

N° d'ordre:

THÈSE

présentée à

l'Université de Nice Sophia Antipolis

pour obtenir le titre de

DOCTEUR EN MATHÉMATIQUES

par

David AVANESSOFF

École Doctorale : Sciences Fondamentales et Appliquées

Laboratoire d'accueil : INRIA SOPHIA ANTIPOLIS

Équipe d'accueil : APICS

*Linéarisation dynamique des systèmes non linéaires et paramétrage de
l'ensemble des solutions*

Laurent	BARATCHART	directeur de thèse
Jean-Baptiste	POMET	co-directeur de thèse

Le martyr est la seule façon de devenir célèbre quand on n'a pas de talent.

Pierre Desproges,

Si vous ne pouvez être des saints de la connaissance, soyez-en au moins les guerriers.

Friedrich Nietzsche,

En mathématiques, on ne comprend pas les choses, on s'y habitue.

John von Neumann,

Table des matières

Chapitre 0. Préliminaires	7
0.1 Rappels de géométrie différentielle	8
0.2 Forme particulière du théorème des fonctions implicites	10
0.3 Équations différentielles, solutions, jets	12
0.4 Germes, topologie de Whitney	12
Chapitre 1. Paramétrisation des systèmes sous-déterminés	15
1.1 Systèmes sous-déterminés et systèmes de contrôle	16
1.2 Paramétrisation des solutions d'un système différentiel ordinaire	19
1.3 Platitude	27
1.4 Les transformations	29
1.5 Contrôlabilité	31
1.6 Bref état de l'art	33
Chapitre 2. Paramétrisation des systèmes différentiels de dimension 3 avec 2 contrôles	35
2.1 Condition nécessaire : contrôlabilité	37
2.2 Condition nécessaire : systèmes réglés	38
2.3 Rappel de résultats connus	40
2.4 Résultats nouveaux	46
Chapitre 3. Filtration des équations de la platitude	55
3.1 Séries formelles d'un nombre fini de variables prises dans un ensemble infini	58
3.2 L'algèbre différentielle locale associée à un système de contrôle	75
3.3 Une valuation naturelle	84
3.4 Application aux équations de la platitude d'un système de contrôle	109

Annexe A. Parameterization of control systems of dimension 3 with 2 controls	125
A.1 Problem statement	126
A.2 A system of partial differential equations	130
A.3 Remarks on the case where $S = T = 0$	135
A.4 Main results	139
A.5 Necessary conditions	140
A.6 On the solutions of system $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\gamma,\delta})$	145
A.7 On flat outputs and differential flatness	152
A.8 Proofs and lemma	153
Annexe B. A point of view on a class of differential equations	157

Introduction

On résout les problèmes qu'on se pose et non les problèmes qui se posent.

Henri Poincaré.

Problème de Monge

Nous nous intéressons dans cette thèse à ce que Panajiotis Zervos appelle “problème de Monge”. Dans un article de synthèse de 1932 [70], il définit ce problème comme étant :

“l’intégration explicite d’un système de $k \leq n$ équations différentielles ordinaires sous-déterminées de n variables x . Par intégration explicite nous entendons celle où l’on exprime les variables x par des fonctions déterminées d’un paramètre, de $n - k$ fonctions arbitraires de ce paramètre et de leurs dérivées jusqu’à celle d’un *certain ordre*, pouvant contenir aussi un nombre fini de constantes arbitraires.”

Dans cette thèse nous considérons une définition similaire mais au lieu de “intégration explicite” nous utilisons la terminologie “paramétrisation”. Ce *certain ordre* est un entier K donnant l’ordre maximal de dérivation des fonctions arbitraires. Dans la suite, nous considérons aussi un multi-entier qui détermine les ordres de dérivation maximums pour chaque fonction arbitraire. Le terme “paramétrisation” illustre la possibilité de paramétrer les solutions d’un système différentiel comme pour une courbe en géométrie. On considérera un paramétrage comme la donnée d’une fonction Φ dépendant de fonctions arbitraires du temps h et de leurs dérivées jusqu’à l’ordre K qui nous donne une solution x à travers :

$$x = \Phi(h, \dot{h}, \dots, h^{(K)}). \quad (1)$$

Cet excellent article [70], dont une étude a été faite par Maurice Janet en 1971 [24], reprend des travaux antérieurs dont nous citerons quelques exemples.

Gaspard Monge a résolu par cette approche un problème d’intégration d’équations différentielles sous-déterminées en 1784.

David Hilbert a montré [18] que certains systèmes ne possèdent pas cette propriété d'intégration explicite, c'est-à-dire que tous les systèmes différentiels ne sont pas paramétrables.

Élie Cartan a résolu le problème cent trente ans après Monge dans le cas des systèmes dont la solution générale dépend d'une seule fonction arbitraire du temps [5].

Dans [17], Édouard Goursat termine l'introduction par ce paragraphe :

Ces résultats sont encore bien particuliers. J'espère cependant qu'ils pourront contribuer à appeler l'attention de quelque jeune mathématicien sur un sujet difficile et bien peu étudié.

Systèmes différentiels plats

En automatique, le contrôle des systèmes linéaires est une discipline bien établie qui répond à la plupart des problèmes concrets de régulation locale en utilisant le comportement localement linéaire des systèmes.

Cependant les systèmes linéaires sont assez rares dans beaucoup de domaines physiques comme la mécanique. Une question importante est alors de déterminer si un système peut être linéarisé exactement (c'est-à-dire transformé en système linéaire) par un retour d'état. Dans le cas d'un retour d'état statique la réponse a été donnée par Bronisław Jacubczyk et Witold Respondek dans [22]. Dans le cas d'un retour d'état dynamique le sujet n'est pas clos, même si de nombreux résultats existent [11, 13, 20]. La linéarisation dynamique consiste à coupler le système avec un autre système dynamique de sorte que la combinaison résultante soit linéaire.

