Aida Charaabi et Raoudha Jelassi, nos assistants du laboratoire, pour leur disponibilité et leur gentillesse. Ce n'est pas seulement pour leur encouragement permanent, leurs bonne humeur ou leur efficacité que je voulais les remercier ici mais aussi pour leur affection envers tous les doctorants au

"LAMSIN" et pour l'attention avec laquelle ils nous suivent tout au long de nos années de thèse.

Je voudrais remercier ici l'ensemble des chercheurs et des personnels des différents départements de l'INRIA Sophia Antipolis pour m'avoir accueilli chaleureusement lors de nos nombreuses rencontres dans le cadre du projet "APICS". Je les remercie pour leur disponibilité et pour avoir toujours essayé de répondre à mes questions.

D'autres personnes ont participé à la l'écriture de ce manuscrit. Je remercie mes belles sœurs Wided et Asma pour toutes les discussions linguistique que nous avons eu pour rendre la lecture de ce manuscrit agréable.

Mes sincères remerciements vont tous à mes collègues et amis de l'Institut d'Informatique et de Multimédia de Gabès ainsi que mes chers amis, Youssef Othmani, Hatem Maajouli, Belgacem Ghribi, Hechmi Hattab, Chokri El Hechmi, Samir Bou Ali, Chokri Dakhli, Chakib Ichi, Hichem Mirghmi, Kmais Ghali, Anis Bacha . . . , qui m'ont apporté un soutien moral et matériel tout le long de cette thèse.

Enfin, je remercie mes parents, ma femme, mon frère et ma sœur, qui ont fait preuve de beaucoup de courage et de patience. Je leur dédie ce mémoire.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	3
1 Motivation et contexte bibliographique	9
1.1 MOTIVATION DU PROBLÈME	9
1.2 LE PROBLÈME INVERSE DE CORROSION	10
1.3 LE PROBLÈME EXTRÊMAL BORNÉ (BEP)	15
1.4 APPLICATION À QUELQUES PROBLÈMES INVERSES	19
1.4.1 Identification de fissures courbe	19
1.4.2 Identification de sources dipolaires	21
I Technique d'approximation harmonique : Problème Extremal Borné	23
2 Problème extremal borné dans une couronne	25
2.1 ESPACE DE HARDY DE LA COURONNE	25
2.1.1 Notations	25
2.1.2 Définitions et propriétés	26
2.2 LES PROBLÈMES EXTRÊMAUX BORNÉS DANS $H^2(G)$	29
2.2.1 Formulation du problème	29
2.2.2 Procédure de calcul de la solution	32
2.3 CONTINUITÉ DE LA SOLUTION PAR RAPPORT AUX DONNÉES	36
2.4 DISCUSSION	38
3 (BEP) dans les espaces de Hardy–Sobolev	41
3.1 INTRODUCTION	41
3.2 PROBLÈME EXTRÊMAL BORNÉ DANS $H^{m,2}(G)$	42
3.3 EXISTENCE ET UNICITÉ DE LA SOLUTION	43
3.4 CARACTÉRISATION DE LA SOLUTION	43
3.5 CONTINUITÉ DE LA SOLUTION PAR RAPPORT AUX DONNÉES	53
3.6 DISCUSSION	54

II	Application de la technique au problème de corrosion : Stabilité et Robustesse	57
4	Stabilité pour un problème inverse de corrosion	59
4.1	INTRODUCTION	59
4.2	FORMULATION DU PROBLÈME	59
4.2.1	Résultats classiques pour le problème direct	60
4.2.2	Adaptation du (BEP) au problème inverse	62
4.3	RÉSULTATS DE STABILITÉ GLOBALE	64
4.3.1	Espaces de Hardy pondérés	64
4.3.2	Estimations en norme dans les espaces de Hardy pondérés	65
4.3.3	Propriétés de stabilité pour le problème inverse	69
4.4	DISCUSSION	72
5	Algorithmes robustes d'identification	75
5.1	INTRODUCTION	75
5.2	DÉTERMINATION DE LA BORNE RÉELLE	76
5.3	ALGORITHMES D'IDENTIFICATION	79
5.3.1	Algorithme d'ordre zéro : (\mathbf{A}_0)	79
5.3.2	Algorithme d'ordre m : (\mathbf{A}_m)	79
5.4	DISCUSSION	82
III	Validation numérique. Résolution numérique de quelques problèmes inverses géométriques	85
6	Résolution numériques du BEP et application au coefficient de corrosion	87
6.1	INTRODUCTION	87
6.2	RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DU PROBLÈME (BEP)	87
6.3	ETUDE POUR LE CAS DES DONNÉES ANALYTIQUES	90
6.3.1	Sensibilité selon la contrainte M	90
6.3.2	Sensibilité à la régularité de la solution	92
6.3.3	Sensibilité à la quantité de données et à leur emplacement	93
6.3.4	Sensibilité à la singularité	95
6.4	SENSIBILITÉ AU BRUIT	95
6.5	IDENTIFICATION DE CORROSION À PARTIR DE DONNÉES INCOMPLÈTES	98
7	Autres applications de l'approximation harmonique	105
7.1	IDENTIFICATION DE FISSURES COURBES À PARTIR DES DONNÉES COMPLÈTES	105
7.2	LOCALISATION DE POINTS SOURCES	108

Table des figures

1.1	Pipeline pour acheminer le pétrole.	9
1.2	Pipeline endommagé.	10
1.3	Inspection par la tomographie par impédance électrique (TIE)	10
1.4	Section plane d'un tube.	12
1.5	Comportement erratique sur la partie inconnue de données.	16
1.6	Influence du choix M sur le comportement de la solution sur J	18
1.7	Pipeline fissuré.	19
1.8	Couronne divisée.	20
4.1	$e_p, Kp/ \log \varepsilon , p = 2, \infty$	72
6.1	M en fonction de λ	88
6.2	Détermination de N avec $f(z) = \exp(z)$ et $I = \mathbb{T}$	89
6.3	À gauche λ en fonction de r et à droite M en fonction de r ($f(z) = \exp(z)$, $I = \mathbb{T}$)	89
6.4	Approximants sur \mathbb{T} et $s\mathbb{T}$ pour $\frac{M}{M_0} = \{0.9, 2\}$ avec $I = (e^{-i3\pi/4}, e^{i3\pi/4})$	91
6.5	Fonction τ pour des données analytiques (à gauche) et des données bruitées (à droite) avec $I = (e^{-i3\pi/4}, e^{i3\pi/4})$	92
6.6	Approximants sur \mathbb{T} et sur $s\mathbb{T}$ pour $M \simeq M_0$	92
6.7	Approximants sur \mathbb{T} et sur $s\mathbb{T}$ pour $M \simeq M_0$ d'ordres 1 et 2.	93
6.8	Solutions reconstruites et erreurs par rapport à la quantité de données fournies	94
6.9	Reconstructions en fonction de la proportion de noeuds	94
6.10	Reconstruction de l'extension pour pole $\in \{0.55, 0.1\}$	96
6.11	Erreurs L^2 et L^∞ en fonction de δ	96
6.12	Erreurs L^2 et L^∞ en fonction du bruit.	98
6.13	Reconstruction de l'extension pour des données bruitées	98
6.14	Reconstruction de la dérivée normale sur $s\mathbb{T}$	99
6.15	Reconstruction de $\partial_\nu u$ et q sur $s\mathbb{T}$: ordre 1 et 2.	100
6.16	Reconstruction de la dérivée normale et q sur $s\mathbb{T}$ à l'ordre 1 et 2.	101
6.17	Tracé des erreurs en fonction de la quantité de données (à gauche) et de ρ en fonction de $\delta := \frac{1}{s}d(\text{pole}, s\mathbb{T})$ pour 1%, 5% et 10% d'erreur (à droite).	101

6.18	Tracé des erreurs en fonction de ρ pour des données bruitées (à gauche) et de ρ en fonction du bruit : 5%, 7% et 10% d'erreur (à droite).	102
7.1	Subdivision de $G \setminus \sigma$.	106
7.2	Reconstruction du saut $[u]$ (à gauche) et de la fissure (à droite).	108
7.3	Reconstruction à partir de données bruitées : 1%, 5% et 10%.	109
7.4	Le domaine avec les lignes de niveau pour u (problem direct); Solution du problème direct (PN).	112
7.5	La partie réelle de l'extension analytique sur la couche \mathbb{T}	112
7.6	Erreurs en fonction de la position de la source.	113
7.7	Erreurs en fonction de la conductivité σ_s pour une source à 97% du rayon $r = 1$	113
7.8	$m = 1, 2, 3, 4$.	113
7.9	Les erreurs sur les sources et sur les moments en fonction du bruit.	114

Introduction

Dans cette thèse nous nous intéressons à un problème de Cauchy consistant à retrouver les données de Neumann et de Dirichlet sur la partie intérieure de la frontière d'un domaine annulaire, à partir de mesures effectuées sur une partie de la frontière externe. Dans le cadre de ce travail les mesures effectuées sont de nature électrostatique et thermique et sont régies par l'équation de Laplace en dimension deux (2D) dans un anneau. Les données ainsi complétées peuvent être utiles par elles-mêmes dans certaines applications motivées par le contrôle non destructif des pièces tubulaires en tomographie par impédance électrique où la partie intérieure étant inaccessible aux mesures, comme de la science médicale. Des précisions et des références supplémentaires sur le contexte de l'identification de corrosion et d'autres applications géométriques sont rassemblées dans le chapitre 1.

On suppose que l'on dispose de la trace, sur une partie de la frontière, d'une solution (potentiel électrique) u de l'équation de Laplace dans une couronne G , ainsi que la donnée d'une condition de Neumann (flux de courant) sur une partie de la frontière de ∂G . La résolution effective de ce problème inverse est essentiellement consacrée à étendre ces données sur la totalité du domaine, permettant de déterminer des dégâts de la corrosion sur la partie inaccessible de la structure. L'identification de la corrosion se ramène dans le cas le plus simple à la reconstruction de l'impédance d'un problème de Robin, qui est le quotient de ces données étendues.

Le problème de Cauchy ainsi décrit est bien connu pour être très instable du fait de l'absence de solution si les données ne sont pas compatibles, mais surtout du fait de son extrême sensibilité aux bruits de mesure. Ce phénomène est bien connu depuis Hadamard [72]. En fait, l'existence d'une telle solution n'est pas toujours assurée pour un couple de données quelconque, et même si elle existe, elle ne dépend pas continûment des données, puisqu'on peut approcher ces dernières – si elles sont bruitées donc incompatibles – d'aussi près que l'on veut par des données compatibles, à condition d'accepter des comportements violemment perturbés sur la partie inconnue de la frontière. Il nécessite alors une régularisation appropriée.

Dans ce contexte bidimensionnel, nous exploitons les liens entre les fonctions harmoniques et analytiques pour formuler ce problème en termes de reconstruction d'une fonction analytique dans la couronne, depuis ses valeurs sur une partie de la frontière. Il est ainsi possible d'exprimer ces problèmes de Laplacien comme des questions de meilleure

approximation dans les classes de Hardy $H^2(G)$ (ensemble de fonctions analytiques dans G et bornées en norme $L^2(\partial G)$). La stabilisation du processus a recours aux problèmes extrémaux bornés ou (BEP), introduits par Baratchart et al. dans [20]. Cette stabilisation est obtenue en imposant une borne sur les données étendues, le problème à résoudre étant alors bien posé.

La solution u du problème direct associée à ce problème inverse étant harmonique, grâce aux équations de Cauchy-Riemann il existe une fonction $f = u + iv$ analytique dont u est la partie réelle et v est le conjugué harmonique de u . Sous des hypothèses appropriées de régularités des conditions aux bords, la fonction f est de plus bornée en norme L^2 , elle appartient alors aux classes de Hardy $H^2(G)$. On est ainsi ramené à l'identification de cette fonction f depuis sa trace sur la partie accessible de la frontière dans la classe de Hardy $H^2(G)$.

Ainsi, la résolution du problème d'extension de données incomplètes peut se poser comme une première étape d'algorithme d'identification nécessitant des données frontières complètes. Cette étape fait l'objet de la première partie de ce manuscrit, constituée des chapitres 2 et 3. Dans le chapitre 2 nous nous sommes intéressés à établir des résultats d'existence et d'unicité de l'extension, la solution d'un problème (BEP), dans les classes de Hardy H^2 dans un domaine doublement connexe, pouvant être ramené par transformation conforme à une couronne G (naturellement l'application conforme est connue). Nous présentons ainsi, des formules explicites lorsque les données sont disponibles sur toute la frontière externe de la couronne et des formules implicites lorsqu'elles ne sont connues que sur une partie de la frontière extérieure. Ces formules reposent sur la résolution d'une équation spectrale pour l'opérateur de Toeplitz. Une fois l'extension est déterminée, nous avons pensé à la question de robustesse de ce schéma d'approximation. Le résultat de continuité établi dans le théorème 2.4 montre que le schéma de résolution est à peine suffisant pour assurer la continuité de la solution par rapport aux données, on n'espère pas plus que la convergence faible sur la partie des données manquantes. En visant à assurer la convergence forte des données étendues, nous construisons des extensions analytiques pour lesquels le cadre fonctionnel approprié est celui des espaces de Hardy-Sobolev $H^{m,2}(G)$ d'ordre $m \in \mathbb{N}^*$ (ensemble de fonctions analytiques et bornées en norme L^2 ainsi que ses dérivées d'ordre m). Cette étude nous donne des extensions lisses ainsi que ses dérivées d'ordre élevé permettant la convergence forte des données étendues sur la partie inconnue des données (théorème 3.6).

La deuxième partie de ce manuscrit, constituée des chapitres 4 et 5, est dédiée à l'étude de la stabilité du problème inverse d'identification du coefficient de Robin et à la construction d'une famille d'algorithmes d'identification robuste dans les espaces de Hardy-Sobolev $H^{m,2}(G)$. Dans le chapitre 4, nous exploitons la technique d'approximation harmonique développée dans la première partie pour établir des résultats de contrôle sur le coefficient de Robin, qui est le quotient des données étendues. La question à laquelle nous sommes

intéressés est dans quelle mesure le coefficient de Robin soit continue à une perturbation près. Pour le cas d'un domaine simplement connexe, pouvant se ramener au disque unité par une transformation conforme connue, Chaabane et al. ont prouvé des résultats de stabilité globale de type log-log ([34, 33]). En se basant sur des résultats de stabilité établis pour l'extension, nous établissons des similaires en norme L^2 et L^∞ pour le cas des domaines doublement connexes avec une amélioration de type un seul logarithme. Ces résultats ont fait l'objet du papier [74].

La question de résolution du problème inverse consistant à reconstruire le coefficient de Robin a été l'axe principal du chapitre 5. Ce coefficient est déterminé par le quotient des données étendues qui sont déterminées par la solution du problème extremal borné et sa dérivée normale. Mais la résolution d'un (BEP) ne règle cependant pas tout, dans la mesure où la borne imposée sur les données étendues est généralement saturée par la solution, ce qui rend la contrainte une inconnue du problème. Il est donc utile de donner une méthode permettant de déterminer cette contrainte. Une méthode de "validation croisée" avait été proposée et testée avec succès dans le cas des domaines simplement connexes [35]. Cette méthode nécessite qu'une partie des données disponibles soit dévoluee au calcul de la borne. Nous proposons ici une méthode alternative qui tient compte de la totalité des données disponibles. Nous avons ainsi mis au point un algorithme tenant compte de la plus grande rareté des données disponibles dans le cas multi-connexe (d'ordre zéro) et de l'appliquer aux dérivées successives des données disponibles, ou bien à l'étendre, pour des données régulières non analytiques, dans les espaces de Hardy-Sobolev d'ordre $m \geq 1$. Les résultats théoriques ont prouvé que ces algorithmes sont d'autant plus robustes vis à vis des erreurs de mesure que leur ordre est élevé.

La troisième partie de ce travail est consacrée à illustrer numériquement la technique d'approximation harmonique pour la reconstruction de défauts géométriques portant sur le problème de Robin, sur la localisation de fissures internes ou bien sur la détection de sources ponctuelles dans des disques superposés depuis des mesures frontières d'une solution du Laplacien. Dans le chapitre 6, nous présenterons une étude numérique des algorithmes mis au point au chapitre 5 pour la reconstruction du coefficient de Robin en tenant compte de différents arguments intervenant dans la résolution. Nous mettons en évidence l'influence du choix de la contrainte imposée sur la nature de la reconstruction et sa sensibilité par rapport à la régularité de donnée, à la quantité de données disponibles et aux bruit attachés aux mesures. D'autres problèmes inverses surviennent quant à eux dans de multiples applications. Dans le chapitre 7, nous considérerons comme exemples la détection de fissures courbes prévenant du bouchage des tubes qui mettrait en contact le fluide primaire et le fluide secondaire dans le tube. Dans cette application, nous considérons une section plane du tube et nous supposons que l'on dispose de mesures sur la totalité de la frontière de la couronne G et les étendres dans tout le domaine pour identifier et localiser les fissures portées par un cercle intérieur de G . Une autre application

potentielle importante se situe en électro-encéphalographie, où il s'agit de détecter par exemple des centres d'épilepsie dans le cerveau à partir de mesures effectuées sur le scalp, qu'il convient d'étendre jusqu'à la couche la plus interne avant d'en faire usage dans un algorithme d'identification. Dans cette application on considère le modèle bidimensionnel qui permet de ramener le problème dans une famille de disques, où étendre des données (2D) jusqu'à la couche la plus interne peut surgir comme une étape préliminaire en appliquant l'approche d'approximation harmonique, avant le recouvrement des singularités qui surgit comme la deuxième étape de la résolution par l'outil d'approximation méromorphe ou rationnelle [15, 75, 19].

CHAPITRE 1

Motivation et contexte bibliographique

1.1 MOTIVATION DU PROBLÈME

Dans le monde entier, des millions de miles de pipelines sont utilisés pour transporter de l'eau, du gaz et du pétrole sous terre ou sous mer (à partir des champs pétroliers situés en pleine mer) ou même à la surface de la terre, depuis leurs sources émettrices jusqu'aux usines de traitement ou aux consommateurs (figure 1.1).



FIG. 1.1 – Pipeline pour acheminer le pétrole.

Les tubes sont susceptibles d'être attaqués par un phénomène de corrosion interne et externe, de fissuration ou bien de faille de fabrication. La corrosion interne et externe est la cause principale de fuites et de ruptures des canalisations, se traduisant parfois par des dégâts catastrophiques (dégâts humains, pollution du milieu naturel, frais supplémentaires de réparation, arrêt prolongé du pompage, etc.). Si un pipeline porteur d'eau est affecté d'un éclatement de fuite, au moins cela ne nuit pas l'environnement. Cependant, si une fuite de pipeline de pétrole ou chimique, cela peut être un désastre environnemental (figure 1.2).

La corrosion interne est provoquée le plus souvent par des attaques chimique de la surface de la conduite. Ce type de corrosion est principalement favorisé par la présence de sulfure d'hydrogène (HS_2) et de dioxyde de carbone (CO_2) dans le gaz et la présence de bactéries sulfato-réductrices (BSR) dans le cas des oléoducs. La corrosion externe est



FIG. 1.2 – Pipeline endommagé.

dans la majorité des cas le résultat des phénomènes de type électrochimique provoqués des défauts dans le revêtement du tube, qui laisse des parties de celui ci en contact avec l'air.

L'idée de la détection de corrosion à partir des mesures frontière sur-déterminées surgit à partir de la technique "Tomographie par impédance électrique (TIE)" (voir Kaup et al. [67]). Elle est actuellement la réponse la plus économique et la plus adaptée à l'identification et la localisation des corrosions internes dans les tubes. Le principe consiste à disposer des électrodes sur la partie accessible du tube, on applique un courant sinusoïdal entre deux électrodes et on mesure les potentiels engendrés aux autres électrodes. On répète ce processus pour toutes les combinaisons possibles d'électrodes (figure 1.3). Pour plus de détails au sujet de cette technique nous renvoyons le lecteur à Colton et al. [42].

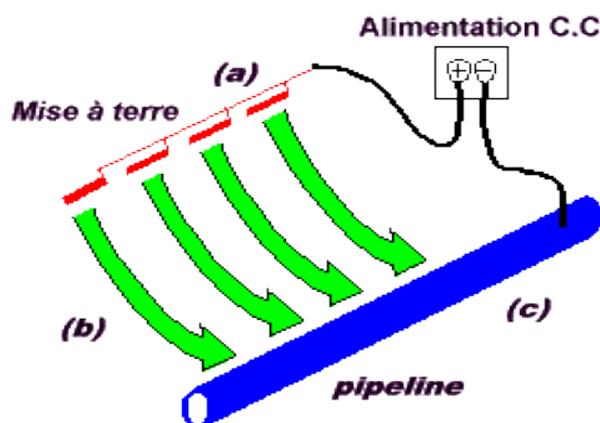


FIG. 1.3 – Inspection par la tomographie par impédance électrique (TIE)

1.2 LE PROBLÈME INVERSE DE CORROSION

Dans le présent travail, nous avons essayé d'exploiter une méthode d'approximation constructive des fonctions pour identifier l'endroit de corrosion localisé dans la peau in-

terne d'un tube. Le modèle qu'on a adopté est basé sur les différentes études faites sur le sujet. En effet, les attaques chimique de la surface de la conduite est modélisé par une couche mince rapidement oscillante dans la limite est divergente et l'épaisseur de cette couche est presque nulle. Le potentiel électrostatique u vérifie l'équation suivante :

$$\Delta u = 0 \quad \text{dans le tube,}$$

et donc u est harmonique dans le domaine. D'autre part, Vogelius et Xu [87] ont signalés que l'étude de processus de corrosions peut être basé sur la loi de Faraday qui montre que la mesure de corrosion est proportionnelle au flux de courant imposé, modélisé par la relation

$$\partial_\nu u = \lambda_i (e^{\alpha u} - e^{-(1-\alpha)u})$$

sur la ou les parties corrodées γ_i , $i = 1, \dots, m$, du domaine. Le paramètre λ représente le coefficient d'échange de la densité de courant qui dépend de la concentration près de la l'interface de la composition du métal et $\alpha \in (0, 1)$ est le paramètre cinétique appelé coefficient de transfert, il dépend des constituants du système électrochimique.

La linéarisation des conditions aux bords étant assurée par le développement limité de $\partial_\nu u$ qui se comporte en $\lambda_i u$ au voisinage de zéro sur chaque γ_i , $i = 1, \dots, m$ (voir [87]) :

$$\lambda_i \left(u + \frac{2\alpha - 1}{2} u^2 + \dots \right) \sim \lambda_i u,$$

et donc sur la partie γ_i , infectée par la corrosion, on obtient la condition au limite suivante :

$$\partial_\nu u = \lambda_i u.$$

Le problème inverse que nous considérons alors consiste en la détermination des dégâts de la corrosion sur une partie du bord inaccessible du tube en identifiant les paramètres λ_i , $i = 1, \dots, m$, connaissant quelques mesures électriques sur la partie accessible. Pour introduire notre problème mathématiquement, on suppose que le tube est infinie de sorte que le potentiel électrique ne dépend pas de la coordonnée longitudinale. Le domaine d'étude typique qu'on va considérer dans ce cas est donc une couronne obtenue par une section plane du tube contenant une partie de la frontière intérieure corrodée (figure 1.4).

On considère une couronne $G = \mathbb{D} \setminus \overline{s\mathbb{D}}$ qui va être inspecter, où \mathbb{D} représente le disque unité et $s\mathbb{D}$ est le disque de centre l'origine et de rayon $s \in (0, 1)$. On définit le cercle unité $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$ tel que $\partial G = \mathbb{T} \cup s\mathbb{T}$. On suppose que la surface $s\mathbb{T}$ inaccessible contient une ou plusieurs parties corrodées γ_i , $i = 1, \dots, m$. Les parties γ_i sont disjointes et les coefficients d'échanges de la densité de courant associés, sont $\lambda_i \geq 0$, non identiquement nuls. On suppose que chaque $\lambda_i \in \mathcal{C}^0(\gamma_i)$. Soit

$$q(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \chi_i(x), \quad x \in J,$$

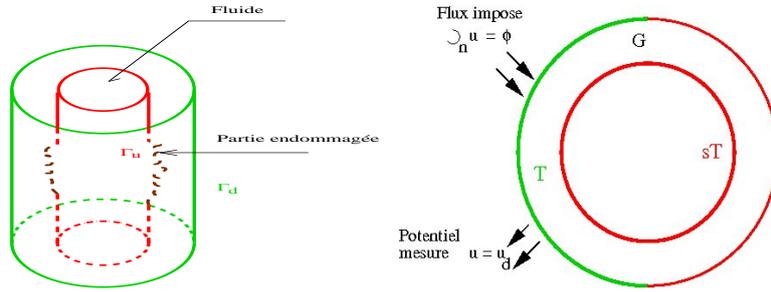


FIG. 1.4 – Section plane d'un tube.

où χ_i représente la fonction caractéristique sur γ_i et J est la partie inaccessible du bord de la couronne ∂G .

Différents modèles de corrosion ont été abordés dans la littérature, voir par exemple les travaux de Kaup et Santosa [66], Vogelius et Xu [99], Banks et al. [14], Inglese [62]. Dans ce travail, nous avons adopté le modèle de Santosa et al. [87]. Le champ potentiel u généré par le champ u_b appliqué à $I := \partial G \setminus J$, obtenu en imposant un flux de courant Φ sur I , satisfait

$$\begin{cases} \Delta u & = 0 & \text{dans } G \\ -\partial_\nu u + qu & = 0 & \text{sur } J \\ u & = u_b & \text{sur } I, \end{cases}$$

où ν est la normale unitaire sortante de G sur \mathbb{T} et entrante sur $s\mathbb{T}$. Puisque u_b peut changer de signe, le champ u peut s'annuler sur J et donc, la formule (1.2.1) peut ne pas avoir un sens ou présente un comportement instable,

$$q = \frac{\partial_\nu u}{u}. \quad (1.2.1)$$

La condition de compatibilité des données de Cauchy décrite dans [97] par Yang, Chouli et Cheng, justifie la positivité de u_b pour l'équation de la chaleur, qui n'est le cas pour le modèle électrostatique pour détecter la corrosion. Dans notre travail, nous avons donné un sens à la formule (1.2.1) en assurant la positivité de u_b sur la partie inaccessible J sous la condition d'imposer un flux $\Phi \in L^2(I)$ positif non identiquement nul et de supposer q dans la classe d'admissibilité suivante :

$$\mathcal{Q}^0 = \{q \in \mathcal{C}^0(J); |q(x)| \leq \bar{c} \text{ et } q(x) \geq \underline{c} \forall x \in J\},$$

pour des constantes $\underline{c}, \bar{c} > 0$ fixées. Sous ces conditions, on prouve aussi que le problème direct admet une unique solution u appartient à l'espace de Sobolev $W^{3/2,2}(G)$ et qu'il existe une constante $\kappa > 0$ tel que $\|u\|_{W^{3/2,2}(G)} \leq \kappa$. Ces résultats représentent une extension de ceux établis dans [34] par Chaabane et al. dans le cas d'un domaine simplement connexe transformé au disque unité via une transformation conforme connue.

Mais la difficulté du problème inverse considéré, qui consiste à localiser la corrosion ou encore à identifier le paramètre de Robin q , vient du fait qu'il est mal posé au sens de Hadamard [72] et fortement non-linéaire. En effet, il s'agit de résoudre un problème de Cauchy qui risque de ne pas avoir de solution si les données ne sont pas compatibles, et surtout du fait de son extrême sensibilité aux bruits de mesure. La plupart des techniques de détection utilise des méthodes itératives comme l'algorithme des moindres carrés récursifs ou des schémas itératifs de type Newton. Toutes ces méthodes demandent des temps de calcul énormes pour obtenir une bonne approximation de la vraie solution et surtout ne convergent pas à coût sûr. Leur éventuelle convergence nécessite un bon choix de configuration initiale, proche de la configuration à trouver.

Dans la littérature, on trouve beaucoup d'auteurs qui se sont intéressés à résoudre ce problème. Inglese [62], Fasino et Inglese [50, 51] ont adopté le modèle linéaire de la corrosion, modélisée par Santosa et al. [87] en terme d'un coefficient q de type Robin dans la condition au limite. Le recouvrement de q a été achevé à partir du flux imposé et la trace de la solution u générée sur la partie de la frontière accessible. Ces auteurs ont proposés un schéma numérique pour approximer q pour des domaines minces et a été basé sur le développement en série de Fourier. Ces domaines épais ont causé une instabilité de l'approche numérique. Inglese [62] a démontré l'unicité du coefficient de Robin q , à partir de la température sur une partie du bord accessible, pour des coefficient q positifs de classe C_0^3 . Dans le cas thermique et le cas thermo-élastique, ce résultat a été amélioré par Chaabane et Jaoua [34] en 2-D (dans un domaine simplement connexe) pour des fonctions q continues et minorées par une certaine constante strictement négative et la partie du bord accessible soit un ensemble infini de point ayant un point d'accumulation appartenant au bord accessible. Ce résultat d'identifiabilité est conservé dans notre étude pour des domaines doublement connexe.

Kabanikhin et Karchevsky [64] ont résolu ce problème en minimisant la fonction L^2 -erreur de la trace sur la partie accessible du bord utilisant le processus du gradient itératif. Klibanov et Santosa [68] utilisent une méthode quasi-reversible pour résoudre le problème de Cauchy pour l'équation de Laplace et ils ont estimés la fonction erreur de cette méthode en utilisant les estimations de Carleman.

Slodička et Van Keer [90] ont prouvés un résultat d'identification basé sur la différence au sens de la norme L^2 sur la partie de la frontière inaccessible portant le support du coefficient q , entre la température extérieure et intérieure sur cette partie. Cette technique a été appliquée pour un problème parabolique non linéaire dans un travail de Slodička et Van Keer [91]. Dans [92], Slodička et Van Keer sont intéressés aussi à un même type de problème dans un domaine rectangulaire. Ils ont présentés un algorithme qui superpose le problème directe et le problème inverse pour prolonger la trace de la solution sur la partie inaccessible qui est développée en série de Fourier. Cette méthode est sensible à l'épaisseur du domaine.

Dans un récent travail, Louati [77] a proposé deux méthodes pour l'identification et la localisation des corrosions internes dans les pipelines. La première se base sur un algorithme non-itératif de type **MUSIC**¹, qui est basé sur la décomposition singulière de la matrice de données. La deuxième procédure d'identification est par l'analyse de vibration. Cette technique d'imagerie consiste à faire propager des ondes guidées ultrasoniques dans les parois des canalisations et à observer les réflexions provenant des défauts.

Chaabane et al. dans [32] ont proposés un algorithme d'identification basée sur la minimisation des fonctionnelles d'écart énergétiques, dite de Kohn et Vogelius développé par Chaabane et Jaoua [34], qui constitue une méthode de moindres carrés auto-régularisante. L'algorithme consiste, pour une impédance donnée, à résoudre deux problèmes aux limites de conditions aux limites Robin-Dirichlet et Robin-Neumann respectivement, dont les solutions coïncident pour l'impédance effective. Cette méthode lisse les éventuelles oscillations de l'impédance, qui peuvent renseigner sur les lieux de corrosion, mais pas encore d'évaluer avec précision son niveau si le coefficient est trop oscillant.

D'autres travaux s'intéressent à la détermination du coefficient de corrosion q en passant par une étape préliminaire qui consiste à compléter les données lacunaires dont on dispose : les mesures sont prises sur une partie seulement (celle qui est accessible) de la frontière, puisque la reconstruction de q nécessite à retrouver les données de Neumann et de Dirichlet sur la partie intérieure inaccessible, qui est le quotient de ces données étendues. Mais les données complètes ne dépendent pas continûment des données disponibles, et on peut approcher ces dernières - si elles sont bruitées donc incompatibles - d'aussi près que l'on veut par des données compatibles, à condition d'accepter des comportements complètement erratique sur la partie inconnue des données. Diverses techniques de complétion de données régularisante ont été développées. On citera notamment la méthode de régularisation évanescence introduite par Cimetière et al. [41] qui étudie un algorithme de moindres carrés dans l'ensemble des données compatibles, basée sur la régularisation de Tikhonov itéré [49, 82], le terme de régularisation est la distance entre deux solutions itérés successives, qui disparaît lorsque les données sont compatibles (c'est à dire non bruitées). Cette régularisation prouve une convergence forte de la solution sur la partie de la frontière accessible aux mesures, tandis que la convergence est faible sur l'autre partie inconnue. Le cas des données incompatibles reste le plus problématique dans le sens où la convergence forte n'est pas assurée.

Nous citons aussi, l'algorithme de directions alternées de Kozlov et al. [69] qui a été exploité par A. Ben Abda et al. [11] pour la résolution de divers problèmes inverses (reconstruction du champ de température dans la peau interne d'un tube, reconstruction d'un coefficient d'échange dans la loi de Fourier, detection de fissures d'interfaces obéissant à des conditions aux limites de type Robin). La méthode est basée sur la minimisation d'une

¹Multiple Signal Classification

fonctionnelle d'erreur en énergie, consiste à introduire deux champs u_1 et u_2 solutions de problèmes directs bien posés et à reformuler le problème via un problème de minimisation, qui à chaque fois que l'on dispose d'une « énergie » dans le problème posé, on construira une fonctionnelle d'erreur portant sur les champs u_1 et u_2 . C'est une méthode à caractère auto-régularisant et robuste. La robustesse de la méthode vis à vis du bruit de mesure constitue le point problématique.

Dans le même contexte et lorsque la frontière où les données sont manquantes est plate, le problème de complétion de données peut être interprété comme un problème de reconstruction d'une fonction à partir de ses moments (voir [61]).

On trouve aussi quelques résultats d'identification dans le cas non-linéaire dans les travaux de Choulli [40] et Alessandrini et Sincich [6, 7].

Dans le présent travail, nous allons donner une méthode d'identification de coefficient de Robin basée sur une technique de complétion de données régularisante non itérative, très peu coûteuse, et ne demande pas une résolution d'un problème direct. Cette approche de régularisation est basée sur la construction d'extensions analytiques, pour lesquels le cadre fonctionnel approprié est celui des espaces de Hardy de la couronne $H^2(G)$, qui est l'ensemble des fonctions analytiques dans G et bornées en norme $L^2(\partial G)$. Le principe est d'exploiter des propriétés classiques des fonctions harmoniques et analytiques (conjugaison harmonique, équation de Cauchy-Riemann) pour reformuler le problème inverse d'identification de q en termes de reconstruction d'une fonction analytique dans le domaine, depuis ses valeurs sur une partie de la frontière.

1.3 LE PROBLÈME EXTRÊMAL BORNÉ (BEP)

Avant de détailler les principales étapes de cette approche, nous signalons que Chaabane et Jaoua [34], Chaabane et al. [35] et Fellah [54] ont exploités cette technique pour la reconstruction de q dans le cas d'un domaine simplement connexe Ω , qui est transformé par une transformation conforme connues au disque unité. Fellah [54], s'est intéressé à ce problème de point de vu problème inverse géométrique où la partie du bord corrodée est inconnue et par suite l'application conforme transformant le disque unité \mathbb{D} en Ω n'est pas prédéfinie. Pour résoudre cette difficulté, elle prouve l'existence d'une transformation conforme, n'est pas prédéfinie sur la partie corrodée, qui transforme le domaine Ω en un domaine bien défini dont la partie inconnue s'est transformée en un segment d'extrémités connues. Ce dernier se transforme aussi en disque unité via une deuxième transformation conforme, et donc le problème inverse géométrique est transformé en un problème de prolongement d'une fonction, qui est la réciproque de la composé des deux dernières transformations conformes, connue seulement sur une partie du disque unité.

Rappelons le modèle mathématique adopté dans ce travail, qui consiste à imposer un flux Φ positif non identiquement nul et de générer le potentiel électrique sur le bord

accessible de la couronne pour identifier le paramètre de corrosion $q \in \mathcal{Q}^0$ tel que la solution u du problème

$$\begin{cases} \Delta u & = 0 & \text{dans } G \\ \partial_\nu u = \Phi & \text{sur } J \\ u & = u_b & \text{sur } I, \end{cases}$$

vérifie

$$-\partial_\nu u + qu = 0 \quad \text{sur } J.$$

D'après les équations de Cauchy-Riemann, on dispose sur le bord accessible de mesures de la fonction

$$f = u_b + i \int \Phi,$$

on obtient alors une extension de f sur \bar{G} , solution du problème de moindres carrés suivant :

$$(A) \begin{cases} \text{Trouver } g \in H^2(G) \text{ tel que} \\ \|g - f\|_{L^2(I)} = \inf_{h \in H^2(G)} \|h - f\|_{L^2(I)} \end{cases}$$

et telle que $u \simeq \text{Re } g$, c'est à dire $q \simeq -\frac{\partial_\theta \text{Im } g}{\text{Re } g}$. Ici, $H^2(G)$ est l'espace de Hardy d'ordre 2 des fonctions analytiques dans G et bornées sur ∂G (voir chapitre 2).

Lorsque la donnée f est la restriction d'une fonction de $H^2(G)$, on se réfère alors à un problème d'interpolation et l'extension dans G réalise l'unique solution du problème (A). Mais dans le cas pratique, les données sont attachées aux erreurs de mesure, ce qui nous fait sortir de l'espace $H^2(G)$ et donc les données ne sont plus la trace d'une fonction analytique, dans ce cas le problème (A) n'admet pas de solution, dans le sens où on peut approcher les données incomplètes sur la partie de la frontière accessible aux mesures au prix d'un comportement complètement erratique sur la partie inconnue (voir figure 1.5). Donc le problème reste toujours instable.

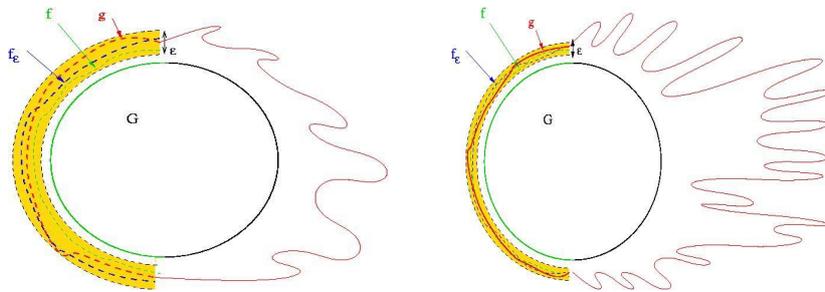


FIG. 1.5 – Comportement erratique sur la partie inconnue de données.

Pour maîtriser les instabilités, il a été proposé par Baratchart et al. dans [20] d'imposer une borne sur les données à reconstruire, le problème à résoudre, appelé problème extrémal borné ou (BEP), étant alors bien posé.