L'apport de [11, 13] a été d'introduire la notion de "platitude différentielle" des systèmes de contrôle. La platitude est très proche de la linéarisabilité dynamique, mais elle est une propriété structurelle beaucoup plus intéressante. Les fonctions arbitraires du temps h sont endogènes dans le cas de la platitude, c'est-à-dire qu'elles s'expriment en fonction des variables du système et de leurs dérivées jusqu'à un certain ordre L à travers une fonction Ψ :

$$h = \Psi(x, \dot{x}, \dots, x^{(L)}). \quad (2)$$

Cette propriété permet de générer effectivement les fonctions arbitraires à l'aide des variables du système. On verra dans cette thèse que la platitude est un cas particulier de paramétrisation. En effet, en général on ne peut exprimer les fonctions arbitraires h par rapport aux variables du système que par des relations différentielles sur h .

Dans la suite, on s'intéressera soit à la propriété de posséder une paramétrisation, soit à la platitude.

Contribution de la thèse

Plus de deux cents ans après les résultats de Monge, il reste très difficile de déterminer si un système différentiel admet une paramétrisation. Trouver explicitement une paramétrisation, ce qui demande une grande connaissance des propriétés du système, permet évidemment de répondre à la question. Cependant, ne pas trouver de paramétrisation à un ordre K ne permet pas d'y répondre. En effet, il peut exister une paramétrisation à un ordre supérieur à K . Il faut alors démontrer l'impossibilité d'une paramétrisation à tout ordre, comme l'a initié Hilbert, et ainsi déterminer des classes de systèmes non paramétrables.

Le but de cette thèse est de trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un système différentiel soit paramétrable. Les résultats vont au moins donner un point de vue que nous espérons pertinent pour l'étude de cette question et apporter des réponses partielles au problème.

Le chapitre 0 n'est consacré qu'à des notations et à des rappels de résultats plus ou moins classiques utilisés par la suite.

Le chapitre 1 définit rigoureusement la paramétrisation des équations différentielles sous-déterminées. Certains résultats vont éclairer l'angle d'attaque du problème que nous avons considéré ainsi que les limites que nous nous sommes données. Ces premiers résultats vont circonscrire le problème tout en lui donnant une dimension explicite par leurs limites et les possibilités d'englober le problème plus spécifique de la platitude. En outre, dans ce même chapitre, nous donnerons des résultats qui permettent de clarifier la notion de paramétrisation. Ceux-ci concernent l'inversion des formules de paramétrisation des solutions d'un système différentiel, lorsque cette dernière existe, qui nécessite de résoudre un problème de Cauchy sauf dans le cadre de la platitude.

Le chapitre 2 concerne des systèmes différentiels à trois variables et deux contrôles c'est-à-dire de degré d'indétermination deux. On considèrera des paramétrisations avec des ordres de différentiation quelconques pour les deux fonctions arbitraires du temps qui en forment les arguments. L'approche mathématique s'inspire beaucoup d'un article de Hilbert, dont une version traduite en anglais est en annexe, et de sa reprise par Rouchon dans [58], en cherchant des obstacles à une possible paramétrisation. L'utilisation des théorèmes d'inversions locales ou des fonctions implicites ne permet que rarement d'explicitier un paramétrage lorsqu'il existe mais elle permet de ne pas avoir à préjuger d'un ordre de paramétrisation. Le résultat principal de ce chapitre est de montrer qu'un système n'est généralement paramétrable (en dehors de cas déjà étudiés) que si un certain système d'équations et d'inéquations aux dérivées partielles admet une solution. Nous conjecturons que de telles solutions n'existent pas en général. Nous

montrons seulement que lorsque le plus petit des deux ordres de différentiation des fonctions arbitraires du temps est inférieur ou égal à deux, le système d'équations et inéquations aux dérivées partielles n'admet pas de solution, mais ceci constitue un premier pas pour démontrer la conjecture.

Dans le chapitre 3, on s'intéresse à des systèmes de dimension quelconque, et l'étude est ciblée sur la platitude. On tente d'écrire les "équations de la platitude" et de leur donner un sens bien qu'il y ait potentiellement un nombre infini de variables. Ce chapitre constitue en lui-même un cadre algébrique intéressant. Ce cadre est local et considère des séries entières d'un nombre fini de variables parmi un ensemble infini. Ce chapitre propose une filtration des équations de platitude qui pourrait déboucher sur un algorithme permettant de tester l'existence d'une paramétrisation endogène d'un système différentiel. Il est intéressant de noter que la filtration permet de ne pas avoir à retravailler sur les équations à un certain ordre lorsque l'on s'intéresse à l'ordre suivant. Il est cependant dommage que peu de résultats aient pu être mis en exergue. La raison en est que cette filtration ne traite qu'une partie des conditions : la difficulté majeure concerne la caractérisation de l'inversibilité d'opérateurs différentiels non scalaires. L'article [8] de Vladimir Chetverikov donne des résultats préliminaires sur ce sujet.

Chapitre 0

Préliminaires

Contenu du chapitre

0.1	Rappels de géométrie différentielle	8
0.1.1	Généralités	8
0.1.2	Famille de champs de vecteurs, distribution	10
0.2	Forme particulière du théorème des fonctions implicites	10
0.3	Équations différentielles, solutions, jets	12
0.4	Germes, topologie de Whitney	12

Ce chapitre est un bref rappel de notions mathématiques qui seront utilisées dans ce document. Le lecteur au fait de ces notions peut entièrement ou en partie se passer de la lecture de ce chapitre.

0.1 Rappels de géométrie différentielle

Dès l'époque secondaire, les mollusques construisaient leur coquille en suivant les leçons de géométrie transcendante.

Gaston Bachelard,

Le but de cette section est de fixer des notations, et de rappeler divers résultats classiques dont les énoncés nous seront utiles. Le lecteur est supposé familier avec les notions de géométrie différentielle élémentaires ; on renvoie par exemple à [66] pour un exposé détaillé.

0.1.1 Généralités

Applications «lisses». Tout est fait dans la classe analytique réelle, c'est-à-dire que les fonctions «lisses» sont les fonctions analytiques. Si M et N sont des ouverts de $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^{d'}$, il n'y a pas d'équivoque sur ce que l'on appelle une application analytique réelle $M \rightarrow N$, ou $M \rightarrow \mathbb{R}$; un difféomorphisme $\phi : M \rightarrow N$ est une application analytique inversible dont l'inverse est analytique ; alors nécessairement $d = d'$.

Variétés. Vu que toute l'étude présentée ici est locale, les seules variétés que l'on rencontre sont des ouverts connexes $M \subset \mathbb{R}^d$, sur lesquels il y a bien sûr des coordonnées toutes trouvées, mais il est important que les propriétés énoncées ne dépendent pas de ce choix de coordonnées. Un système de coordonnées est une application d'un ouvert $U \subset M$ vers $\mathbb{R}^d$ qui définit un difféomorphisme analytique de U sur son image. Si M est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, cette inclusion fournit un système de coordonnées, mais il y en a bien d'autres et on n'en privilégie aucun.

L'espace tangent à M en un point $x \in M$ est simplement $\mathbb{R}^d$, mais on notera tout de même parfois $T_x M$ pour indiquer que sa structure d'espace vectoriel est bien définie. Par exemple, il est licite (cf. section 0.1.2) de parler de «sous-espace vectoriel de $T_x M$ » alors que l'expression «une droite dans M » n'a aucun sens, ou tout-au-plus un sens relatif au système de coordonnées choisi.

Champs de vecteurs. Une fois choisies des coordonnées, un champs de vecteur X sur M peut être vu comme une application analytique réelle $M \rightarrow \mathbb{R}^d$:

$$x \mapsto X(x) = \begin{pmatrix} a_1(x) \\ \vdots \\ a_d(x) \end{pmatrix} \quad (1)$$

où les a_i sont des fonctions analytiques $M \rightarrow \mathbb{R}$. En notant $\partial/\partial x_i$ le i ème vecteur de base, ou plutôt l'application qui à tout x associe ce vecteur, on peut noter

$$X = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + a_d \frac{\partial}{\partial x_d} . \quad (2)$$

La manière dont les fonctions a_i sont changées lorsque l'on change de coordonnées relève de formules classiques.

Dérivée de Lie, crochet de Lie Si $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction et X un champ de vecteur sur M , on peut leur associer la *dérivée de Lie de h le long de X* , ou dérivée directionnelle, que l'on notera Xh (on trouve aussi $L_X h$ ou $\mathcal{L}_X h$ dans la littérature). On peut la définir par

$$Xh(x) = Dh(x)X(x),$$

où D est l'opérateur de dérivation.

$Xh(x)$ est aussi la dérivée par rapport au temps à $t = 0$ de la valeur de h le long de la solution de $\dot{x} = X(x)$ passant par x au temps 0.

A deux champs de vecteurs X et Y sur M on peut associer leur *crochet de Lie* $[X, Y]$ qui est un nouveau champ de vecteur dont l'expression est la suivante, en coordonnées, si X est donné par (2) et Y par la même formule avec des fonctions b_i au lieu de a_i :

$$[X, Y] = (Xb_1 - Ya_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + (Xb_d - Ya_d) \frac{\partial}{\partial x_d} . \quad (3)$$

ceci définit un champ de vecteur indépendamment des coordonnées dans lesquelles ce calcul est fait. Il est bien connu que la dérivée de Lie selon ce champ est le commutateur des dérivées de Lie selon X et selon Y , i.e., pour tout fonction h , $XYh - YXh = [X, Y]h$.

De la manière on peut définir leurs crochets itérés par l'utilisation de la notation suivante :

$$\begin{aligned} ad_X^0 Y &= Y \\ ad_X^{i+1} Y &= [X, ad_X^i Y]. \end{aligned} \quad (4)$$

0.1.2 Famille de champs de vecteurs, distribution

Soit $\mathcal{D}$ une famille, finie ou infinie, de champs de vecteurs sur M . On appelle distribution engendrée par $\mathcal{D}$, la correspondance qui associe à tout point $x \in M$ le sous-espace vectoriel $D(x)$ de $T_x M$ défini par

$$D(x) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{X(x), X \in \mathcal{D}\}.$$

Plus généralement, une distribution (analytique) est une telle correspondance $D(x)$ qui est engendrée par certains champs de vecteurs analytiques. Si le rang de D (i.e. la dimension de $D(x)$) est constant dans le voisinage d'un point, elle est localement engendrée par un nombre fini de champs de vecteurs linéairement indépendants en tout point.

Pour X un champ et D une distribution, $X \in D$ signifie que $X(x) \in D(x)$ pour tout x .

On appelle *base d'une distribution* D de rang r (éventuellement restreinte à un certain ouvert) des champs de vecteurs $X_1, \dots, X_r$ (éventuellement définis sur cet ouvert seulement) tels que $\{X_1(x), \dots, X_r(x)\}$ soit une base de $D(x)$ en tout x .

On considère la construction suivante. Pour une distribution D , on nomme D_i la distribution définie par :

$$\begin{aligned} D_1 &= D \\ D_{i+1} &= D_i + [D, D_i]. \end{aligned} \tag{5}$$

Si il existe i_0 tel que le rang de D_{i_0+1} est égal au rang de D_{i_0} , alors pour tout $i \geq i_0$, le rang de D_i est égal au rang de D_{i_0} .

0.2 Forme particulière du théorème des fonctions implicites

Lemme 0.2.1 *Considérons cinq entiers r, s, q, p, q' avec $q \leq r + s$ et $q' \leq \min\{s, q\}$. Considérons une fonction analytique réelle $F : (x, y, \zeta) \mapsto F(x, y, \zeta)$ définie sur un ouvert connexe U de $\mathbb{R}^{r+s+p}$ telle que $\text{Rang}(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}) = q$ et $\text{Rang}(\frac{\partial F}{\partial y}) = q'$ sur U sauf éventuellement sur un fermé d'intérieur vide Z de U . Considérons le système*

$$F(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s, \zeta_1, \dots, \zeta_p) = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_q \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Alors, pour tout point $(x_0, y_0, \zeta_0) \in U \setminus Z$ et $z_0 = F(x_0, y_0, \zeta_0)$, quitte à permuter les indices des y_i et z_i , il existe

- un voisinage $V \subset (U \times F(U))$ de (x_0, y_0, ζ_0, z_0) ,

- une fonction analytique réelle G de la projection adéquate de V à valeur dans $\mathbb{R}^{q'}$
- et une fonction analytique réelle H de la projection adéquate de V à valeur dans $\mathbb{R}^{q-q'}$ vérifiant $\text{Rang}(\frac{\partial H}{\partial x}) = q - q'$,

tels que, (6) est équivalent à

$$\begin{aligned} G(x_1, \dots, x_r, y_{q'+1}, \dots, y_s, z_1, \dots, z_{q'}, \zeta_1, \dots, \zeta_p) &= \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{q'} \end{pmatrix} \\ H(x_1, \dots, x_r, z_1, \dots, z_{q'}, \zeta_1, \dots, \zeta_p) &= \begin{pmatrix} z_{q'+1} \\ \vdots \\ z_q \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

pour (x, y, ζ, z) dans V .