Un problème extrêmé borné typique dans une couronne G est le suivant. Soit I un sous-ensemble du cercle unité \mathbb{T} de mesure positive, correspond à l'endroit où les données peuvent être mesurées et soit J son complémentaire dans ∂G . On note $f \in L^2(I)$ correspond aux données, $f_1 \in L^2(J)$ représentant un comportement de référence aux endroits où l'on a rien pu mesurer et $M > 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } g \in H^2(G), \|g - f_1\|_{L^2(J)} \leq M \text{ tel que} \\ \|f - g\|_{L^2(I)} = \inf\{\|f - h\|_{L^2(I)} : h \in H^2(G), \|h - f_1\|_{L^2(J)} \leq M\}. \end{array} \right.$$

Ce problème est convexe et admet une unique solution [36]. En général, lorsque les (BEP) sont posés dans le cadre des espaces de Hardy $H^p(G)$ d'ordre p , il n'est pas facile d'exprimer la solution parce que l'on ne connaît pas mieux que numériquement la projection de meilleur approximant de L^p sur H^p qui intervient dans l'équation variationnelle [89, 93]. Pour le cas Hilbertien actuel, $p = 2$, la solution du problème (BEP) s'obtient en résolvant une équation spectrale pour l'opérateur de Toeplitz de symbole χ_J , la fonction caractéristique de J :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\chi_J} : H^2(G) &\rightarrow H^2(G) \\ g &\mapsto P_{H^2(G)}(\chi_J g) \end{aligned}$$

où $P_{H^2(G)} : L^2(\partial G) \rightarrow H^2(G)$ est la projection orthogonale. Plus précisément, si f n'est pas déjà la trace sur I d'une fonction $H^2(G)$ satisfaisant les contraintes, l'unique solution g est donnée par :

$$(1 + \lambda \mathcal{T}_{\chi_J}) g = P_{H^2(G)} [f \vee (1 + \lambda) f_1],$$

où \vee indique la concaténation et où $\lambda \in (-1, +\infty)$ est l'unique nombre réel tel que la solution sature la contrainte, c'est à dire $\|g - f_1\|_{L^2(J)} = M$. En se référant à [8, 16], M est une fonction strictement décroissante de λ de sorte que l'ajustement de λ peut se faire par dichotomie (voir chapitre 5).

Mais, la résolution d'un (BEP) n'achève pas la résolution complète de la reconstruction de l'approximant, dans la mesure où la borne mise sur les données étendues est généralement - en fait dès lors que les données ne sont pas la trace d'une fonction analytique - saturée par la solution. Cette borne devient donc à son tour une inconnue du problème (vu qu'elle dépend de la partie inconnue de données frontières), ce qui oblige à évaluer avec précision cette borne sur les données étendues de manière précise pour avoir une chance de les approcher convenablement (figure 1.6).

Chaabane et al. [35] se sont intéressés à ce type de problème dans le cas d'un domaine bi-dimensionnel simplement connexe, pouvant être ramenés par transformation conforme au disque unité (la transformation conforme est connue). Dans ce contexte, ils ont établis une méthode de "validation croisée" qui nécessite qu'une partie des données disponibles soit dévolue au calcul de la borne. Nous proposons ici une méthode alternative qui tient compte de la plus grande rareté des données disponibles dans le cas doublement connexe.

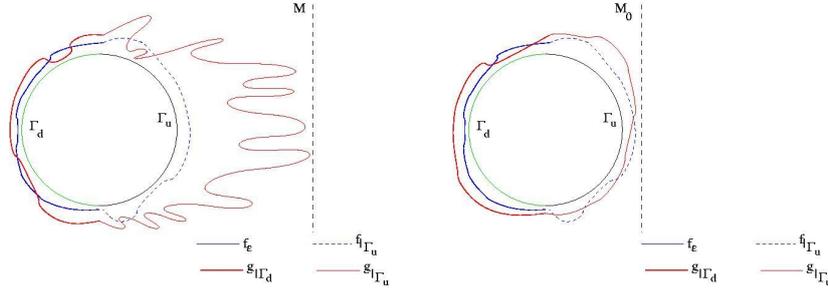


FIG. 1.6 – Influence du choix M sur le comportement de la solution sur J .

Pour cela, une famille d'algorithmes est construite permettant d'ajuster la valeur de la borne actuelle appliquée aux dérivées successives des données disponibles. Ces algorithmes sont d'autant plus robustes vis à vis des erreurs de mesure que leur ordre est élevé. L'étape de l'identification de q est maintenant garantie grâce à la relation suivante

$$q \simeq -\frac{\partial_{\theta} \operatorname{Im} g}{\operatorname{Re} g}.$$

Une fois que l'identifiabilité et l'identification sont satisfaites, il convient de s'assurer de la stabilité de la solution par rapport aux données. Cette étude s'avère très importante puisqu'elle focalise la repercussion de l'incertitude des mesures sur la solution. Beaucoup d'auteurs se sont intéressés à la question de stabilité pour le coefficient de Robin. Chaabane et Jaoua [34], dans le cas d'un domaine 2-D simplement connexe, ont obtenu un résultat de stabilité locale de type Lipschitzienne basant sur les techniques de dérivation par rapport à q et ils ont prouvé qu'il y a une dépendance locale Lipschitzienne entre les paramètres q et les mesures associées. Toujours dans le même contexte, ils ont prouvé un résultat de stabilité "monotone" basé sur la positivité et la monotonie des solutions du problème de Robin. La stabilité globale étant une question principale dans beaucoup d'études de problèmes inverses d'identification de corrosion. Alessandrini [3] a construit un exemple qui montre que, pour ce type de problème inverse, la stabilité logarithmique est optimale. Ce résultat a été développé par plusieurs auteurs, dont nous citerons quelques uns. Alessandrini, Sincich [6, 7] pour la détection de corrosion dans le cas non linéaire, Aparicio [12] a prouvé un résultat de stabilité locale Lipschitzienne pour un domaine régulier quelconque, ensuite Chouli [39] a établi un résultat de stabilité logarithmique de type log-log pour le cas d'un domaine rectangulaire, Chaabane et al [33] ont établi un résultat de stabilité globale de type log-log en 2-D, utilisant la théorie d'analyse complexe et les transformations quasiconformes, leurs résultats de stabilité sont basés sur le lemme de Baratchart-Zerner [24], Fasino et Inglese [50, 51, 52] ont établi une relation entre la stabilité de la solution et l'épaisseur du domaine et Chaabane et al. [32] se sont attachés à prouver des résultats de stabilité qui ont été constatés sur le plan numérique pour l'algorithme de Kohn et Vogelius. Dans le présent travail, l'outil d'approximation harmonique dans une couronne a été exploité en vue d'établir des résultats de stabilité logarithmique

avec un seul log pour l'identification d'un coefficient de Robin comme les conséquences des estimations d'erreurs pour des fonctions analytiques dans les espaces de Hardy pondérés. Ces résultats ont fait l'objet de la publication [74].

1.4 APPLICATION À QUELQUES PROBLÈMES INVERSES

Cette approche fournit un cadre approprié pour aborder à d'autres problèmes inverses géométriques, de localisation de fissures courbes dans un tube et de la détection de sources ponctuelles dans un disque (2-D) depuis des mesures frontalières d'une solution du Laplacien.

1.4.1 Identification de fissures courbe

La détection non-destructive des ruptures par fissuration sous ses différentes formes présente un sujet d'activité considérable dans la communauté des problèmes inverses. Dans cette application, nous considérons un problème inverse géométrique consistant à détecter et localiser la présence de fissures dans un matériau. Ce problème est rencontré dans la pratique, par exemple, lors de la détection de défauts de revêtement des tubes ou au niveau de cou dage de deux tube transportant de gaz (voir figure 1.7).

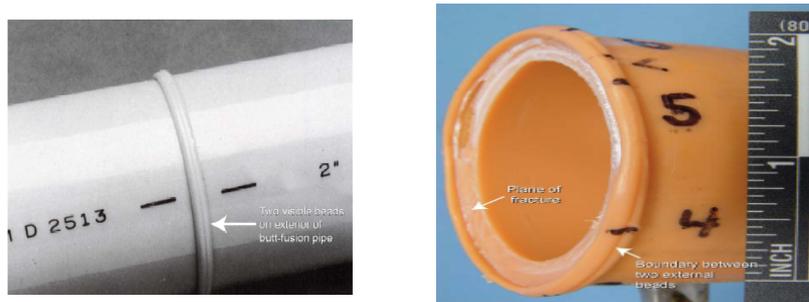
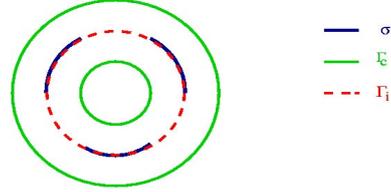


FIG. 1.7 – Pipeline fissuré.

Nous restreindrons notre étude au cas bi-dimensionnel en prenant une section plane de la tuyauterie, l'opérateur auquel nous allons nous intéresser ici est le Laplacien qui intervient lorsqu'on utilise des données thermique ou électrique. Le principe est d'imposer un flux de chaleur Φ dans le cas du contrôle par données thermiques, supposé connu sur tout le bord de la couronne $G := \mathbb{D} \setminus \overline{s\mathbb{D}}$, $0 < s < 1$, et de mesurer la réponse u du matériau (température dans ce même cas). On modélisera la fissure σ à localiser par un arc porté par le cercle $\lambda\mathbb{T}$ de centre l'origine et de rayon $\lambda \in (s, 1)$, qui est aussi, ce dernier, une inconnue du problème. Le problème inverse consiste alors à trouver σ telle que la solution u de

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } G \setminus \sigma \\ \partial_{\nu_\sigma} u = 0 & \text{sur } \sigma \subset \lambda\mathbb{T} \\ \partial_\nu u = \Phi & \text{sur } \partial G \end{cases}$$



vérifie $u|_{\partial G} = u_b$.

L'idée consiste à supposer en premier temps que le cercle porteur de la fissure est connu et exprimer ce problème inverse en termes d'approximation harmonique dans deux couronnes pour étendre les données sur ce cercle. On décompose alors la couronne G en deux sous-couronnes $\Omega_1 = \mathbb{D} \setminus \overline{\lambda\mathbb{D}}$ et $\Omega_2 = \lambda\mathbb{D} \setminus \overline{s\mathbb{D}}$ (figure 1.8). L'extension des données

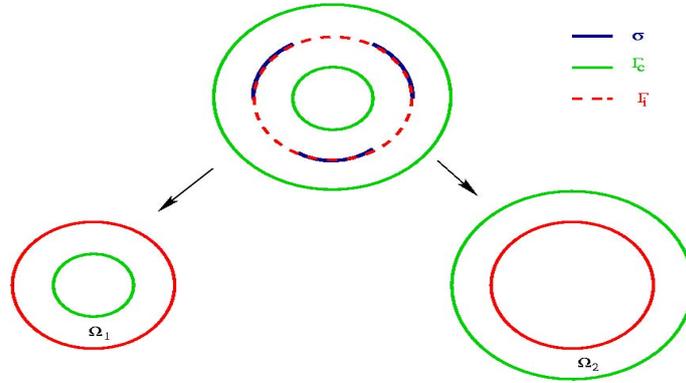


FIG. 1.8 – Couronne divisée.

dans Ω_1 et Ω_2 à partir de la résolution de deux problèmes extrémaux bornés associés, permet d'identifier complètement la fissure σ par identifier totalement la discontinuité de la température u au travers σ .

Maintenant, pour déterminer le rayon λ , on introduit un cercle quelconque $r\mathbb{T}$ pour $s < r < 1$ et on applique la technique d'approximation harmonique dans les deux couronnes $G_{r,+} := \mathbb{D} \setminus \overline{r\mathbb{D}}$ et $G_{r,-} := r\mathbb{D} \setminus \overline{s\mathbb{D}}$; si $r < \lambda$, alors l'erreur dans $H^{2,2}(G_{r,+})$ reste assez importante, puisque $\sigma \subset G_{r,+}$ et la fonction g_+ n'est pas la trace d'une fonction analytique la dedans, tandis que l'erreur dans $H^{2,2}(G_{r,-})$ depuis g_- deviendra petite. Un raisonnement analogue, si $r > \lambda$, les erreurs des deux cotés jouent le rôle inverse, jusqu'elles se tiennent petites lorsque $r = \lambda$. Cette technique a donné lieu à des procédés d'identification non itératif (ne nécessitant aucune résolution du problème direct) et très économique.

On trouve beaucoup d'auteurs se sont intéressés à ce problème, mais la littérature exige la simple connexité du domaine d'étude dans le cas bi-dimensionnel. Peu de résultats existent en 3D. Les premier travaux concernant l'identification se basent sur le développement des méthodes itératives consistante à résoudre un problème de minimisation d'une fonctionnelle d'erreur basée sur un moindre carrée en comparant les résultats calculés à chaque itération (voir [4, 86]). Kallel [65] a travaillé sur le développement des procédés quasi-explicites rapides, moins robustes, qui ne nécessitent aucune résolution

du problème direct correspondant. Bryan et Vogelius [31] ont prouvés un résultat d'unicité, ainsi qu'une étude numérique a été présentée dans le cas de plusieurs fissures. Pour des données complètes disponibles sur la frontière et dans le cas bi et tridimensionnelle, Andrieux et Ben Abda [10] ont introduit le concept de l'écart à la réciprocité et ont prouvé que des fissures planes peuvent être complètement déterminées à condition que les données complètes soient disponibles sur toute la frontière de la structure. Ils ont, par ailleurs, donné des formules d'inversion qui déterminent explicitement le plan contenant les fissures afin de les identifier (voir aussi [25, 27]). Dans le cas des fissures droite, Ben Abda et al. [27] ont aussi exploités la notion d'écart à la réciprocité pour déterminer de la droite porteuse et déterminer les extrémités de la fissure. Toujours dans le cas d'un domaine bi-dimensionnel simplement connexe, Mondrèa [78] a utilisé deux mode d'approximation pour l'identification de fissures : d'une part l'approximation rationnelle pour la norme L^2 , et d'autre part l'approximation méromorphe pour la norme L^∞ , qui mettent en relation la position des pôles des différents approximants obtenus et la position de la fissure recherchée.

Dans une situation plus réaliste, où une partie seulement du bord extérieur de la couronne est accessible aux mesure, nous somme entrain d'achever un travail d'identification de fissures internes par la résolution d'une famille de problèmes extrémaux bornés couplé avec le concept de l'écart à la réciprocité. Les premiers résultats obtenus montrent la rapidité et l'efficacité rigoureuse de la méthode d'identification ainsi que sa robustesse.

1.4.2 Identification de sources dipolaires

Une troisième application potentielle importante considérée dans ce travail, consiste à la détection et à la localisation de sources ponctuelles dans un disque 2D depuis des mesures frontière d'une solution du Laplacien. Cette question se situe en électro-encéphalographie (EEG), où il s'agit de détecter des centres d'épilepsie dans le cerveau à partir de mesures effectuées sur le scalp, qu'il convient d'étendre jusqu'à la couche la plus interne avant d'en faire usage dans un algorithme d'identification.

En utilisant l'approche d'approximation harmonique dans deux couronnes pour étendre les données jusqu'à la frontière la plus interne. Une fois les données sont disponibles sur cette couche, l'approximation rationnelle ou méromorphe prend le relais afin de localiser les sources, comme dans [15]. Cette étude a fait l'objet d'un papier soumis [26].

La généralisation 3D du problème d'identification de sources d'épilepsie est en cours de réalisation au seins du projet APICS². Nous citons par exemple les travaux de Afteh et al. [13] et Leblond et al. [76].

²INRIA Sophia Antipolis

Première partie

Technique d'approximation harmonique : Problème Extremal Borné

CHAPITRE 2

Problème extremal borné dans une couronne

2.1 ESPACE DE HARDY DE LA COURONNE

Les espaces de Hardy représentent une classe dans la résolution des problèmes d'approximations. Il est alors apparu que les espaces de Hardy, par leur capacité étaient un cadre naturel pour étudier et fonder un calcul spectral des contractions dans les espaces de Hilbert donnant lieu à la description des solutions de problèmes d'interpolation [79, 80, 81].

Dans ce chapitre, nous définissons les espaces de Hardy d'un domaine circulaire et nous donnons quelques propriétés utiles à notre étude. Pour plus de détail sur les espaces de Hardy d'un domaine doublement connexe nous renvoyons le lecteur à la référence [1].

2.1.1 Notations

Soient \mathbb{C} l'ensemble des nombres complexes, $a \in \mathbb{C}$ et $0 < s < 1$.

- $\mathbb{D} = \{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \}$ le disque unité.
- $\mathbb{T} = \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \}$ le cercle unité.
- $s\overline{\mathbb{D}} = \{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq s \}$ le disque fermé de centre l'origine et de rayon s .
- $s\mathbb{T} = \{ z \in \mathbb{C} : |z| = s \}$ le cercle de centre l'origine et de rayon s .
- $a + s\mathbb{D} = \{ z \in \mathbb{C} : |z - a| < s \}$ le disque ouvert de centre a et de rayon s .
- $a + s\mathbb{T} = \{ z \in \mathbb{C} : |z - a| = s \}$ le cercle de centre a et de rayon s .
- $C(s\mathbb{T})$ est l'espace des fonctions continues sur le cercle $s\mathbb{T}$.
- $C^n(s\mathbb{T})$, $n \in \mathbb{N}^*$, est l'espace des fonctions n -continûment dérivables sur le cercle $s\mathbb{T}$.
- $L^2(\mathbb{T})$ l'espace de Hilbert des fonctions complexes, de carrée intégrable sur le cercle \mathbb{T} pour la mesure de Lebesgue, muni du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \overline{g(e^{i\theta})} d\theta. \quad (2.1.1)$$

Si $f \in L^2(\mathbb{T})$, alors f admet le développement en série de Fourier suivant :

$$f_0(e^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{in\theta} \quad \text{pp. sur } \mathbb{T} \quad \text{et} \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{T})} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2.$$

- $L^2(s\mathbb{T})$ l'espace de Hilbert des fonctions complexes, de carrée intégrable sur le cercle $s\mathbb{T}$ pour la mesure de Lebesgue, muni du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle_{L^2(s\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(se^{i\theta}) \overline{g(se^{i\theta})} d\theta. \quad (2.1.2)$$

Si $f \in L^2(s\mathbb{T})$, alors

$$f(se^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n s^n e^{in\theta} \quad \text{pp. sur } s\mathbb{T} \quad \text{et} \quad \|f_1\|_{L^2(s\mathbb{T})} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} s^{2n} |b_n|^2.$$

- $L^\infty(s\mathbb{T})$ est l'espace de Banach des fonctions $f(z)$ à valeurs complexes essentiellement bornées sur le cercle $s\mathbb{T}$ avec la norme :

$$\|f\|_{W^{1,\infty}} = \operatorname{ess\,sup}_{|z|=s} |f(z)|.$$

2.1.2 Définitions et propriétés

Dans ce travail, on dit qu'un domaine G de \mathbb{R}^2 est un domaine circulaire s'il est formé par le disque unité privé d'un disque fermé de centre l'origine et de rayon s , $0 < s < 1$, et on écrit

$$G = \mathbb{D} \setminus s\mathbb{D} = \mathbb{D} \cap (\mathbb{C} \setminus s\overline{\mathbb{D}}). \quad (2.1.3)$$

On définit $L^2(G)$ l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur G pour la mesure de Lebesgue, muni du produit scalaire usuel : pour $f, g \in L^2(G)$

$$\langle f, g \rangle_G = \frac{1}{2i\pi} \int_G f(z) \overline{g(z)} \frac{dz}{z}.$$

Soit $\partial G = s\mathbb{T} \cup \mathbb{T}$. On définit l'espace de Hilbert $L^2(\partial G)$ des fonctions f mesurables sur ∂G tel que $|f(z)|^2$ est intégrable pour la mesure de Lebesgue, la norme de f dans $L^2(\partial G)$ est définie par

$$\|f\|_{L^2(\partial G)} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(se^{i\theta})|^2 d\theta \right)^{1/2}. \quad (2.1.4)$$

Pour une partie I de \mathbb{T} de mesure non nulle, χ_I désigne la fonction caractéristique de I , et l'espace $L^2(I) := \{f, \chi_I f \in L^2(\partial G)\}$, muni de la norme $\|f\|_{L^2(I)} = \|\chi_I f\|_{L^2(\partial G)}$.

La fonction concaténée valant κ_1 sur I et κ_2 sur $\partial G \setminus I$ sera notée $\kappa_1 \vee \kappa_2 := \chi_I \kappa_1 + \chi_{\partial G \setminus I} \kappa_2$.

Avant d'aborder les espaces de Hardy de la couronne G , nous introduisons les définitions des espaces de Hardy du disque unité \mathbb{D} et celui de $\mathbb{C} \setminus s\overline{\mathbb{D}}$ dans lequel un lien fort existe entre eux.

On note $H^2(\mathbb{D})$ l'espace de Hardy des fonctions dans $L^2(\mathbb{T})$ dont les coefficients de Fourier d'indices négatifs sont nuls, muni du produit scalaire (2.1.1) [46, 55, 58, 60, 85, 98], c'est un espace fermé de $L^2(\mathbb{T})$:

$$H^2(\mathbb{D}) = \left\{ g(z) = \sum_{n \geq 0} g_n z^n \text{ tq } \sum_{n \geq 0} |g_n|^2 < \infty \right\}. \quad (2.1.5)$$

On note $H^2(\mathbb{C} \setminus s\overline{\mathbb{D}})$ l'espace de Hardy de $\mathbb{C} \setminus s\overline{\mathbb{D}}$, l'ensemble des fonctions analytiques dans $\mathbb{C} \setminus s\overline{\mathbb{D}}$ admettant une trace sur $s\mathbb{T}$ qui est dans $L^2(s\mathbb{T})$. Ainsi, on peut l'identifier à un sous espace de $L^2(s\mathbb{T})$ muni du produit scalaire (2.1.2).

Les espaces de Hardy de la couronne, $H^2(G)$, sont introduits par Rudin [85] en terme des fonctions analytiques f tel que $|f(z)|^2$ admet un majorant harmonique sur G , qui est, une fonction réelle harmonique, $u(z)$, vérifiant $|f(z)|^2 \leq u(z)$ dans G . Cette définition est équivalente à celle donnée par Sarason [88] :

$$H^2(G) = H^2(\mathbb{D}) \oplus H_0^2(\mathbb{C} \setminus s\overline{\mathbb{D}}), \quad (2.1.6)$$

où $H_0^2(\mathbb{C} \setminus s\overline{\mathbb{D}})$ est l'ensemble des fonctions h dans $H^2(\mathbb{C} \setminus s\overline{\mathbb{D}})$ vérifiant $\lim_{|z| \rightarrow \infty} h(z) = 0$. Cette somme directe est topologique au sens que les opérateurs projections sur chaque espace $H^2(\mathbb{D})$ et $H_0^2(\mathbb{C} \setminus s\overline{\mathbb{D}})$ sont bornés.

Finalement, nous définissons l'espace de Hardy de ∂G , noté $H^2(\partial G)$, la fermeture dans $L^2(\partial G)$ de l'ensemble des fonctions rationnelles dont les pôles sont dans le complémentaire de \overline{G} , noté $R(G)$. Ainsi, $H^2(\partial G)$ est un sous espace Hilbertien de $L^2(\partial G)$ muni du produit scalaire (2.1.4), admettant la base orthonormée suivante [37, p. 267] :

$$e_n(z) := \left(\frac{z^n}{\sqrt{1 + s^{2n}}} \right)_{n \in \mathbb{Z}}. \quad (2.1.7)$$

De la définition 2.1.6, et du fait qu'une fonction dans $H^2(\mathbb{D})$ est presque partout définie sur \mathbb{T} et de même pour une fonction dans $H_0^2(\mathbb{C} \setminus s\overline{\mathbb{D}})$ est presque partout définie sur $s\mathbb{T}$, on conclut qu'on peut étendre une fonction $f \in H^2(G)$ à la frontière ∂G presque partout, et donc d'après le lemme de Fatou [60], la trace de la fonction f sur ∂G , qui est définie presque partout, appartient à $L^2(\partial G)$, et en se référant à [37, Lemme 2.1], l'espace $H^2(G)$ est fermé.

Le lemme suivant :

Lemme 2.1 [88] *Soit $f \in L^p(\partial G)$. on suppose que*

$$f(e^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\theta} \quad \text{et} \quad f(se^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n e^{in\theta}.$$

Alors $f \in H^p(\partial G)$ si et seulement si $d_n = s^n c_n, \forall n \in \mathbb{Z}$,

prouve que la trace d'une fonction f sur ∂G , qui est définie presque partout, appartient à $H^2(\partial G)$ et inversement. Donc les deux espaces $H^2(G)$ et $H^2(\partial G)$ sont isomorphes :

Proposition 2.1 [37]

$$H^2(G) \approx H^2(\partial G). \quad (2.1.8)$$

Par suite on peut identifier ces deux espaces et on a, si $g \in H^2(\mathbb{D})$, pour $z \in \mathbb{D}$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \text{où} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty,$$

et si $h \in H_0^2(\mathbb{C} \setminus s\mathbb{D})$, pour $z \in \mathbb{C} \setminus s\mathbb{D}$

$$h(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n, \quad \text{où} \quad \sum_{n=-\infty}^{-1} s^{2n} |a_n|^2 < \infty,$$

ainsi, une fonction $f \in H^2(G)$ admet le développement suivant : pour $z \in G$

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n, \quad \text{où} \quad \|f\|_{H^2(\partial G)}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + s^{2n}) |a_n|^2. \quad (2.1.9)$$

Un des dispositifs les plus utiles de l'espace de Hilbert $L^2(\partial G)$ résulte du fait que chaque sous-espace fermé de $L^2(\partial G)$ est complémentable et son complémentaire est un sous-espace fermé. On déduit alors la décomposition suivante [60, chap. 9 pp 149] :

$$L^2(\partial G) = H^2(G) \oplus H^2(G)^\perp = L^2(I) \oplus L^2(J), \quad (2.1.10)$$

avec I une partie non vide de \mathbb{T} telles que I et $J := \partial G \setminus I$ sont de mesures non nulles. En se référant à [73, 37], on déduit le résultat de densité suivant :

Proposition 2.2 [73, 37] *Sous la condition (2.1.10), les propriétés suivantes, qui sont équivalentes, sont vraies :*

1. $P_{L^2(I)} H^2(G)$ est dense dans $L^2(I)$;
2. $L^2(I) \cap H^2(G)^\perp = \{0\}$;
3. $P_{H^2(G)^\perp} L^2(J)$ est dense dans $H^2(G)^\perp$.

Preuve

Montrons la première assertion. Toute fonction dans $C(I)$ peut être uniformément approximée par un polynôme trigonométrique $\sum_{n=-N}^N a_n z^n$, et donc par une fonction rationnelle dans $R(G)$. Une telle fonction est aussi dans $R(G)$ restreint à I , et par suite l'espace $P_{L^2(I)} H^2(G)$ est dense dans $C(I)$ qui est lui même dense dans $L^2(I)$. Pour montrer l'équivalence, on peut se référer à [73, 37]. ■

Nous finissons maintenant par un résultat d'unicité dans les espaces de Hardy :

Lemme 2.2 [46] *Soit I un sous ensemble de ∂G mesurable et de mesure non nulle et soit $g \in H^2(\partial G)$ vérifiant $g|_I = 0$; alors $g \equiv 0$ dans G .*

2.2 LES PROBLÈMES EXTRÉMAUX BORNÉS DANS $H^2(G)$

Il s'agit des problèmes d'approximation analytique de données frontières incomplètes dans les classes de Hardy d'un domaine plan doublement connexe consistants à approximer une fonction donnée sur une partie du bord du domaine par une fonction analytique dans le domaine dont la norme ne dépasse pas une certaine contrainte sur la frontière inaccessible aux mesures.

L'étude d'un problème extrémal borné fait intervenir la résolution d'une équation spectrale pour l'opérateur de Toeplitz de symbole χ_J , la fonction caractéristique de J , où J est la partie de la frontière où les données sont manquantes. Dans le cas d'un domaine simplement connexe (disque unité, via une transformation conforme) ce problème a été étudié dans [16, 17, 21, 22]. Dans ce chapitre nous nous sommes intéressés au cas d'un domaine doublement connexe où les opérateurs de Toeplitz ont des propriétés spectrales très différentes. Nous exposerons des résultats originaux dans le cas où I est une partie stricte de \mathbb{T} de mesure strictement positive [63], qui représentent une généralisation des résultats présentés dans [94, 95, 37] où I est le cercle unité.

2.2.1 Formulation du problème

Soit $G = \mathbb{D} \setminus s\mathbb{D}$ où \mathbb{D} est le disque unité, et on note $\partial G = s\mathbb{T} \cup \mathbb{T}$, $0 < s < 1$. Soit I une partie non vide de \mathbb{T} telles que I et $J := \partial G \setminus I$ sont de mesures non nulles. Etant donnée une fonction continue f définie sur un sous arc I du cercle unité \mathbb{T} et nous souhaitons à l'approximer aussi bien que possible par la restriction sur I d'une fonction de $H^2(G)$. Il s'agit alors de résoudre le problème suivant :

$$(A) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } g \in H^2(G) \text{ telle que} \\ \|g - f\|_{L^2(I)} = \inf_{\psi \in H^2(G)} \|\psi - f\|_{L^2(I)}. \end{array} \right.$$

Si f est la trace sur I d'une fonction de $H^2(G)$, alors le problème (A) admet une solution unique qui est l'extension de f dans $H^2(G)$ et le minimum égal à la valeur 0. En effet, soient g, h deux solutions du problème (A) et on considère $k = g - h$. La fonction k est dans $H^2(G)$ et est nulle sur I , alors d'après le lemme 2.2, la fonction k devrait être nulle sur tout G , et donc $g = h$ dans G .

Mais, comme on va l'expliquer dans le chapitre 4, les mesures expérimentales sur lesquelles on construit l'empêcher d'être toujours exactement la trace sur I d'une fonction de $H^2(G)$. Dans ce cas, $f \in L^2(I) \setminus H^2(G)|_I$. Cependant, la solution du problème (A) présente un comportement instable sur la partie complémentaire de I où la fonction f est inconnue. Pour empêcher ce comportement instable, on transforme le problème de complétion de données en un problème extrémal borné, sera appelé (BEP), où on ne demande pas à la solution trouvée de dépasser une certaine constante sur la partie inconnue des

données en norme.

Dans la suite de ce chapitre, on va commencer par donner des propriétés de densité des classes de Hardy afin de déterminer un procédé constructif permet de calculer la solution du problème (BEP).

Problème d'instabilité

Dans la suite, on considère la décomposition (2.1.10)

$$L^2(\partial G) = H^2(G) \oplus H^2(G)^\perp = L^2(I) \oplus L^2(J).$$

Un résultat de densité analogue à celui exposé dans [73], pour le disque unité, est le suivant :

Proposition 2.3 *Soit $f \in L^2(I)$ et on suppose que (g_n) est une suite de $H^2(G)$ qui converge vers f dans $L^2(I)$. Si f n'est pas la trace d'une fonction de $H^2(G)$, alors $\|g_n\|_{L^2(J)} \rightarrow \infty$.*

Preuve

Supposons que $\|g_n\|_J$ ne tend pas vers l'infinie, alors elle admet une sous-suite bornée, et de la convergence de (g_n) sur I on déduit que cette sous-suite est bornée dans $H^2(G)$. Il existe alors une sous suite, qu'on la note aussi (g_n) , qui converge faiblement dans $H^2(G)$ (c'est un espace de Hilbert). On note $\bar{g} \in H^2(G)$ sa limite. De la continuité de $P_{L^2(I)}$, on a alors $P_{L^2(I)}g_n$ converge faiblement vers $P_{L^2(I)}\bar{g}$ sur I . Or $P_{L^2(I)}g_n$ converge fortement vers f sur I , donc elle converge faiblement sur I . Avec la convergence des normes sur I on déduit que $P_{L^2(I)}g_n$ converge fortement vers f sur I . Ce qui donne $P_{L^2(I)}\bar{g} = f$. Ce qui est impossible puisque f n'est pas la trace sur I d'une fonction dans $H^2(G)$. ■

La proposition 2.3 montre que, le fait d'approcher de trop près des données bruitées conduit à une instabilité de l'approximant aux points où celui-ci n'est pas contraint. Pour empêcher ce comportement d'instabilité, on introduit une contrainte contrôlant le comportement de l'approximant sur J . Ce qui motive l'étude des problèmes extrémaux bornés (BEP).

Problème extremal borné dans la couronne

Nous commençons par établir le lemme suivant :

Lemme 2.3 *Soit $M > 0$ et soit $f_1 \in L^2(J)$. Alors l'ensemble*

$$S_M := \{ \psi|_I, \psi \in H^2(G), \|\psi - f_1\|_{L^2(J)} \leq M \}.$$

est non vide.

Preuve

Si $S_M = \emptyset$, alors $\forall \psi \in H^2(\partial G)$ on a $\|\psi - f_1\|_{L^2(J)} > M$. De la propriété de densité

de $P_{L^2(J)}H^2(G)$ dans $L^2(J)$ on déduit qu'il existe une suite $(h_n)_n$ dans $H^2(G)$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_1 - h_n\|_{L^2(J)} = 0$, et donc $\forall \psi \in H^2(G)$ on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\psi - h_n\|_{L^2(J)} > M$. En particulier, pour $\psi = h_n$ on obtient $M = 0$. Ce qui est absurde. ■

Un problème extrémal borné (BEP) typique est le suivant : Soit $M > 0$ et soit $f_1 \in L^2(J)$. Fixons $f \in L^2(I)$, tel que $f \notin H^2(G)|_I$.

$$(BEP) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } g \in H^2(G), \|g - f_1\|_{L^2(J)} \leq M \text{ telle que} \\ \|f - g\|_{L^2(I)} = \inf \{ \|f - \psi\|_{L^2(I)} : \psi \in H^2(G), \|\psi - f_1\|_{L^2(J)} \leq M \} \end{array} \right.$$

Plusieurs auteurs sont intéressés à ce type de problème dans des cadres variés. Nous citons par exemple, pour le cas des espaces de Hilbert quelconques [73, 95], et dans les espaces de Hardy du disque unité [8, 18], ainsi que dans les espaces de Hardy de la couronne pour $I = \mathbb{T}$ [36, 73, 37, 95], que ce problème admet une unique solution donnée en terme d'un opérateur de Toeplitz dans lequel la solution peut être exprimé en terme d'un paramètre réel jouant le rôle d'un multiplicateur de Lagrange.

Plus précisément, si on considère

$$\chi_I f = \begin{cases} f & \text{sur } I \\ 0 & \text{sur } J \end{cases} \quad \text{et} \quad \chi_J f_1 = \begin{cases} 0 & \text{sur } I \\ f_1 & \text{sur } J, \end{cases}$$

alors on a :

Théorème 2.1 [36, 73, 37, 95] *Si J est de mesure strictement positive, le problème (BEP) admet une unique solution g vérifiant*

$$\|g - f_1\|_{L^2(J)} = M. \quad (2.2.1)$$

De plus, g est donnée par l'équation spectrale suivante :

$$(1 + \lambda \mathcal{T}) g = P_{H^2(G)} [\chi_I f \vee (1 + \lambda) \chi_J f_1] \quad (2.2.2)$$

où $\mathcal{T} : H^2(G) \longrightarrow H^2(G)$ est l'opérateur de Toeplitz de symbole χ_J défini par $H^2(G) \ni g \mapsto P_{H^2(G)} \chi_J g = P_{H^2(G)} P_{L^2(J)} g$, et $\lambda > -1$ est l'unique constante déterminée par (2.2.1).

Remarques 2.1 • Notons que la formule (2.2.2) est implicite, en ceci que la contrainte M n'y intervient pas explicitement, mais que le paramètre $\lambda \in]-1, +\infty[$, qui joue le rôle d'un multiplicateur de Lagrange, doit être ajusté de sorte que $\|g - f_1\|_{L^2(J)} = M$, qu'il semble être un point difficile pour l'exprimer en fonction de M .

• Par une simple généralisation des résultats établis dans [8, 16], M est une fonction strictement décroissante de λ de sorte que l'ajustement de λ peut se faire par dichotomie (voir chapitre 5), et si on pose

$$e(\lambda) := \|f - g(\lambda)\|_{L^2(I)} \quad \text{et} \quad M(\lambda) := \|g(\lambda) - f_1\|_{L^2(J)},$$

alors

$$\lim_{M(\lambda) \rightarrow +\infty} e(\lambda) = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow -1} M(\lambda) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} M(\lambda) = 0.$$

De plus,

$$\frac{de^2}{d\lambda} = -(1 + \lambda) \frac{dM^2}{d\lambda},$$

$$e^2(\lambda) \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \lambda \rightarrow -1,$$

$$\text{et} \quad (1 + \lambda) M^2(\lambda) \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \lambda \rightarrow -1.$$

- Un problème relatif à celui (BEP) à été étudié dans [73, section 4, 5] concernant une question d'interpolation. C'est à dire lorsque f est la trace sur I d'une certaine fonction de $H^2(G)$. Alors la solution est de nouveau donnée en terme d'opérateur de Toeplitz $P_{H^2(G)} \chi_J$. Si, sans perte de généralité, on continue à noter par f la fonction de $H^2(G)$ définie sur la frontière ∂G , alors $e(\lambda)$ décroît strictement vers 0 quand M croit vers $\|f - f_1\|_{L^2(J)}$ et est identiquement nulle lorsque $M \geq \|f - f_1\|_{L^2(J)}$. ■

2.2.2 Procédure de calcul de la solution

Dans ce cadre Hilbertien, ces problèmes admettent des schémas de résolution efficaces (au moyen d'opérateurs de Toeplitz), ayant de bonnes propriétés de robustesse et de continuité. Nous rappelons que l'espace $H^2(G)$ est un espace de Hilbert muni de la norme L^2 sur ∂G et que l'ensemble $\left\{ e_n(z) = \frac{z^n}{\sqrt{1+s^{2n}}} \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$ forme une base orthonormée de $H^2(G)$.

Considérons la décomposition (2.1.10) :

$$L^2(\partial G) = H^2(G) \oplus H^2(G)^\perp = L^2(I) \oplus L^2(J).$$

Sans perte de généralité, on suppose que $I := (e^{-i\theta_0}, e^{i\theta_0})$ est symétrique, $0 < \theta_0 < \pi$. Notons $J := \partial G \setminus I$ et soit

$$\chi_I f = \begin{cases} f & \text{sur } I \\ 0 & \text{sur } J \end{cases} \quad \text{et} \quad \chi_J f_1 = \begin{cases} 0 & \text{sur } I \\ f_1 & \text{sur } J. \end{cases}$$

Pour $n \in \mathbb{Z}$, soient a_n et b_n les coefficients de Fourier de $\phi = \chi_I f \vee (1 + \lambda) \chi_J f_1 \in L^2(\partial G)$ sur \mathbb{T} et $s\mathbb{T}$ respectivement, définis par :

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\theta_0}^{\theta_0} f(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta + (1 + \lambda) \int_{\theta_0}^{2\pi - \theta_0} f_1(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \right),$$

et

$$b_n s^n = \frac{1 + \lambda}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(s e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.$$

Soit \mathcal{B} le vecteur (infini) $(\mathcal{B}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ représenté dans la base $\{e_n\}$ par

$$\mathcal{B}_n = \frac{a_n + b_n s^{2n}}{\sqrt{1 + s^{2n}}}.$$

On a alors le résultat suivant :

Théorème 2.2 [63] *La solution g du problème (BEP), considérée comme un vecteur infini définie par ses coefficients de Fourier $(g_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, résout l'équation matricielle infinie suivante :*

$$(1 + \lambda \mathcal{T})g = \mathcal{B}, \quad (2.2.3)$$

où \mathcal{T} est l'opérateur de Toeplitz représenté dans la base $\{e_n\}$ par la matrice de Toeplitz infinie définie par :

$$\forall n, m \in \mathbb{Z}, \mathcal{T}_{n,m} = \begin{cases} \frac{1}{1 + s^{2n}} \left(1 + s^{2n} - \frac{\theta_0}{\pi} \right) & \text{si } n = m, \\ -\frac{1}{\sqrt{(1 + s^{2n})(1 + s^{2m})}} \frac{\sin(m - n)\theta_0}{\pi(m - n)} & \text{si } n \neq m. \end{cases}$$

La preuve du théorème 2.2 nécessite les deux lemmes suivants :

Lemme 2.4 [94] *Soit $h \in L^2(\partial G)$ donnée par*

$$h(e^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{in\theta} \quad \text{où} \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 < \infty,$$

$$\text{et } h(se^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n s^n e^{in\theta} \quad \text{où} \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} s^{2n} |b_n|^2 < \infty.$$

Alors $P_{H^2(G)}h(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{a_n + s^{2n}b_n}{1 + s^{2n}} z^n$ pour $z \in G$.