Preuve du lemme 0.2.1 : On considère un point $(x_0, y_0, \zeta_0) \in U \setminus Z$. Après une éventuelle permutation, avec

$$\begin{aligned} y' &= (y_1, \dots, y_{q'}), & y'' &= (y_{q'+1}, \dots, y_s), \\ F' &= (F_1, \dots, F_{q'}), & F'' &= (F_{q'+1}, \dots, F_q), & z' &= (z_1, \dots, z_{q'}), \end{aligned} \quad (8)$$

on considère que $\frac{\partial F'}{\partial y'}$ est inversible. On applique le théorème d'inversion locale à l'application Γ :

$$(x, y, \zeta) \mapsto (x, F'(x, y, \zeta), y'', \zeta)$$

qui définit donc un difféomorphisme d'un voisinage de (x_0, y_0, ζ_0) sur son image. G est l'application définie sur cette image telle que cet inverse soit

$$(x, z', y'', \zeta) \mapsto (x, G(x, z', y'', \zeta), y'', \zeta).$$

Alors,

$$F \circ \Gamma^{-1}(x, z', y'', \zeta) = (z', \hat{H}(x, z', y'', \zeta), \zeta),$$

avec $\hat{H}(x, z', y'', \zeta) = F'(x, G(x, z', y'', \zeta), y'', \zeta)$. Donc, Γ étant un difféomorphisme, le rang de $\frac{\partial F}{\partial y}$ est égal au rang de

$$\begin{pmatrix} I_{q'} & 0 \\ \frac{\partial \hat{H}}{\partial z'} & \frac{\partial \hat{H}}{\partial y''} \end{pmatrix} \quad (9)$$

Comme ce rang est q' , on a $\frac{\partial \hat{H}}{\partial y''} = 0$, et on prend

$$H(x, z', \zeta) = F'(x, G(x, z', y'', \zeta), y'', \zeta)$$

De même, le rang de $(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y})$ est égal au rang de

$$\begin{pmatrix} 0 & I_{q'} & 0 \\ \frac{\partial H}{\partial x} & \frac{\partial H}{\partial y'} & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

d'où le rang de $\frac{\partial H}{\partial x}$ est bien $q - q'$ ■

0.3 Équations différentielles, solutions, jets

Dans les systèmes d'équations différentielles ordinaires considérés la variable “indépendante” est toujours le temps, noté t .

Les notations $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ et, pour $i \geq 2$, $x^{(i)} = \frac{d^i x}{dt^i}$ seront utilisées dans l'ensemble du document pour faciliter sa lecture.

Les fonctions du temps sont toujours supposées infiniment différentiable. Par solution d'un système, y compris un système de contrôle (section 1.1.2), on entend fonction C^∞ du temps qui le satisfait identiquement.

U étant un ouvert de $\mathbb{R}^d$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $h : I \rightarrow U$ infiniment différentiable, on définit son jet d'ordre k comme la fonction $j_K(h)$ qui donne h et ses K premières dérivées :

$$J_K(h)(t) = (h(t), \dot{h}(t), \dots, h^{(K)}(t)).$$

De même pour un multi-indice $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d)$, on peut définir

$$j_\mu(h)(t) = \left(h_k^{(i)}(t) \right)_{\substack{1 \leq k \leq d \\ 0 \leq i \leq \mu_k}} \in \mathbb{R}^{d+|\mu|} \quad (11)$$

où $|\mu|$ est la longueur de μ définie par

$$\begin{aligned} |\cdot| : \mathbb{N}^d &\rightarrow \mathbb{N} \\ \nu = (\nu_1, \dots, \nu_d) &\mapsto |\nu| = \sum_{i=1}^d \nu_i. \end{aligned} \quad (12)$$

On garde souvent la notation $(h, \dots, h^{(\mu)})$ au lieu de $j_\mu(h)$, même pour un multi-indice.

0.4 Germes, topologie de Whitney

Le temps n'a qu'une réalité, celle de l'instant. Autrement dit, le temps est une réalité resserrée sur l'instant et suspendue entre deux néants.

Gaston Bachelard,

Nous rappelons de [15] que le germe d'une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$ en $x \in \mathbb{R}$ avec $k \in \mathbb{N}$ est la classe d'équivalence de f pour la relation d'équivalence $\sim_x$ définie par : pour tout f et g dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$, $f \sim_x g$ si $f = g$ sur un voisinage de x .

Définition 0.4.1 Soit $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$. L'ensemble $\mathcal{C}_x^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$ désigne l'ensemble des germes des fonctions de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$ au voisinage de x .

Soit K et d deux entiers positifs et U un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^{d(K+1)}$. On appelle $\mathcal{W}(U) \subset \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ l'ensemble des germes de fonctions lisses $t \mapsto h(t)$ tels que $(h(t), \dot{h}(t), \dots, h^{(K)}(t))$ est dans U pour tout t au voisinage de zéro, i.e.

$$\mathcal{W}(U) = \{h \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d) | (h, \dot{h}, \dots, h^{(K)}) \in U\}. \quad (13)$$

Proposition 0.4.2 Pour tout U ouvert de $\mathbb{R}^d$ pour un certain entier d , $\mathcal{W}(U)$ est un ouvert pour la topologie $\mathcal{C}^\infty$ de Whitney [15, p.42].