Preuve

On peut se référer à [94]. ■

Lemme 2.5 [63] *Soit $g \in H^2(G)$ telle que $g(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n e_n(z)$ pour $z \in G$ et \mathcal{T} l'opérateur de Toeplitz de symbole χ_J . Alors*

$$\mathcal{T}g(z) =$$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{1 + s^{2n}}} \left[\frac{g_n}{\sqrt{1 + s^{2n}}} \left(1 + s^{2n} - \frac{\theta_0}{\pi} \right) - \sum_{m \neq n} \frac{g_m}{\sqrt{1 + s^{2m}}} \frac{\sin(m - n)\theta_0}{\pi(m - n)} \right] e_n(z).$$

Preuve [63]

D'après le lemme 2.4, on a

$$\mathcal{T}g(z) = P_{H^2(G)} \chi_J g(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{c_n + d_n s^{2n}}{1 + s^{2n}} z^n,$$

avec

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_0}^{2\pi - \theta_0} g(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \quad \text{et} \quad d_n s^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(se^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.$$

2 Problème extremal borné dans une couronne

Prenons $g(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n z^n$ pour $z \in G$, alors on a

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_0}^{2\pi-\theta_0} \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_m e^{im\theta} e^{-in\theta} d\theta \\ &= g_n \left(1 - \frac{\theta_0}{\pi}\right) - \sum_{m \neq n} g_m \frac{\sin(m-n)\theta_0}{\pi(m-n)}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d_n s^n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_m s^m e^{im\theta} e^{-in\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_m s^m \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta} d\theta = g_n s^n. \end{aligned}$$

Il s'ensuit alors,

$$\mathcal{T}g(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1+s^{2n}} \left[g_n \left(1 + s^{2n} - \frac{\theta_0}{\pi}\right) - \sum_{m \neq n} g_m \frac{\sin(m-n)\theta_0}{\pi(m-n)} \right] z^n.$$

■

Preuve du théorème 2.2

Le premier membre de l'équation (2.2.3) se déduit directement du lemme 2.5. Le second membre à partir du lemme 2.4 appliqué à la fonction $\phi = \chi_I f \vee (1 + \lambda) \chi_J f_1 \in L^2(\partial G)$:

$$P_{H^2(G)}\phi(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{a_n + s^{2n}b_n}{1 + s^{2n}} z^n, \quad z \in G,$$

avec

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} f(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta + \frac{1+\lambda}{2\pi} \int_{\theta_0}^{2\pi-\theta_0} f_1(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta, \end{aligned}$$

et

$$b_n s^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(se^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta = \frac{1+\lambda}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(se^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.$$

■

Théorème 2.3 Pour $\lambda \neq 0$, on pose $\mu = \frac{-1}{\lambda}$. Alors la solution g du (BEP) admet le développement suivant :

$$g(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\mu^n} \mathcal{T}^n P_{H^2(G)} [\chi_I f \vee (1 + \lambda) \chi_J f_1]. \quad (2.2.4)$$

Preuve

On a $(Id + \lambda \mathcal{T})g = P_{H^2(G)} [\chi_I f \vee (1 + \lambda)\chi_J f_1]$. En posant $\mu = \frac{-1}{\lambda}$, on obtient

$$\frac{1}{\mu} (\mu Id - \mathcal{T})g = P_{H^2(G)} [\chi_I f \vee (1 + \lambda)\chi_J f_1].$$

Or $\lambda > -1$, donc $\mu > 1$, et par suite $\mu \notin \sigma(\mathcal{T})$, d'où l'existence de $(\mu Id - \mathcal{T})^{-1}$. Soit $u_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{\mu^{k+1}}$, pour $\varepsilon > 0$ tel que $\mu > 1 + \varepsilon$, l'ensemble $V :=]-\varepsilon, 1 + \varepsilon[$ est un voisinage du spectre de \mathcal{T} et tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est analytique dans V . De plus u_n converge uniformément vers $u(x) := \frac{1}{\mu-x}$ dans V , en effet :

$$\begin{aligned} |u_n(x) - u(x)| &= \left| \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{\mu^{k+1}} - \frac{1}{\mu-x} \right| \\ &= \left| \frac{(x/\mu)^{n+1}}{\mu-x} \right| \\ &\leq \left| \frac{((1+\varepsilon)/\mu)^{n+1}}{\mu-1-\varepsilon} \right| \quad \forall x \in V, \end{aligned}$$

et par suite $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n(x) - u(x)| = 0$. D'où la convergence uniforme dans V . En se référant à [45], la suite $\{u_n(\mathcal{T})\}_n$ converge uniformément vers $u(\mathcal{T}) = (\mu Id - \mathcal{T})^{-1}$ pour la topologie de l'ensemble des opérateurs bornés. Et on a alors $(\mu Id - \mathcal{T})^{-1} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\mu^{n+1}} \mathcal{T}^n$. Il s'ensuit que la solution du (BEP) s'écrit :

$$g(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\mu^n} \mathcal{T}^n P_{H^2(G)} \chi_I f(z), \quad z \in G.$$

■

Remarque 2.1 Si $\lambda = 0$ alors, d'après l'équation (2.2.3),

$$g(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{a_n + b_n s^{2n}}{1 + s^{2n}} z^n, \quad z \in G.$$

■

Remarque 2.2 On considère le cas particulier où les données sont connues sur toute la frontière extérieure de ∂G , c'est à dire $I = \mathbb{T}$, ou encore $\theta_0 = \pi$. Alors, on obtient le développement de l'opérateur de Toeplitz $\mathcal{T}g(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{s^{2n}}{1 + s^{2n}} g_n z^n$, et donc la solution du

problème (BEP) est donnée par $g(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{a_n + (1 + \lambda)s^{2n}b_n}{1 + (1 + \lambda)s^{2n}} z^n$, où $\lambda > -1$ est l'unique

constante telle que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{|a_n - b_n|^2 s^{2n}}{(1 + (1 + \lambda)s^{2n})^2} = M^2$. Ce cas particulier a été exposé dans [36, 94], qu'on va l'exploiter dans la suite, et on voit bien que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction $z \mapsto z^n$ est un vecteur propre pour l'opérateur de Toeplitz \mathcal{T} , qui correspond à la valeur propre $\frac{s^{2n}}{1 + s^{2n}}$. Donc l'opérateur \mathcal{T} est diagonalisable ce que ; permet d'avoir une expression explicite de la solution g .

■

Puisque nous n'avons aucune information sur le comportement des données sur la partie J de la frontière, ce qui représente une vraie difficulté pour le calcul de l'approximant, nous choisirons dorénavant $f_1 = 0$ (i.e. $b_n = 0$).

2.3 CONTINUITÉ DE LA SOLUTION PAR RAPPORT AUX DONNÉES

Dans cette section, nous étudions les propriétés de continuité de la solution du problème (BEP) par rapport aux données f et M . Soit g l'application définie par :

$$\begin{aligned} g & : L^2(I) \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow H^2(G) \\ & (f, M) \mapsto g(f, M), \end{aligned}$$

où $g(f, M)$ est la solution du problème associé aux données f et M .

Soit $\mathcal{D} := \{ (h, M) \in H^2(G)|_I \times \mathbb{R}_+^* \text{ tq } \|h\|_{L^2(J)} < M \}$.

Théorème 2.4 [63] *L'application g est continue sur $(L^2(I) \times \mathbb{R}_+^*) \setminus \mathcal{D}$, mais non sur tout l'ensemble $L^2(I) \times \mathbb{R}_+^*$. Cependant,*

$$\text{si } (f_n, M_n) \xrightarrow{L^2(I) \times \mathbb{R}_+^*} (f, M), \quad \text{alors } g(f_n, M_n) \rightharpoonup g(f, M) \text{ dans } H^2(G),$$

tandis que $g(f_n, M_n) \xrightarrow{L^2(I)} g(f, M)$. C'est à dire que sur J , on a seulement la convergence faible.

Preuve [63]

Considérons l'application e_f définie par

$$\begin{aligned} e_f & : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ & M \mapsto \|g(f, M) - f\|_{L^2(I)}. \end{aligned}$$

L'application e_f est convexe et décroissante, ainsi elle est continue sur \mathbb{R}_+^* . En effet, soient M_1 et M_2 deux réels strictement positifs, et $t \in [0, 1]$,

$$\|\chi_I((1-t)g(f, M_1) + tg(f, M_2)) - f\|_{L^2(I)} \leq (1-t)e_f(M_1) + te_f(M_2).$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \|\chi_J g(f, (1-t)M_1 + tM_2)\|_{L^2(J)} & = (1-t)M_1 + tM_2 \\ & \geq \|\chi_I((1-t)g(f, M_1) + tg(f, M_2))\|_{L^2(J)}, \end{aligned}$$

et donc

$$\|\chi_J((1-t)g(f, M_1) + tg(f, M_2))\|_{L^2(I)} \leq (1-t)M_1 + tM_2,$$

ce qui implique

$$\|\chi_I((1-t)g(f, M_1) + tg(f, M_2)) - f\|_{L^2(I)} \geq \|\chi_I g(f, (1-t)M_1 + tM_2) - f\|_{L^2(I)} .$$

Finalement, on obtient

$$(1-t)e_f(M_1) + te_f(M_2) \geq e_f((1-t)M_1 + tM_2) .$$

Montrons maintenant que e_f est décroissante. Soient M_1 et M_2 deux réels strictement positifs, et $M_1 \leq M_2$. On a

$$e_f(M_1) = \|\chi_I g(f, M_1) - f\|_{L^2(I)} ; \quad \|\chi_J g(f, M_1)\|_{L^2(J)} = M_1 ,$$

$$e_f(M_2) = \|\chi_I g(f, M_2) - f\|_{L^2(I)} ; \quad \|\chi_J g(f, M_2)\|_{L^2(J)} = M_2 .$$

Puisque $M_1 \leq M_2$ alors $\|\chi_J g(f, M_1)\|_{L^2(J)} \leq M_2$, et donc

$$\|\chi_J g(f, M_1) - f\|_{L^2(I)} \geq \|\chi_I g(f, M_2) - f\|_{L^2(I)} ,$$

c'est à dire $e_f(M_1) \geq e_f(M_2)$. On déduit que e_f est une fonction continue sur \mathbb{R}_+^* .

Soit (f_n) une suite de $L^2(I)$ telle que $\|f_n - f\|_{L^2(I)} \rightarrow 0$ et supposons que (M_n) est une suite de \mathbb{R}_+^* telle que $M_n \rightarrow M$. Prouvons que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_{f_n}(M_n) = e_f(M) . \tag{2.3.1}$$

En effet, soit $\delta > 0$ et supposons que ou bien $e_{f_n}(M_n) > e_f(M) + \delta$ ou $e_{f_n}(M_n) < e_f(M) - \delta$ au voisinage de l'infini. Dans le premier cas, depuis

$$\|g(f, M_n) - f_n\|_{L^2(I)} \leq \|g(f, M_n) - f\|_I + \|f_n - f\|_{L^2(I)} ,$$

et du fait e_f est continue, on a au voisinage de l'infini

$$\|g(f, M_n) - f_n\|_{L^2(I)} < e_f(M) + \delta < e_{f_n}(M_n) ,$$

ce qui contredit l'optimalité de $g(f_n, M_n)$. Dans le second cas,

$$\|g(f_n, M_n) - f\|_{L^2(I)} \leq e_{f_n}(M_n) + \|f_n - f\|_{L^2(I)} ,$$

qui implique qu'on a au voisinage de l'infini

$$e_f(M_n) < e_f(M) - \frac{\delta}{2} ,$$

et ceci aussi contredit la propriété de continuité de e_f démontré au dessus.

D'autre part on a,

$$\begin{aligned} \|g(f_n, M_n)\|_{L^2(\partial G)}^2 &\leq \|g(f_n, M_n) - f_n\|_{L^2(I)}^2 + \|f_n\|_{L^2(I)}^2 + M_n^2 \\ &\leq e_{f_n}^2(M_n) + \|f_n\|_{L^2(I)}^2 + M_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e_f^2(M) + \|f\|_{L^2(I)}^2 + M^2 . \end{aligned}$$

Donc la suite $(g(f_n, M_n))$ est bornée. Nous montrerons maintenant que toute sous-suite admet une (sous-)sous-suite qui converge vers $g(f, M)$. En effet, considérons une sous-suite qui converge faiblement vers, notée $\tilde{g} \in H^2(G)$. Nous continuons à la notée $(g(f_n, M_n))$. Il s'ensuit directement d'après l'hypothèse et de (2.3.1) que

$$\|\tilde{g} - f\|_{L^2(I)} \leq e_f(M), \quad \|\tilde{g}\|_{L^2(J)} \leq M.$$

Puisque la solution du problème (BEP) est unique, alors nécessairement on a $\tilde{g} = g(f, M)$. Ceci montre la convergence faible dans $H^2(G)$.

D'autre part, il s'ensuit de (2.3.1) que $\|g(f_n, M_n) - f_n\|_{L^2(I)} \rightarrow \|g(f, M) - f\|_{L^2(I)}$, ce qui implique aussi la convergence forte dans $L^2(I)$.

Finalement, chaque fois que $(f, M) \notin \mathcal{D}$, on a

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|g(f_n, M_n)\|_{L^2(J)} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} M_n = M = \|g(f, M)\|_{L^2(J)},$$

et depuis on a aussi $g(f_n, M_n)$ converge faiblement vers $g(f, M)$ dans $H^2(G)$, on obtient alors la convergence forte sur J . ■

2.4 DISCUSSION

Par le biais des étapes de la résolution du problème extremal borné dans les espaces de Hardy, on peut remarquer que le résultat de convergence établi dans le théorème 2.4 est à peine suffisant. Afin d'améliorer ce résultat et assurer la convergence forte des données étendues, nous avons pensé à généraliser notre étude dans des espace plus réguliers, où on traite les problèmes extremaux bornés pour un ordre supérieur. Elle consiste à chercher g dans une classe de fonctions qui sont naturellement continues en vue d'obtenir des régularités complémentaires. Notre choix s'est arrêté sur les espaces de Hardy-Sobolev qui ont la propriété d'assurer la régularité des dérivées d'ordre supérieur de la solution.

CHAPITRE 3

(BEP) dans les espaces de Hardy–Sobolev

3.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous avons étudié un problème extrémal borné dans les espace de Hardy–Sobolev d'ordre $m \in \mathbb{N}^*$, définis par

$$H^{m,2}(G) := H^2(G) \cap W^{m,2}(\partial G),$$

où $W^{m,2}(\partial G)$ est l'espace de Sobolev des fonctions de $L^2(\partial G)$ dérivables, au sens des distributions, et dont les dérivées jusqu'à l'ordre m appartient à $L^2(\partial G)$, muni de la norme

$$\|h\|_{H^{m,2}(G)} = \|h\|_{W^{m,2}(\partial G)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |h_n|^2 l_{m,n},$$

pour des fonctions $h \in H^{m,2}(G)$, $h(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n z^n$, $z \in G$, et

$$\begin{cases} l_{m,n} = w_{m,n} + \mu_{m,n} s^{2n}, & \text{où} \\ w_{m,n} = 1 + \sum_{k=1}^m n^2 (n-1)^2 \cdots (n-k+1)^2, \\ \mu_{m,n} = 1 + \sum_{k=1}^m n^2 (n-1)^2 \cdots (n-k+1)^2 s^{-2k}. \end{cases} \quad (3.1.1)$$

La famille $(e_{m,n} := \frac{z^n}{\sqrt{l_{m,n}}})_{n \in \mathbb{Z}}$ constitue une base totale de $H^{m,2}(G)$.

On peut aussi noter $H^{0,2}(G)$ pour $H^2(G)$ et $W^{0,2}(\partial G)$ pour $L^2(\partial G)$. L'espace $H^{m,2}(G)$ peut aussi être vu comme l'ensemble des fonctions $h(z) \in H^2(G)$ dont les dérivées jusqu'à l'ordre m par rapport à la variable complexe z (qui est définie partout dans G) sont des fonctions de $H^2(G)$.

De la même manière, on définit l'espace $H^{m,2}(\partial G)$, ensemble des fonctions dans $H^2(\partial G)$ admettant des dérivées jusqu'à l'ordre m dans $L^2(\partial G)$ bornées. On garde la même propriété d'isomorphisme entre les espaces $H^{m,2}(G)$ et $H^{m,2}(\partial G)$, et on a aussi

$$H^{m,2}(G) = H^{m,2}(\mathbb{D}) \oplus H^{m,2}(\mathbb{C} \setminus \overline{s\mathbb{D}}), \quad (3.1.2)$$

où $H^{m,2}(\mathbb{D})$ et $H^{m,2}(\mathbb{C} \setminus \overline{s\mathbb{D}})$ sont les espaces de Hardy–Sobolev de \mathbb{D} et $\mathbb{C} \setminus \overline{s\mathbb{D}}$ respectivement, définis par

$$H^{m,2}(\mathbb{D}) := H^2(\mathbb{D}) \cap W^{m,2}(\mathbb{T}) \quad \text{et} \quad H^{m,2}(\mathbb{C} \setminus \overline{s\mathbb{D}}) := H^2(\mathbb{C} \setminus \overline{s\mathbb{D}}) \cap W^{m,2}(s\mathbb{T}).$$

Nous rappelons que dans le cas du disque unité, une étude des problèmes extrémaux bornés à été développée dans les espace de Hardy-Sobolev (voir [17]).

3.2 PROBLÈME EXTRÊMAL BORNÉ DANS $H^{m,2}(G)$

L'étude des problèmes extrémaux bornés dans le cadre des espaces de Hardy-Sobolev $H^{m,2}(G)$ présente une analogie avec celui que nous venons d'exposer dans $H^2(G)$. Nous commençons par prouver le résultat de densité suivant :

Théorème 3.1 *Si I est un arc fermé strictement contenu dans ∂G , alors les traces sur I des fonctions de $H^{m,2}(G)$ sont denses dans $W^{m,2}(I)$.*

Preuve

En se référant à [17] et pour $m = 1$, l'espace $H_{|I}^{1,2}(\mathbb{D})$ est dense dans $W^{1,2}(I)$. Une démonstration analogue prouve qu'on peut généraliser ce résultat de densité pour $m \geq 1$. D'après la somme directe (3.1.2), l'espace $H^{m,2}(\mathbb{D})$ est incluse dans $H^{m,2}(G)$, d'où la densité de $H_{|I}^{m,2}(G)$ dans $W^{m,2}(I)$. ■

Donc, comme dans le cas de l'espace de Hardy d'ordre 0, l'approximant garde le même comportement sur $J = \partial G \setminus I$:

Proposition 3.1 *Soit $f \in W^{m,2}(\partial G)$ et soit (g_n) une suite de fonctions de $H^{m,2}(G)$ convergeant vers f dans $W^{m,2}(\partial G)$. Si f n'est pas la trace sur I d'une fonction de $H^{m,2}(G)$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n\|_{W^{m,2}(J)} = \infty$.*

Preuve

On a la suite (g_n) converge vers f dans $W^{m,2}(\partial G)$, donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f^{(m)} - g_n^{(m)}\|_{L^2(I)} = 0$. Or, si f n'est pas la trace sur I d'une fonction dans $H^{m,2}(G)$, alors $f^{(m)}$ n'est pas la trace sur I d'une fonction dans $H^2(G)$ et par suite, en appliquant la proposition 2.3 pour la suite $g_n^{(m)}$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n^{(m)}\|_{L^2(J)} = \infty$, et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n\|_{W^{m,2}(J)} = \infty$. ■

Comme dans la proposition 2.3, ce résultat suggère donc l'adjonction d'une contrainte sur la norme $W^{m,2}(J)$ de l'approximant qui rend le problème (BEP) $_m$ suivant bien posé :

Étant données $f \in W^{m,2}(I)$ et $M > 0$, et soit $f_1 \in W^{m,2}(J)$. On définit l'ensemble suivant :

$$S_M^m := \{ \psi_I, \psi \in H^{m,2}(G); \|\psi - f_1\|_{W^{m,2}(J)} \leq M \}.$$

$$(BEP)_m \left\{ \begin{array}{l} \text{On cherche } g \in H^{m,2}(G), g \in S_M^m \text{ telle que} \\ \|f - g\|_{W^{m,2}(I)} = \inf_{\psi \in S_M^m} \|f - \psi\|_{W^{m,2}(I)}. \end{array} \right.$$

3.3 EXISTENCE ET UNICITÉ DE LA SOLUTION

Nous décrivons ici la procédure de calcul de la solution du problème extrémal borné dans les espaces de Hardy–Sobolev.

Théorème 3.2 *Soit $f \in W^{m,2}(I)$. Pour toute constante positive M , il existe une unique fonction $g_m \in H^{m,2}(G)$ solution du problème $(BEP)_m$. De plus, si $f \notin H^{m,2}(G)_I$ alors $\|g_m - f_1\|_{W^{m,2}(J)} = M$.*

Preuve

S_M^m est un sous ensemble convexe de $W^{m,2}(I)$. Montrons qu'il est fermé. Soit (ψ_n) une suite de fonctions de S_M^m convergente vers une fonction ψ dans $W^{m,2}(I)$. La suite (ψ_n) de $H^{m,2}(G)$ est bornée dans l'espace de Hilbert $W^{m,2}(\partial G)$, elle admet donc une sous-suite (ψ_{n_k}) qui converge faiblement vers une fonction $\tilde{\psi}$ dans $W^{m,2}(\partial G)$, et donc $\tilde{\psi} \in H^{m,2}(G)$, puisque $H^{m,2}(G)$ est un espace fermé de $W^{m,2}(\partial G)$ et (ψ_{n_k}) est une suite de $W^{m,2}(\partial G)$. D'autre part, les suites $(\psi_{n_k|_I})$ et $(\psi_{n_k|_J})$ convergent faiblement dans $W^{m,2}(I)$ et $W^{m,2}(J)$ respectivement. Ainsi $\tilde{\psi}|_I = \psi$ p.p et $\|\tilde{\psi} - f_1\|_{W^{m,2}(J)} \leq M$, puisque les boules étant faiblement fermés dans $W^{m,2}(J)$. Ceci implique $\tilde{\psi} \in S_M^m$. Ainsi S_M^m est un sous-ensemble fermé non vide de $W^{m,2}(I)$. Donc la fonction $g_m = P_{W^{m,2}(I)}f$ est l'unique solution du problème $(BEP)_m$.

Montrons maintenant que la solution sature la contrainte, $\|g_m - f_1\|_{W^{m,2}(J)} = M$, si f n'est pas la trace sur I d'une fonction dans $H^{m,2}(G)$. Considérons l'application suivante :

$$\begin{aligned} \xi : W^{m,2}(I) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \psi &\mapsto \|f - \psi\|_{W^{m,2}(I)} \end{aligned}$$

ξ est de classe C^1 sur $W^{m,2}(I)$, et pour tout $\psi, u \in W^{m,2}(I)$, $D_\psi \xi(u) = 2Re \langle f - \psi, u \rangle_{m,I}$. Supposons que $\|g_m - f_1\|_{W^{m,2}(J)} < M$. Dans ce cas, g_m est un point intérieur de S_M^m dans $H^{m,2}(G)$ où ξ atteint son minimum sur S_M^m , donc g_m est un point critique de ξ sur S_M^m . On a donc, pour tout $u \in H^{m,2}(G)$, $D_{g_m} \xi(u) = 2Re \langle f - g_m, u \rangle_{m,I} = 0$. De la continuité du produit scalaire sur $W^{m,2}(I)$ et de la densité de $H^{m,2}(G)|_I$ dans $W^{m,2}(I)$, on en déduit que $Re \langle f - g_m, u \rangle_{m,I} = 0$ pour tout $u \in W^{m,2}(I)$. En particulier, si on prend $u = f - g_m$, on obtient $g_m = f$ p.p sur I . Ceci contredit le fait que f n'est pas la trace sur I d'une fonction de $H^{m,2}(G)$. ■

3.4 CARACTÉRISATION DE LA SOLUTION

Dans cette section, nous allons donner un procédé constructif dans les espaces de Hardy–Sobolev, où on explicite l'approximant g_m dans ce cas Hilbertien.

Notation : pour $\gamma \in W^{m,2}(I)$ et $\delta \in W^{m,2}(J)$, on notera par

$$\gamma^I := (\gamma \vee 0|_J, \dots, \gamma^{(m)} \vee 0|_J) \quad \text{et} \quad \delta^J := (0|_I \vee \delta, \dots, 0|_I \vee \delta^{(m)}). \quad (3.4.1)$$

Théorème 3.3 *Sous les conditions du théorème 3.2, il existe un opérateur $\mathcal{T} : L^2(\partial G) \times \dots \times L^2(\partial G) \longrightarrow H^{m,2}(\partial G)$, telle que la solution du problème (BEP)_m est donnée par l'équation spectrale suivante :*

$$g_m = (Id + \lambda\Phi)^{-1} \mathcal{T} [f^I + (1 + \lambda)f_1^J], \quad (3.4.2)$$

où Φ est définie par

$$\begin{aligned} \Phi : H^{m,2}(G) &\rightarrow H^{m,2}(G) \\ h &\mapsto \mathcal{T} \left(0 \vee h|_J, 0 \vee h'|_J, \dots, 0 \vee h^{(m)}|_J \right) \end{aligned}$$

Preuve

On note ∂S_M l'ensemble frontière de S_M :

$$\partial S_M = \{h \in H^{m,2}(G); \quad \|f_1 - h\|_{W^{m,2}(J)} = M\},$$

et on considère les applications suivantes :

$$\begin{aligned} \varsigma : H^{m,2}(G) &\rightarrow \mathbb{R} & \text{et} & & \zeta : H^{m,2}(G) &\rightarrow \mathbb{R} \\ h &\mapsto \|f - h\|_{W^{m,2}(I)} & & & h &\mapsto \|f_1 - h\|_{W^{m,2}(J)}. \end{aligned}$$

L'application ζ est de classe C^1 et pour $h \in H^{m,2}(G)$, $u \in H^{m,2}(G)$,

$$D_h\zeta(u) = 2\text{Re} \langle f_1 - h, u \rangle_{W^{m,2}(J)}.$$

Pour tout $h \neq 0$, $D_h\zeta$ est surjective. En effet, l'application $D_h\zeta$ est une forme linéaire continue sur $H^{m,2}(G)$, donc d'après le théorème de représentation de Riesz [30], il existe un unique élément $g \in H^{m,2}(G)$ tel que, pour tout $u \in H^{m,2}(G)$, $D_h\zeta(u) = \langle g, u \rangle_{W^{m,2}(J)}$. Soit maintenant, un élément $y \in \mathbb{R}$, pour $u = yg / \|g\|_{W^{m,2}(J)}^2$, on a $D_h\zeta(u) = y$, d'où la surjectivité.

Il s'ensuit alors que ζ est une submersion sur $H^{m,2}(G) \setminus \{0\}$, et donc $\text{Ker} D_{g_m}\zeta$, qui est un sous espace fermé de $H^{m,2}(G)$, est un hyperplan et $\partial S_M = \zeta^{-1}(M^2)$ est une sous variété de classe C^1 de $H^{m,2}(G)$ de codimension 1 ([71, II,2,prop.2]), et $T_M(g_m) = \text{Ker} D_{g_m}\zeta$, l'espace tangent à ∂S_M en g_m , est un hyperplan de $H^{m,2}(G)$.

D'autre part, l'application ς est de classe C^1 sur ∂S_M admettant un point critique g_m sur ∂S_M , solution du problème (BEP)_m donnée par le théorème 3.2, et donc

$$\text{Re} \langle f - g_m, u \rangle_{W^{m,2}(I)} = 0, \quad \forall u \in T_M(g_m) = \text{Ker} D_{g_m}\varsigma,$$

d'où

$$T_M(g_m) = \text{Ker} D_{g_m} \varsigma \subset \text{Ker} D_{g_m} \zeta .$$

Or, $T_M(g_m)$ est un hyperplan et l'application ς n'est pas une submersion sur $H^{m,2}(G) \setminus \{0\}$ (puisqu'elle admet un point critique non nul), donc il existe un réel α tel que

$$\forall u \in H^{m,2}(G), \quad D_{g_m} \varsigma(u) = \alpha D_{g_m} \zeta(u),$$

ou encore

$$\forall u \in H^{m,2}(G), \quad \text{Re} \langle f - g_m, u \rangle_{W^{m,2}(I)} = \alpha \text{Re} \langle f_1 - g_m, u \rangle_{W^{m,2}(J)}. \quad (3.4.3)$$

En remplaçant u par $iu \in H^{m,2}(G)$ dans l'équation (3.4.3),

$$\forall u \in H^{m,2}(G), \quad \text{Im} \langle f - g_m, u \rangle_{W^{m,2}(I)} = \alpha \text{Im} \langle f_1 - g_m, u \rangle_{W^{m,2}(J)},$$

et par suite,

$$\forall u \in H^{m,2}(G), \quad \langle f - g_m, u \rangle_{W^{m,2}(I)} = \alpha \langle f_1 - g_m, u \rangle_{W^{m,2}(J)} .$$

On déduit alors, $\forall u \in H^{m,2}(G)$

$$\langle g_m, u \rangle_{W^{m,2}(\partial G)} + (1 + \alpha) \langle f_1 - g_m, u \rangle_{W^{m,2}(J)} = \langle f, u \rangle_{W^{m,2}(I)} + \langle f_1, u \rangle_{W^{m,2}(J)}. \quad (3.4.4)$$

Soit l'application

$$\begin{aligned} \theta : H^{m,2}(G) &\rightarrow \mathbb{R} \\ h &\mapsto \sum_{k=0}^m \langle f^{(k)} \vee 0|_J, h^{(k)} \rangle_{L^2(\partial G)}. \end{aligned}$$

La fonction θ est une forme linéaire continue, donc d'après le théorème de représentation de Riesz [30], il existe un unique élément $g \in H^{m,2}(G)$ telle que

$$\forall h \in H^{m,2}(G), \quad \theta(h) = \langle g, h \rangle_{W^{m,2}(\partial G)},$$

et donc, l'élément $(g, \dots, g^{(m)}) \in H^2(\partial G) \times \dots \times H^2(\partial G)$ représente la projection orthogonale de f^I sur $\mathcal{U} := \varphi(H^{m,2}(G))$, avec φ l'isométrie linéaire définie par

$$\begin{aligned} \varphi : H^{m,2}(G) &\rightarrow L^2(\partial G) \times \dots \times L^2(\partial G) \\ \vartheta &\mapsto (\vartheta, \vartheta', \dots, \vartheta^{(m)}). \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : L^2(\partial G) \times \dots \times L^2(\partial G) &\rightarrow H^{m,2}(G) \\ g &\mapsto \varphi^{-1} P_{\mathcal{U}}(g), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Phi : H^{m,2}(G) &\rightarrow H^{m,2}(G) \\ g &\mapsto \mathcal{T}(g^J).\end{aligned}$$

On a, pour tout $h \in H^{m,2}(G)$,

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{T}(f^I), h \rangle_{W^{m,2}(\partial G)} &= \langle \varphi^{-1}P_{\mathcal{U}}(f^I), h \rangle_{W^{m,2}(\partial G)} = \langle P_{\mathcal{U}}(f^I), \varphi(h) \rangle_{W^{m,2}(\partial G)} \\ &= \langle f^I, (h, \dots, h^{(m)}) \rangle_{W^{m,2}(\partial G)} = \langle f, h \rangle_{W^{m,2}(I)}.\end{aligned}$$

De même, pour tout $h \in H^{m,2}(G)$

$$\langle \mathcal{T}(f_1^J), h \rangle_{W^{m,2}(\partial G)} = \langle f_1, h \rangle_{W^{m,2}(J)}.$$

L'équation (3.4.4) s'écrit alors,

$$g_m + (1 + \alpha)\mathcal{T}(f_1^J - g_m^J) = \mathcal{T}(f^I) + \mathcal{T}(f_1^J), \quad (3.4.5)$$

ou encore, pour $\lambda = -1 - \alpha$,

$$(Id + \lambda\Phi)g_m = \mathcal{T}(f^I + (1 + \lambda)f_1^J). \quad (3.4.6)$$

Vérifions maintenant que $\lambda > -1$. On a

$$\begin{aligned}&\langle (Id + \lambda\Phi)(g_m - \mathcal{T}(f^J)), g_m - \mathcal{T}(f^J) \rangle_{W^{m,2}(\partial G)} \\ &= \|g_m - \mathcal{T}(f^J)\|_{W^{m,2}(\partial G)}^2 + \lambda \langle \Phi(g_m - \mathcal{T}(f^J)), g_m - \mathcal{T}(f^J) \rangle_{W^{m,2}(\partial G)} \\ &= \|g_m - \mathcal{T}(f^J)\|_{W^{m,2}(\partial G)}^2 + \lambda M^2 = \|g_m\|_{W^{m,2}(I)}^2 + (1 + \lambda)M^2.\end{aligned}$$

Or

$$(Id + \lambda\Phi)(g_m - \mathcal{T}(f^J)) = \mathcal{T}(f^I + (1 + \lambda)f_1^J) - (Id + \lambda\Phi)(\mathcal{T}(f^J)),$$

et donc

$$\begin{aligned}&\langle (Id + \lambda\Phi)(g_m - \mathcal{T}(f^J)), g_m - \mathcal{T}(f^J) \rangle_{W^{m,2}(\partial G)} \\ &= \langle \mathcal{T}(f^I + (1 + \lambda)f_1^J), g_m - \mathcal{T}(f^J) \rangle_{W^{m,2}(\partial G)} \\ &\quad - \langle (Id + \lambda\Phi)\mathcal{T}(f^J), g_m - \mathcal{T}(f^J) \rangle_{W^{m,2}(\partial G)} \\ &= \langle f, g_m \rangle_{W^{m,2}(I)}.\end{aligned}$$

En déduire alors

$$\|g_m\|_{W^{m,2}(I)}^2 + (1 + \lambda)M^2 = \langle f, g_m \rangle_{W^{m,2}(I)},$$

c'est à dire

$$(1 + \lambda)M^2 = \langle f - g_m, g_m \rangle_{W^{m,2}(I)}.$$

En utilisant la caractérisation de la projection :

$$\langle f - g_m, w - g_m \rangle_{W^{m,2}(I)} \leq 0$$

pour tout $w \in \partial S_{M|I}^m$, pour déduire que

$$\langle f - g_m, g_m \rangle_{W^{m,2}(I)} \geq 0.$$

Ainsi $\lambda > 1$ puisque les noyaux des applications ζ et ς ne sont pas dégénérés.

D'autre part, l'opérateur Φ est caractérisé par la propriété suivante : pour tout $g, h \in H^{m,2}(G)$,

$$\langle \Phi(g), h \rangle_{W^{m,2}(\partial G)} = \langle g, h \rangle_{W^{m,2}(J)}, \quad (3.4.7)$$

et donc, $\langle \Phi(g_m), g_m \rangle_{W^{m,2}(\partial G)} = \|g_m\|_{W^{m,2}(J)}^2 = M^2 \geq 0$, et par suite l'opérateur linéaire autoadjoint Φ est monotone, injectif et $\|\Phi\| \leq 1$. En particulier, son spectre $\sigma(\Phi) \subset [0, 1]$. Ainsi, $(Id + \lambda\Phi)$ est inversible pour tout $\lambda > -1$. L'équation (3.4.6) devient alors

$$g_m = (Id + \lambda\Phi)^{-1} \mathcal{T} [f^I + (1 + \lambda)f_1^J]. \quad (3.4.8)$$

■

Comme dans le Chapitre 2, on va exploiter la formule (3.4.8) pour déterminer l'expression des éléments de la matrice infinie associée à $Id + \lambda\Phi$ relativement à la base orthogonale de $H^{m,2}(G)$ des $\{e^{in\theta}, n \in \mathbb{Z}\}$.

Théorème 3.4 *Les éléments de la matrice infinie associée à Φ , dans la base orthogonale de $H^{m,2}(G)$ des $\{e^{in\theta}, n \in \mathbb{Z}\}$,*

$$\Phi_{n,p} = \begin{cases} 1 - \frac{w_{m,n}\theta_0}{\pi l_{m,n}} & \text{si } p = n \\ \frac{\nu_{m,n,p}}{l_{m,n}} \frac{\sin(p-n)\theta_0}{\pi(p-n)} & \text{si } p \neq n \end{cases}$$

avec $w_{m,n}$ et $l_{m,n}$ sont donnés par les formules (3.1.1) et

$$\nu_{m,n,p} = 1 + \sum_{k=1}^m \prod_{q=0}^{k-1} (p-q)(n-q).$$

Preuve

Pour tout $h \in H^{m,2}(G)$ on a

$$\langle \Phi g_m, h \rangle_{W^{m,2}(\partial G)} = \langle g_m, h \rangle_{W^{m,2}(J)}. \quad (3.4.9)$$

Soit $g_m(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n z^n$ pour $z \in G$. On applique la formule (3.4.9) pour des fonction h éléments de la base $\{e_{m,n}(z), n \in \mathbb{Z}\}$, on a

$$\langle \sum_{p \in \mathbb{Z}} c_p z^p, e_{m,n}(z) \rangle_{W^{m,2}(\partial G)} = \langle \sum_{p \in \mathbb{Z}} g_p z^p, e_{m,n}(z) \rangle_{W^{m,2}(J)},$$

donc

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}} c_p \langle z^p, z^n \rangle_{W^{m,2}(\partial G)} = \sum_{p \in \mathbb{Z}} g_p \langle z^p, z^n \rangle_{W^{m,2}(J)}. \quad (3.4.10)$$

On a

$$\begin{aligned} \langle z^p, z^n \rangle_{L^2(\partial G)} &= \frac{1 + s^{p+n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(p-n)\theta} d\theta \\ &= \begin{cases} 1 + s^{2n} & \text{si } p = n \\ 0 & \text{si } p \neq n, \end{cases} \end{aligned}$$

et pour $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} \langle (z^p)^{(k)}, (z^n)^{(k)} \rangle_{L^2(\partial G)} &= \frac{1}{2\pi} (1 + s^{p+n-2k}) \left(\prod_{q=0}^{k-1} (p-q)(n-q) \right) \int_0^{2\pi} e^{i(p-n)\theta} d\theta \\ &= \begin{cases} (1 + s^{2n-2k}) \prod_{q=0}^{k-1} (n-q)^2 & \text{si } p = n \\ 0 & \text{si } p \neq n. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc

$$\langle z^p, z^n \rangle_{W^{m,2}(\partial G)} = \begin{cases} l_{m,n} & \text{si } p = n \\ 0 & \text{si } p \neq n. \end{cases}$$

D'autre part

$$\langle z^p, z^n \rangle_{W^{m,2}(J)} = \langle z^p, z^n \rangle_{W^{m,2}(\partial G)} - \langle z^p, z^n \rangle_{W^{m,2}(I)} .$$

On a

$$\begin{aligned} \langle z^p, z^n \rangle_{W^{m,2}(I)} &= \langle \chi_I z^p, \chi_I z^n \rangle_{L^2(\mathbb{T})} + \sum_{k=1}^m \langle (\chi_I z^p)^{(k)}, (\chi_I z^n)^{(k)} \rangle_{L^2(\mathbb{T})} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(1 + \sum_{k=1}^m \prod_{q=0}^{k-1} (p-q)(n-q) \right) \int_{-\theta_0}^{\theta_0} e^{i(p-n)\theta} d\theta \\ &= \begin{cases} w_{m,n} \frac{\theta_0}{\pi} & \text{si } p = n \\ \nu_{m,n,p} \frac{\sin(p-n)\theta_0}{\pi(p-n)} & \text{si } p \neq n, \end{cases} \end{aligned}$$

donc

$$\langle z^p, z^n \rangle_{W^{m,2}(J)} = \begin{cases} w_{m,n} \left(1 - \frac{\theta_0}{\pi} \right) + \mu_{m,n} s^{2n} & \text{si } p = n \\ -\nu_{m,n,p} \frac{\sin(p-n)\theta_0}{\pi(p-n)} & \text{si } p \neq n. \end{cases}$$

De l'équation (3.4.10), on tire alors

$$c_n l_{m,n} = g_n \left(w_{m,n} \left(1 - \frac{\theta_0}{\pi} \right) + \mu_{m,n} s^{2n} \right) - \sum_{p \neq n} g_p \nu_{m,n,p} \frac{\sin(p-n)\theta_0}{\pi(p-n)},$$

et par suite

$$\begin{aligned} \Phi g_m(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{l_{m,n}} \left[g_n \left(w_{m,n} \left(1 - \frac{\theta_0}{\pi} \right) + \mu_{m,n} s^{2n} \right) - \sum_{p \neq n} g_p \nu_{m,n,p} \frac{\sin(p-n)\theta_0}{\pi(p-n)} \right] z^n \\ &= g_m(z) - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{l_{m,n}} \left[w_{m,n} \frac{\theta_0}{\pi} g_n + \sum_{p \neq n} g_p \nu_{m,n,p} \frac{\sin(p-n)\theta_0}{\pi(p-n)} \right] z^n. \end{aligned}$$

■

On détermine maintenant les expressions des éléments des matrices infinies associées à $\mathcal{T}(f^I)$ et $\mathcal{T}(f^J)$. Soit pour une fonction $h \in W^{m,2}(G)$, $a_n(h)$ le $n^{\text{ème}}$ coefficient de Fourier de h , $n \in \mathbb{Z}$ et pour $k = 0, \dots, m$, on pose

$$\chi_I \tilde{f}_k = \begin{cases} f^{(k)} & \text{sur } I \\ 0 & \text{sur } J, \end{cases} \quad \text{et} \quad \chi_J \tilde{f}_{1,k} = \begin{cases} f_1^{(k)} & \text{sur } J \\ 0 & \text{sur } I. \end{cases}$$

Proposition 3.2

$$\mathcal{T}(f^I)(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{l_{m,n}} \left[a_n(\chi_I \tilde{f}_0) + \sum_{k=1}^m \left(\prod_{q=0}^{k-1} (n-q) \right) a_{n-k}(\chi_I \tilde{f}_k) \right] z^n.$$

Preuve

On a pour tout $h \in H^{m,2}(G)$,

$$\langle \mathcal{T}(f^I), h \rangle_{W^{m,2}(\partial G)} = \langle f, h \rangle_{W^{m,2}(I)}.$$

On pose $\mathcal{T}(f^I)(z) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} c_p z^p \in H^{m,2}(G)$, alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$\langle \mathcal{T}(f^I), e_{m,n}(z) \rangle_{W^{m,2}(\partial G)} = \langle f, e_{m,n}(z) \rangle_{W^{m,2}(I)},$$

et donc

$$\left\langle \sum_{p \in \mathbb{Z}} c_p z^p, z^n \right\rangle_{W^{m,2}(\partial G)} = \langle \chi_I \tilde{f}_0, z^n \rangle_{L^2(\partial G)} + \sum_{k=1}^m \left\langle \chi_I \tilde{f}_k, \left(\prod_{q=0}^{k-1} (n-q) \right) z^{n-k} \right\rangle_{L^2(\partial G)},$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} & \sum_{p \in \mathbb{Z}} c_p \left[\langle z^p, z^n \rangle_{L^2(\partial G)} + \sum_{k=1}^m \left(\prod_{q=0}^{k-1} (p-q)(n-q) \right) \langle z^{p-k}, z^{n-k} \rangle_{L^2(\partial G)} \right] \\ &= \langle \chi_I \tilde{f}_0, z^n \rangle_{L^2(\partial G)} + \sum_{k=1}^m \left(\prod_{q=0}^{k-1} (n-q) \right) \langle \chi_I \tilde{f}_k, z^{n-k} \rangle_{L^2(\partial G)}, \\ & c_n l_{m,n} = \langle \chi_I \tilde{f}_0, z^n \rangle_{L^2(\partial G)} + \sum_{k=1}^m \left(\prod_{q=0}^{k-1} (n-q) \right) \langle \chi_I \tilde{f}_k, z^{n-k} \rangle_{L^2(\partial G)}. \end{aligned}$$

D'une part

$$\begin{aligned} \langle \chi_I \tilde{f}_0, z^n \rangle_{L^2(\partial G)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi_I \tilde{f}_0(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} f(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta := a_n(\chi_I \tilde{f}_0), \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\langle \chi_I \tilde{f}_k, z^{n-k} \rangle_{L^2(\partial G)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi_I \tilde{f}_k(e^{i\theta}) e^{-i(n-k)\theta} d\theta = a_{n-k}(\chi_I \tilde{f}_k).$$

Donc

$$c_n l_{m,n} = a_n(\chi_I \tilde{f}_0) + \sum_{k=1}^m \left(\prod_{q=0}^{k-1} (n-q) \right) a_{n-k}(\chi_I \tilde{f}_k),$$

et finalement

$$\mathcal{T}(f^I)(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{l_{m,n}} \left[a_n(\chi_I \tilde{f}_0) + \sum_{k=1}^m \left(\prod_{q=0}^{k-1} (n-q) \right) a_{n-k}(\chi_I \tilde{f}_k) \right] z^n.$$

■

Proposition 3.3 *Soit* $K := \mathbb{T} \setminus I$,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(f_1^J)(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{l_{m,n}} \left[a_n(\chi_K \tilde{f}_{1,0}) + s^n a_n(\chi_{s\mathbb{T}} \tilde{f}_{1,0}) \right] z^n \\ &+ \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{l_{m,n}} \left[\sum_{k=1}^m \left(\prod_{q=0}^{k-1} (n-q) \right) \left(a_{n-k}(\chi_K \tilde{f}_{1,k}) + s^{n-k} a_{n-k}(\chi_{s\mathbb{T}} \tilde{f}_{1,k}) \right) \right] z^n. \end{aligned}$$

Preuve

De même, on a

$$\langle \mathcal{T}(f_1^J), h \rangle_{W^{m,2}(\partial G)} = \langle f_1, h \rangle_{W^{m,2}(J)}, \quad \forall h \in H^{m,2}(G).$$

On pose $\mathcal{T}(f_1^J) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} c_p z^p \in H^{m,2}(G)$, alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\langle \mathcal{T}(f_1^J), e_{m,n}(z) \rangle_{m,\partial G} = \langle f_1, e_{m,n}(z) \rangle_{W^{m,2}(J)},$$

et donc

$$\langle \sum_{p \in \mathbb{Z}} c_p z^p, z^n \rangle_{W^{m,2}(\partial G)} = \langle \chi_J \tilde{f}_{1,0}, z^n \rangle_{L^2(\partial G)} + \sum_{k=1}^m \langle \chi_J \tilde{f}_{1,k}, \left(\prod_{q=0}^{k-1} (n-q) \right) z^{n-k} \rangle_{L^2(\partial G)}.$$

On obtient finalement,

$$\begin{aligned} c_n l_{m,n} &= a_n(\chi_K \tilde{f}_{1,0}) + s^n a_n(\chi_{s\mathbb{T}} \tilde{f}_{1,0}) \\ &+ \sum_{k=1}^m \left(\prod_{q=0}^{k-1} (n-q) \right) \left[a_{n-k}(\chi_K \tilde{f}_{1,k}) + s^{n-k} a_{n-k}(\chi_{s\mathbb{T}} \tilde{f}_{1,k}) \right]. \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Dans le cas particulier où $I = \mathbb{T}$, ($\theta_0 = \pi$), l'opérateur $\Phi = P_{H^{m,2}(G)} P_{W^{m,2}(s\mathbb{T})}$ est diagonalisable et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction $z \rightarrow z^n$ est un vecteur propre pour l'opérateur Φ , qui correspond à la valeur propre $\frac{w_{m,n} s^{2n}}{l_{m,n}}$. La solution g_m peut être déduite directement à partir du théorème 3.4, et exprimée d'une manière explicite en développement en série de Fourier relativement à la base orthogonale $\{z^n, n \in \mathbb{Z}\}$. D'autre part, la propriété de diagonalisation de l'opérateur de Φ , dans ce cas, rend plus simple le calcul de la solution g_m .

Lemme 3.1 Soit $h \in W^{m,2}(\partial G)$ donnée par

$$h(e^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{in\theta} \quad \text{où} \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} w_{m,n} |a_n|^2 < \infty,$$

$$\text{et} \quad h(se^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n s^n e^{in\theta} \quad \text{où} \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mu_{m,n} s^{2n} |b_n|^2 < \infty.$$

Alors

$$P_{H^{m,2}(G)} h(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{w_{m,n} a_n + \mu_{m,n} s^{2n} b_n}{l_{m,n}} z^n, \quad z \in G. \quad (3.4.11)$$

Preuve

Soit $h \in W^{m,2}(\partial G)$. Puisque $P_{H^{m,2}(G)} h(z) \in H^{m,2}(G)$, alors

$$P_{H^{m,2}(G)} h(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n z^n, \quad \{c_n\} \subset \mathbb{C}.$$

Or, la famille $\left\{ e_{m,n}(z) = \frac{z^m}{\sqrt{l_{m,n}}} \right\}$ est une base totale de l'espace de Hilbert $H^{m,2}(G)$, donc $h - P_{H^{m,2}(G)} h \perp e_{m,n}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

D'autre part

$$h - P_{H^{m,2}(G)} h(e^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (a_n - c_n) e^{in\theta} \quad \text{et} \quad h - P_{H^{m,2}(G)} h(se^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (b_n - c_n) s^n e^{in\theta}.$$

Donc

$$\begin{aligned} 0 &= \langle h - P_{H^{m,2}(G)} h, e_m(z) \rangle_{W^{m,2}(\partial G)} \\ &= \langle h - P_{H^2(G)} h, e_{m,n}(z) \rangle_{W^{m,2}(\mathbb{T})} + \langle h - P_{H^2(G)} h, e_{m,n}(z) \rangle_{W^{m,2}(\mathbb{T})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{l_{m,n}}} [w_{m,n} (a_n - c_n) + \mu_{m,n} (b_n - c_n) s^{2m}]. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$c_n = \frac{w_{m,n} a_n + \mu_{m,n} s^{2n} b_n}{l_{m,n}}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{Z}.$$

■

Lemme 3.2 Soit $h \in H^{m,2}(\partial G)$ donnée par

$$h(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n z^n \quad \forall z \in G,$$

pour une suite de nombre complexe $(c_n)_n$. Alors

$$\Phi h(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\mu_{m,n} s^{2n} c_n}{l_{m,n}} z^n. \quad (3.4.12)$$

Preuve

Le résultat se déduit directement du lemme 3.1 pour $a_n = 0$ et $b_n = c_n$. ■

La solution dans ce cas est donnée d'une manière explicite par le théorème suivant :

Théorème 3.5 *Pour $f \in W^{m,2}(\mathbb{T})$ et $f_1 \in W^{m,2}(s\mathbb{T})$, soient*

$$f(e^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{in\theta} \notin H^{m,2}(G)|_I \quad \text{et} \quad f_1(se^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n s^n e^{in\theta}.$$

Alors

$$g_m(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{w_{m,n} a_n + (1 + \lambda) \mu_{m,n} s^{2n} b_n}{w_{m,n} + (1 + \lambda) \mu_{m,n} s^{2n}} z^n, \quad (3.4.13)$$

où $\lambda > -1$ est l'unique constante telle que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{w_{m,n}^2 |a_n - b_n|^2 s^{2n}}{(w_{m,n} + (1 + \lambda) \mu_{m,n} s^{2n})^2} = M^2.$$

Preuve

D'après la formule (3.4.6), la solution g_m est donnée par

$$(1 + \lambda \Phi) g = P_{H^{m,2}(G)} [f^{\mathbb{T}} \vee (1 + \lambda) f_1^{s\mathbb{T}}],$$

où $f^{\mathbb{T}}$ et $f_1^{s\mathbb{T}}$ sont définis comme dans (3.4.1).

Notons $h = f^{\mathbb{T}} \vee (1 + \lambda) f_1^{s\mathbb{T}} \in W^{m,2}(\partial G)$. D'après le lemme 3.1, pour tout $z \in G$

$$P_{H^{m,2}(G)} h(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{w_{m,n} a_n + (1 + \lambda) \mu_{m,n} s^{2n} b_n}{1 + s^{2n}} z^n.$$

D'autre part, posons $g_m(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n z^n$, $z \in G$, d'après le lemme 3.2, on a

$$\Phi g(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\mu_{m,n} s^{2n} c_n}{l_{m,n}} z^n.$$

Nous développons cette expression dans la formule (3.4.14), on obtient

$$c_n + \frac{\lambda \mu_{m,n} s^{2n} c_n}{w_{m,n} + \mu_{m,n} s^{2n}} = \frac{w_{m,n} a_n + (1 + \lambda) \mu_{m,n} s^{2n} b_n}{1 + s^{2n}},$$

d'où

$$c_n = \frac{w_{m,n} a_n + (1 + \lambda) \mu_{m,n} s^{2n} b_n}{w_{m,n} + (1 + \lambda) \mu_{m,n} s^{2n}}.$$

D'après le théorème 3.2, le paramètre $\lambda > -1$ est déterminé par la condition

$$\|g_m - f_1\|_{W^{m,2}(s\mathbb{T})} = M,$$

et donc

$$M^2 = \left\| \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{w_{m,n} (a_n - b_n)}{w_{m,n} + (1 + \lambda) \mu_{m,n} s^{2n}} z^n \right\|_{W^{m,2}(s\mathbb{T})}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{w_{m,n}^2 |a_n - b_n|^2 s^{2n}}{(w_{m,n} + (1 + \lambda) \mu_{m,n} s^{2n})^2}.$$

■

Nous arrivons maintenant à l'objectif principal de ce chapitre dans lequel on a abordé les problèmes extrémaux bornés dans les classes de Hardy-Sobolev. Il s'agit d'améliorer le résultat de continuité de la solution par rapport aux données présentées dans le théorème 2.4 du chapitre 2.

3.5 CONTINUITÉ DE LA SOLUTION PAR RAPPORT AUX DONNÉES

Comme dans la section 2.3, nous étudions les propriétés de continuité par rapport aux données f et M des solutions des problème (BEP) dans les espaces de Hardy-Sobolev. Le théorème 2.4 nous a montré que l'extension dans les espaces de Hardy d'ordre 0 ne fournit pas un cadre approprié pour approcher aussi près les données sur la partie J de la frontière. L'étude précédente va nous permettre d'établir un résultat de convergence forte pour l'approximant. En effet, soit g_m l'application définie par :

$$g_m : W^{m,2}(I) \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow H^{m,2}(G)$$

$$(f, M) \mapsto g_m(f, M),$$

où $g_m(f, M)$ est la solution du problème (BEP _{m}) associé aux données f et M . Soit $\mathcal{D}_m = \{ (h, M) \in H^{m,2}(G)|_I \times \mathbb{R}_+^* \text{ tq } \|h\|_{W^{m,2}(J)} < M \}$.

Théorème 3.6 *L'application g_m est continue sur $(W^{m,2}(I) \times \mathbb{R}_+^*) \setminus \mathcal{D}_m$, mais non sur tout l'ensemble $W^{m,2}(I) \times \mathbb{R}_+^*$. Cependant,*

$$\text{si } (f_n, M_n) \xrightarrow{W^{m,2}(I) \times \mathbb{R}_+^*} (f, M) \text{ alors } g_m(f_n, M_n) \rightharpoonup g_m(f, M) \text{ dans } H^{m,2}(G),$$

tandis que $g_m(f_n, M_n) \xrightarrow{W^{m,2}(I)} g_m(f, M)$. Ainsi, l'application g_m est continue sur $H^{m-1,2}(G)$.

Preuve

Soit g_m l'unique solution du problème (BEP _{m}) associé aux données f et M et on note $M_k = \|g_m^{(k)}\|_{L^2(J)}$. On montrera que pour tout $k = 0, \dots, m$, $g_m^{(k)}$ résout le problème (BEP) associé aux données $f^{(k)}$ et M_k . En effet, sinon, il existe un entier k_0 telle $g_m^{(k_0)}$ ne résout pas le problème (BEP) associée aux données $f^{(k_0)}$ et M_{k_0} . Soit h la solution du (BEP) associé aux données $f^{(k_0)}$ et M_{k_0} , et donc

$$\|h - f^{(k_0)}\|_{L^2(I)} \leq \|g_m^{(k_0)} - f^{(k_0)}\|_{L^2(I)} \quad \text{et} \quad \|h\|_{L^2(J)} \leq M_{k_0}.$$

Ce qui donne que la fonction ϕ définie par

$$\begin{cases} \phi^{(k)} = g_m^{(k)} & \text{si } k \neq k_0 \\ \phi^{(k_0)} = h \end{cases}$$

vérifie :

$$\phi \in H^{m,2}(\partial G), \quad \|\phi\|_{W^{m,2}(J)} = M \quad \text{et} \quad \|\phi - f\|_{W^{m,2}(I)} \leq \|g_m - f\|_{W^{m,2}(I)}.$$

Ce qui contredit la propriété d'optimalité de g_m . Finalement, si g_m résout le problème (BEP _{m}) associé aux données f et M alors pour tout $k = 0, \dots, m$, $g_m^{(k)}$ est solution du

problème (BEP) associé aux données $f^{(k)}$ et M_k . En appliquant maintenant le théorème 2.4 du chapitre 2, on déduit les résultats du théorème 3.6. ■

Nous proposons une autre alternative d'amélioration du résultat de continuité par rapport aux données consistante à appliquer le même problème d'extension (d'ordre zéro) aux dérivées successives des données disponibles puis en intégrant. Pour cela, on continue par noter g_m l'application

$$g_m : W^{m,2}(I) \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow H^{m,2}(G)$$

définie par :

$$[g_m(f, M)]^{(m)} = g(f^{(m)}, M), \quad [g_m(f, M)]^{(k)} = f^{(k)}(z_0), \quad 0 \leq k \leq m - 1$$

pour $z_0 \in I$ fixé. Notons que g est la solution du (BEP) d'ordre 0 et que $g_0 = g$.

Soit $\mathcal{D}_m = \{ (h, M) \in H^{m,2}(G)|_I \times \mathbb{R}_+^* \text{ tq } (h^{(m)}, M) \in \mathcal{D} \}$ où \mathcal{D} est défini dans la section 2.3 du chapitre 2. Un résultat analogue à celui du théorème 3.6 :

Théorème 3.7 *L'application g_m est continue sur $(W^{m,2}(I) \times \mathbb{R}_+^*) \setminus \mathcal{D}_m$, mais non sur tout l'ensemble $W^{m,2}(I) \times \mathbb{R}_+^*$. Cependant, g_m est continue sur $H^{m-1,2}(G)$.*

Preuve

On voit bien que la première assertion se déduit directement à partir du théorème 2.4 du chapitre 2 appliqué pour les m premières dérivées de la fonction g_m . Pour la deuxième, on utilise le fait que si (x_n) est une suite dans $W^{1,2}(J)$ telle que $x_n(z_0) = f(z_0)$, $z_0 \in J$, avec la dérivée x'_n converge faiblement vers $x' \in L^2(J)$, alors $x_n \rightarrow x$ en tout point de J , d'où, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, $\|x_n - x\|_{L^2(J)} \rightarrow 0$ et on applique de nouveau le théorème 2.4 aux dérivées itérées de g_m . ■

3.6 DISCUSSION

Après l'étude approfondie des (BEP) dans les espaces de Hardy, nous avons remarqué un manque de continuité de la solution, ce qui nous conduit à porter notre choix sur les espaces de Hardy-Sobolev vu leur nature permettant d'assurer un résultat de convergence forte. Le théorème 3.6 a permis d'obtenir un approximant proche des données non seulement sur I mais aussi sur la partie manquante des données. Cette approche s'impose dans la suite comme étant un puissant outil dans la construction des algorithmes robustes pour les appliquer au problème d'identification du coefficient de Robin (chapitre 5 et [63]).

Deuxième partie

Application de la technique au problème de corrosion : Stabilité et Robustesse

CHAPITRE 4

Stabilité pour un problème inverse de corrosion

4.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous discuterons une question de stabilité globale de type logarithmique pour le problème inverse d'identification du coefficient de Robin pour l'équation de Laplace. Sous des conditions suffisantes sur les données disponibles et avec des hypothèses a priori sur les données manquantes, nous établissons des résultats de stabilité logarithmique portant sur la solution du problème (BEP), comme les conséquences des propriétés des fonctions dans les classes de Hardy pondérées. Afin de les exploiter pour le problème inverse d'identification du coefficient de Robin, lequel est exprimé par le quotient de la dérivée de la partie imaginaire et la partie réelle de l'approximant sur la partie de la frontière inaccessible aux mesures, en termes d'erreurs sur les données de Dirichlet–Neumann [74].

Nous signalons que, dans le disque unité, Chaabane et al [33] et Fellah [54] ont établi un résultat de stabilité globale de type log-log en 2-D, utilisant la théorie d'analyse complexe et les transformations quasiconformes, leurs résultats de stabilité sont basés sur un résultat de contrôle de normes dans les espaces de Hardy-Sobolev [24].

4.2 FORMULATION DU PROBLÈME

Nous supposons que la température ou le potentiel électrique ne dépend pas de la coordonnée longitudinale, de sorte que nous traitons un problème bidimensionnel sur un domaine circulaire.

Plus généralement, soit $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^2$ un domaine doublement connexe, domaine avec un trou par exemple, de frontière régulière $\partial\mathcal{G} = \Gamma_i \cup \Gamma_e$ constitué par deux courbes de Jordan fermée Γ_i, Γ_e telle que $\Gamma_i \cap \Gamma_e = \emptyset$.

On considère le problème inverse suivant : étant données deux fonctions u_b et Φ définies

sur Γ_e , ou sur une partie mesurable de mesure non nulle de Γ_e , avec $\Phi \neq 0$, cherchons une fonction q , telle que la solution u de

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \mathcal{G} \\ u = u_b & \text{on } \Gamma_e \\ \partial_\nu u = \Phi & \text{on } \Gamma_e \end{cases} \quad (4.2.1)$$

soumise à la condition

$$\partial_\nu u + qu = 0 \text{ on } \Gamma_i, \quad (4.2.2)$$

sur le bord Γ_i , où ∂_ν représente la dérivée partielle par rapport à la normale sortante de $\partial\mathcal{G}$.

Les résultats de régularité et d'identifiabilité ont été exposés dans [34, 35] dans le cas du disque unité. Ces résultats peuvent être étendus dans le cas d'un domaine doublement connexe \mathcal{G} , qui assurent que si $\Phi \in L^2(\Gamma_e)$ et que q_1, q_2 sont dans une classe de fonctions admissibles sur Γ_i , alors les solutions associées u_1, u_2 du problème direct (4.2.3)

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \mathcal{G} \\ \partial_\nu u = \Phi & \text{on } \Gamma_e \\ \partial_\nu u + qu = 0 & \text{on } \Gamma_i, \end{cases} \quad (4.2.3)$$

sont dans l'espace de Sobolev $W^{1,2}(\mathcal{G})$; de plus, il suit que si $u_1|_{\Gamma_e} = u_2|_{\Gamma_e}$, alors $q_1 = q_2$ sur Γ_i .

4.2.1 Résultats classiques pour le problème direct

Nous allons généraliser les résultats de [34, 35], où les exposer sans développer les démonstrations. Pour cela, nous considérons $L^2(\mathcal{G})$, l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur \mathcal{G} , et pour $m \in \mathbb{N}$ l'espace de Sobolev $W^{m,2}(\mathcal{G})$, des fonction réelles ou complexes, définies par ([30, 38]) :

$$W^{m,2}(\mathcal{G}) = \{ f \in L^2(\mathcal{G}), \|f\|_{W^{m,2}(\mathcal{G})}^2 = \sum_{0 \leq |p| \leq m} \int_{\mathcal{G}} |D^p f(\xi)|^2 d\nu(\xi) < \infty \},$$

avec

$$|p| = p_1 + p_2, \quad D^p f = \frac{\partial^{p_1+p_2}}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2}} f,$$

Toute fois $\partial\mathcal{G}$ est régulier, de classe $C^{m+1,\beta}$, pour, $0 < \beta < 1$, la caractérisation suivante de l'espace de Sobolev $W^{m+1/2,2}(\partial\mathcal{G})$ est également défini, pour $m \in \mathbb{N}$:

$$W^{m+1/2,2}(\partial\mathcal{G}) = \{ f \in L^2(\partial\mathcal{G}) \text{ s.t. } \exists F \in W^{m+1,2}(\mathcal{G}) : F|_{\partial\mathcal{G}} = f \},$$

muni de la norme $\|f\|_{W^{m+1/2,2}(\partial\mathcal{G})} = \inf\{ \|F\|_{W^{m+1,2}(\mathcal{G})}, F|_{\partial\mathcal{G}} = f \}$. De plus, ils existent des constantes $k_{m,\mathcal{G}}$ et $K_{m,\mathcal{G}}$ telles que, pour tout $f \in W^{m+1,2}(\mathcal{G})$ on a :

$$k_{m,\mathcal{G}} \|f|_{\mathcal{G}}\|_{W^{m,2}(\mathcal{G})} \leq \|f|_{\partial\mathcal{G}}\|_{W^{m+1/2,2}(\partial\mathcal{G})} \leq K_{m,\mathcal{G}} \|f\|_{W^{m+1,2}(\mathcal{G})}.$$

Pour ce qui concerne le problème direct consistant à trouver la solution u et sa trace u_b sur $\partial\mathcal{G}$ quand Φ et q sont donnés dans (4.2.3), nous avons le théorème 4.1 d'existence et de régularité qui exige un certain nombre des hypothèses à priori (voir [5, 33, 35, 39, 50, 62]). Ils sont de trois sortes.

Soit $m \geq 0$. La première hypothèse concerne la régularité de la frontière du domaine \mathcal{G} ; physiquement, ceci signifie que le domaine initial (non-corrodé) devrait être lisse :

$(H_{\mathcal{G},m})$: Supposons que Γ_i, Γ_e sont les deux de classe $C^{m,\beta}$, $0 < \beta < 1$, $m \geq 1$.

La seconde hypothèse concerne le flux Φ imposé sur Γ_e , qui devrait être assez lisse. Afin de garantir que la solution ne soit pas identiquement nulle dans \mathcal{G} , nous exigeons que Φ garde un signe constant. Notons cependant que ceci pourrait être réaliser si Φ avait le signe variable, à condition qu'il ne soit pas très oscillant, comme dans [5] pour le cas d'un domaine simplement connexe. Bien que ce soient des restrictions physiques additionnelles, ces conditions peuvent être garanties sur Γ_e , où Φ est choisi.

$(H_{\Phi,m})$: $\Phi \in W^{m,2}(\Gamma_e)$, $\Phi \geq 0$, $\Phi \not\equiv 0$.

La dernière hypothèse concerne le coefficient de Robin inconnu q , qui doit être lisse et borné. La condition de régularité est en fait une condition restrictive, c'est une technique nécessaire pour prouver le résultat d'identifiabilité du problème inverse (voir le théorème 4.2). La bornétude correspond aux limitations physiques sur le processus d'échange sur Γ_i , qui ne peut pas, en particulier, s'avérer parfaitement isolante ou conductante. Soit c_s , $C_s > 0$ et introduisons la classe d'admissibilité des coefficients de Robin sur Γ_i suivante :

$$A^{(m)}(\Gamma_i, m, c_s, C_s) = \{q \in C^m(\Gamma_i), |q^{(k)}| \leq C_s, 0 \leq k \leq m, \text{ et } q \geq c_s\}.$$

$(H_{q,m})$: $q \in A^{(m)}$, pour des constantes $c_s, C_s > 0$.

Théorème 4.1 [34, 35] *Soit $m \geq 0$ et on suppose que $(H_{\mathcal{G},m})$, $(H_{\Phi,m})$, $(H_{q,m})$ sont satisfaits pour \mathcal{G} , Φ et q , respectivement. Alors il existe une unique fonction $u \in W^{n+1,2}(\bar{\mathcal{G}})$, qui est la solution du problème direct (4.2.3).*

De plus, il existe des constantes $\underline{\kappa} > 0$ et $\bar{\kappa} > 0$ (dependants seulement de la classe $A^{(m)}$) telles que, pour tout $q \in A^{(m)}$ et $\Phi \in W^{m,2}(\Gamma_e)$,

$$u \geq \underline{\kappa} > 0 \text{ sur } \Gamma_i, \tag{4.2.4}$$

et

$$\|u\|_{W^{m+1,2}(\partial\mathcal{G})} \leq \bar{\kappa}. \tag{4.2.5}$$

Pour la preuve de ces résultats, on peut se référer à [34, lemme 2], [35, théorème 2], en se basant sur les injections de Sobolev, ainsi que le principe de maximum de Hopf [38, 56, 84].

La propriété d'identifiabilité suivante [34, théorème 1] assure l'unicité de la solution q du problème inverse, qui représente une propriété nécessaire pour la question de stabilité.

Théorème 4.2 [34] *Supposons que Φ satisfait $(H_{\Phi,0})$ et q_1, q_2 satisfaisent $(H_{q,0})$. Soit u_1 et u_2 les solutions associées. Si $u_1|_{\mathcal{K}} = u_2|_{\mathcal{K}}$ sur un sous ensemble ouvert $\mathcal{K} \neq \emptyset$ de Γ_e , de mesure strictement positive ($\text{mes}(\mathcal{K}) > 0$), alors $q_1 = q_2$.*

4.2.2 Adaptation du (BEP) au problème inverse

Nous avons cherché à établir comment l’outil d’approximation harmonique permet de formuler le problème inverse (4.2.1), (4.2.2) de détection de corrosion pour l’identification d’un coefficient de Robin, en termes de reconstruction d’une fonction analytique dans le domaine depuis ses valeurs sur une partie de la frontière.

Sans perte de généralité, on va s’intéresser à un domaine annulaire, via une transformation conforme [59, théorème 17.1a]. Pour cela, Soit G la couronne $G = \mathbb{D} \setminus s\mathbb{D}$ où \mathbb{D} est le disque unité, et on note $\partial G = s\mathbb{T} \cup \mathbb{T}$, $0 < s < 1$, muni de la mesure de Lebesgue normalisée de sorte qu’on donne à chaque cercle la mesure unité. Le problème inverse (4.2.1), (4.2.2) est reformulé de la manière suivante :

étant données deux fonctions u_b et Φ avec $\Phi \not\equiv 0$, cherchons une fonction q , telle que la solution u de

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } G \\ u = u_b & \text{on } \mathbb{T} \\ \partial_\nu u = \Phi & \text{on } \mathbb{T} \end{cases} \quad (4.2.6)$$

soumise à la condition

$$\partial_\nu u + qu = 0 \text{ on } s\mathbb{T}, \quad (4.2.7)$$

où ∂_n représente la dérivée partielle par rapport à la normale sortante de ∂G .

On suppose que $\Phi \in L^2(\mathbb{T})$ et que $q \in A^{(0)}$. D’après le Théorème 4.1, $u|_{\partial G} \in W^{1,2}(\partial G)$. Donc, localement, et d’après les équations de Cauchy–Riemann, il existe une fonction v harmonique dans G , localement mono-valuée, telle que $\partial_\theta v = \partial_n u$ sur ∂G , où ∂_θ est la dérivée partielle tangentielle sur ∂G . Dans ce cas, et d’après (4.2.6), la fonction v est donnée sur \mathbb{T} , à une constante près, par

$$v|_{\mathbb{T}}(e^{i\theta}) = \int_{\theta_0}^{\theta} \Phi(e^{i\tau}) d\tau,$$

pour $e^{i\theta_0} \in \mathbb{T}$ arbitraire. Ainsi, $f = u + iv$ est analytique, multi-valuée dans G ; et elle est donnée sur \mathbb{T} par

$$f(e^{i\theta}) = u_b(e^{i\theta}) + i \int_{\theta_0}^{\theta} \Phi(e^{i\tau}) d\tau. \quad (4.2.8)$$

Ainsi, on a sur $s\mathbb{T}$,

$$q = -\frac{\partial_\theta v}{u} = -\frac{\partial_\theta \text{Im}(f)}{\text{Re}(f)}, \quad (4.2.9)$$

qu’elle donne lien entre q et f , afin de récupérer q en appliquant le problème (BEP) pour la donnée f , ou pour établir des résultats de stabilité en tant que des propriétés de

continuité de l'application $(u, \Phi) \rightarrow q$. Donc recouvrir $f|_{s\mathbb{T}}$ à partir de $f|_{\mathbb{T}}$ nous permet de résoudre le problème inverse (4.2.6), (4.2.7).

Cependant, puisque G n'est pas simplement connexe, il est mal de définir f globalement dans G qu'autant une fonction mono-valuée. En effet, d'après la formule de Green appliquée à la solution u de (4.2.6), (4.2.7) et pour toute fonction constante dans G , on a

$$\int_{\partial G} \partial_n u = \int_{\mathbb{T}} \Phi - \int_{s\mathbb{T}} \partial_\theta v = 0. \quad (4.2.10)$$

Ainsi, si $\int_{\mathbb{T}} \Phi \neq 0$, alors v , et donc f , sont multi-valuées dans G (voir [2]), ce qui nous ramène à une mauvaise reconstruction de q . Pour résoudre cette difficulté, nous nous disposons du lemme 4.1 suivant :

Lemme 4.1 [74] *Soit $\Phi \in L^2(\mathbb{T})$ et on suppose que $q \in A^{(0)}$. Alors, il existe une fonction $f \in H^{1,2}(\partial G)$ telle que la solution u de (4.2.6), (4.2.7) vérifie $u = \operatorname{Re} f$ dans \overline{G} .*

De plus, il existe une fonction $F \in H^{1,2}(\partial G)$ mono-valuée, telle que $f = F + c \log z$ dans \overline{G} , pour c défini par

$$c = \int_0^{2\pi} \Phi(e^{i\theta}) d\theta. \quad (4.2.11)$$

Plus généralement, soit $m \geq 0$, $\Phi \in W^{m,2}(\mathbb{T})$, $q \in A^{(m)}$. Alors $u = \operatorname{Re} f$, pour une certaine fonction $f \in H^{m+1,2}(\partial G)$.

Preuve [74]

La première assertion est déjà développée au début de ce paragraphe, qui est une déduction direct du Théorème 4.1. D'autre part, puisque dans G , u est localement la partie réelle d'une fonction analytique $f = u + iv$. On définit la surface Riemannienne $R = \{\sigma \in \mathbb{C} : \log s < \operatorname{Re} \sigma < 0\}$ et introduisons la fonction $h : R \rightarrow G$, $h(\sigma) = e^\sigma$. On a bien h est analytique sur R . Il existe alors une fonction analytique $\delta : R \rightarrow \mathbb{C}$ telle que, localement, on a $f = \delta \circ h^{-1}$. La fonction $\delta(\sigma + 2\pi i) - \delta(\sigma)$ est une analytique dans R dont la partie réelle est nulle, et donc elle est imaginaire pure, égale à une constante, notée, ic . Ainsi, $\delta(\sigma) - \frac{c}{2\pi} \sigma$ est une fonction $2\pi i$ -periodique en σ . On conclut qu'il existe une fonction analytique mono-valuée F définie sur G telle que

$$F(z) = f(z) - \frac{c}{2\pi} \log z, \quad (4.2.12)$$

d'où $u(z) = \operatorname{Re} F(z) + \frac{c}{2\pi} \log |z|$, et (4.2.10) implique

$$c = \int_0^{2\pi} \Phi(e^{i\theta}) d\theta. \quad (4.2.13)$$

Maintenant, si on écrit la représentation standard de la fonction harmonique u dans l'anneau G

$$u(re^{i\theta}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} r^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) + a_0 + b_0 \ln r,$$

alors, $c = 2\pi b_0$ et la fonction v est donnée par

$$v(re^{i\theta}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} r^k (a_k \sin k\theta - b_k \cos k\theta) + b_0\theta,$$

et

$$F(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} (a_k - ib_k) z^k + a_0.$$

Il s'ensuit que si $u \in W^{m,2}(\partial G)$ pour un certains m , alors v , f et F sont aussi dans $W^{m,2}(\partial G)$. ■

Remarque 4.1 Dans le cas où $I \subsetneq \mathbb{T}$, par construction la fonction f est mono-valuée puisque la conjugué harmonique v est mono-valuée sur G . ■

4.3 RÉSULTATS DE STABILITÉ GLOBALE

Le recouvrement de $f_{|s\mathbb{T}}$ à partir de $f_{|\mathbb{T}}$ et la relation (6.5.3) vont nous permettre d'établir des propriétés de stabilité globale de type logarithmique de l'application $(u_b, \Phi) \rightarrow q$ dans un cadre général, dans les espaces de Hardy pondérés. Ces résultats représentent une extension des résultats établit dans [33] dans le cas du disque unité.