Chapitre 1

Paramétrisation des systèmes sous-déterminés

Contenu du chapitre

1.1	Systèmes sous-déterminés et systèmes de contrôle	16
1.1.1	Systèmes sous-déterminés	16
1.1.2	Systèmes de contrôle	17
1.1.3	Systèmes particuliers	18
1.1.4	Algèbre différentielle associée à un système de contrôle	18
1.2	Paramétrisation des solutions d'un système différentiel ordinaire	19
1.3	Platitude	27
1.3.1	Définition	27
1.3.2	Approche algébrique	28
1.4	Les transformations	29
1.4.1	Changement de coordonnées	30
1.4.2	Transformation par retour d'état statique	30
1.4.3	Transformation par retour d'état dynamique	30
1.5	Contrôlabilité	31
1.6	Bref état de l'art	33

1.1 Systèmes sous-déterminés et systèmes de contrôle

1.1.1 Systèmes sous-déterminés

Soit n et m deux entiers positifs et $m \leq n$. Considérons un système d'équations différentielles ordinaires réel en la variable ξ sous la forme générale¹ :

$$F(\dot{\xi}, \xi) = 0 \quad (1.1)$$

où ξ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et F est une application analytique réelle d'un ouvert connexe de $\mathbb{R}^{2n}$ à valeur dans $\mathbb{R}^{n-m}$.

On appellera solution de (1.1) toute fonction du temps ξ à valeur dans $\mathbb{R}^n$ définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ telle que pour tout $t \in I$, $F(\dot{\xi}(t), \xi(t)) = 0$.

Ce système est dit sous-déterminé lorsque sa solution générale dépend d'au moins une fonction arbitraire du temps.

Une manière de s'en assurer est de supposer que

$$\text{Rang} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\xi}_i} \right)_{i=1..n} = n - m,$$

tout au moins dans le domaine considéré.

L'hypothèse concernant le rang maximal nous évite d'avoir des relations non différentielles sur ξ . L'hypothèse sur le rang constant permet d'éviter des singularités et le tout nous permet de mettre le système sous forme résolue.

Définition 1.1.1 On appelle V_ξ l'ensemble des vitesses admissibles du systèmes (1.1) en un point ξ de $\mathbb{R}^n$, i.e. le sous-ensemble de (l'espace tangent au point ξ à) $\mathbb{R}^n$ formé des v vérifiant $F(\xi, v) = 0$. Alors (1.1) pourrait s'écrire $\dot{\xi} \in V_\xi$ pour tout ξ .

Remarque – L'hypothèse que $\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\xi}_i} \right)_{i=1..n}$ soit de rang constant $n - m$ dans (1.1) entraîne que V_ξ est une sous-variété de $T_\xi \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$ pour tout ξ .
– Par commodité, on utilisera souvent $\dot{\xi}$ comme une variable sans référence à la dérivée temporelle de ξ (langage des jets).

¹On aurait pu définir de manière plus générale un système d'équation différentielles d'ordre supérieur à 1 mais, en utilisant une technique élémentaire bien connue, on peut toujours transformer une équation différentielle d'ordre r en r équations différentielles d'ordre 1. Nous considérerons cette étape comme étant déjà effectuée.

1.1.2 Systèmes de contrôle

On considère généralement un système de contrôle sous la forme

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (1.2)$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$ l'état du système, $u \in \mathbb{R}^m$ le contrôle et nous faisons l'hypothèse que f est analytique réelle d'un ouvert connexe de $\mathbb{R}^{n+m}$ dans $\mathbb{R}^n$.

Dans (1.2), $u_1, \dots, u_m$ sont des fonctions arbitraires du temps qui, pour des systèmes physiques vont correspondre à un moyen de modifier les solutions du système et que l'on peut de ce fait appeler actionneurs.

L'origine de l'appellation "contrôle" vient des systèmes de l'automatique. Les modèles étudiés ont des entrées et des sorties (ici la sortie est x tout entier, en général c'est une fonction de x). Les entrées sont des contrôles dans le sens où l'utilisateur d'un tel système ne peut en modifier le comportement qu'en modifiant ces entrées. Les entrées permettent de contrôler au sens propre la dynamique du système. La capacité à réellement modifier le système pour l'emmener vers un état désiré en un temps fini devient alors une caractéristique déterminante du système, cette notion est la contrôlabilité. On travaillera au voisinage d'un point où

$$\text{Rang}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) = m. \quad (1.3)$$

Clairement, (1.2) est un cas particulier de (1.1), avec $\xi = (x, u)$ et $F(\xi, \dot{\xi}) = \dot{x} - f(x, u)$. De plus, l'hypothèse (1.3) nous permet d'éliminer u et de déduire de (1.2) une relation du type

$$G(x, \dot{x}) = 0 \quad (1.4)$$

A l'invers, notons qu'on peut transformer le système (1.1) pour le mettre explicitement sous forme de système de contrôle. Considérons le système (1.1) avec n et m deux entiers positifs tels que $n \geq m$. Comme $\left(\frac{\partial F}{\partial \xi_i}\right)_{i=1, \dots, n}$ est de rang constant $n - m$, on peut, quitte à permuter les $(\xi_i)_{i=1, \dots, n}$, écrire le système (1.1) sous forme résolue en les $(\dot{\xi}_i)_{i=1, \dots, n-m}$ en utilisant le théorème d'inversion locale :

$$\dot{\xi}_i = f_i(\xi, \dot{\xi}_{n-m+1}, \dots, \dot{\xi}_n), \quad i = 1, \dots, n - m \quad (1.5)$$

On considère maintenant les variables $u_1 = \dot{\xi}_{n-m+1}, \dots, u_m = \dot{\xi}_n$ et $x_i = \xi_i$ pour tout i , on obtient alors un système de contrôle :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(x, u_1, \dots, u_m), & i = 1, \dots, n - m \\ \dot{x}_i = u_{i-n+m}, & i = n - m + 1, \dots, n. \end{cases} \quad (1.6)$$

1.1.3 Systèmes particuliers

Définition 1.1.2 On appelle **système affine** un système différentiel (1.1) (respectivement (1.2)) dont l'ensemble des vitesses admissibles en tout point ξ (respectivement x) est un sous-espace affine de $T_\xi \mathbb{R}^n$ (respectivement $T_x \mathbb{R}^n$).

Rappelons (voir [46, déf. II-11.2] ou [29, page 56]) qu'une sous-variété *réglée* $S \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété telle que chaque point de S est un élément d'une droite contenue dans S .

Une définition plus pratique dans cette étude est celle d'une sous-variété *réglée lisse* qui est l'union d'une famille "lisse" de droites :

Définition 1.1.3 Une sous-variété *réglée lisse de dimension d* , $0 \leq d \leq n$, de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension d qui admet une paramétrisation $(s, \lambda) \mapsto c(s) + \lambda X(s)$ où λ est scalaire et s est de dimension $d - 1$. Toute droite passant par le point $c(s)$ avec une direction $X(s)$ est appelée *génératrice de la sous-variété*.

Un système réglé est un système différentiel (1.1) ou (1.2) dont l'ensemble des vitesses admissibles en tout point est réglé, mais nous demanderons de plus que cet ensemble dépende de façon lisse du point (définition 1.4.1, section 1.4.2).

1.1.4 Algèbre différentielle associée à un système de contrôle

On doit à Michel Fliess [14] et Jean-françois Pommaret [52] d'avoir introduit les idées d'algèbre différentielle en automatique. La construction qui suit est semblable à celle de [14], cependant l'objet algébrique construit ici n'est pas un corps différentiel mais un anneau local ; ses éléments sont décrits concrètement comme des séries entières.

Pour définir l'algèbre différentielle associée au système (1.2), nous utiliserons les notations utilisées dans le chapitre 3).

On considère $(\mathcal{A}, +, \times)$ l'anneau différentiel des séries entières en x, u et un nombre fini des dérivées temporelles de u considérées comme des variables indépendantes. La dérivation $\frac{d}{dt}$ est celle donnée par $\frac{d}{dt}x = f(x, u)$. L'anneau $\mathcal{A}$ construit ci-dessus est aussi utilisé dans [23] par Bronisław Jakubczyk, qui montre que deux anneaux différentiels associés à deux systèmes sont isomorphes si et seulement si ces deux systèmes sont équivalents par transformation par retour d'état dynamique définie section 1.4.3.

On peut maintenant considérer $(\mathcal{A}[\frac{d}{dt}], +, \wedge)$ l'anneau des opérateurs différentiels sur $\mathcal{A}$,

dont un élément s'écrit

$$\sum_{i=0}^k a_i \frac{d^i}{dt}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad (1.7)$$

où les a_i sont des éléments de $\mathcal{A}$. La loi multiplicative $\wedge$ vérifie

$$\frac{d}{dt} \wedge t = 1 + t \wedge \frac{d}{dt}. \quad (1.8)$$

$\Lambda^1(\mathcal{A})$ est le $\mathcal{A}$ -module des différentielles de $\mathcal{A}$ constitué de 1-formes (en $dx, du, d\dot{u}, \dots$) à coefficients dans $\mathcal{A}$. Cela correspond à la construction classique des différentielles de Kähler en algèbre différentielle [26], déjà utilisée dans [10] pour définir le linéarisé tangent.

Pour plus de détails, le lecteur peut se référer au chapitre 3.

1.2 Paramétrisation des solutions d'un système différentiel ordinaire

Dans la partie qui suit nous donnons une définition moderne de la paramétrisation de l'ensemble des solutions d'un système différentiel ordinaire sous-déterminé souvent appelée paramétrisation de Monge [44]. Il apparaîtra ensuite à travers une définition de la platitude 1.3.1 en quoi cette autre notion est un cas particulier de celle de paramétrisation.

Définition informelle. Discutons ici la notion de paramétrisation en nous affranchissant des contraintes telles que les ensembles de définition, les singularités...

Une paramétrisation de (1.1) est la donnée de formules Φ dépendant de m fonctions arbitraires du temps h et de leurs dérivées jusqu'à un certain ordre K , permettant d'exprimer de façon explicite toute solution ξ du système (1.1) :

$$\xi = \Phi(h, \dot{h}, \dots, h^{(K)}). \quad (1.9)$$

En d'autres termes, pour tout choix de h , $t \mapsto \xi(t) = \Phi(h(t), \dot{h}(t), \dots, h^{(K)}(t))$ est solution de (1.1) et réciproquement pour toute solution $t \mapsto \xi(t)$ de (1.1), il existe h telle que $\Phi(h, \dot{h}, \dots, h^{(K)}) = \xi$.

Remarque Les notions de paramétrisation données dans la littérature [44, 70, 16, 6] sont parfois plus générales. Dans [6] ou [18], on ne préserve pas la variable indépendante, c'est-à-dire que les fonctions h sont des fonctions d'une autre variable s . Ainsi dans (1.9) la dérivation en $\frac{d}{dt}$ devient une dérivation en $\frac{d}{ds}$ et on a en plus une formule de t fonction de s , h , $\frac{dh}{ds}$,

... Notre point de vue rejoint celui de [12], par exemple : pour des systèmes physiques de l'automatique, paramétrer ainsi le temps n'a pas de sens. Dans [67] et ci-dessous, on donne des exemples de systèmes qui admettent une paramétrisation en "changeant de temps" mais n'en admettent pas au sens que nous adoptons ici.

Par ailleurs, on peut rajouter le temps et des constantes aux arguments de Φ . Si l'on autorisait ceci, la proposition 1.5.2 serait fausse : par exemple, pour un système non contrôlé (1.32), le flot est une paramétrisation de ce type (sans fonction h). Les systèmes que nous étudions sont autonomes, i.e. ne dépendant du temps qu'à travers les variables différentielles. On peut alors se demander si les systèmes de ce type admettant une paramétrisation avec le temps ou des constantes arbitraires en plus des fonctions arbitraires du temps (comme dans la citation de P. Zervos en introduction) admettent aussi une paramétrisation uniquement avec des fonctions arbitraires. Cette question est soulevée dans [47].

Exemple. Le système

$$\begin{cases} \dot{x} = u \\ \dot{y} = x + u^3 \end{cases} \quad (1.10)$$

admet une "paramétrisation" par une fonction arbitraire v de la variable s de la forme :

$$\begin{aligned} t &= 3v''^2(s) + s \\ x &= 2v''^2(s) - v'(s) \\ y &= \frac{42}{5}v''^5(s) - 3v''^2(s)v'(s) + v(s). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Cependant, ce système ne vérifie pas le critère des surfaces réglées (cf ci-dessous section 1.6) et n'est donc pas paramétrable dans le sens que nous en donnons.