4.3.1 Espaces de Hardy pondérés

Etant données deux suites $(w_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $(\mu_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de nombres réels positifs, nous introduisons $H_{w,\mu}^2(\partial G)$ l'espace de Hardy pondéré de la couronne G , muni de la norme

$$\|g\|_{L_{w,\mu}^2(\partial G)}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g_n|^2 [w_n + s^{2n} \mu_n],$$

pour des fonctions $g(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n z^n$, $z \in G$. Sous la condition

$$\inf_{n \in \mathbb{Z}} \frac{w_n + s^{2n} \mu_n}{1 + s^{2n}} > 0, \quad (4.3.1)$$

et le fait que la suite de fonctions $(z^n / \sqrt{1 + s^{2n}})_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base orthogonale de $H^2(\partial G)$, l'injection $H_{w,\mu}^2(\partial G) \rightarrow H^2(\partial G)$ est continue. Ainsi, les fonction de $H_{w,\mu}^2(\partial G)$ admettent des traces sur \mathbb{T} et $s\mathbb{T}$, de la manière suivante. Soit $L_w^2(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T})$ et $L_\mu^2(s\mathbb{T}) \subset L^2(s\mathbb{T})$ respectivement les espaces des fonctions $g = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n z^n$ telles que $\|g\|_{L_w^2(\mathbb{T})}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g_n|^2 w_n < \infty$ et $\|g\|_{L_\mu^2(s\mathbb{T})}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g_n|^2 s^{2n} \mu_n < \infty$ respectivement. Une fonction dans l'espace $H_{w,\mu}^2(\partial G)$ admet ainsi une trace sur \mathbb{T} et $s\mathbb{T}$ appartenant à $L_w^2(\mathbb{T})$ et $L_\mu^2(s\mathbb{T})$, respectivement.

Plus généralement, l'injection $H_{w,\mu}^2(\partial G) \rightarrow H_{w',\mu'}^2(\partial G)$ est continue si et seulement si

$$\inf_{n \in \mathbb{Z}} \frac{w_n + s^{2n} \mu_n}{w'_n + s^{2n} \mu'_n} > 0. \quad (4.3.2)$$

On note $L_{w,\mu}^2(\partial G) \subset L^2(\partial G)$ pour l'espace des fonctions définies sur ∂G telles que leurs restrictions à \mathbb{T} et $s\mathbb{T}$ sont dans $L_w^2(\mathbb{T})$ et $L_\mu^2(s\mathbb{T})$, respectivement. La condition (4.3.2) est une condition nécessaire et suffisante pour la continuité de l'injection $L_{w,\mu}^2(\partial G) \rightarrow L_{w',\mu'}^2(\partial G)$.

Nous écrivons $P_{L_w^2(\mathbb{T})} g = \chi_{\mathbb{T}} g$ pour une fonction dans $L_{w,\mu}^2(\partial G)$ qui coïncide avec g sur \mathbb{T} et nulle sur $s\mathbb{T}$. La définition de $P_{L_\mu^2(s\mathbb{T})}$ est analogue.

Notons que, pour $m \geq 1$, si $w_n = w_{m,n}$ et $\mu_n = \mu_{m,n}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, où $w_{m,n}$, $\mu_{m,n}$ sont définis par les formules (3.1.1) du chapitre 3, les espaces $H_{w,\mu}^2(\partial G)$, $L_w^2(\mathbb{T})$ et $L_\mu^2(s\mathbb{T})$ coïncident avec $H^{m,2}(\partial G)$, $W^{m,2}(\mathbb{T})$ et $W^{m,2}(s\mathbb{T})$ respectivement.

4.3.2 Estimations en norme dans les espaces de Hardy pondérés

Les résultats d'estimation d'erreur qu'on va les présenter dans cette section représentent une généralisation du lemme de Baratchart-Zerner [24].

On note par $B^{m,2}$ la boule unité de $H^{m,2}(\partial G)$, et $B_{w,\mu}^2$ celle de $H_{w,\mu}^2(\partial G)$. Soit (w_n) , (μ_n) , et (w'_n) , (μ'_n) des suites de nombres réels positifs : dans l'ordre de garantir l'existence des traces sur ∂G des fonctions de $H_{w',\mu'}^2(G)$ nous supposons pour cela que (w'_n) , (μ'_n) satisfaits à la condition (4.3.1); rappelons dans ce cas que $H_{w',\mu'}^2(\partial G) \subset H^2(\partial G)$. Nous supposons aussi que

$$\frac{s^{2n} \mu'_n}{w_n + s^{2n} \mu_n} \leq \delta(n) \quad \forall n < 0, \quad \text{où } \delta(n) \text{ décroît vers } 0 \text{ si } n \rightarrow -\infty, \quad (4.3.3)$$

en même temps que

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\mu'_n}{w'_n} \leq \varrho, \quad \text{pour une certaine constante } \varrho > 0. \quad (4.3.4)$$

Le résultat suivant (théorème 4.3) utilise la condition (4.3.3) dans l'ordre de déduire le comportement de la solution du (BEP) sur $s\mathbb{T}$ à partir de son comportement sur \mathbb{T} .

Théorème 4.3 [74] *Supposons que les hypothèses (4.3.1), (4.3.3) et (4.3.4) sont satisfaites pour les suites (w_n) , (μ_n) et (w'_n) , (μ'_n) de nombres réels positifs. Soit $g \in H_{w,\mu}^2(\partial G)$ telles que $g \in B_{w,\mu}^2$ et $\|g\|_{L_w^2(\mathbb{T})} \leq \varepsilon$ pour un certain $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. Alors*

$$\|g\|_{L_{\mu'}^2(s\mathbb{T})} \leq \left(\delta \left(-1 - \left\lfloor \left\lfloor \frac{\log \varepsilon}{2 \log s} \right\rfloor \right\rfloor \right) + \varrho \varepsilon \right)^{1/2} \leq \left(\delta \left(\left\lfloor - \left\lfloor \frac{\log \varepsilon}{2 \log s} \right\rfloor \right\rfloor \right) + \varrho \varepsilon \right)^{1/2}.$$

Preuve [74]

Nous allons estimer la quantité suivante

$$\begin{aligned} \|g\|_{L_{\mu'}^2(s\mathbb{T})}^2 &= \sum_{n \leq -N} s^{2n} \mu'_n |g_n|^2 + \sum_{n=-N+1}^{\infty} s^{2n} \mu'_n |g_n|^2 \\ &:= \sigma_1 + \sigma_2. \end{aligned}$$

Puisque $g \in B_{w,\mu}^2$, alors on a

$$\sum_{n \leq -N} |g_n|^2 (w_n + s^{2n} \mu_n) \leq 1.$$

D'une part,

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sum_{n \leq -N} s^{2n} \mu'_n |g_n|^2 = \sum_{n \leq -N} \frac{s^{2n} \mu'_n}{w_n + s^{2n} \mu_n} (w_n + s^{2n} \mu_n) |g_n|^2 \\ &\leq \sum_{n \leq -N} \delta(n) (w_n + s^{2n} \mu_n) |g_n|^2 \\ &\leq \|g\|_{H_{w,\mu}^2(\partial G)} \sup_{n \leq -N} \delta(n) \leq \sup_{n \leq -N} \delta(n) = \delta(-N). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \sum_{n=-N+1}^{\infty} s^{2n} \mu'_n |g_n|^2 = \sum_{n=-N+1}^{\infty} s^{2n} \frac{\mu'_n}{w'_n} |g_n|^2 w'_n \\ &\leq s^{-2(N-1)} \sup_{p \in \mathbb{Z}} \frac{\mu'_p}{w'_p} \sum_{n=-N+1}^{\infty} |g_n|^2 w'_n \\ &\leq s^{-2(N-1)} \varrho \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Choisissons maintenant $N = 1 + \left\lfloor \left| \frac{\log \varepsilon}{2 \log s} \right| \right\rfloor$, on obtient alors

$$\|g\|_{L_{\mu}^2(s\mathbb{T})}^2 \leq \delta(-N) + \varrho \varepsilon.$$

De plus, on a $\left\lfloor - \left| \frac{\log \varepsilon}{2 \log s} \right| \right\rfloor = -N$, et donc

$$\|g\|_{L_{\mu'}^2(s\mathbb{T})} \leq \left(\delta \left(\left\lfloor - \left| \frac{\log \varepsilon}{2 \log s} \right| \right\rfloor \right) + \varrho \varepsilon \right)^{1/2}.$$

■

Corollaire 4.1 [74] *Sous les hypothèses du théorème 4.3 et s'ils existent deux constantes $c > 0$ et $\alpha > 0$ telles que $\delta(n) \leq c|n|^{-\alpha}$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\|g\|_{L_{\mu'}^2(s\mathbb{T})} \leq \frac{C}{|\log \varepsilon|^{\alpha/2}}.$$

Preuve [74]

Pour tout $x \in \mathbb{R}_*$, on a $||[x]|^{-\alpha} \leq |x|^{-\alpha}$. Prenons alors $n = \left\lfloor - \left| \frac{\log \varepsilon}{2 \log s} \right| \right\rfloor$, on obtient

$$\|g\|_{L_{\mu'}^2(s\mathbb{T})}^2 \leq \frac{c|2 \log s|^\alpha}{|\log \varepsilon|^\alpha} + \varrho \varepsilon.$$

Or, la fonction $x \rightarrow x(\log x)^\alpha$, si $x \neq 0$, et 0 si $x = 0$, est continue sur $[0, +\infty[$, donc elle est bornée au voisinage de zéro. Ainsi, il existe une constante, notée *cte*, telle que $\varepsilon \leq cte (\log \varepsilon)^{-\alpha}$. D'où le résultat. ■

Corollaire 4.2 [74] *Soit m et k deux entiers naturels $m > k \geq 0$. Alors il existe une constante C , dépend seulement de m , k et s , telle que dès que $g \in B^{m,2}$ avec $\|g\|_{W^{k,2}(\mathbb{T})} \leq \varepsilon$ pour un certain $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, on a*

$$\|g\|_{W^{k,2}(s\mathbb{T})} \leq \frac{C}{|\log \varepsilon|^{m-k}}.$$

Preuve [74]

Ce résultat est une conséquence du théorème 4.3, en prenant les poids $w_n = w_{m,n}$, $\mu_n = \mu_{m,n}$ et $w'_n = w_{k,n}$, $\mu'_n = \mu_{k,n}$. En effet, la condition (4.3.1) pour les couples (w_n, μ_n) et (w'_n, μ'_n) est vérifiée car tous ces poids sont supérieurs ou égaux à 1, et donc $\inf_{n \in \mathbb{Z}} \frac{w_n + s^{2n} \mu_n}{1 + s^{2n}} \geq 1$ et $\inf_{n \in \mathbb{Z}} \frac{w'_n + s^{2n} \mu'_n}{1 + s^{2n}} \geq 1$. La condition (4.3.3) est vraie aussi avec $\delta(n)$ d'ordre $|n|^{-2(m-k)}$ pour $n < 0$ puisque μ_n se comporte en $|n|^{2m}$ et μ'_n en $|n|^{2k}$ quand $n \rightarrow -\infty$. Finalement, on a aussi la condition (4.3.4) directement à partir de la définition des poids donnée par (3.1.1), avec $\varrho = s^{-2k}$, puisque $s^{-2k} \geq s^{-2n}$ pour tout $k \geq n$. ■

Remarque 4.2 Le résultat du corollaire 4.2 est optimal pour le choix de la fonction $g(z) = \delta z^p$, où $\delta > 0$ and p est un entier négatif, choisi assez grand en valeur absolu. Pour un $\varepsilon > 0$ donné et $m > k$, on choisit p tel que

$$\frac{\|g\|_{W^{m,2}(\mathbb{T})}}{\|g\|_{W^{k,2}(\mathbb{T})}} \leq \frac{1}{\varepsilon},$$

et ensuite, choisissons δ tel que $\|g\|_{W^{k,2}(\mathbb{T})} = \varepsilon$, et par conséquent $g \in B^{m,2}$. Donc

$$\|g\|_{W^{m,2}(s\mathbb{T})} \simeq \varepsilon s^p |p|^m \simeq 1 \quad \text{si} \quad p \simeq -\log \varepsilon / \log s \quad \text{quand} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Dans ce cas on obtient

$$\|g\|_{W^{k,2}(s\mathbb{T})} \simeq c_1 \delta |p|^k s^p \simeq c_2 |\log \varepsilon|^{k-m} \quad \text{quand} \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

où c_1 et c_2 sont des constantes dépendent seulement de m , k et s , et non de p , δ ou ε . ■

Cependant, pour le cas où la norme est connue petite seulement sur un sous ensemble I de \mathbb{T} , ($I \subsetneq \mathbb{T}$), nous pouvons aussi conclure que sa norme sur la frontière complémentaire J demeure petite. Ce résultat exige une condition plus forte que (4.3.2).

Théorème 4.4 [74] *Soit (w'_n) , (μ'_n) des suites poids satisfaites à la condition (4.3.1), et on suppose de plus que (w_n) , (μ_n) sont des autres suites poids telles que*

$$\sup_{|n| \geq N} \frac{w'_n + s^{2n} \mu'_n}{w_n + s^{2n} \mu_n} \rightarrow 0$$

quand $N \rightarrow \infty$. Soit $I \subset \partial G$ un sous ensemble de mesure strictement positive, et supposons que (g_p) est une suite de fonctions dans $B_{w,\mu}^2 \subset H_{w,\mu}^2(\partial G)$ telle que $\|g_p\|_{0,I} \rightarrow 0$. Alors $\|g_p\|_{H_{w',\mu'}^2(\partial G)} \rightarrow 0$.

Preuve [74]

Nous commençons par prouver que la boule $B_{w,\mu}^2$ est un sous-ensemble fermé de $H_{w',\mu'}^2(\partial G)$. Pour cela, si (g_p) est une suite de $B_{w,\mu}^2$ qui converge vers un élément g in $H_{w',\mu'}^2(\partial G)$, alors pour tout $N > 0$ ces coefficients de Fourier $g_{p,n}$ vérifies

$$\sum_{n=-N}^N |g_{p,n}|^2 (w_n + s^{2n} \mu_n) \leq 1.$$

D'après la condition (4.3.1), l'injection $H_{w',\mu'}^2(\partial G) \rightarrow H^2(\partial G)$ est continue, donc il existe une constante $c > 0$ tel que

$$\|g_p - g\|_{L^2(\partial G)} \leq c \|g_p - g\|_{H_{w',\mu'}^2(\partial G)},$$

et donc, pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$|g_{p,n} - g_n| \leq c \|g_p - g\|_{H_{w',\mu'}^2(\partial G)}.$$

D'où, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a, $\lim_{p \rightarrow \infty} |g_{p,n} - g_n| = 0$, et par passage à la limite quand $p \rightarrow \infty$ on obtient,

$$\sum_{n=-N}^N |g_n|^2 (w_n + s^{2n} \mu_n) \leq 1.$$

Prenons maintenant la limite quand $N \rightarrow \infty$, on trouve que $g \in B_{w,\mu}^2$, qui est donc fermé.

Prouvons maintenant que $B_{w,\mu}^2$ est compact. Soit $g \in B_{w,\mu}^2$, pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned} \sum_{|n| \geq N} |g_n|^2 (w'_n + s^{2n} \mu'_n) &= \sum_{|n| \geq N} |g_n|^2 (w_n + s^{2n} \mu_n) \frac{w'_n + s^{2n} \mu'_n}{w_n + s^{2n} \mu_n} \\ &\leq \|g\|_{H_{w',\mu'}^2(\partial G)} \sup_{|n| \geq N} \frac{w'_n + s^{2n} \mu'_n}{w_n + s^{2n} \mu_n} \\ &\leq \sup_{|n| \geq N} \frac{w'_n + s^{2n} \mu'_n}{w_n + s^{2n} \mu_n} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

On déduit alors que $B_{w,\mu}^2$ est borné et donc compact de $H_{w',\mu'}^2(\partial G)$, (cf. [45, ch. IV, Ex. 13] pour le critère de compacité dans ℓ^2 , qui est adapté ici).

Soit maintenant (g_p) satisfait à l'hypothèse du théorème 4.4. Ou bien $\|g_p\|_{H_{w',\mu'}^2(\partial G)} \rightarrow 0$, où, après avoir extraire une sous-suite, notée aussi (g_p) , on peut supposer que (g_p) converge au sens de la norme $H_{w',\mu'}^2(\partial G)$ vers une certaine fonction g appartient à la boule compacte $B_{w,\mu}^2$; cependant, g est nécessairement nulle sur $I \subset \partial G$. Ce qui donne, d'après le lemme 2.2, g est identiquement nulle sur G . Ce qui est absurde. ■

Corollaire 4.3 [74] *Soit m et k deux entiers $m > k \geq 0$, et soit $I \subset \partial G$ un sous-ensemble compact d'intérieur non vide. Soit (g_p) une suite de fonctions dans $B^{m,2} \subset H^{m,2}(\partial G)$ telle que $\|g_p\|_{L^2(I)} \rightarrow 0$. Alors $\|g_p\|_{W^{k,2}(\partial G)} \rightarrow 0$.*

Preuve [74]

Il suffit de vérifier que les poids $w_n = w_{m,n}$, $\mu_n = \mu_{m,n}$ et $w'_n = w_{k,n}$, $\mu'_n = \mu_{k,n}$ satisfaits aux conditions du théorème 4.4. La condition 4.3.1 est déjà vérifiée pour les poids $w_{k,n}$ et $\mu_{k,n}$ dans la preuve du corollaire 4.2. D'autre part, quand $|n| \sim \infty$

$$\sup_{|n| \geq N} \frac{w_{k,n} + s^{2n} \mu_{k,n}}{w_{m,n} + s^{2n} \mu_{m,n}} \simeq \frac{1}{|n|^{2(m-k)}} \leq \frac{1}{|N|^{2(m-k)}} \rightarrow 0.$$

■

4.3.3 Propriétés de stabilité pour le problème inverse

Nous exposons les principaux résultats de ce chapitre, qui consistent à établir des estimations de stabilité globale de type logarithmique pour le problème inverse d'identification du coefficient de Robin.

Théorème 4.5 [74] *Supposons que $n \geq 1$, que Φ_1 et Φ_2 satisfaits $(H_{\Phi,n})$ sur \mathbb{T} et q_1 et q_2 satisfaits $(H_{q,n})$ sur $s\mathbb{T}$. Soit u_1, u_2 les solutions associées du problème (4.2.6), (4.2.7), et on suppose que :*

$$\|u_1 - u_2\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq \varepsilon, \quad \|\Phi_1 - \Phi_2\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq \varepsilon, \quad (4.3.5)$$

pour un certain $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. Alors, il existe une constante $K = K(s, A^{(n)}) > 0$ telle qu'on a l'estimation suivante :

$$\|q_1 - q_2\|_{L^2(s\mathbb{T})} \leq \frac{K}{|\log \varepsilon|^n}. \quad (4.3.6)$$

Preuve [74]

On définit $u = u_1 - u_2$, $\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$. Introduisons maintenant comme dans (6.5.2) les fonctions f_i analytiques dans G telle que $u_i = \operatorname{Re} f_i$. Les résultats de régularité du théorème 4.1 et du lemme 4.1 implique que $f_j \in H^{n+1,2}(\partial G)$.

Dans ce cas, on peut appliquer l'inégalité d'interpolation de Hardy–Littlewood–Pólya [57] pour tout $u \in W^{n+1,2}(\mathbb{T})$:

$$\|D^1 u\|_{L^2(\mathbb{T})}^{n+1} = \|u'\|_{L^2(\mathbb{T})}^{n+1} \leq \|u\|_{W^{n+1,2}(\mathbb{T})} \|u\|_{L^2(\mathbb{T})}^n, \quad (4.3.7)$$

Cette inégalité est déduite à partir de l'inégalité de Hadamard–Kolmogorov pour un opérateur plus général, qui est donnée dans [29]. (Voir aussi l'inégalité de Gagliano–Nirenberg donnée dans [30, chapitre VIII].) Par conséquent

$$\|u\|_{W^{1,2}(\mathbb{T})}^2 \leq (\kappa \|u\|_{L^2(\mathbb{T})}^n)^{2/(n+1)} + \|u\|_{L^2(\mathbb{T})}^2$$

à partir de (4.2.5). Ensuite, si $f = f_1 - f_2$, alors

$$\begin{aligned} \|f\|_{W^{1,2}(\mathbb{T})}^2 &= \|u\|_{W^{1,2}(\mathbb{T})}^2 + \|\Phi\|_{W^{1,2}(\mathbb{T})}^2 \\ &\leq \|u\|_{W^{1,2}(\mathbb{T})}^2 + \|\Phi\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \\ &\leq (\kappa \varepsilon^n)^{2/(n+1)} + 2\varepsilon^2 \leq c \varepsilon^{2n/(n+1)} \end{aligned}$$

pour $c = (\kappa)^{2/(n+1)} + 2$, quand $\varepsilon < 1$ assez petit.

De plus, à partir de (4.2.5) dans le théorème 4.1 et le lemme 4.1, on a

$$\begin{aligned} \|f\|_{n+1, \mathbb{T}}^2 &= \|u\|_{n+1, \mathbb{T}}^2 + \|\Phi\|_{n+1, \mathbb{T}}^2 \\ &\leq \kappa^2 + \|\Phi\|_{n+1, \mathbb{T}}^2, \end{aligned}$$

donc il existe une constante $\kappa' \geq \kappa$ (depend seulement de s et de la classe $A^{(n)}$) telle que $f/\kappa' \in B^{n+1,2}$. Maintenant, soit $k = \max(\sqrt{c}, \kappa') \geq 1$. On a $f/k \in B^{n+1,2}$ et

$$\|f/k\|_{W^{1,2}(\mathbb{T})} \leq \frac{(c\varepsilon^{2n/(n+1)})^{1/2}}{k} \leq \varepsilon^{n/(n+1)}.$$

En appliquant le corollaire 4.2, on obtient

$$\|f/k\|_{W^{1,2}(s\mathbb{T})} \leq \frac{C}{|\log \varepsilon^{n/(n+1)}|^n} \leq \frac{eC}{|\log \varepsilon|^n}, \quad (4.3.8)$$

pour une constante $C > 0$ (depend de s), notons que $(\frac{n+1}{n})^n < e$.

Soit maintenant $q = q_1 - q_2$. Sur $s\mathbb{T}$, on a que $\partial_\nu u_i + q_i u_i = 0$, d'où $\partial_\nu u + qu_1 + q_2 u = 0$ et

$$qu_1 = -\partial_\nu u - q_2 u \quad \text{on } s\mathbb{T}.$$

En utilisant l'hypothèse sur q , et le résultat (4.2.4) dans le théorème 4.1, avec la relation (4.3.7) pour la norme $L^2(s\mathbb{T})$ et $n = 0$, on a

$$\|q\|_{L^2(s\mathbb{T})} \leq \frac{\sqrt{2}}{m} \max(1, C_s) \|u\|_{W^{1,2}(s\mathbb{T})}. \quad (4.3.9)$$

Finalement, puisque $\|u\|_{W^{1,2}(s\mathbb{T})} \leq \|f\|_{W^{1,2}(s\mathbb{T})}$, on conclut à partir de (4.3.8) et (4.3.9) que :

$$\|q\|_{L^2(s\mathbb{T})} \leq \frac{e\sqrt{2}Ck \max(1, C_s)}{m|\log \varepsilon|^n}.$$

■

Ceci se tient toujours dans des situations plus générales d'un domaine doublement connexe $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^2$, défini dans la section 4.2, comme dans (4.2.1), (4.2.2).

Corollaire 4.4 [74] *Soit $n \geq 1$, supposons que Γ_i, Γ_e satisfaits $(H_{\mathcal{G},n})$, que Φ_1 et Φ_2 satisfaits $(H_{\Phi,n})$ et que q_1 et q_2 satisfaits $(H_{q,n})$. Soit u_1, u_2 les solutions associées du problème (4.2.1), (4.2.2), et supposons que :*

$$\|u_1 - u_2\|_{L^2(\Gamma_e)} \leq \varepsilon, \quad \|\Phi_1 - \Phi_2\|_{L^2(\Gamma_e)} \leq \varepsilon, \quad (4.3.10)$$

pour un $\varepsilon > 0$. Alors, il existe une constante $K = K(s, A^{(n)}) > 0$ telle que :

$$\|q_1 - q_2\|_{L^2(\Gamma_i)} \leq \frac{K}{|\log \varepsilon|^n}. \quad (4.3.11)$$

Preuve [74]

En se référant à [59, théorème 17.1a], il existe une transformation conforme $C_G : G \rightarrow \mathcal{G}$, associée à la valeur de s , $0 < s < 1$. De plus, comme dans le cas d'un domaine simplement connexe D qui se transforme conformement au disque unité [83], l'hypothèse de régularité posée sur $\partial\mathcal{G}$ permet d'obtenir une extension C^n de $C_G : \partial G \rightarrow \partial\mathcal{G}$, [23, 83]. Les problèmes (4.2.6), (4.2.7) et (4.2.1), (4.2.2) sont alors liés chacun à l'autre par la transformation C_G , et donc le résultat du corollaire se déduit directement à partir du théorème 4.5, comme dans [33]. Notons que la constante K dans (4.3.11) dépend du choix de la transformation C_G . ■

Pour la norme uniforme, on a le résultat suivant :

Corollaire 4.5 [74] *Soit $n \geq 2$, soit Φ_1 et Φ_2 satisfaisants $(H_{\Phi,n})$ sur \mathbb{T} et q_1 et q_2 satisfaisants $(H_{q,n})$ sur $s\mathbb{T}$. Soit u_1, u_2 les solutions associées du problème (4.2.6), (4.2.7), et supposons que :*

$$\|u_1 - u_2\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq \varepsilon, \quad \|\Phi_1 - \Phi_2\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq \varepsilon, \quad (4.3.12)$$

pour $\varepsilon > 0$. Alors, il existe une constante $K = K(s, A^{(n)}) > 0$ telle que :

$$\|q_1 - q_2\|_{L^\infty(s\mathbb{T})} \leq \frac{K}{|\log \varepsilon|^{n-1}}. \quad (4.3.13)$$

Preuve [74]

Nous utilisons les notations déjà utilisées dans la preuve du théorème 4.5 en respectant les mêmes étapes avec quelques modifications appropriées. La version générale de l'inégalité de Hadamard–Kolmogorov [29] implique que pour $0 < k < N$ on a :

$$\|u^{(k)}\|_{L^2(\mathbb{T})}^N \leq \|u^{(N)}\|_{L^2(\mathbb{T})}^k \|u\|_{L^2(\mathbb{T})}^{N-k}$$

pour tout $u \in W^{N,2}(\mathbb{T})$. Appliquons ça pour les cas $k = 1$ et $k = 2$ avec $N = n + 1$, on arrive à ces inégalités

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq a_0 \varepsilon, \quad \|u'\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq a_1 \varepsilon^{n/(n+1)}, \quad \|u''\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq a_2 \varepsilon^{(n-1)/(n+1)}$$

pour $u = u_1 - u_2$, avec des constantes $a_0, a_1, a_2 > 0$, et de même pour $\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$, puisque $\Phi \in W^{N,2}(\mathbb{T})$. La conclusion est donc, à condition que $0 < \varepsilon < 1$, on a

$$\|f\|_{2,\mathbb{T}} \leq c \varepsilon^{(n-1)/(n+1)}$$

pour une constante $c > 0$. Nous sommes maintenant dans les conditions d'appliquer les mêmes arguments dans la preuve du théorème 4.5, qui, en utilisant le théorème 4.1 et le lemme 4.1, pour montrer que $u = Ref$, où $f \in H^{n+1,2}(\partial G)$, et donc le corollaire 4.2 pour aboutir à une inégalité similaire à celle (4.3.8), de la forme suivante :

$$\|f/k\|_{2,s\mathbb{T}} \leq \frac{C}{|\log \varepsilon^{(n-1)/(n+1)}|^{n-1}} \leq \frac{e^2 C}{|\log \varepsilon|^{n-1}} \quad (4.3.14)$$

pour des constantes $C, k > 0$. On a par hypothèse et à partir de (4.2.4) $q = q_1 - q_2$ satisfait

$$\|q\|_{L^\infty(s\mathbb{T})} \leq \frac{1}{m} \max(1, C_s) \|u\|_{W^{1,\infty}(s\mathbb{T})}, \quad (4.3.15)$$

et de plus,

$$\|u\|_{1,\infty,s\mathbb{T}} \leq \|u\|_{2,s\mathbb{T}} \leq \|f\|_{2,s\mathbb{T}}.$$

Ceci mène finalement à :

$$\|q\|_{L^\infty(s\mathbb{T})} \leq \frac{e^2 C k \max(1, C_s)}{m |\log \varepsilon|^{n-1}}.$$

■

Remarque 4.3 1. Notons que les preuves citées au-dessus contiennent également des estimations d'erreurs sur les données intérieures de frontière $\|u_1 - u_2\|_{W^{1,p}(s\mathbb{T})}$ et $\|\partial_n u_1 - \partial_n u_2\|_{L^p(s\mathbb{T})}$ pour $p = 2, \infty$, qui peuvent être étendues aux espaces de Sobolev d'ordre supérieur.

2. La figure 4.1 montre le comportement de $e_p = \|q_1 - q_2\|_{L^p(s\mathbb{T})}$ en fonction de ε et $Kp/|\log \varepsilon|$ pour $K_p = \max_{\varepsilon} |\log \varepsilon| e_p$, pour $p = 2, \infty$.

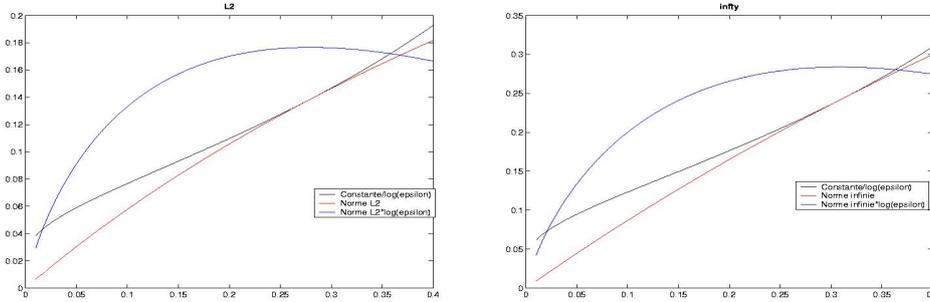


FIG. 4.1 – $e_p, Kp/|\log \varepsilon|, p = 2, \infty$.

4.4 DISCUSSION

Nous avons établi des estimations d'erreurs pour le coefficient de Robin sur la frontière intérieure d'un domaine doublement connexe, en termes d'erreurs sur des données de Dirichlet-Neumann sur la frontière externe. Le corollaire 4.3 nous a permis de déduire une propriété de stabilité importante constituée d'une originalité, qui est de sorte que si l'erreur sur des données de Dirichlet-Neumann est petite sur une partie de la frontière externe, qu'elle peut ainsi être l'erreur pour le coefficient de Robin sur la partie interne.

Nous observons de plus que les résultats du corollaire 4.4 se tiennent aussi pour des domaines quelconques doublement connexes avec seulement la régularité $C^{m,\beta}$ par morceaux de la frontière, puisque la dérivée de la transformation conforme garde un comportement

régulier jusqu'à la frontière, [23]. Notons que ces transformations conformes peuvent aussi utiliser pour résoudre des problèmes inverses géométriques bidimensionnel (voir [70]).

Dans la suite (chapitre 5) nous allons construire une famille d'algorithmes robustes permettant d'établir des résultats de convergence pour le problème d'identification de coefficient de Robin [63] et quelques autres problèmes inverses géométriques (chapitre 6, [26]).

CHAPITRE 5

Algorithmes robustes d'identification

5.1 INTRODUCTION

Dans cette partie de ce travail, nous proposons un algorithme robuste original qui nous permet de calculer le coefficient de Robin, solution du problème inverse (4.2.6)–(4.2.7), à partir de mesures frontières incomplètes. Toujours dans le cadre électrique, le calcul du flux de courant et du potentiel électrique sur la partie de la frontière inaccessible J , permet d'évaluer l'impédance (ou le coefficient de Robin) q à partir de la formule (6.5.3)

En fait, les données que nous traitons sont générées à partir des mesures expérimentales f_ε , qui sont alors bruitées ce qui nous fait sortir de l'espace d'approximation :

$$f_\varepsilon := f + \varepsilon,$$

où $f \in H^2(G)|_I$. La fonction $\varepsilon \in L^2(I)$ représente le terme bruit attaché aux mesures. Dans ce cas, d'après le théorème 2.4 du chapitre 2, la résolution d'un (BEP) ne règle cependant pas tout, dans la mesure où la borne mise sur les données étendues est généralement saturée par la solution, $M = \|g - f_1\|_{L^2(J)}$, et donc pour espérer de construire un approximant qui soit proche non seulement sur la partie accessible I , mais aussi sur la partie complémentaire inaccessible. Donc qu'afin de fournir des données étendues près de les réelles f , le problème (BEP) a besoin d'utiliser une contrainte M proche de $M_0 := \|f - f_1\|_{L^2(J)}$. Mais la difficulté c'est que la borne M_0 est une inconnue du problème vu qu'elle dépend de la partie inconnue des données, ce qui oblige à évaluer avec précision cette borne sur les données étendues de manière précise pour avoir une chance de les approcher convenablement. Dans le disque unité, Chaabane et al. [35] ont proposés une méthode de "validation croisée", qui consiste à diviser la surface de mesure accessible en deux parties, puis de résoudre le problème (BEP) avec l'une des surfaces et de profiter de l'autre pour déterminer la bonne valeur M_0 de M . Nous proposons ici une méthode alternative qui tient compte de la plus part grande rareté des données disponibles dans le cas doublement connexe. Nous construisons ainsi une famille d'algorithmes consistant à appliquer le même algorithme d'extension (d'ordre zéro) aux dérivées successives des données disponibles. Nous

prouvons que ces algorithmes sont d'autant plus robustes vis à vis des erreurs de mesure que leur ordre est élevé.

Comme on a signalé auparavant, et sans perte de généralité, on suppose que $f_1 = 0$.

5.2 DÉTERMINATION DE LA BORNE RÉELLE

Soit $f_\varepsilon := f + \varepsilon$ des données bruitées ($f \in H^2(G)|_I$, $\varepsilon \in L^2(I)$ mais $\varepsilon \notin H^2(G)|_I$), et $M_0 := \|f\|_{L^2(J)}$ la borne réelle inconnue.

Étant donné un nombre réel positif M , $g(f, M)$ est la solution du problème (BEP) associée aux données f et M , et considérons $g_\varepsilon := g(f_\varepsilon, M)$ la solution du même problème pour la donnée f_ε et la même contrainte M . Les résultats de la section 2.3 du chapitre 2 indiquent que $g_\varepsilon(f, M)$ est proche de f , qui est égale à $g(f, M_0)$, si la contrainte M est proche de M_0 , et f_ε proche de f . Dans cette condition, la fonction $f_\varepsilon - g_\varepsilon$ peut être vue comme une approximation de $f - g_\varepsilon$ sur I dans laquelle l'erreur $e_{f_\varepsilon}(M) := \|f_\varepsilon - g_\varepsilon\|_{L^2(I)}$ reste négligeable. En se profitant de cette situation, nous considérons w_ε la solution du problème (BEP) associée à la donnée $f_\varepsilon - g_\varepsilon$ et relativement à la contrainte $e_{f_\varepsilon}(M)$:

$$w_\varepsilon := g(f_\varepsilon - g_\varepsilon, e_{f_\varepsilon}(M)).$$

Donc, $g_\varepsilon + w_\varepsilon$ représente un candidat d'approximation de f meilleur que g_ε . En fait, soit nous définissons l'application suivante :

$$\begin{aligned} \tau_\varepsilon &: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \\ M &\mapsto \left| \|g_\varepsilon\|_{L^2(J)} - \|g_\varepsilon + w_\varepsilon\|_{L^2(J)} \right|. \end{aligned}$$

Tant que la contrainte M est proche de M_0 , mieux être l'approximation, qui conduit alors à déterminer le zéro de la fonction τ_ε . Donc minimiser τ_ε semble ainsi une manière raisonnable de chercher une valeur approchée de la borne réelle M_0 . Ce que nous allons le prouver dans le théorème 5.1 pour le cas des données analytiques.

Commençons tout d'abord par vérifier l'inégalité suivante :

Lemme 5.1 *Pour tout $M \in \mathbb{R}_+^*$, on a*

$$\tau_\varepsilon(M) \leq e_{f_\varepsilon}(M).$$

Preuve

On a

$$\begin{aligned} \tau_\varepsilon(M) &= \left| \|g_\varepsilon\|_{L^2(J)} - \|g_\varepsilon + w_\varepsilon\|_{L^2(J)} \right| \\ &\leq \|w_\varepsilon\|_{L^2(J)} \\ &= e_{f_\varepsilon}(M). \end{aligned}$$

■

Théorème 5.1 [63] *Dans le cas des données analytiques (i.e., $\varepsilon = 0$), la borne M_0 est le plus petit réel positif qui minimise la fonctionnelle τ_0 , et de plus $\tau_0(M_0) = 0$.*

Preuve [63]

Puisque $f \in H^2(G)|_I$, alors pour tout $M \geq M_0$ on a $g(f, M) = f$ sur I , et donc $e_f(M) = 0$. D'après le lemme 5.1, on a $\tau_0(M_0) = 0$.

D'autre part, supposons que $M < M_0$. Puisque $g(f, M)$ est la solution du problème (BEP) associée au couple (f, M) , alors on a

$$e_f(M) = \|f - g(f, M)\|_{L^2(I)} = \inf \left\{ \|f - g\|_{L^2(I)} : g \in H^2(G), \|g\|_{L^2(J)} \leq M \right\} > 0$$

et, puisque $w_0(M)$ résoud le problème (BEP) relativement au couple $(f - g(f, M), e_f(M))$, alors on a

$$\begin{aligned} & \|f - g(f, M) - w_0(M)\|_{L^2(I)} = \\ & \inf \left\{ \|f - g(f, M) - w\|_{L^2(I)} : w \in H^2(G), \|w\|_{L^2(J)} \leq e_f(M) \right\}. \end{aligned}$$

Or, la fonction nulle, $w = 0$, est un élément de $H^2(G)$ et $\|w\|_{L^2(J)} = 0 < e_f(M)$, donc

$$\|f - g(f, M) - w_0(M)\|_{L^2(I)} \leq \|f - g(f, M)\|_{L^2(I)}. \quad (5.2.1)$$

S'il existe un réel $M < M_0$ tel que $\tau_0(M) = 0$, alors $\|g(f, M) + w_0(M)\|_{L^2(J)} = M$. Donc, à partir de (5.2.1) et de l'unicité de la solution du problème (BEP), on a $g(f, M) + w_0(M) = g(f, M)$ dans G et par suite $w_0(M) = 0$ dans G . Ceci implique que $e_f(M) = \|w_0(M)\|_{L^2(J)} = 0$, ce qui contredit le fait $e_f(M) > 0$.

Pour $M > M_0$, on a $w_\varepsilon = 0$ et $\|g_\varepsilon(M)\|_{L^2(J)} = M_0$ et donc $\tau_0(M) > 0$. ■

Maintenant, on va s'intéresser aux données non analytiques. Pour $\varepsilon \neq 0$, la fonction τ_ε admet un minimum qui réalise une valeur approchée de la borne réelle M_0 .

Théorème 5.2 [63] *Soient α et β deux réels positifs tel que $0 < \alpha < \beta$, et $M_0 \in [\alpha, \beta]$, et soit $\varepsilon \in L^2(I)$ une fonction positive.*

- (i) *La fonction τ_ε admet un minimum M_ε dans $[\alpha, \beta]$. De plus, soit $\delta_\varepsilon := \inf_{M \in [\alpha, \beta]} \tau_\varepsilon(M)$, on a alors $\lim_{\|\varepsilon\|_{L^2(I)} \rightarrow 0} \delta_\varepsilon = 0$.*
- (ii) *Soit $\mathcal{I}_\varepsilon = \{M_\varepsilon \in [\alpha, \beta] : \delta_\varepsilon = \tau_\varepsilon(M_\varepsilon)\}$. Alors \mathcal{I}_ε admet un point minimal $\underline{M}_\varepsilon$.*
- (iii) *Tout point d'accumulation \underline{M}_0 de la famille $(\underline{M}_\varepsilon)_\varepsilon$ vérifie $\underline{M}_0 \geq M_0$.*
- (iv) *Quand $\|\varepsilon\|_{L^2(I)} \rightarrow 0$, alors $g(f_\varepsilon, \underline{M}_\varepsilon) \rightarrow f$ dans $H^2(G)$, par conséquent, aussi dans $L^2(J)$, et $g(f_\varepsilon, \underline{M}_\varepsilon) \rightarrow f$ dans $L^2(I)$.*

Preuve [63]

- (i) Puisque la donnée f_ε n'est pas analytique, alors d'après le théorème 2.4 :

$$\lim_{M_n \rightarrow M} \|g(f_\varepsilon, M_n) - g(f_\varepsilon, M)\|_{L^2(J)} = 0,$$

et aussi :

$$\lim_{M_n \rightarrow M} \|w_\varepsilon(M_n) - w_\varepsilon(M)\|_{L^2(J)} = 0,$$

τ_ε est donc continue sur le compact $[\alpha, \beta]$, et donc il existe un réel $M_\varepsilon \in [\alpha, \beta]$ tel que $\tau_\varepsilon(M_\varepsilon) = \delta_\varepsilon$.

Soit $(\varepsilon_n)_n$ une suite telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$. Depuis $M_0 \in [\alpha, \beta]$, on a :

$$0 \leq \delta_{\varepsilon_n} \leq \tau_{\varepsilon_n}(M_0) \leq e_{f_{\varepsilon_n}}(M_0). \quad (5.2.2)$$

À partir du résultat (2.3.1) du chapitre 2, on obtient

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{\varepsilon_n} \leq e_f(M_0) = 0. \quad (5.2.3)$$

(ii) Soit $\mathcal{I}_\varepsilon = \{M_\varepsilon \in [\alpha, \beta] : \delta_\varepsilon = \tau_\varepsilon(M_\varepsilon)\}$. Alors il est un sous ensemble fermé de $[\alpha, \beta]$ puisque $\mathcal{I}_\varepsilon = \delta_\varepsilon^{-1}(\delta_\varepsilon)$, et par suite c'est un compact. D'où l'existence de $\underline{M}_\varepsilon$.

(iii) Supposons qu'il existe une sous-suite $(\underline{M}_{\varepsilon_n})_n$ de $(\underline{M}_\varepsilon)_\varepsilon$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{M}_{\varepsilon_n} = \underline{M}_0$. Introduisons les notations $g_\varepsilon(M) = g(f_\varepsilon, M)$, $g_0(M) = g(f, M)$, et de même pour les fonction w_ε et w_0 . Par le théorème 2.4, on a

$$\|g_{\varepsilon_n}(\underline{M}_{\varepsilon_n})\|_{L^2(J)} \rightarrow \|g_0(\underline{M}_0)\|_{L^2(J)},$$

et par (2.3.1) du chapitre 2,

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{\varepsilon_n} = \tau_0(\underline{M}_0),$$

et on conclut que

$$\underline{M}_0 = \|g_0(\underline{M}_0) + w_0(\underline{M}_0)\|_{L^2(J)}.$$

Depuis

$$\|f - g_0(\underline{M}_0) - w_0(\underline{M}_0)\|_{L^2(I)} \leq \|f - g_0(\underline{M}_0)\|_{L^2(I)},$$

on a $g_0(\underline{M}_0) + w_0(\underline{M}_0) = g_0(\underline{M}_0)$, ce qui implique que $w_0(\underline{M}_0) = 0$, et dans ce cas on déduit que $e_f(M_0) = 0$; donc $\|f - g_0(\underline{M}_0)\|_{L^2(I)} = 0$, c'est à dire $f = g_0(\underline{M}_0)$ sur I est donc dans G par le lemme 2.2. Ce qui donne $M_0 = \underline{M}_0$, ce qui est absurde.

(iv) C'est une conséquence directe du théorème 2.4 et du point (iii) ci dessus. Notons que la convergence faible dans $H^2(G)$ implique la convergence faible des restrictions sur $L^2(J)$, d'après le résultat de densité des traces sur J des fonctions de $H^2(G)$ dans $L^2(J)$ (proposition 2.2 du chapitre 2). ■

Remarques 5.1 1. Dans le cas où la borne \underline{M}_0 fournie par l'algorithme serait égale à α (resp. β), on doit recommencer de nouveau, après avoir élargir l'intervalle $[\alpha, \beta]$ de l'extrémité gauche (resp. de l'extrémité droite).

2. Le théorème 5.2 ne nous fournit pas la borne réelle M_0 pour les données non analytiques comme le théorème 5.1 pour des données analytiques, et il n'assure pas la convergence de la borne $\underline{M}_\varepsilon$ vers M_0 , puisque seulement la convergence faible de l'approximant $g(f_\varepsilon, \underline{M}_\varepsilon)$ vers f est possible sur J . ■

5.3 ALGORITHMES D'IDENTIFICATION

Dans cette section, nous allons exploiter l'idée décrite ci dessus pour un ordre supérieur, afin d'améliorer les résultats du théorème 5.2.

5.3.1 Algorithme d'ordre zéro : (\mathbf{A}_0)

Nous organisons l'idée décrite dans la section 5.2 par un algorithme, noté (\mathbf{A}_0) , qui permet de calculer le coefficient de Robin q .

algorithme (\mathbf{A}_0) :

1. Étant donné $M > 0$, résoudre le problème (BEP) associé à (f_ε, M) et obtenir $g_\varepsilon(M) := g(f_\varepsilon, M)$, $e_{f_\varepsilon}(M) := \|f_\varepsilon - g_\varepsilon(M)\|_{L^2(I)}$;
2. Résoudre le problème (BEP) associé à $(f_\varepsilon - g_\varepsilon(M)|_I, e_{f_\varepsilon}(M))$ et obtenir $w_\varepsilon = g(f_\varepsilon - g_\varepsilon(M)|_I, e_{f_\varepsilon}(M))$;
3. Ajuster $\underline{M}_\varepsilon := \text{Argmin}_{M>0} \tau_\varepsilon(M)$ par dichotomie ;
4. Calculer

$$q_\varepsilon = -\frac{\partial_\theta \text{Im } g_\varepsilon(\underline{M}_\varepsilon)}{\text{Re } g_\varepsilon(\underline{M}_\varepsilon)} \quad \text{sur } J.$$

Le quatrième point dans le théorème 5.2 peut être vu comme un résultat de robustesse faible pour l'algorithme (\mathbf{A}_0) . Ce qui nous conduit à une mauvaise reconstruction de l'impédance (coefficient de Robin), qui est aussi, en parallèle avec le problème d'approximation, un sujet objectif dans notre étude. Pour cela, nous étudierons quelques algorithmes évolués basés sur les mêmes idées.

5.3.2 Algorithme d'ordre m : (\mathbf{A}_m)

L'idée fondamentale est d'appliquer l'algorithme d'ordre zéro aux dérivées m^{me} des données, puis en intégrant m fois les dérivées m^{me} de l'approximant obtenue.

Soit $f_\varepsilon = f + \varepsilon$, où ε est une perturbation non analytique, mais qui peut être lisse, ($\varepsilon \in W^{m,2}(I) \setminus H^{m,2}(\partial G)|_I$), et on suppose que $f \in H^{m,2}(\partial G)$. L'algorithme d'ordre m , (\mathbf{A}_m) , est donné comme suit :

algorithme (\mathbf{A}_m) :

1. Déterminer la m^{me} dérivée $f_\varepsilon^{(m)}$ de f_ε sur I ;
2. Appliquer la méthode d'ordre zéro aux données $f_\varepsilon^{(m)}$, et obtenir $g_\varepsilon^{(m)}$;
3. Intégrer m fois $g_\varepsilon^{(m)}$ et obtenir $g_{m,\varepsilon}$;
4. Calculer

$$q_{m,\varepsilon} = -\frac{\partial_\theta \text{Im } g_{m,\varepsilon}}{\text{Re } g_{m,\varepsilon}} \quad \text{sur } J.$$

Grâce à la propriété de continuité obtenue dans la section 3.5 du chapitre 3, cet algorithme présente une propriété de robustesse bien meilleure que celui d'ordre zéro. Ce qu'on va le prouver dans le théorème suivant.

Théorème 5.3 [63] (*Robustesse de la méthode d'ordre m*)

Supposons $\phi \in W^{m,2}(I)$, $q \in \mathcal{Q}^m$, $m \geq 1$. Soit alors $f_\varepsilon = u_d + i \int \phi d\theta + \varepsilon \in W^{m,2}(I)$ et $g_{m,\varepsilon}$ comme ci-dessus. Quand $\|\varepsilon\|_{W^{m,2}(I)} \rightarrow 0$ on a :

$$\operatorname{Re} g_{m,\varepsilon} \rightarrow u \text{ dans } W^{m,2}(\partial G), \quad \partial_\theta \operatorname{Im} g_{m,\varepsilon} \rightarrow \partial_\nu u \text{ dans } W^{m-1,2}(\partial G).$$

Aussi

$$q_{m,\varepsilon} \rightarrow q \text{ in } W^{m-1,2}(J).$$

Preuve [63]

Du théorème 5.2, on déduit que $g_{m,\varepsilon}^{(m)} \rightharpoonup f^{(m)}$ dans $H^2(G)$. En intégrant m -fois, et pour le même argument, théorème de convergence dominée de Lebesgue, décrit dans la preuve du théorème 3.7, on conclut la convergence forte des $(m-1)$ premières dérivées de $g_{m,\varepsilon}$ vers celles correspondantes de f , et on a aussi la convergence en tout point de J . Ce qui prouve la convergence faible $g_{m,\varepsilon} \rightharpoonup f$ dans $H^{m,2}(G)$ et la convergence forte $g_{m,\varepsilon} \rightarrow f$ dans $H^{m-1,2}(G)$. Ce qui prouve les deux premières assertions du théorème.

Pour établir la troisième, on va utiliser la condition (4.2.4) du théorème 4.1, le fait que

$$\operatorname{Re} f \geq \underline{\kappa} > 0 \text{ sur } J. \tag{5.3.1}$$

Donc, puisque $g_{m,\varepsilon} \rightarrow f$ en tout point de J , alors d'après (5.3.1), et pour ε assez petit,

$$\operatorname{Re} g_{m,\varepsilon} \geq \underline{\kappa}/2 \text{ sur } J. \tag{5.3.2}$$

D'autre part, sur J on a

$$\begin{aligned} q_{m,\varepsilon} - q &= \frac{\partial_\theta \operatorname{Im}(f)}{\operatorname{Re}(f)} - \frac{\partial_\theta \operatorname{Im}(g_{m,\varepsilon})}{\operatorname{Re}(g_{m,\varepsilon})} \\ &= \frac{\partial_\theta (\operatorname{Im}(g_{m,\varepsilon} - f))}{\operatorname{Re} g_{m,\varepsilon}} + \partial_\theta \operatorname{Im} f \frac{\operatorname{Re}(f - g_{m,\varepsilon})}{\operatorname{Re} g_{m,\varepsilon} \operatorname{Re} f}. \end{aligned}$$

En appliquant maintenant (5.3.1), (5.3.2), et pour $\alpha_1 = 4/\kappa$, $\alpha_2 = 4/\kappa^2$, on obtient

$$\|q_{m,\varepsilon} - q\|_{W^{m-1,2}(J)} \leq \alpha_1 \|g_{m,\varepsilon} - f\|_{W^{m,2}(J)} + \alpha_2 \|f\|_{W^{m,2}(J)} \|g_{m,\varepsilon} - f\|_{W^{m-1,\infty}(J)}.$$

Ce qui prouve la convergence faible $q_{m,\varepsilon} \rightharpoonup q$ dans $W^{m-1,2}(J)$, $m \geq 1$, et la convergence forte $q_{m,\varepsilon} \rightarrow q$ dans $W^{m-2,2}(J)$, $m \geq 2$, en tenant compte de l'injection de Sobolev $W^{m-1,2}(J) \subset W^{m-2,2}(J)$. ■

L'approche d'approximation dans les espaces de Hardy Sobolev joue aussi un rôle essentiel dans la construction des algorithmes robustes d'identification. En se basant sur

le résultat du théorème 3.6, nous décrivons ici une autre version de l'algorithme d'ordre m , (\mathbf{A}_m) , où on adapte l'algorithme d'ordre 0, (\mathbf{A}_0) , aux données du problème $(\text{BEP})_m$, $m \geq 1$.

Soit $f_\varepsilon := f + \varepsilon$ des données bruitées ($f \in H^{m,2}(G)|_I$, $\varepsilon \in W^{m,2}(I)$ mais $\varepsilon \notin H^{m,2}(G)|_I$).

algorithme $(\mathbf{A}_m^{\text{bis}})$:

1. Étant donné $M > 0$, résoudre le problème $(\text{BEP})_m$ associé à (f_ε, M) et obtenir $\tilde{g}_{m,\varepsilon}(M) := g(f_\varepsilon, M)$, $e_{f_\varepsilon}(M) := \|f_\varepsilon - \tilde{g}_{m,\varepsilon}(M)\|_{L^2(I)}$;
2. Résoudre le problème $(\text{BEP})_m$ associé à $(f_\varepsilon - \tilde{g}_{m,\varepsilon}(M)|_I, e_{f_\varepsilon}(M))$ et obtenir $\tilde{w}_{m,\varepsilon} = g(f_\varepsilon - \tilde{g}_{m,\varepsilon}(M)|_I, e_{f_\varepsilon}(M))$;
3. Ajuster $\underline{M}_\varepsilon := \text{Argmin}_{M>0} \tau_{m,\varepsilon}(M)$ par dichotomie ;
4. Calculer

$$q_{m,\varepsilon} = - \frac{\partial_\theta \text{Im } \tilde{g}_{m,\varepsilon}(\underline{M}_\varepsilon)}{\text{Re } \tilde{g}_{m,\varepsilon}(\underline{M}_\varepsilon)} \quad \text{sur } J.$$

Avec

$$\tau_{m,\varepsilon}(M) = \left| \| \tilde{g}_{m,\varepsilon} \|_{L^2(J)} - \| \tilde{g}_{m,\varepsilon} + \tilde{w}_{m,\varepsilon} \|_{L^2(J)} \right|.$$

On a alors les mêmes résultats du théorème 5.3 :

Corollaire 5.1 *Supposons $\phi \in W^{m,2}(I)$, $q \in \mathcal{Q}^m$, $m \geq 1$. Soit alors $f_\varepsilon = u_d + i \int \phi d\theta + \varepsilon \in W^{m,2}(I)$ et $g_{m,\varepsilon}$ comme ci-dessus. Quand $\|\varepsilon\|_{W^{m,2}(I)} \rightarrow 0$ on a :*

$$\text{Re } \tilde{g}_{m,\varepsilon} \rightarrow u \text{ dans } W^{m,2}(\partial G), \quad \partial_\theta \text{Im } \tilde{g}_{m,\varepsilon} \rightarrow \partial_n u \text{ dans } W^{m-1,2}(\partial G).$$

Aussi

$$q_{m,\varepsilon} \rightarrow q \text{ in } W^{m-1,2}(J).$$

Preuve

Comme dans la preuve précédente, c'est une conséquence immédiate du théorème 3.6, et du fait que, si g_m résout le problème $(\text{BEP})_m$ associé aux données f et M alors pour tout $k = 0, \dots, m$, $g_m^{(k)}$ est solution du problème (BEP) associé aux données $f^{(k)}$ et $M_k := \|g_m^{(k)}\|_{L^2(J)}$. ■

Remarque 5.1 Ce résultat de robustesse est obtenu pour un bruit régulier (lisse, $\varepsilon \in W^{n,2}(I)$), qui est un dispositif non attendu. Supposons maintenant que $\varepsilon \in L^\infty(I)$ avec $|\varepsilon(x)| \leq \epsilon$ pour x dans I . On notera par f^ε la fonction de classe C^3 par morceaux et C^2 globalement sur I , l'approximation de f_ε obtenue par l'approche de l'approximation par les B-splines cubiques à pas h , [43, 44]. Il a été prouvé dans [48] les estimations suivantes :

$$\|\tilde{f}^\varepsilon - f\|_{L^\infty(I)} \leq c(\epsilon + h^2), \quad \|(\tilde{f}^\varepsilon - f)'\|_{L^\infty(I)} \leq c\left(\frac{\epsilon}{h} + h\right).$$

On choisit maintenant $h = O(\sqrt{\epsilon})$, on obtient une erreur d'ordre $\sqrt{\epsilon}$ sur f' , qui en moyenne $(\tilde{f}^\varepsilon)'$ peut être vu comme des données bruitées de f' , associées à un bruit d'ordre

$\sqrt{\epsilon}$. Par "bootstrapping" avec l'approximation B-spline approximation, on peut ainsi obtenir une estimation d'ordre $\epsilon^{\frac{1}{2p}}$ sur la p -th dérivée de f .

Ceci signifie que lisser des données bruitées en employant les B-splines fournit des données bruitées lisse comme elles sont décrites dans les théorèmes 5.3, 5.1. En fait, c'est la manière de traiter des données numériquement : on lisse des données avant d'être traité.

■

5.4 DISCUSSION

La méthode de "validation croisée" qui a été proposée et testée avec succès dans le cas des domaines simplement connexes [35], nécessite qu'une partie des données soit dévolue. Il s'avère qu'elle peut être pénalisant dans notre cas, dans le sens où la résolution des problèmes (BEP) est sensible à la quantité de données disponibles à cause de la géométrie doublement connexe du domaine. Ceci nous a conduit à penser à déterminer une méthode alternative qui tient compte de la totalité des données fournies. Pour cela nous avons construit une famille d'algorithmes consistant à appliquer l'algorithme d'extension (d'ordre zéro) aux dérivées successives des données disponibles. Ces algorithmes sont d'autant plus robustes vis à vis des erreurs de mesure que leur ordre est élevé. Dans le même contexte, nous avons adapté le même algorithme d'extension dans les espaces de Hardy-Sobolev, qui donne des résultats de convergences similaire.

Dans le chapitre 6, ces résultats théoriques de robustesse seront corroborés par une étude numérique exhaustive.

Troisième partie

Validation numérique. Résolution
numérique de quelques problèmes
inverses géométriques

CHAPITRE 6

Résolution numériques du BEP et application au coefficient de corrosion

6.1 INTRODUCTION

Dans la dernière partie de ce travail ; nous présenterons une étude numérique de la technique d'approximation harmonique et des algorithmes mises au point aux chapitres 2, 3 et 5, afin d'illustrer les applications portant sur la reconstruction d'impédances localisant des zones de corrosion.

Une implementation numérique de la méthode figure dans la section 6.2 qui tient compte de différents arguments intervenant dans la résolution. Le paramètre λ intervenant dans les formules joue le rôle de multiplicateur de Lagrange qui rend implicite la dépendance en M de la solution et qu'on ajuste par dichotomie.

Dans la section 6.3, nous mettons en évidence l'influence du choix de la contrainte imposée sur la nature de l'extension et donc sur la reconstruction des défauts géométriques par une validation numérique des algorithmes qu'on a établi dans le chapitre 5. L'algorithme que nous avons adopté tient compte de la plus grande rareté des données disponibles dans le cas multi-connexe et l'étude numérique montre que ces algorithmes sont d'autant plus robustes vis à vis des erreurs de mesure que leur ordre est élevé.

Dans notre étude numérique, la donnée $f \in L^2(I)$ est générée en temps discret à partir de la fonction $f(z) = \exp(z)$ pour des données analytiques et $f(z) = \text{constante} + 2 \frac{z-1}{z-\text{pole}}$ pour des données singulières, où $s = 0.6$ et "pole" est un point appartient au disque $s\mathbb{D}$ et nous restreindrons au cas $f_1 = 0$.

6.2 RÉOLUTION NUMÉRIQUE DU PROBLÈME (BEP)

L'implémentation numérique de la résolution des problèmes (BEP) a été effectuée à l'aide du logiciel *Matlab* [100] (version 7.1). Ce code utilise des outils divers de la bi-

bibliothèque de programmes dans *Matlab*, comme par exemple, le calcul des coefficients de Fourier par la fonction *fft* (discrete Fourier transform) et le Fourier inverse *ifft* (inverse discrete Fourier transform), le calcul de la matrice de Toeplitz en utilisant la fonction *toeplitz* et la dérivation numérique en utilisant la méthode des différences finies donnée par la fonction *diff*, \dots .

Pour un choix arbitraire d'une contrainte M , on fournit au programme une valeur initiale de λ à partir de laquelle s'effectue la dichotomie pour résoudre un (BEP) associé à la donnée f , puisque $M(\lambda)$ est une fonction décroissante de λ . La figure 6.1 illustre la tracée de $M(\lambda) = \|g\|_{L^2(J)}$, où g est la solution du (BEP) pour la donnée $f(z) = \exp(z)$ dans les cas $I = \mathbb{T}$ (à gauche) et $I = (e^{-i3\pi/4}, e^{i3\pi/4})$ (à droite).

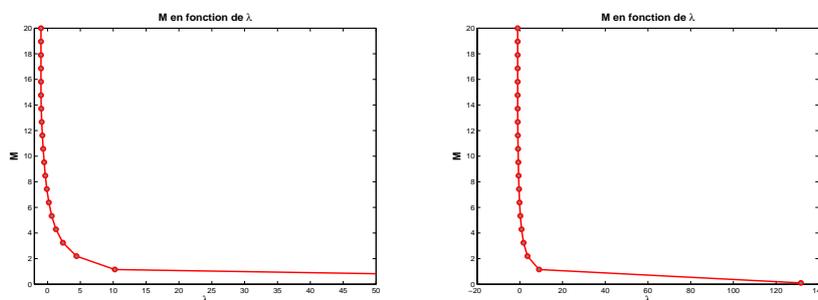
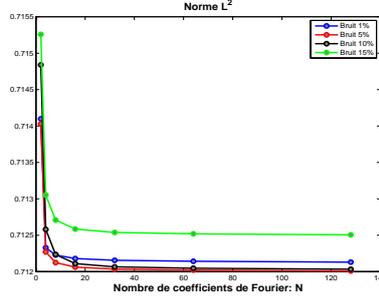


FIG. 6.1 – M en fonction de λ

La solution g est obtenue en résolvant une équation linéaire mais en dimension infinie. Pour la résoudre de manière approchée, il faut donc tronquer le développement des quantités de l'équation (2.2.3) dans la base $\{e_n(z), n \in \mathbb{Z}\}$. D'une façon générale, pour une fonction $h \in L^2(I)$, on désignera par h_N , l'approximation de la fonction h pour laquelle seuls les coefficients de Fourier d'indice n avec $-N \leq n \leq N$ ont été calculés. Peut-on trouver une borne sur le nombre de coefficients de Fourier à calculer, connaissant le nombre de mesures, le pourcentage de bruit sur les mesures, les diverses erreurs numériques? En fait, on pourrait éventuellement déterminer beaucoup de coefficients pour $(\chi_I f)_N$. L'erreur de troncature de Fourier est définie de la façon suivante : on représente la valeur de $\|P_{H^2}(\chi_I f)\|_{L^2(I)} / \|\chi_I f\|_{L^2(I)}$ en fonction de N . Ce nombre doit tendre vers 0 quand N croît puisque $\chi_I f$ est nulle sur J . L'observation de cette courbe (figure 6.2) permet de décider du nombre de coefficients de Fourier à prendre en compte. Il s'avère en réalité qu'une valeur $N = 20$ (41 fonctions de base) est suffisante pour garantir cette représentation au-dessous du niveau de bruit, s'il est autour de 15%. En outre, la figure 6.2 montre qu'il n'est pas valable de choisir plus de 51 fonctions de base ($N = 25$), puisque l'erreur est stabilisée à partir de ce point. Pour fixer les idées, dans tous nos calculs numériques, on va choisir $N = 25$ (51 fonctions de base). Ce nombre est un paramètre à fournir au programme : $fourier = 2N + 1$.

La version tronquée de l'équation (2.2.3) s'écrit alors :

$$((Id + \lambda \mathcal{T}_J) g_N)_N = P_{H^2}(\chi_I f)_N,$$


 FIG. 6.2 – Détermination de N avec $f(z) = \exp(z)$ et $I = \mathbb{T}$

qui s'écrit encore sous la forme

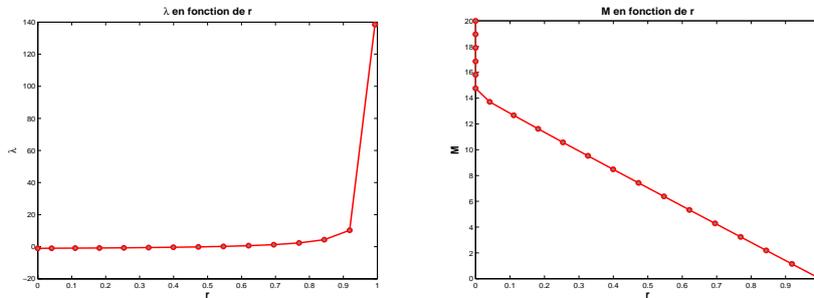
$$[(\mathcal{T}_I + (1 + \lambda)\mathcal{T}_J) g_N]_N = P_{H^2}(\chi_J f)_N, \quad (6.2.1)$$

où $\mathcal{T}_I := P_{H^2}\chi_I$ représente la matrice de Toeplitz associée à la fonction caractéristique de $I := (e^{-i\theta_0}, e^{i\theta_0})$, $\theta_0 \in [0, \pi]$. Les opérateurs de Toeplitz \mathcal{T}_J et $\mathcal{T}_I = Id - \mathcal{T}_J$ sont approchés dans la base $\{e_n(z), n = -N, \dots, N\}$ en tronquant la matrice $\mathcal{T}_{n,m}$ donnée dans la formule (2.2) :

pour $-N \leq n, m \leq N$,

$$\mathcal{T}_{n,m} = \begin{cases} \frac{1}{1 + s^{2n}} \left(1 + s^{2n} - \frac{\theta_0}{\pi} \right) & \text{when } n = m, \\ -\frac{1}{\sqrt{(1 + s^{2n})(1 + s^{2m})}} \frac{\sin(m - n)\theta_0}{\pi(m - n)} & \text{when } n \neq m. \end{cases}$$

Le paramètre λ associé à la contrainte M fournie au programme varie dans l'intervalle $] -1, +\infty[$. Pour être rigoureux numériquement, on transforme cet intervalle en l'intervalle borné $[0, 1]$ en prenant $1 + \lambda = \frac{r}{1-r}$ et nous cherchons la valeur appropriée de $r \in (0, 1)$ ($\lambda(r)$ est une fonction croissante régulière en r (figure 6.3 à gauche) et donc $M(\lambda(r))$ est une fonction décroissante régulière en r) (figure 6.3 à droite).


 FIG. 6.3 – À gauche λ en fonction de r et à droite M en fonction de r ($f(z) = \exp(z)$, $I = \mathbb{T}$)

Dans ce cas, l'équation (6.2.1) devient :

$$[((1 - r)\mathcal{T}_I + r\mathcal{T}_J) g_N]_N = (1 - r)P_{H^2}(\chi_J f)_N, \quad (6.2.2)$$

et c'est cette équation linéaire en dimension $2N + 1$, dont la matrice est symétrique et positive, que nous résolvons par la méthode de Cholesky et nous décidons alors d'augmenter ou diminuer r selon la valeur de $V(\lambda) = \|g\|_{L^2(J)}$:

si $V(\lambda) > M$ alors on augmente r ,

si $V(\lambda) < M$ alors on diminue r .

Alors, l'algorithme partageant en deux intervalles est :

```
Given M
rmax = 1; rmin = 0;
while rmax - rmin > threshold
    r = (rmax+rmin)/2;
    A = (1 - r)*TI + r*TJ;
    B = (1 - r)*cf;
    cg = pinv(A) * B(:);
    cgJ = TJ*cg;
    V = norm(cgJ(:));
    if V > M
        rmin = r;
    else
        rmax = r;
    end
end
end
Compute g: g = fft(cg)
```

6.3 ETUDE POUR LE CAS DES DONNÉES ANALYTIQUES

Nous allons présenter les diverses contraintes intervenant dans la résolution des problèmes (BEP) et régler les influences de ces contraintes sur des données analytiques (non bruitées) générées à partir de la fonction $f(z) = \exp(z)$. Dans la sous-section 6.3.4, nous tenons compte de la sensibilité de la reconstruction à la présence d'une singularité dans l'expression de la fonction $f : f(z) = \text{constante} + 2 \frac{z-1}{z - \text{pole}}$.

6.3.1 Sensibilité selon la contrainte M

La question de choisir une contrainte M permettant une bonne reconstruction de l'extension ou de l'approximant (solution du problème (BEP)) est très importante dans ce type de problème. Mais ce paramètre utilisé dans la contrainte imposée sur la partie J de la frontière est une inconnue du problème, vu que les mesures sont effectuées seulement sur

I , alors il influe fortement sur l'extension trouvée, qui n'est pas forcément l'approximation souhaitée.

La figure 6.4, représentant l'approximant sur \mathbb{T} et sur $s\mathbb{T}$ respectivement, montrent la sensibilité des approximants par rapport aux valeurs de M choisies. Cette observation confirme le résultat de continuité qu'on a établis dans le théorème 2.4 et qui montre que la résolution d'un (BEP) ne règle cependant pas tout, dans la mesure où la borne mise sur les données étendues est généralement - en fait dès lors que les données ne sont pas analytiques - saturée par la solution, ce qui oblige à évaluer avec précision cette borne sur les données étendues de manière précise pour avoir une chance de les approcher convenablement. Cependant, on doit choisir une contrainte M suffisamment proche de $M_0 = \|g_0\|_{L^2(J)}$ pour avoir un approximant g qui soit proche en norme L^2 de l'extension g_0 en vertu du théorème 2.4.

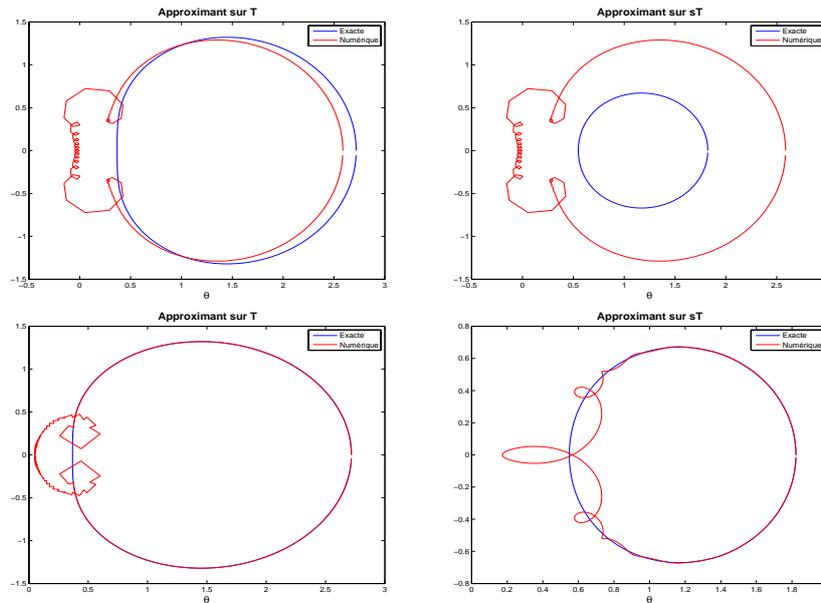


FIG. 6.4 – Approximants sur \mathbb{T} et $s\mathbb{T}$ pour $\frac{M}{M_0} = \{0.9, 2\}$ avec $I = (e^{-i3\pi/4}, e^{i3\pi/4})$

Dans [35], une méthode de “validation croisée” avait été proposée et testée avec succès dans le cas des domaines simplement connexes. Cette méthode nécessite qu’une partie des données disponibles soit dévolue au calcul de la borne, elle s’avère pénalisante dans le cas présent, puisqu’une quantité plus petite de données est disponible, due à la géométrie multi-connexe. Il est ainsi préférable de consacrer toutes les données à la reconstruction. Dans le chapitre 5, nous avons proposé une méthode alternative qui tient compte de la plus grande rareté des données disponibles dans le cas multi-connexe.

Cette méthode a été exploitée et l’algorithme établi montre une bonne efficacité pour trouver une valeur approchée M de la vraie contrainte M_0 . La figure 6.5 confirme le résultat du théorème 5.1 : est que la fonction τ a un minimum, dont l’argument est proche de la valeur exacte M_0 .

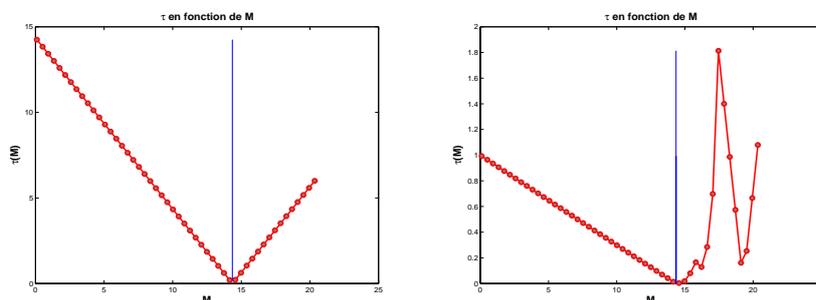


FIG. 6.5 – Fonction τ pour des données analytiques (à gauche) et des données bruitées (à droite) avec $I = (e^{-i3\pi/4}, e^{i3\pi/4})$

6.3.2 Sensibilité à la régularité de la solution

Pour cette valeur approchée de la contrainte M_0 obtenue par l'algorithme (\mathbf{A}_0) et toujours pour des données analytiques, on trace dans la figure 6.6 l'extension sur \mathbb{T} et sur $s\mathbb{T}$ respectivement et on voit bien que les résultats sont améliorés par rapport aux celles dans les figures 6.4, mais le problème pas toute à fait résolu à cause des discontinuités qui se visualisent sous forme de boucles apparaissant aux bornes de l'intervalle I . Dans la figure 6.6, et puisque on a considéré $f_1 = 0$, on observe que la taille des discontinuités est proportionnelle aux valeurs prises par f aux bornes de I . Une perspective est de considérer une fonction f_1 résultat d'une extrapolation de $f|_I$.

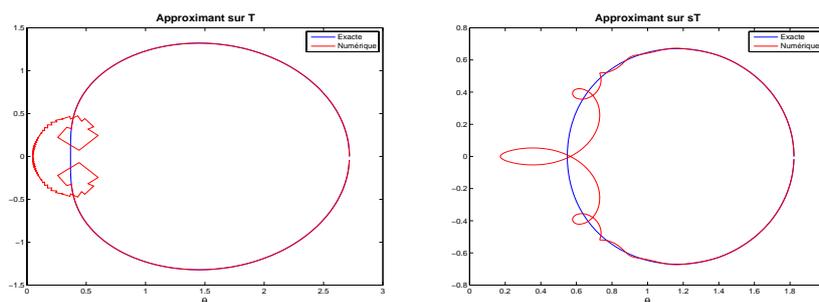
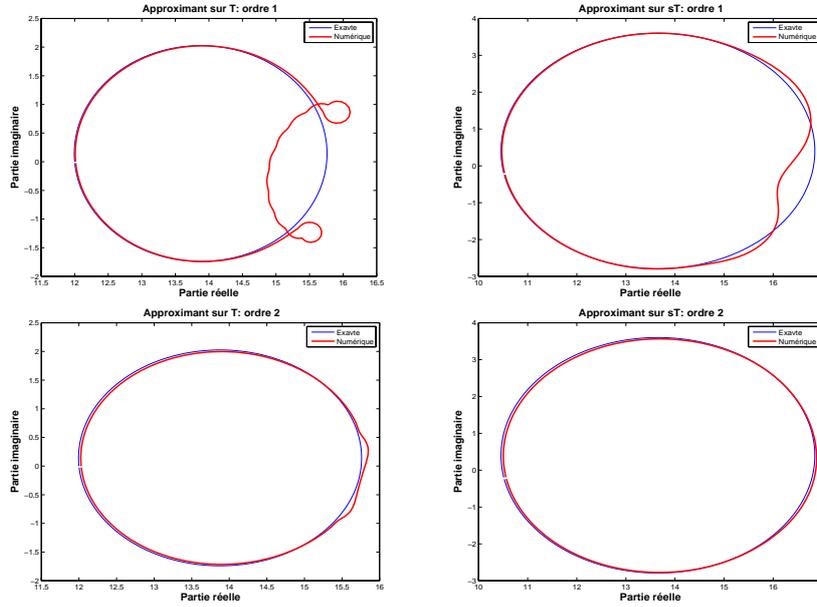


FIG. 6.6 – Approximants sur \mathbb{T} et sur $s\mathbb{T}$ pour $M \simeq M_0$.

Pour pallier à ce défaut, nous avons procédé d'une alternative décrite dans le chapitre 3 qui consiste à chercher une solution dans les classes Hardy Sobolev qui permettent une reformulation simple du (BEP). La figure 6.7 montre que la continuité de l'approximant est maintenant garantie en appliquant les algorithmes d'ordres 1 et 2.

Dans la suite de ce travail, on va s'intéresser à la résolution des problèmes (BEP) dans les espaces de Hardy-Sobolev d'ordre 2 et de choisir une contrainte M déterminée par l'algorithme (\mathbf{A}_2) .


 FIG. 6.7 – Approximants sur \mathbb{T} et sur $s\mathbb{T}$ pour $M \simeq M_0$ d'ordres 1 et 2.

6.3.3 Sensibilité à la quantité de données et à leur emplacement

Il est important d'étudier l'effet du taux des données fournies par rapport à la partie inconnue, sur la reconstruction de l'extension. Cette proportion peut être mesurée par le paramètre ρ suivant :

$$\rho := \frac{|I|}{2\pi},$$

où $|I|$ est la longueur de I pour la mesure de Lebesgue.

Il n'est pas étonnant que la figure 6.8 montre l'amélioration de la reconstruction sur la partie réelle de l'extension ainsi de sa dérivée normale en augmentant cette proportion. Dans les dessins à gauche on trace la partie réelle et la dérivée normale de l'extension sur $s\mathbb{T}$ pour $\rho = \frac{1}{6}$ et $\rho = \frac{3}{4}$ et montrent que la reconstruction est sensible à l'emplacement des données et donc à la position de I . Dans les dessins à droite, les erreurs sont calculées sur J entre la solution réelle et son approximant et entre la dérivée normale réelle et numérique, en normes L^2 et uniforme.