Définition formelle. La définition qui suit donne une vision plus précise de ce que nous allons considérer comme une paramétrisation. Pour donner une version locale de cette notion, on parle de germes de solutions (voir section 0.4), mais on peut les remplacer si l'on veut par "solutions définies sur un intervalle de temps assez petit".

De plus, on remplace K dans (1.9) par un multi-indice $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ pour distinguer les cas où nos formules dérivent certaines fonctions h_i moins que d'autres (voir section 0.3).

Définition 1.2.1 Une paramétrisation d'ordre $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ du système (1.1) en $q = (\xi_0, \dot{\xi}_0, \dots, \xi_0^{(\nu)}) \in \mathbb{R}^{(\nu+1)n}$, où ν est un entier positif, est définie par

- un voisinage V de q dans $\mathbb{R}^{(\nu+1)n}$,
- un sous-ensemble ouvert connexe U de $\mathbb{R}^{|\mu|+m}$
- et une application analytique réelle $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$

tels que, en appelant Γ l'application $\mathcal{W}(U) \rightarrow \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ qui assigne à tout $h = (h_1, \dots, h_m) \in \mathcal{W}(U)$ le germe à $t = 0$ de l'application $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ suivante :

$$t \mapsto \xi(t) = \Phi(j_\mu(h)(t)), \quad (1.12)$$

les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

- (i). pour tout $h \in \mathcal{W}(U)$, $\Gamma(h)$ est une solution de (1.1),
- (ii). $\mathcal{W}(V) \subset \Gamma(\mathcal{W}(U))$.

$\mathcal{W}$ est définie dans la section 0.4 et j_μ désigne le jet à l'ordre μ défini en 11.

Remarque Pour le système (1.2), comme le rang de $\frac{\partial f}{\partial u}$ est m , on peut exprimer u en fonction de x et $\dot{x}$ et donc on peut appliquer la définition ci-dessus avec $\xi = x$ et (1.4) et ainsi choisir une paramétrisation Φ qui définit seulement x au lieu d'une paramétrisation qui définit (x, u) . On obtient alors une diminution de l'ordre de la paramétrisation de 1.

Le point (i) se traduit par des relations différentielles, obtenues en substituant à ξ et $\dot{\xi}$ dans (1.1) l'image par Φ d'un jet $j_{\mu+1}(h)$, vérifiées identiquement, où $\mathbb{1}$ est le m -uplet $(1, \dots, 1)$. On peut noter cette relation $F(\Phi, \dot{\Phi}) = 0$ signifiant la nullité d'une fonction des $|\mu| + 2m$ variables $(h, \dot{h}, \dots, h^{(\mu+1)})$. Ce système d'équation aux dérivées partielles en Φ est facile à exprimer. C'est lui qu'on écrit au chapitre 2.

Le point (ii) est lui moins aisé à traduire explicitement. Pour cela, cherchons un antécédent par Γ d'une solution ξ de (1.1). Cela revient à étudier le système

$$\Phi(j_\mu(h)) = \xi \quad (1.13)$$

en tant que système différentiel ordinaire en h . La proposition suivante explicite l'élimination de h en dehors de points singuliers.

Théorème 1.2.2 Soit une application analytique réelle Φ d'un ouvert connexe U de $\mathbb{R}^{|\mu|+m}$ dans $\mathbb{R}^n$ vérifiant (i) de la définition 1.2.1. Alors il existe deux entiers K, L et $Z \subset U \times \mathbb{R}^{(K+L)m-|\mu|}$ un fermé d'intérieur vide tels que l'une des deux propriétés suivantes est vraie :

- (i). Pour tout $\bar{h} \in \mathcal{W}((U \times \mathbb{R}^{(K+L)m-|\mu|}) \setminus Z)$ et $\bar{\xi}$ donné par (1.13), il existe
 - un entier N ,
 - W un voisinage de $(\bar{h}(0), \dots, \bar{h}^{(K+L)}(0), \bar{\xi}(0), \dots, \bar{\xi}^{(L)}(0)) \in \mathbb{R}^{(K+L+1)m+(L+1)n}$,
 - $N + 2$ entiers $d_i, 0 \leq i \leq N + 1$
 - et $N + 1$ fonctions analytiques réelles $H_0, \dots, H_N$ définies sur W

tels que tout $(h, \xi) \in \mathcal{W}(W)$ est solution de (1.13) si et seulement si il est solution de

$$\begin{cases} F(\xi, \dot{\xi}) = 0 \\ h^0 = H^0(h^1, \dots, h^N, \xi, \dots, \xi^{(L)}) \\ \dot{h}^1 = H^1(h, \dot{h}^2, \dots, \dot{h}^N, \xi, \dots, \xi^{(L)}) \\ \vdots \\ h^{N(N)} = H^N(h, \dot{h}, \dots, h^{(N-1)}, \xi, \dots, \xi^{(L)}) \end{cases} \quad (1.14)$$

où $\xi \in \mathbb{R}^n$ et $h^0, \dots, h^N$ est une partition par bloc des coordonnées de h , de dimensions respectives d_i (par convention, si d_i est nul, le bloc h_i et la fonction H_i n'existent pas).

(ii). Pour tout $\bar{h} \in \mathcal{W}((\mathbb{R}^{(K+L)m-|\mu|} \times U) \setminus Z)$ et $\bar{\xi}$ donné par (1.13), il existe W un voisinage de $(\bar{h}(0), \dots, \bar{h}^{(K)}(0), \bar{\xi}(0), \dots, \bar{\xi}^{(L)}(0))$ dans $\mathbb{R}^{(K+1)m+(L+1)n}$ et $S : W \rightarrow \mathbb{R}$ (ne dépendant pas des $h, \dots, h^{(K)}$) tels que toute solution $(h, \xi) \in \mathcal{W}(W)$ de (1.13) est telle que ξ vérifie

$$S(\xi, \dots, \xi^{(L)}) = 0 \quad (1.15)$$

et cette équation est indépendante de $F(\xi, \dot{\xi}) = 0$.