D'un autre point de vue numérique, cette proportion des données peut être traitée en terme du rapport entre le nombre de mesures disponibles sur I par le nombre total des noeuds sur le cercle $s\mathbb{T}$, définit par :

$$p := \frac{n_d}{n},$$

où n_d est le nombre de points de mesures sur I et n le nombre totale des noeuds. Cependant, nous allons étudier la sensibilité de la reconstruction de l'extension par rapport au paramètre p pour une valeur de ρ donnée et un nombre totale n de noeuds sur $s\mathbb{T}$. Dans la figure 6.9, on représente la partie réelle et la dérivée normale de l'extension en jouant

6 Résolution numérique du BEP et application au coefficient de corrosion

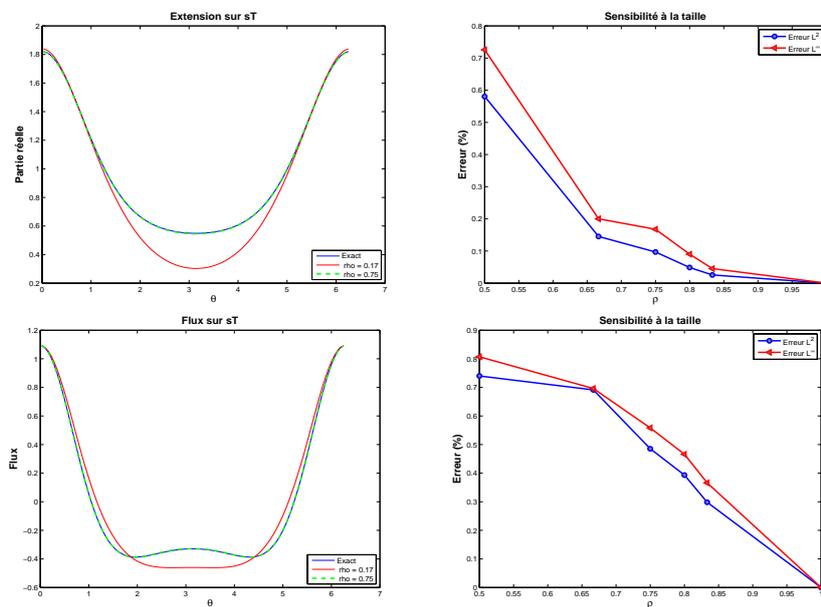


FIG. 6.8 – Solutions reconstruites et erreurs par rapport à la quantité de données fournies

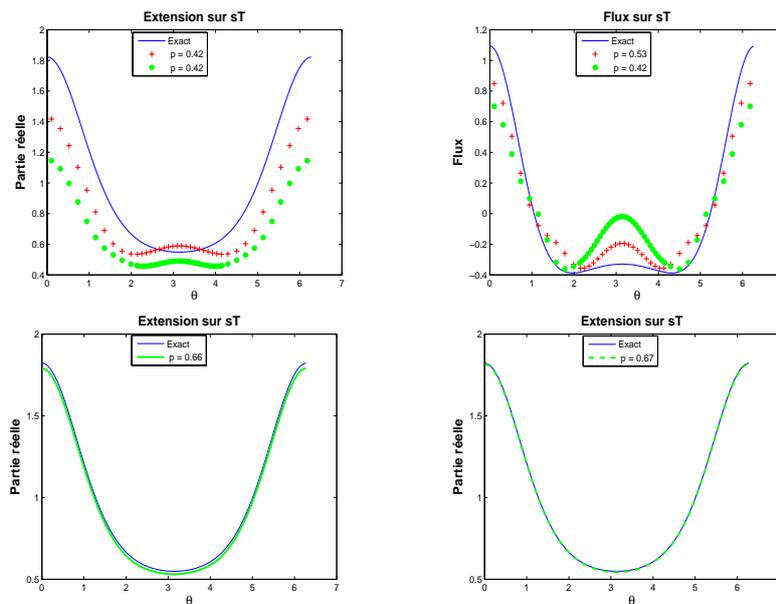


FIG. 6.9 – Reconstructions en fonction de la proportion de noeuds

sur n_d et $n - n_d$ respectivement. Les deux premiers tests numériques sont faits pour $\rho = \frac{2}{3}$ et $n = 400$. Ce qu'on peut déduire est qu'une augmentation du nombre de noeuds sur la partie inconnue J de la frontière n'améliore pas la qualité de reconstruction pour la partie réelle de l'extension ainsi que sa dérivée normale, quand à eux, les deux derniers dessins, où on trace la partie réelle de l'extension comparée avec la solution exacte, prouve une amélioration de la reconstruction en augmentant le nombre donné de noeuds sur la partie I de la frontière. Tandis qu'aucune amélioration ne peut être réalisée en ajoutant des noeuds sur la partie inconnue. Cela signifie que l'exactitude de la reconstruction dépend seulement de la quantité de mesures effectuées.

6.3.4 Sensibilité à la singularité

Nous passons à l'examen de notre étude pour des données non régulières dans le sens où les mesures sur I sont générées à partir de la fonction $f(z) = \text{constante} + 2\frac{z-1}{z-\text{pole}}$ présentant un pôle "pole" localisé dans le disque $s\mathbb{D}$ et on va s'intéresser à la sensibilité de la reconstruction à l'emplacement du pôle par rapport au cercle interne $s\mathbb{T}$. Cette proportion est paramétrée par le réel δ :

$$\delta := \frac{1}{s}d(\text{pole}, s\mathbb{T}),$$

où $d(\text{pole}, s\mathbb{T})$ représente la distance euclidienne de "pole" à la frontière $s\mathbb{T}$. Nous allons fixer le rapport des données ρ à $\frac{2}{3}$, c'est à dire $I = (e^{-i2\pi/3}, e^{i2\pi/3})$. Les figures 6.10–6.11 représentent l'étude suivant la position du réel "pole" par rapport à $s\mathbb{T}$. Les courbes de la figure 6.10 montrent la mauvaise reconstruction de l'extension en se rapprochant de la frontière $s\mathbb{T}$.

Dans la figure 6.11 les courbes des erreurs sur la partie réelle de l'extension et sur sa dérivée normale sont décroissantes en s'éloignant de la frontière $s\mathbb{T}$ et stables à partir de $\delta = 0.4$, c'est à dire $\text{pole} = 0.36$.

6.4 SENSIBILITÉ AU BRUIT

On s'est intéressé à la validation numérique de la robustesse des algorithmes mis au point. Les mesures expérimentales sont attachées d'erreurs de mesure ce qui nous fait sortir de l'espace $H^2(G)$. Soit $f_\varepsilon := f + \varepsilon$ des données bruitées ($f \in H^2(G)|_I$, $\varepsilon \in L^2(I)$ mais $\varepsilon \notin H^2(G)|_I$) et on s'attend à ce que la procédure de complétion de données soit capable de débruiter la donnée sur I . Toujours nous considérons des données fournies sur $2/3$ de la frontière \mathbb{T} et pour $\text{pole} = 0.1$.

Le vecteur $(\chi_I f_\varepsilon)_N$ est défini aux points $\theta_k := \frac{k-N}{N}\theta_0$, $k = 0, \dots, 2N$, est approximé par \tilde{f}_ε , une fonction de classe C^2 sur I qui est un polynôme de degré 3 sur chaque intervalle

6 Résolution numérique du BEP et application au coefficient de corrosion

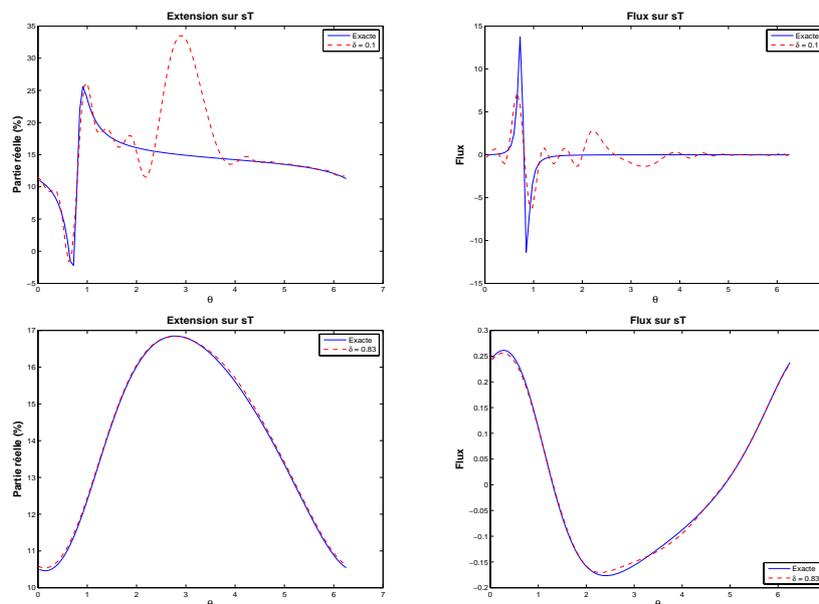


FIG. 6.10 – Reconstruction de l'extension pour $\text{pole} \in \{0.55, 0.1\}$.

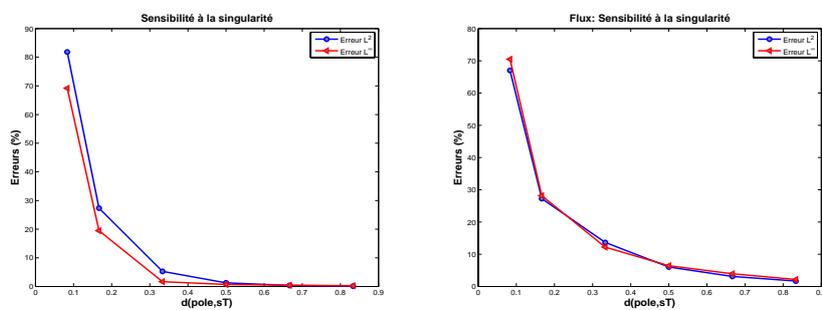


FIG. 6.11 – Erreurs L^2 et L^∞ en fonction de δ .

$I_i := [\tau_i, \tau_{i+1}]$, $i = 1, \dots, n$ avec $(\tau_i)_{1 \leq i \leq n} \subset (\theta_k)_{0 \leq k \leq 2N}$, obtenue dans la base des fonctions B-splines cubiques par

$$\tilde{f}_\varepsilon(\theta) = \sum_{i=1}^l a_i B_i(\theta),$$

en minimisant la quantité $\sum_{i=1}^l \left(\tilde{f}_\varepsilon(\tau_i) - \chi_I f_\varepsilon(\tau_i) \right)^2$. Le choix des noeuds $(\tau_i)_{1 \leq i \leq n}$ est déterminé par un critère d'arrêt :

```
A      = base' * base;
B      = base * f(:);
a      = pinv(A) * B(:);
tilde_f = sum(diag(a.' ) * base, 1);
L      = length(theta) - length(noeud);
error  = 1/L * sum(abs(tilde_f(1:L) - f(1:L)).^2);
if error <= threshold, break, end
```

Donc, le calcul de $P_{H^2}(\tilde{f}_\varepsilon)_N$ s'effectue en évaluant les intégrales qui définissent les coefficients de Fourier, lesquelles sont données par quadrature puisque \tilde{f}_ε est donnée par des splines sur les intervalle I_1, \dots, I_n donc par $\tilde{f}_{i,\varepsilon}$ sur chaque intervalle I_i , $i = 1, \dots, n$. On notera c_k le coefficient de Fourier d'indice k , on a alors

$$c_k(\tilde{f}_\varepsilon) = \sum_{i=1}^n c_k(\tilde{f}_{i,\varepsilon}), \quad k = -N, \dots, N.$$

Comme $\tilde{f}_{i,\varepsilon}$ est un polynôme de degré 3 sur I_i , c'est $A_i + B_i\theta + C_i\theta^2 + D_i\theta^3$, alors

$$c_k(\tilde{f}_{i,\varepsilon}) = A_i c_{i,k}(1) + B_i c_{i,k}(\theta) + C_i c_{i,k}(\theta^2) + D_i c_{i,k}(\theta^3), \quad k = -N, \dots, N,$$

avec $c_{i,k}(\theta^p) = \frac{1}{\text{mes}(I)} \int_{I_i} \theta^p e^{-ik\theta} d\theta$. On fait une intégration par parties et on obtient le développement du second membre de l'équation (6.2.1).

La figure 6.12 donne l'évolution des différentes erreurs en fonction du pourcentage de bruit affectant la donnée f sur I . On observe que l'erreur dans la reconstruction croît presque linéairement en fonction du bruit lorsque les données sont complètes sur toute la frontière \mathbb{T} , c'est à dire $\rho = 1$ ou encore $\theta_0 = \pi$, de même nous constatons que pour 20% de bruit le niveau de l'erreur est moins élevé que celui obtenu pour des données incomplètes (à droite). En effet, cette procédure d'approximation harmonique intervient sur toute la frontière, et donc constitue un débruitage automatique des données. Contrairement au cas des données complètes où on a besoin de lisser les données, dans une étape préliminaire, en calculant une spline cubique de ces données.

La figure 6.13 représente l'extension comparé avec la donnée exacte pour des pourcentages de 1%, 5% et 10% de bruit. On observe que l'approche d'approximation harmonique retenue dans ce travail reste robuste, même face à un niveau de bruit important, quoique la procédure de lissage soit moins efficace pour un pourcentage de bruit élevé.

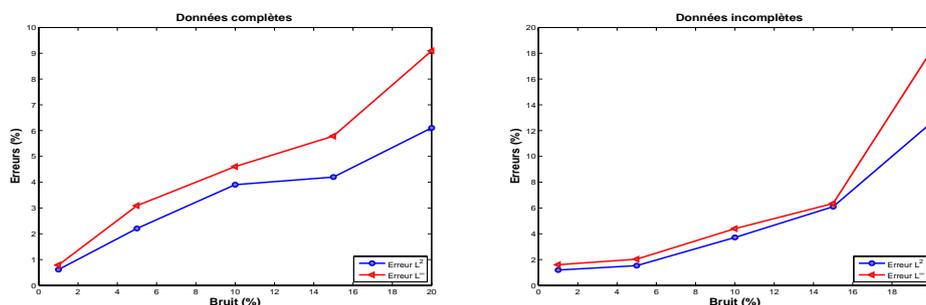
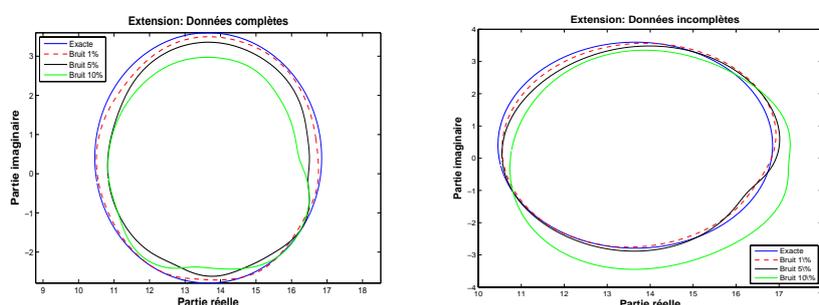

 FIG. 6.12 – Erreurs L^2 et L^∞ en fonction du bruit.


FIG. 6.13 – Reconstruction de l'extension pour des données bruitées

6.5 IDENTIFICATION DE CORROSION À PARTIR DE DONNÉES INCOMPLÈTES

Les données ainsi complétées peuvent être utiles par elles-mêmes pour calculer une impédance électrique, ou coefficient de Robin, qui est le quotient de ces données étendues. Un des problèmes motivant cette application est issu du contrôle non destructif dans des pièces tubulaires. C'est un problème de singularité frontière, relié à des modèles de corrosion. Il s'agit de déterminer la géométrie inconnue d'une partie de la frontière d'un tube depuis des mesures effectuées sur la partie complémentaire. Dans le cas le plus simple, et comme il est expliqué dans le chapitre 1, on cherche à déterminer un certain coefficient d'échange, lié à des conditions de Robin portant sur la partie corrodé.

On suppose que la solution ne dépend pas de la coordonnée longitudinale, alors on se ramène à un problème 2D, qui consiste à déterminer le coefficient q tel que la solution de

$$\Delta u = 0 \quad \text{dans la couronne } G := \mathbb{D} \setminus s\mathbb{D}, \quad 0 < s < 1$$

soumise aux conditions (6.5.1)

$$\partial_\nu u|_I = \Phi, \quad u|_I = u_b \tag{6.5.1}$$

sur la partie I du bord extérieur \mathbb{T} vérifie

$$\partial_\nu u + qu = 0$$

sur le bord J complémentaire de I .

On suppose que $\Phi \in L^2(\mathbb{T})$ et que $q \in A^{(0)}$. Lorsque $I \subsetneq \mathbb{T}$, d'après le théorème 4.1, $u|_{\partial G} \in W^{1,2}(\partial G)$. Donc d'après les équations de Cauchy–Riemann, il existe une fonction v harmonique dans G , mono-valuée, telle que $\partial_\theta v = \partial_\nu u$ sur ∂G , où ∂_θ est la dérivée partielle tangentielle sur ∂G . Dans ce cas, et d'après (6.5.1), la fonction v est donnée sur I , à une constante près, par

$$v|_I(e^{i\theta}) = \int_{\theta_0}^{\theta} \Phi(e^{i\tau}) d\tau,$$

pour $e^{i\theta_0} \in I$ arbitraire. Ainsi, $f = u + iv$ est analytique, mono-valuée dans G ; et elle est donnée sur I par

$$f(e^{i\theta}) = u_b(e^{i\theta}) + i \int_{\theta_0}^{\theta} \Phi(e^{i\tau}) d\tau, \quad (6.5.2)$$

ainsi, la résolution d'un problème (BEP) intervient comme une étape préliminaire pour étendre la donnée f sur toute la frontière ∂G et dans ce cas, on a sur J ,

$$q = -\frac{\partial_\theta v}{u} = -\frac{\partial_\theta \operatorname{Im}(f)}{\operatorname{Re}(f)}, \quad (6.5.3)$$

Lorsque $I = \mathbb{T}$, globalement la fonction f est multi-valuée puisque le conjugué harmonique v l'est aussi, il est localement mono-valué. Dans ce cas et comme il est expliqué dans le chapitre 4, et d'après le lemme 4.1, il existe une fonction $F \in H^{1,2}(\partial G)$ mono-valuée, telle que $f = F + c \log z$ dans \overline{G} , pour c défini par

$$c = \int_0^{2\pi} \Phi(e^{i\theta}) d\theta. \quad (6.5.4)$$

Donc on remarque bien que la détermination de q nécessite un calcul de $\partial_\theta \operatorname{Im}(f)$, et comme on dérive des approximations L^2 de f , ce calcul ne sera pas précis, comme le montre la figure 6.14 suivante, où on travaille avec les 2/3 de la frontière \mathbb{T} et pour $f(e^{i\theta}) = \exp(e^{i\theta})$, $e^{i\theta} \in I$ et $M \simeq M_0 := \|f\|_{L^2(J)}$:

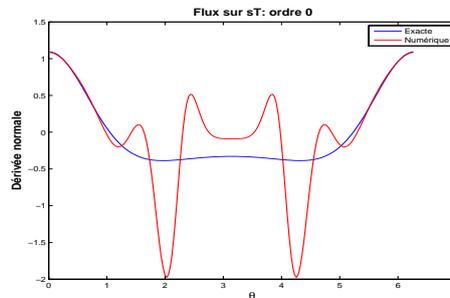


FIG. 6.14 – Reconstruction de la dérivée normale sur $s\mathbb{T}$.

L'idée est donc d'étendre les données dans les espaces de Hardy-Sobolev d'ordre plus élevé pour obtenir des approximations dont le gradient est lisse. Dans la figure 6.15, on représente la dérivée normale et le coefficient de Robin sur $s\mathbb{T}$ pour l'ordre 1 et 2. Ces

dessins confirment les résultats de robustesse établis dans le théorème 5.3 au chapitre 5 et on voit bien que la sensibilité à la régularité du gradient de la solution n'est plus observée lorsqu'on augmente l'ordre de résolution du problème (BEP) et la qualité du résultat est maintenant garantie à partir de l'ordre 1.

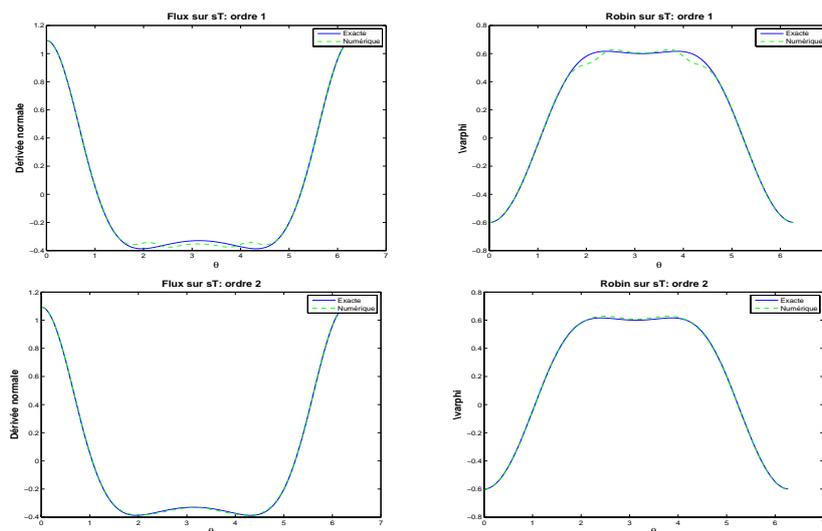


FIG. 6.15 – Reconstruction de $\partial_\nu u$ et q sur $s\mathbb{T}$: ordre 1 et 2.

Comme pour l'extension, on s'intéresse dans la suite de ce paragraphe à la robustesse des algorithmes mis au point sur la reconstruction du coefficient de Robin. Le théorème 5.2 du chapitre 5 a montré que l'algorithme (\mathbf{A}_0) est à peine suffisant pour assurer une bonne reconstruction de q . Pour cela nous nous limiterons notre étude numérique à l'ordre 1 et 2 et nous reconstruirons le coefficient de Robin q à partir des données régulières bruitées. Le bruit est produit par une variable aléatoire affectée de 1% à 15% de la norme uniforme de la donnée. La figure 6.16 montre que l'algorithme (\mathbf{A}_m) , $m \geq 1$, reste robuste, il tient même à un niveau de bruit important, nous constatons que pour 20% de bruit la reconstruction q est acceptable.

Soit maintenant étudier la sensibilité de la méthode sur la reconstruction de q en tenant compte de régularité des données. Pour cela, soit les données générées à partir de la fonction singulière $f(z) = \text{constante} + 2 \frac{z-1}{z-\text{pole}}$ et faisant "pole" tout près de la frontière intérieure $s\mathbb{T}$. Dans le graphique à gauche de la figure 6.17, on trace l'erreur sur le coefficient de Robin en tenant compte de la quantité de données fournies sur la frontière extérieure \mathbb{T} de la couronne, qui est exprimé par le paramètre $\rho = \frac{|I|}{2\pi}$, et il n'est pas étonnant qu'on observe la mauvaise reconstruction de q en rapprochant "pole" de $s\mathbb{T}$. Cependant, le dessin à droite de la même figure 6.17 indique aussi comment compenser le manque de régularité en augmentant la quantité de données prescrites. Des fonctions de forte singularité ont besoin le maximum de données externes fournies pour calculer l'impédance électrique avec une exactitude acceptable.

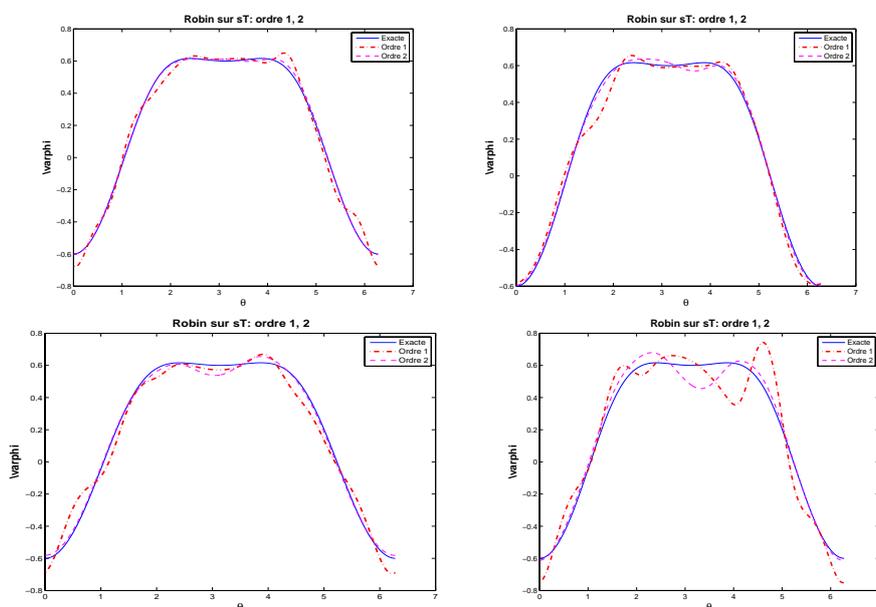


FIG. 6.16 – Reconstruction de la dérivée normale et q sur $s\mathbb{T}$ à l'ordre 1 et 2.

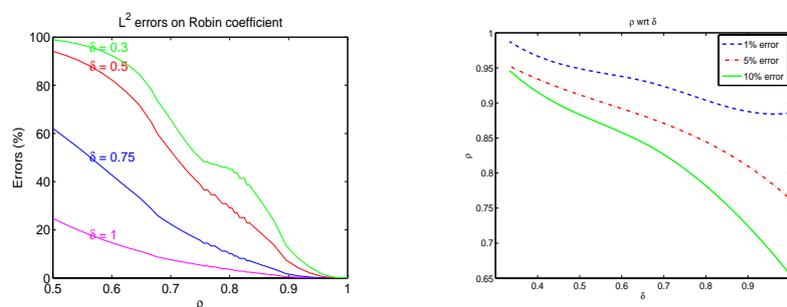


FIG. 6.17 – Tracé des erreurs en fonction de la quantité de données (à gauche) et de ρ en fonction de $\delta := \frac{1}{s}d(\text{pole}, s\mathbb{T})$ pour 1%, 5% et 10% d'erreur (à droite).

Le graphique à gauche de la figure 6.18 montre des effets de bruits semblables. Les erreurs dans la reconstruction de q décroît en fonction de la quantité de données externes fournies. Le graphe à droite de la figure 6.18 représente la quantité de donnée en fonction de bruit pour des différents niveaux de bruits. De nouveau, nous observons que dans une certaine mesure, on peut compenser les effets de bruit en augmentant la quantité de données disponibles.

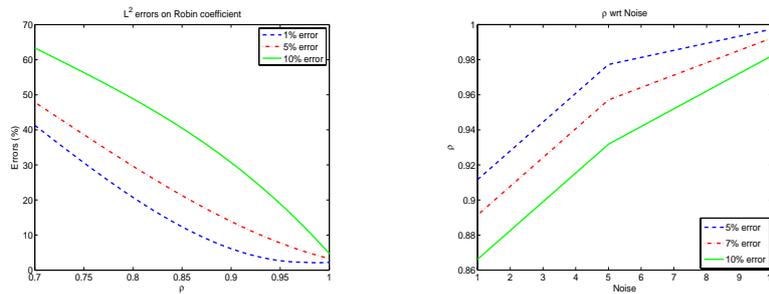


FIG. 6.18 – Tracé des erreurs en fonction de ρ pour des données bruitées (à gauche) et de ρ en fonction du bruit : 5%, 7% et 10% d'erreur (à droite).

CHAPITRE 7

Autres applications de l'approximation harmonique

Les données ainsi complétées peuvent être utiles par elles-mêmes dans certaines applications, ou bien servir à la détection de fissures courbes prévenant du bouchage des tubes qui mettrait en contact le fluide primaire et le fluide secondaire dans le tube. Une autre application potentielle importante se situe en électro-encéphalographie, où il s'agit de détecter par exemple des centres d'épilepsie dans le cerveau à partir de mesures effectuées sur le scalp, qu'il convient d'étendre jusqu'à la couche la plus interne avant d'en faire usage dans un algorithme d'identification.

7.1 IDENTIFICATION DE FISSURES COURBES À PARTIR DES DONNÉES COMPLÈTES

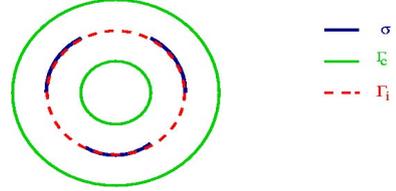
Dans ce paragraphe on présente une deuxième application de la procédure de complétion de données introduite dans les chapitres 2 et 3. On s'intéresse à un problème inverse géométrique d'identification de fissures dans une tuyauterie conductrice isotrope à partir de données frontières. Ce type de problèmes intervient dans nombreuses applications industrielles relevant du contrôle non destructif (imagerie et tomographie, prospection de sous-sols, surveillance, par exemple). Les phénomènes physiques mis en jeu et les mesures effectuées peuvent être de nature thermique, électrostatique, acoustique ou élastique. Cependant, via une section plane, le cadre de cette étude se limite aux phénomènes régis par l'équation de Laplace en 2-D.

On suppose que l'on dispose de la trace, sur la frontière, d'une solution (température ou potentiel) u de l'équation de Laplace dans une couronne $G := \mathbb{D} \setminus s\mathbb{D}$ privée de l'éventuelle fissure σ , ainsi que de la donnée d'une condition de Neumann (flux de chaleur ou de courant) sur ∂G . L'application visée par cette étude est la détermination du cercle hôte portant la fissure et identifier complètement la fissure par identifier totalement la

discontinuité de la température ou du potentiel au travers la fissure.

Étant donnés G , Φ , et u_b , on souhaite trouver un arc $\sigma \subset G$, porté par le cercle $\lambda\mathbb{T}$ de centre l'origine et de rayon λ , $s < \lambda < 1$, tel que la solution u de

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } G \setminus \sigma \\ \partial_{\nu_\sigma} u = 0 & \text{sur } \sigma \subset \lambda\mathbb{T} \end{cases}$$



vérifie

$$\partial_\nu u|_{\partial G} = \Phi, \quad u|_{\partial G} = u_b \tag{7.1.1}$$

où ν désigne le vecteur unitaire normal à ∂G sortant et ν_σ un vecteur unitaire normal à σ .

Comme indique la relation (7.1.1), le flux Φ est nul sur la fissure σ , ce qui signifie que celle-ci est parfaitement isolante. Pour que le problème direct admette une solution, il faut que la circulation du flux Φ soit nulle, ce qui s'exprime par la condition

$$\int_{\partial G} \Phi ds = 0. \tag{7.1.2}$$

D'autre part, le problème étant Neumann pur, on peut remarquer que toute solution u du problème direct restera solution à une constante additive près. On ajoutera donc la condition de normalisation

$$\int_{\partial G} u ds = 0 \tag{7.1.3}$$

afin de sélectionner une solution.

Pour simplifier, On note par (u_+, Φ_+) les données sur \mathbb{T} et par (u_-, Φ_-) celles sur $s\mathbb{T}$. En premier temps, on va supposer que le rayon λ du cercle porteur de la (ou les) fissure(s) est connu. On peut alors diviser le domaine $G \setminus \sigma$ en deux couronnes : $G \setminus \sigma = \Omega_1 \cup \Omega_2$ avec $\Omega_1 = \mathbb{D} \setminus \overline{\lambda\mathbb{D}}$ et $\Omega_2 = \lambda\mathbb{D} \setminus \overline{s\mathbb{D}}$ (figure 7.1). La solution u est maintenant harmonique

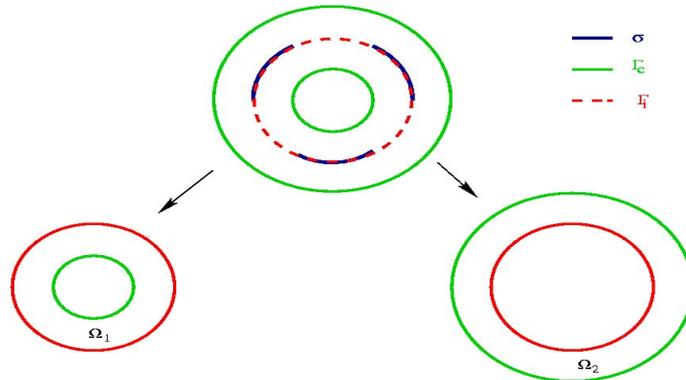


FIG. 7.1 – Subdivision de $G \setminus \sigma$.

dans Ω_1 et Ω_2 , elle vérifie donc les deux systèmes suivants :

$$(P_+) \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega_1 \\ u = u_+ & \text{on } s\mathbb{T} \\ \partial_n u = \Phi_+ & \text{on } s\mathbb{T} \end{cases} \quad (P_-) \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega_2 \\ u = u_- & \text{on } \mathbb{T} \\ \partial_n u = \Phi_- & \text{on } \mathbb{T} \end{cases}$$

avec des conditions aux limites sur \mathbb{T} et $s\mathbb{T}$ respectivement. Les solutions des problèmes direct étant harmoniques dans Ω_1 et Ω_2 respectivement, il existe alors deux fonctions f_+ et f_- analytiques dans Ω_1 et Ω_2 respectivement, telles que $u = \operatorname{Re} f_+$ dans Ω_1 et $u = \operatorname{Re} f_-$ dans Ω_2 . Celles-ci sont respectivement définies (à une constante imaginaire pure près) par

$$f_+ = u + iv_+ \quad \text{et} \quad f_- = u + iv_-,$$

les fonctions v_+ et v_- étant, respectivement dans Ω_1 et Ω_2 , la conjuguée harmonique de u (voir [2]). La relation entre u et v_{\pm} sur le bord est donnée par l'équation de Cauchy-Riemann :

$$\partial_\nu u = \partial_\theta v_{\pm}.$$

Au vu de la condition de flux nul (fissure isolante) sur σ , ceci détermine des fonctions harmoniques mono-valuées v_{\pm} dans $\Omega_{1,2}$, à une constante près l'on normalise en imposant la condition $v_{\pm}(z) = 0$, en un point $z_+ \in \mathbb{T}$ et $z_- \in s\mathbb{T}$ respectivement. Par conséquent, pour tout $\theta \in \partial G$,

$$v_+(e^{i\theta}) = \int_{z_+}^{e^{i\theta}} \Phi_+(e^{it}) dt \quad \text{et} \quad v_-(se^{i\theta}) = \int_{z_-}^{se^{i\theta}} \Phi_-(e^{it}) dt.$$

On résout maintenant deux problèmes extrémaux bornés pour les données (u_+, Φ_+) et (u_-, Φ_-) dans les couronnes Ω_1 et Ω_2 respectivement relativement à $I = s\mathbb{T}$ et $I = \mathbb{T}$ et on calcule les traces des approximants g_+ et g_- associés sur le cercle $\lambda\mathbb{T}$. En effet, cela nous fournira un moyen d'identifier complètement la (ou les) fissure(s) par identifier totalement la discontinuité de la température au travers σ . Soit $[u]$ la fonction représentant le saut de u à travers σ , l'identification de σ est donnée par le lemme suivant

Lemme 7.1 [9] *Si $\int_{\sigma} [u] ds \neq 0$ alors l'ensemble $\sigma = \overline{\{(\lambda, \theta) : [u](\lambda, \theta) \neq 0\}}$.*

On a $u_{\pm} \simeq \operatorname{Re} g_{\pm}$, alors on obtient $[u] \simeq g_+ - g_-$ sur $\lambda\mathbb{T}$ et on localise σ d'après le lemme 7.1. Puisque cette identification ne soit exacte, nous employons l'approximation

$$\sigma \sim \{(\lambda, \theta) : [u](\lambda, \theta) \geq \epsilon \max([u])\}$$

pour estimer σ où $\epsilon \max([u])$ est un réel positif, qui représente un seuil au dessous du quel les faibles valeurs de $[u]$ sont considérées comme négligeables.

La figure 7.2 représente le saut $[u]$ calculé et la fissure reconstituée pour $u_b = \operatorname{Re} f$ et un flux Φ correspond à la fonction $f(z) = 2 + z^2$ et $\lambda = 0.75$. Les problèmes extrémaux bornés sont résolus donc pour la donnée f sur ∂G et une contrainte déterminée par l'algorithme (A_2) d'ordre 2 et pour une fissure exacte $\sigma = (e^{3i\pi/4}, e^{i\pi})$.

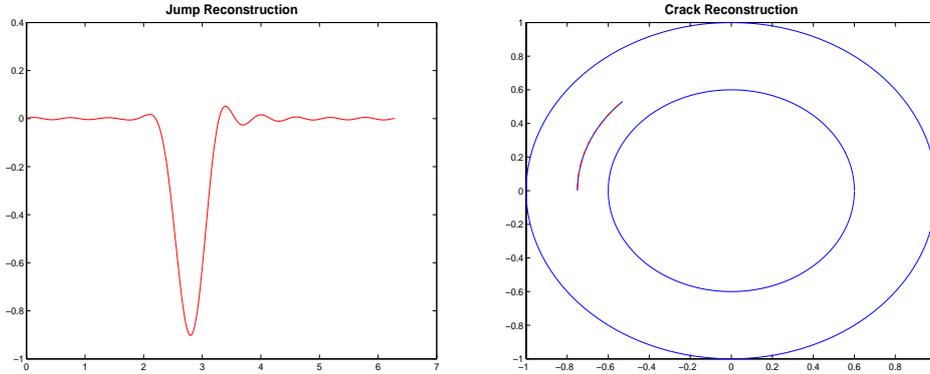


FIG. 7.2 – Reconstruction du saut $[u]$ (à gauche) et de la fissure (à droite).

Dans un cas plus réaliste où le cercle hôte est inconnu, cette approche peut être aussi appliquée pour déterminer le rayon λ de ce cercle. L'idée est d'introduire un cercle quelconque $r\mathbb{T}$ pour $s < r < 1$ et on applique la technique d'approximation harmonique dans les deux couronnes $\Omega_{r,1} := \mathbb{D} \setminus \overline{r\mathbb{D}}$ et $\Omega_{r,2} = r\mathbb{D} \setminus \overline{s\mathbb{D}}$; si $r < \lambda$, alors l'erreur dans $H^{2,2}(\Omega_{r,1})$ reste assez importante, puisque $\sigma \subset \Omega_{r,1}$ et la fonction g_+ n'est pas la trace d'une fonction analytique à l'intérieur, tandis que l'erreur dans $H^{2,2}(\Omega_{r,1})$ depuis g_- deviendra petite. Un raisonnement analogue, si $r > \lambda$, les erreurs des deux côtés jouent le rôle inverse, jusqu'à ce qu'elles se tiennent petites lorsque $r = \lambda$.

Dans la figure 7.3 on représente la reconstruction du saut et de la fissure ainsi que le rayon du cercle hôte relativement à des données bruitées de 1% à 10%.

Le tableau 7.1 suivant représente la sensibilité de la reconstruction de la fissure et la détermination de λ au effet du bruit. φ_1 et φ_2 sont les arguments des points extrémités de σ .

Bruit	$\lambda_{\text{numérique}}$	φ_1	φ_2
1%	0.7507	2.4023	3.1508
5%	0.7434	2.4023	3.0863
10%	0.7354	2.5312	3.0568
15%	0.7593	2.3101	3.1877

7.2 LOCALISATION DE POINTS SOURCES

Une troisième application potentielle importante se situe en électroencéphalographie (EEG), où il s'agit de détecter par exemple des centres d'épilepsie dans le cerveau à partir de mesures effectuées sur le scalp, qu'il convient d'étendre jusqu'à la couche la plus interne avant d'en faire usage dans un algorithme d'identification. Ce problème est relié à un problème inverse dans un domaine 3-D [15, 47], qui donne un modèle simple de la tête humaine qui est supposée sphérique et composée d'au plus de trois couches concentriques sphériques homogènes de conductivité (le scalp, le crâne et le cerveau). Les mesures élec-

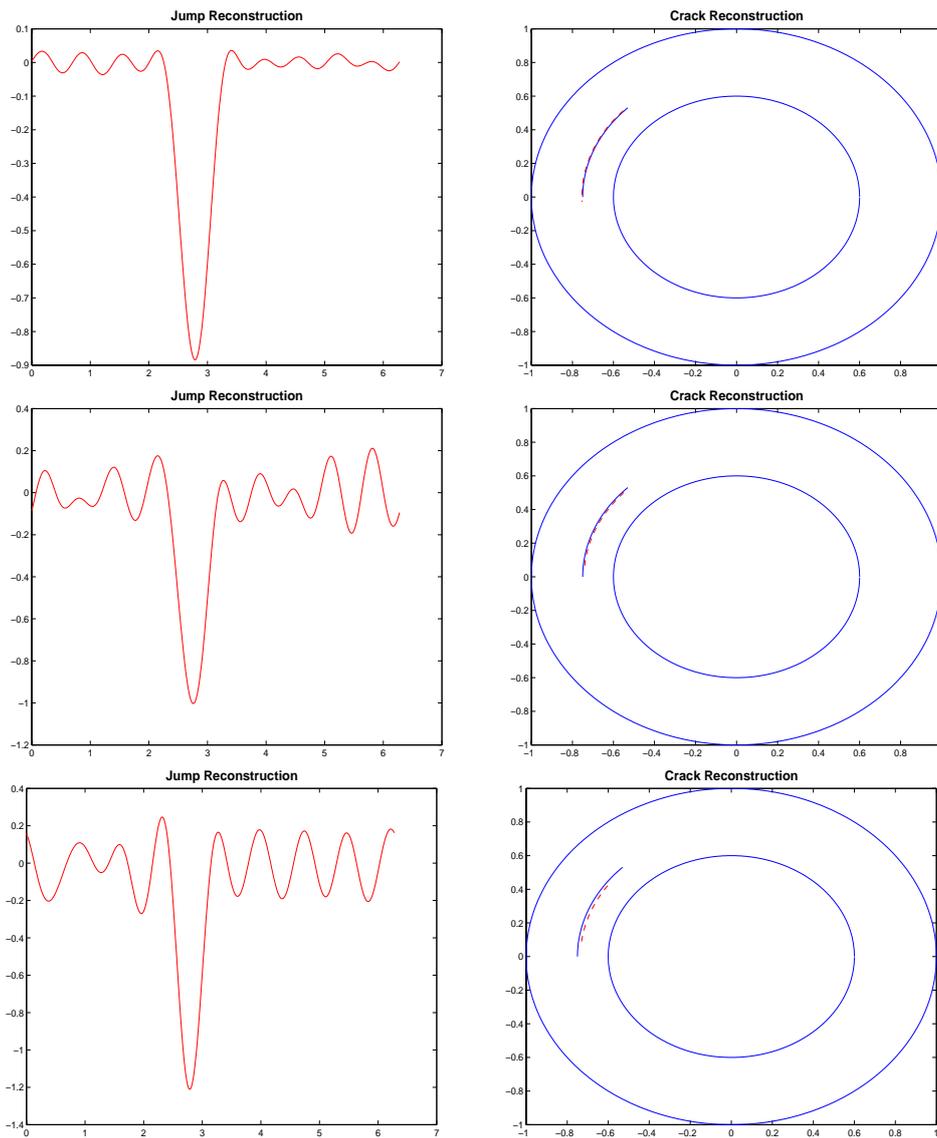


FIG. 7.3 – Reconstruction à partir de données bruitées : 1%, 5% et 10%.

triques surabondantes (le potentiel et le flux de courant) sont disponibles sur le scalp (la frontière externe), dont on veut récupérer quelques sources qui représentent des défauts de conductivité placées dans le cerveau (la couche interne). Dans cette application on va considérer le modèle bi-dimensionnel qui consiste à prendre des sections planes de la boule. Ce qui nous permet de ramener le problème dans une famille de disques, où étendre des données multi-dimensionnelle (2-D) jusqu'à la couche la plus interne peut surgir comme une étape préliminaire en appliquant l'approche d'approximation harmonique, avant le recouvrement des singularités qui surgit comme la deuxième étape de la résolution par l'outil d'approximation méromorphe ou rationnelle [15, 75, 19].

Chaque section plane sera modélisée par un ouvert Ω constitué de trois disques de centres l'origine, emboîtés, notés $r\mathbb{D}$, $s\mathbb{D}$, \mathbb{D} , de rayons $r = 1.1494$, $s = 1.0574$ et 1 respectivement : $\Omega = \mathbb{D}_0 \cup s\mathbb{D} \cup r\mathbb{D}$. On associe respectivement à chaque sous domaine, $r\mathbb{D} \setminus \overline{s\mathbb{D}}$, $s\mathbb{D} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ et \mathbb{D} , les conductivités $\sigma_r = 1$, $\sigma_s = 0.0125$ et $\sigma_1 = 1$. Ce choix de ces valeurs est relevé du modèle classique de la tête humaine (voir [53]). La synchronisation d'un grand nombre de cellules nerveuse dans le cerveau génère des activités électrique localisées dans des parties du cerveau \mathbb{D} et provoquent l'apparition d'épilepsie qui se modélises par des dipôles. Notre but sera de détecter ces sources parasites.

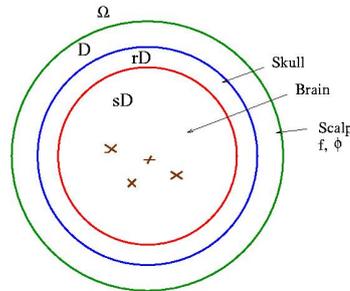
Soit F la fonction source, grâce à laquelle on peut détecter les points sources inconnus :

$$F = \sum_{k=1}^m p_k \cdot \nabla \delta_{c_k}$$

où c_k est un point de source dipolaire dans \mathbb{D} auquel on associe le moment p_k vecteur de \mathbb{R}^2 .

La différence de potentiel u associée au flux courant Φ sur le bord $\partial\Omega$ et notre distribution F vérifient (voir [15])

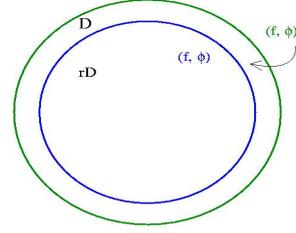
$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\sigma \nabla u) &= F & \text{dans } \Omega, \\ \sigma \partial_\nu u &= \Phi (= 0) & \text{sur } \partial\Omega \\ u &= u_0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$



Le recouvrement de F , à savoir les termes sources δ_{c_k} et leurs moments associés p_k , nécessite la propagation des données fournies sur la frontière extérieure $\partial\Omega = r\mathbb{T}$ jusqu'à la couche la plus interne \mathbb{T} comme une étape préliminaire.

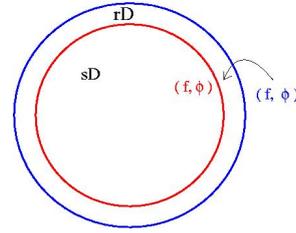
En effet, dans la couronne $G_r := r\mathbb{D} \setminus \overline{s\mathbb{D}}$, on considère le problème d'extension de données suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } G_r \\ \sigma_r \partial_\nu u = \Phi & \text{sur } r\mathbb{T} \\ u = u_0 & \text{sur } r\mathbb{T} \end{cases}$$



on résout un problème extrémal borné pour la donnée frontière (u_0, Φ) disponible sur $\partial\Omega$ pour l'étendre dans tout le domaine $\overline{G_r}$. On note g_r la solution, soit $u_r = \text{Re } g_r$. Ensuite, dans la couronne $G_s := s\mathbb{D} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ la donnée $(u_r, \partial_\nu u_r)$ vérifie

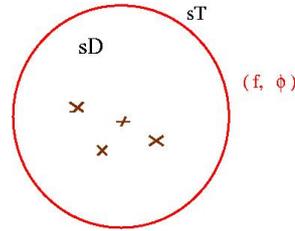
$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } G_s \\ \sigma_s \partial_\nu u = \sigma_r \partial_\nu u_r & \text{sur } s\mathbb{T} \\ u = u_r & \text{sur } s\mathbb{T} \end{cases}$$



qui sera aussi étendue dans $\overline{G_s}$. On note g_s la solution du problème (BEP) associée et soit $u_s = \text{Re } g_s$.

Une fois les données (u_0, Φ) sont propagée jusqu'à la couche \mathbb{T} , elle vérifie le système suivant

$$(PN) \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \mathbb{D} \\ \sigma_1 \partial_\nu u = \sigma_s \partial_\nu u_s & \text{sur } \mathbb{T} \\ u = u_s & \text{sur } \mathbb{T} \end{cases}$$



L'approximation méromorphe ou rationnelle prend le relais pour résoudre le problème d'identification du terme source à partir des données frontière u_s et $\partial_\nu u_s$. Cette technique a été introduite au sein du projet APICS ¹ et exploitée dans les travaux de Ben Hassen [15, 28] et Syfert [89].

En utilisant l'approche d'approximation harmonique retenue dans ce travail dans les couronnes $R\mathbb{D} \setminus r\mathbb{D}$ et $r\mathbb{D} \setminus s\mathbb{D}$ respectivement, pour étendre les données jusqu'à la couche la plus interne. Une fois les données sont disponibles sur Γ_0 , l'approximation méromorphe ou l'approximation rationnelle prend le relais de l'approximation analytique afin de localiser $\{c_k\}$, comme dans [15].

Nous commençons d'abord par résoudre le problème direct de Neumann (PN). Le domaine Ω est maillé en utilisant un maillage élément fini P_1 . La frontière est discrétisée avec 512 points. On calcule en ces points le potentiel u associé pour la condition de frontière $\Phi = 0$. La figure 7.4 illustre le domaine Ω avec les lignes de niveau de la solution u du problème directe ainsi que la solution numérique.

¹APICS, INRIA Sophia Antipolis

7 Autres applications de l'approximation harmonique

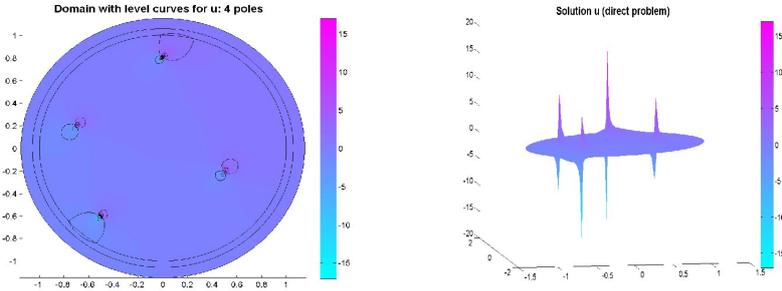


FIG. 7.4 – Le domaine avec les lignes de niveau pour u (problem direct); Solution du problème direct (PN).

Maintenant, nous allons étendre la fonction $f = u_s(e^{i\theta}) + i \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\sigma_s}{\sigma_1} \partial_\nu u_s d\tau$, pour $e^{i\theta_0} \in \mathbb{T}$ arbitraire, sur chaque couche du domaine Ω par la technique d'approximation harmonique. La figure 7.5 montre la reconstruction des données sur la couche la plus interne \mathbb{T} . Notons que la faible valeur de σ_s n'influence pas beaucoup sur la nature de la reconstruction.

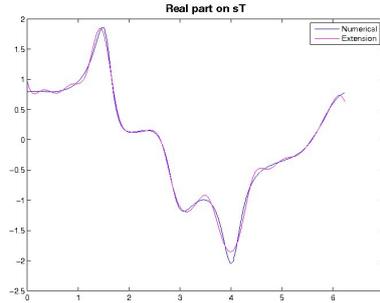


FIG. 7.5 – La partie réelle de l'extension analytique sur la couche \mathbb{T}

La deuxième étape consiste à exploiter les données prolongées sur \mathbb{T} dans l'algorithme d'approximation méromorphe pour l'identification des points sources dans \mathbb{D} . La figure 7.6 montre comment l'erreur relative sur les moments, l'erreur absolue sur les sources et l'erreur relative sur l'extension des données sur \mathbb{T} s'évaluent en fonction de la position de la source par rapport à la couche la plus interne \mathbb{T} . La source de moment unitaire est disposée suivant la direction $[1, 1]/\sqrt{2}$ d'une distance de l'origine égale à 49%, 78%, 88%, 93%, ou 97% du rayon $r = 1$.

La figure 7.7 montre l'évolution de l'erreur relative sur les moments et celle l'absolue sur les sources en tenant compte de la conductivité σ_s en respectant les deux autres conductivités.

Dans les autres simulations numérique qui suivent, les sources originales sont représentées par $*$, les sources numériques par \circ (qui sont souvent superposés sur $*$), tandis que les lignes sont les moments des sources exactes et numériques dans lesquels elles seront symbolisées par un point lorsqu'elles sont nulles ou suffisamment petites. La figure 7.8 illustre comment le calcul des pôles de l'approximation rationnelle L^2 de la fonction définie sur

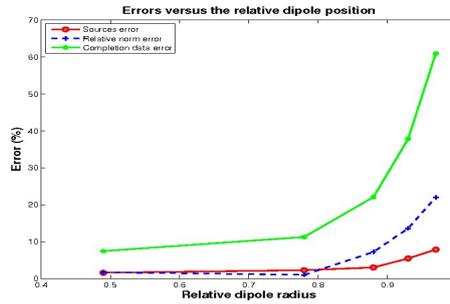


FIG. 7.6 – Erreurs en fonction de la position de la source.

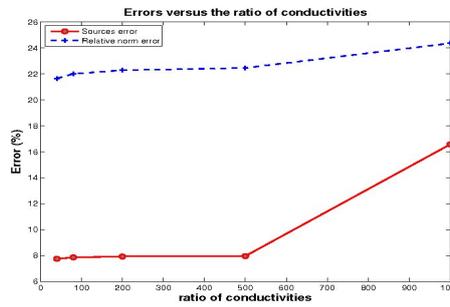


FIG. 7.7 – Erreurs en fonction de la conductivité σ_s pour une source à 97% du rayon $r = 1$

\mathbb{T} , construite à partir des données prolongées sur \mathbb{T} , garantie le recouvrement des dipoles.

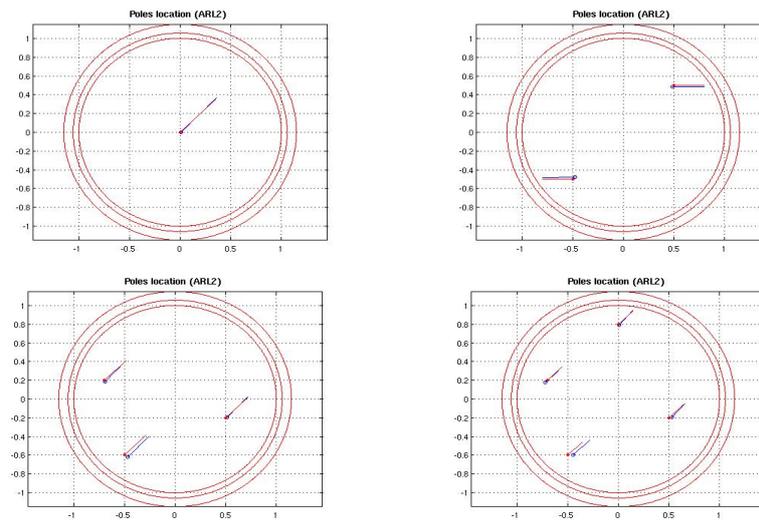


FIG. 7.8 – $m = 1, 2, 3, 4$.

On considère maintenant la robustesse de notre identification pour des données bruitées. Le bruit est produit par une variable aléatoire affecté de 1% à 20% de la norme uniforme de la donnée. La figure 7.9 montre l'évolution de l'erreur absolue sur les sources ainsi que l'erreur relative sur les moments.

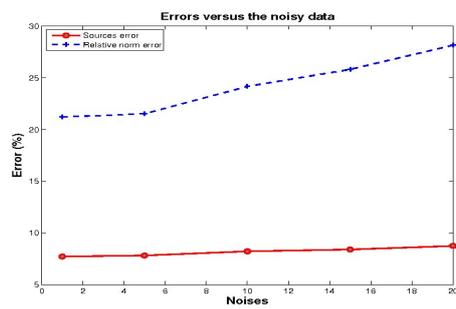


FIG. 7.9 – Les erreurs sur les sources et sur les moments en fonction du bruit.

Conclusion et perspectives

Dans ce travail, nous avons considéré le problème de Cauchy consistant à retrouver les données de Neumann et de Dirichlet sur la partie intérieure de la frontière d'un domaine annulaire à partir des mesures disponibles sur la partie accessible de la frontière extérieure. Les données ainsi complétées peuvent être utiles par elles-mêmes dans certaines applications. L'une de ces applications dans laquelle nous sommes intéressé, est la détection de corrosion interne dans le cadre bi-dimensionnel, qui est dans le cas le plus simple modélisé par une impédance électrique, ou coefficient de Robin, qui est le quotient de ces données étendues. L'extension de ces données est basée sur la résolution des problèmes aux bornes, ou en core (BEP), qui permettent de formuler les problèmes aux frontières en termes de reconstruction d'une fonction analytique dans la couronne depuis ses valeurs disponibles sur la partie accessible de la frontière suivant un critère portant sur la partie de la frontière inaccessible aux mesures, avec une contrainte de régularisation. Le cadre fonctionnel approprié étant les espaces de Hardy. Dans ce cadre, nous avons établi des formules explicites pour cette extension au moyen d'opérateurs de Toeplitz, ayant de bonnes propriétés de robustesse et de continuité.

Les résultats de continuité qu'on a établis dans le théorème 2.4 montrent qu'on ne peut pas espérer mieux que la convergence faible de l'approximant (solution du (BEP)) sur la partie inaccessible aux mesures, tandis que la convergence forte n'est assurée que sur la partie accessible. En effet, les (BEP) fournissent des solutions régulières mais leurs gradients ne le sont pas. Nous avons alors pensé à améliorer notre résolution de façon qu'elle nous donne des extensions, ou des approximations, dont leur gradient est lisse. Pour résoudre cette difficulté, nous avons étendu notre étude dans les espaces de Hardy-Sobolev, où on traite les problèmes aux bornes pour un ordre supérieur. Le théorème 3.6 montre que cette résolution permet d'obtenir des résultats de convergence forte sur la partie inaccessible aux mesures pour un ordre élevé.

La résolution d'un (BEP) dans les espaces de Hardy-Sobolev ne règle cependant pas tout, dans la mesure où la borne mise sur les données étendues est généralement - en fait dès lorsque les données ne sont pas analytiques - saturée par la solution, ce qui oblige à évaluer avec précision cette borne sur les données étendues de manière précise pour avoir une chance de les approcher convenablement. Il faut choisir une contrainte suffisamment proche de la norme de l'extension sur la partie inaccessible. Une méthode de "validation

croisée" avait été proposée dans le cas des domaines simplement connexes. Cette méthode nécessite qu'une partie des données disponibles soit dévolue au calcul de la borne. Nous avons proposé ici une méthode alternative qui tient compte de la plus grande rareté des données disponibles dans le cas multi-connexe. Nous avons construit ainsi une famille d'algorithmes consistant à appliquer le même algorithme d'extension (d'ordre zéro) aux dérivées successives des données disponibles. Le théorème 5.3 prouve que ces algorithmes sont d'autant plus robustes vis à vis des erreurs de mesures que leur ordre est élevé pour l'approximant et pour la reconstruction du coefficient de Robin. Ces résultats théoriques de robustesse établis dans la partie II, qui sont corroborés par une étude numérique exhaustive, ont fait l'objet d'un article soumis [63].

D'autre part, l'outil d'approximation harmonique a été exploité en vue d'établir des estimation d'erreurs pour l'approximant ainsi que des résultats de stabilité logarithmique globale avec un seul log pour le coefficient de Robin. Ces résultats ont fait l'objet de la publication [74].

Enfin et toujours dans le contexte bi-dimensionnel, nous nous sommes intéressé aussi à l'identification de fissures courbe dans une couronne, obtenue par une section plane d'un tube, à partir des complètes sur la frontière. On a prouvé, comment la technique d'approximation harmonique et la théorie des analytiques (conjugaison harmonique, équations de Cauchy-Riemann) permettent de formuler la présence d'une fissure en terme de discontinuité de la fonction saut des solutions de deux (BEP). Les résultats numériques obtenus sont tout a fait probants. Dans la suite de cette étude, on s'intéresse à étudier ce problème à partir des données disponibles seulement sur une partie de la frontière extérieure de la couronne, où on va coupler la technique d'approximation harmonique avec le concept de l'écart à la réciprocité [9]. Un article décrivant cette étude est en cours de préparation.

Une troisième application potentielle importante considérée dans ce travail, consiste à la détection et à la localisation de sources ponctuelles dans un disque 2D depuis des mesures frontière d'une solution du Laplacien. Nous avons utilisé l'approche d'approximation harmonique dans deux couronnes pour étendre les données jusqu'à la frontière la plus interne. Une fois les données sont disponibles sur cette couche, l'approximation rationnelle ou méromorphe prend le relais afin de localiser les sources. Les résultats obtenus dans cette étude a fait l'objet d'un article soumis [26].

Concernant les problèmes inverses, cette approche fournit une procédure de résolution de problèmes de Cauchy relativement stable et robuste par rapport aux perturbations sur les données, numériques ou expérimentales.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] M. B. Abrahamse, "Toeplitz operators in multiply connected regions", *American Journal of Mathematics* **96**, **2** (1974) 269–299.
- [2] L. V. Ahlfors. *Complex analysis*, McGraw-Hill, New York, (1953).
- [3] G. Alessandrini, "Exemple of instability in inverse boundary-value problems", *Inverse Problems* **13** (1997) 887–897.
- [4] G. Alessandrini, E. Beretta, F. Santosa et S. Vessela, "Stability in crack determination from electrostatic measurements at the boundary—a numerical investigation", *Inverse Problems*, **11**, (1995) 17–24.
- [5] G. Alessandrini, L. Del Piero, et L. Rondi, "Stable determination of corrosion by a single electrostatic measurement", *Inverse Problems* **19** (2003) 973–984.
- [6] G. Alessandrini et E. Sincich, "Detection nonlinear corrosion by electrostatic measurements", *Applicable Analysis* **85**, **1-3** (2006) 107–128.
- [7] G. Alessandrini et E. Sincich, "Solving elliptic Cauchy problems and the identification of nonlinear corrosion", *Journal of Computational and Applied Mathematics* **198** (**2**) (2007) 307–320.
- [8] D. Alpay, L. Baratchart and J. Leblond, "Some external problems linked with identification from partial frequency data", *10th Conference on Analysis and Optimization of System, Sophia Antipolis* (1992).
- [9] S. Andrieux and A. Ben Abda, "Identification of planar cracks by complete overdetermined data: inversion formulae", *Inverse Problems* **12**(1996) 553-563.
- [10] S. Andrieux et A. Ben Abda, "Identification de fissures planes par une donnée au bord unique: un procédé direct de localisation d'identification", *C.R. Acad. Sci., Paris* 315 **série I** (1992).
- [11] S. Andrieux, A. Ben Abda and T. Baranger, "Data completion via an energy error functional", *Comptes Rendus Mécanique*, sous presse (2005).
- [12] N. D. Aparicio et M. Pidcock, "The boundary inverse problem for the Laplace equation in two dimensions", *Inverse Problems* **12**(1996) 565-577.
- [13] B. Atfeh, L. Baratchart, J. Leblond and J. R. Partington, "Bounded extremal problem and Cauchy-Laplace problems on 3D spherical domains", In preparation.

- [14] H. T. Banks, M. L. Joyner, B. Wincheski, and W. P. Winfree, "Real time computationnel algorithms for-eddy-current based damage detection", *Inverse Problems* **18**(2002) 795-823.
- [15] L. Baratchart, A. Ben Abda, F. Ben Hassen, J. Leblond and J. P. Marmorat, "Sources identification using meromorphic approximation", *Inverse Problems*, **21**(2005) 51–74.
- [16] L. Baratchart, J. Grimm, J. Leblond and J. Partington, "Asymptotic estimates for interpolation and constrained approximation in H^2 by diagonalization of Toeplitz operators", *Integral Equations and Operator Theory* **45** (2003) 269–299.
- [17] L. Baratchart and J. Leblond, "Identification harmonique et trace des classes de Hardy sur un arc du cercle", Actes du colloque en l'honneur du 60^e anniversaire du professeur Jean C ea, Sophia-Antipolis, (1992) 17–29.
- [18] L. Baratchart and J. Leblond, "Hardy approximation to L^p functions on subsets of the circle with $1 \leq p < \infty$ ", *Constructive Approximation* **14** (1998) 41–56.
- [19] L. Baratchart, J. Leblond and J. P. Marmorat, "Inverse sources problem in a 3D ball from best meromorphic approximation on 2D slices", *Electronic Trans. Numerical Anal.*, **25** (2006) 41-53.
- [20] L. Baratchart, J. Leblond and J. Partington, "Problems of Adamjan-Arov-Krein type on subsets of the circle and minimal norm extensions", *Constructive Approximation* **16**, **3** (2000) 333–357.
- [21] L. Baratchart, J. Leblond and J. Partington, "Hardy approximation to L^∞ functions on subsets of the circle", *Constructive Approximation* **12** (1996) 423–436.
- [22] L. Baratchart, J. Leblond, and F. Seyfert, "A pointwise constraint for H^2 approximation on subsets of the circle". En pr eparation.
- [23] L. Baratchart, F. Mandr ea, E.B. Saff, and F. Wielonsky, "2-D inverse problems for the Laplacian: a rational approximation approach", *J. Math. Pures Appl.* **86** (2006) 1–41.
- [24] L. Baratchart, Zerner, "On the recovery of functions from pointwise boundary values in a Hardy-Sobolev class of the disk", *J. Comput. Appl. Math.*, **46**, **1-2** (1996)
- [25] A. Ben Abda, H. Ben Ameer et M. Jaoua, "Identification of 2–D crack by elastic boundary measurements", *Inverse Problems* **15** (1999), 67–77.
- [26] A. Ben Abda, F. Ben Hassen, J. Leblond and M. Mahjoub, "Sources recovery from boundary data: a model related to electroencephalography", soumis.
- [27] A. Ben Abda, M. Kallel, J. Leblond and J. P. Marmorat "Line segment cracks recovery from incomplete data", *Inverse problems*, **18**, (2002) 1057–1077.
- [28] F. Ben Hassen, *Recovery and identification of pointwise sources and small size inclusions*, PhD thesis, ENIT, Tunis, Tunisia, (2004)

- [29] B. Bollobás, "The spacial numerical range and powers of an operator", *J. London Math. Soc.* **2**, **7** (1973) 435–440.
- [30] H. Brézis, *Analyse Fonctionnelle*, Masson, Paris, (1983).
- [31] K. Bryan et M. Vogelius, "A review of selected works on crack identification", *IMA Volumes in Mathematics and its Applications* **137** (2004), 25–46.
- [32] S. Chaabane, C. Elhechmi et M. Jaoua, "A stable recovery algorithm for the Robin inverse problem", *Mathematics and Computers in Simulation* **11**, **1** (2003) 33–57.
- [33] S. Chaabane, I. Fellah, M. Jaoua, et J. Leblond. "Logarithmic stability estimates for a Robin coefficient in 2D Laplace inverse problems", *Inverse Problems* **20** (2004) 47–59.
- [34] S. Chaabane et M. Jaoua, "Identification of Robin coefficients by the means of boundary measurements", *Inverse Problems* **25** (1999), 1425–1438.
- [35] S. Chaabane, M. Jaoua et J. Leblond, "Parameter identification for Laplace equation and approximation in Hardy classes", *J. Inv. Ill-Posed Problems* **66** (2004) 367–383.
- [36] I. Chalendar, J. Leblond, et J. Partington, "Approximation problems in some holomorphic spaces, with applications", *Systems, Approximation, Singular Integral Operators, and Related Topics, Proceedings of IWOTA* (2000) 143–168. Birkhauser, (2001).
- [37] I. Chalendar et J. R. Partington, "Approximation problems and representations of Hardy spaces in circular domains", *Studia Math.* **136** (1999) 255–269.
- [38] G. Chen et J. Zhou, *Boundary element methods*, Computational Mathematics and Applications. Academic Press Ltd., London 1992.
- [39] M. Choulli, "An inverse problem in corrosion detection: stability estimates", *J. Inverse Ill-Posed Probl.* **12** (4) (2004) 349–367.
- [40] M. Choulli, "On the determination of an unknown boundary function in a parabolic equation", *Inverse Problems* **15** (3) (1999) 659–667.
- [41] A Cimetière, F Delvare, M Jaoua and F Pons, "Solution of the Cauchy problem using iterated Tikhonov regularization", *Inverse Problems* **17** (2001) 553–570.
- [42] D. Colton, R. Ewing and W. Rundell, *Eds*, SIAM, (2000) ISBN 0-89871-252-1.
- [43] C. De Boor, "An calculating with B-splines", *Journal of Approximation Theory* **6** (1972) 50–62.
- [44] C. De Boor, *A practical guide to spline*, Applied Mathematical Sciences, Springer **27** (2000).
- [45] Dunford et Schwartz, *Linear Operator. Part I*, Wiley Classics Library. John Wiley and Sons Inc., New York, (1988).
- [46] P. L. Duren, *Theory of H^p functions*, Academic Press 1970.

- [47] A. El Badia and T. Ha-Duong, "An inverse source problem in potential analysis", *Inverse problems* **16** (2000) 651-663.
- [48] C. Elhechmi, , Thèse de 3ème cycle, ENIT, Tunis, Tunisie, (2007), to be defended.
- [49] H. Engl, "Necessary and sufficient conditions for convergence of regularization methods for solving linear operator equations of the first kind", *Numer. Funct. Anal. Optim.* **3** (1981) 201-222.
- [50] D. Fasino et G. Inglese, "An inverse Robin problem for Laplace equation: theoretical results and numerical methods", *Inverse Problems* **15** (1999) 41–48.
- [51] D. Fasino et G. Inglese, "Discrete methods in the study of an inverse problem for Laplace's equation", *IMA J. Numer. Anal.* **19, 1** (1999) 105-118.
- [52] D. Fasino et G. Inglese, "Stability of the solutions of an inverse problem for Laplace's equation in a thin strip", *Numer. Funct. Anal. and Optimiz.* **22 (5-6)** (2001) 549–560.
- [53] O. Faugeras, F. Clément, R. Deriche, R. Keriven, T. Papadopoulo, J. Roberts, T. Vieville, F. Devernay, J. Gomes, G. Hermosillo, P. Kornprobst, and D. Lingrand, "The inverse EEG and MEG problems: the adjoint state approach. I: the continuous case", *Technical Report 3673, Inria* (1999).
- [54] I. Fellah, *Complétion de données dans les espaces de Hardy et problèmes inverses pour le Laplacien en 2D*, Thèse de doctorat, ENIT, Tunis, Tunisie, (2007).
- [55] J. B. Garnett, *Bounded Analytic Functions*, Academic Press 1981.
- [56] D. Gilbarg et N. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer Verlag, New York, (1983).
- [57] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, "Contributions to the arithmetic theory of series", *Proc. London Math. Soc.* **11, 2** (1913) 411–478.
- [58] H. Helson, *Harmonic Analysis*, Addison–Wesley 1983.
- [59] P. Henrici, *Applied and computational complexe analysis*, **3** Wiley-Interscience (1993).
- [60] K. Hoffman, *Banach spaces of analytic functions*, Dover 1988.
- [61] Y. C. Hon and T. Wei, "Backus-Gilbert algorithm for Cauchy problem of the Laplace equation", *Inverse problems* **17** (2001) 261-271.
- [62] G. Inglese, "An inverse problem in corrosion detection", *Inverse Problems* **13** (1997) 977-994.
- [63] M. Jaoua, J. Leblond, M. Mahjoub and J. R. Partington, "Robusts numerical algorithms based on analytic approximation for the solution of inverse problems in annular domains", soumis.
- [64] S. I. Kabanikhin et A. L. Karchevsky, "Optimizational method for solving the Cauchy problem for an elliptic equation", *J. Inverse Ill-posed Probl.* **3, (1)** (1995) 21–26.

- [65] M. Kallel, *Algorithmes rapides pour l'identification de fissures*, Thèse de 3ème cycle, ENIT, Tunis, Tunisie, (2005).
- [66] P. Kaup and F. Santosa, "Nondestructive evaluation of corrosion damage using electrostatic measurements", *J. Nondestructive Eval.* **14** (1995) 127–136.
- [67] P. Kaup, F. Santosa et M. Vogelius, "A method for imaging corrosion damage in thin plates from electrostatic data", *Inverse Problems* **12** (1996) 279-293.
- [68] M. V. Klibanov et F. Santosa, "A computational quasi-reversibility method for Cauchy problems for Laplace's equation", *SIAM J. Appl. Math.* **51**, (6) (1995) 1653–1675.
- [69] V. Kozlov, V. Maz'ya and A. Fomin, "An iterative method for solving the Cauchy problem for elliptic equations", *Comput. Math. Phys.* **31** (1991) 45-52.
- [70] R. Kress, "Inverse Dirichlet problem and conformal mapping", *Mathematics and Computers in Simulation*, **66** (2004) 4-5.
- [71] S. Lang, *Differential manifolds*, Addison–Wesley (1972).
- [72] M. M. Lavrentèv et L. Ya. Savelèv, "Linear operators and ill-posed problems", *Bulletin of the american mathematical society* **34**, 2 (1997) 193–196.
- [73] J. Leblond et J. Partington, "Constrained approximation and interpolation in Hilbert function spaces", *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **234**, 2 (1999) 500–513.
- [74] J. Leblond, M. Mahjoub and J. R. Partington, "Analytic extensions and Cauchy-type inverse problems on annular domains: stability results", *J. Inv. Ill-Posed Problems* **14**, 2 (2006) 189–204.
- [75] J. Leblond, J. P. Marmorat and J. R. Partington, "Analytic approximation with real constraints, with applications to inverse diffusion problems", *J. Inv. Ill-Posed Problems*, **15** (2007) 1–17.
- [76] J. Leblond, C. Paduret, S. Rigat and M. Zghal, "Sources localisation in ellipsoids by best meromorphic approximation in planar sections", soumis.
- [77] K. Louati, *Modèles Mathématiques pour l'Inspection Nondestructive des pipelines*, Thèse de 3ème cycle, Ecole Polytechnique, Paris, (2006).
- [78] F. Mandrea, *Comportement asymptotique des pôles d'approximants rationnels et méromorphes: applications aux problèmes inverses du Laplacien 2D*, Thèse de 3ème cycle (2001).
- [79] N. Nilkolskii, "Operators, functions, and system: an easy reading Hardy, Hankel, and Toeplitz", *Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Soc.* **92**, 1 (2002).

- [80] N. Nikolskii, "Operators, functions, and system: an easy reading. Hardy, Hankel, and Toeplitz", *Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Soc.* **93, 2**, (2002).
- [81] V. Peller, *Hankel operators and their Applications*, Monographs Mathematics. Springer-verlag 2003.
- [82] R. Plato et G. Vainikko, "On the regularization of projection methods for solving ill-posed problems", *Numer. Math.* **57** (1990) 63–79.
- [83] Ch. Pommerenke, *Boundary behaviour of conformal maps*, Springer-Verlag, (1991).
- [84] J. Rauch, *Partial differential equations*, **128 of GTM**, Springer-Verlag, New York, (1991).
- [85] W. Rudin, *Real and complex analysis*, Mc Graw Hill 1982.
- [86] F. Santosa et M. Vogelius, "A computational algorithm to determine cracks from electrostatic boundary measurements", *Int. J. Eng. Sci.* **29**, (1991) 917–937.
- [87] F. Santosa, M. Vogelius et J. M. Xu, "An effective nonlinear boundary condition for a corroding surface. Identification of the damage based on steady state electric data", *Z. angew. math. Phys.* **49** (1998) 656–679.
- [88] D. Sarason, *The H^p spaces of an annulus*, AMS 1988.
- [89] F. Seyfert, *Problèmes extrémaux dans les espaces de Hardy, application à l'identification de filtres hyperfréquences à cavités couplées*, Thèse de doctorat, ENSMP, 1998.
- [90] M. Slodička et R. Van Keer, "Determination of the convective transfer coefficient in elliptic problems from a nonstandard boundary condition", *J. Maryška, M. Tuma, J. Šembera, (Eds), Simulation, modelling, and numerical analysis, SIMONA 2000, 13–20, Technical University of Liberec*, 2000. ISBN: 80-7083-451-X.
- [91] M. Slodička et R. Van Keer, "Determination of Robin coefficient in semilinear parabolic problems by means of boundary measurements", *Inverse Problems* **18**, (2002) 139–152.
- [92] M. Slodička et R. Van Keer, "A numerical approach for the determination of a missing boundary data in elliptic problems", *Appl. Math. and Comp.* **147**, (2004) 569–580.
- [93] M.P. Smith, "Constrained approximation in banach spaces", *Constr. Approxi.* **19, 3** (2003) 465–476.
- [94] M.P. Smith, "The spectral theory of Toeplitz operators applied to approximation problems in Hilbert spaces", *Constr. Approxi.* **22** (2005) 47–65.
- [95] M.P. Smith, *Approximation problems and operator theory in function spaces*, PhD thesis, Univ. Leeds, UK, 2002.

- [96] A. Tikhonov and N. Arsenine, *Méthodes de résolution de problèmes mal posés*, MIR (1976).
- [97] X. Yang, M. Choulli, et J. Cheng, "An iterative BEM for the inverse problem of detecting corrosion in a pipe", *Numer. Math. J. Chinese Univ.* **14**, (2005) 252–266.
- [98] N. J. Young, *An introduction to Hilbert space*. Cambridge University Press 1988.
- [99] M. Vogelius, J. M. Xu, "A non linear elliptic boundary value problem related to corrosion modeling", *Quarterly Applied Maths* **56**, (1998) 479–505.
- [100] Matlab Software Copyright 1984-2000 The MathWorks, Inc.