Par indépendant, nous entendons que localement le rang de la jacobienne de

$$(\xi, \dots, \xi^{(L)}) \mapsto (S, F, \dot{F}, \dots, F^{(L-1)})$$

est strictement supérieur à celui de la jacobienne de

$$(\xi, \dots, \xi^{(L)}) \mapsto (F, \dot{F}, \dots, F^{(L-1)}).$$

Dans le point (ii) du théorème 1.2.2, par équation indépendante nous exprimons le fait qu'il existe des germes de solutions de (1.15) qui ne sont pas solutions de (1.1).

De plus, dans le point (ii), les fonctions ξ données par (1.12) satisfont au moins une équation différentielle indépendante de (1.1) et donc un tel Φ ne peut pas définir une paramétrisation au sens de la définition 1.2.1 car il ne peut en satisfaire le point (ii).

Ceci montre la proposition suivante.

Proposition 1.2.3 Une paramétrisation Φ au sens de la définition 1.2.1 vérifie toujours la propriété (i) du théorème 1.2.2.

Avant de démontrer le théorème 1.2.2, nous allons donner une définition moins abstraite d'une paramétrisation de (1.1) et nous montrerons ensuite que si (1.1) admet une paramétrisation définie par 1.2.1 alors presque partout (1.1) admet une paramétrisation définie par :

Définition 1.2.4 Une paramétrisation régulière d'ordre $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ du système (1.1) en $(\xi_0, \dot{\xi}_0, \dots, \xi_0^{(\nu)})$ de $\mathbb{R}^{(\nu+1)n}$ est définie par un voisinage V de ce jet dans $\mathbb{R}^{(\nu+1)n}$, un sous-ensemble ouvert U de $\mathbb{R}^{m(K+1)}$, $K = \max\{\mu_i\}$, et une application analytique réelle $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ tels que, en appelant Γ l'application $\mathcal{W}(U) \rightarrow \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ qui assigne à tout $h = (h_1, \dots, h_m) \in \mathcal{W}(U)$ le germe à $t = 0$ de l'application $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ suivante :

$$t \mapsto \xi(t) = \Phi(j_\mu(h)(t)), \quad (1.16)$$

les trois propriétés suivantes sont vérifiées :

- (i). pour tout $h \in \mathcal{W}(U)$, $\Gamma(h)$ est une solution de (1.1),
- (ii). il existe des entiers positifs $N, d_0, \dots, d_N$ tels que $\sum d_i = m$ et $N + 1$ fonctions $H_0, H_1, \dots, H_N$ tels que pour tout $\xi \in \mathcal{W}(V)$ solution de (1.1), $h \in \mathcal{W}(U)$ est solution de $\Gamma(h) = \xi$ si et seulement si h est solution de

$$\begin{cases} h^0 = H^0(h^1, \dots, h^N, \xi, \dots, \xi^{(L)}) \\ \dot{h}^1 = H^1(h, \dot{h}^2, \dots, \dot{h}^N, \xi, \dots, \xi^{(L)}) \\ \vdots \\ h^{N(N)} = H^N(h, \dot{h}, \dots, h^{(N-1)}, \xi, \dots, \xi^{(L)}) \end{cases} \quad (1.17)$$

où $h^i = (h_{d_0+\dots+d_{i-1}+1}, \dots, h_{d_0+\dots+d_i})$,

- (iii). les m applications $\frac{\partial \Phi}{\partial h_i^{(K)}} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ pour $i \in \{1, \dots, m\}$ ne sont toutes identiquement nulles sur aucun sous-ensemble ouvert de U .

Comme en presque tout point une paramétrisation est régulière 1.2.5 et comme le théorème 1.2.2 nécessite un prolongement du jet $j_\mu(h)$ en un jet $J_K(h)$ il est pratique de définir Φ sur un ouvert de $\mathbb{R}^{m(K+1)}$, mais Φ ne dépend en réalité que des dérivées jusqu'à l'ordre μ_i de h_i , pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$.

Le point (ii) de la définition 1.2.4 porte le même numéro que le point (ii) de la définition 1.2.1 car il l'implique. En effet, pour toute solution $\xi \in \mathcal{W}(V)$, il suffit de fixer $\sum_{i=1}^N i \times d_i$ conditions initiales $(h^1(0), h^2(0), \dot{h}^2(0), \dots, h^N(0), \dots, h^{N(N-1)}(0))$ pour résoudre le système (1.17) et ainsi obtenir un antécédent dans $\mathcal{W}(U)$ de ξ par Γ .

L'information supplémentaire dans le point (ii) de la définition 1.2.4 est la possibilité pour tout $\xi \in \mathcal{W}(V)$ de paramétrer la "fibre" $\Gamma^{-1}(\xi)$ par $\sum_{i=1}^N i \times d_i$ constantes.

Remarque Dans le langage de [12], une paramétrisation régulière définit une submersion de type fini d'une diffiété triviale (ou espace affine trivial) sur la diffiété associée au système.

Dans la suite, nous omettrons souvent l'épithète *régulière* d'une paramétrisation, mais la paramétrisation qui sera considérée sera toujours régulière au point où elle sera étudiée.

La discussion précédente se résume par la proposition suivante

Proposition 1.2.5 Si (1.1) admet une paramétrisation d'ordre μ sur un ouvert V , alors (1.1) admet en presque tout point de V une paramétrisation régulière d'ordre μ .

Preuve du théorème 1.2.2 : Tout d'abord, nous allons utiliser les remarques de la partie 1.1.2 pour écrire le système (1.1) sous forme de système de contrôle (1.2), i.e., supposer que $\xi = (x, u)$ et $F(\xi, \dot{\xi}) = \dot{x} - f(x, u)$, où $x \in \mathbb{R}^n$ et $u \in \mathbb{R}^m$. Dans cette partie, nous avons en effet remarqué que l'on pouvait passer d'un système (1.1) à un système de contrôle et inversement de façon explicite. Considérons un ouvert connexe U de $\mathbb{R}^{|\mu|+m}$ et une application analytique réelle $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ vérifiant le point (i) de la définition 1.2.1. Comme l'on devra se servir des dérivées de tous les h_i jusqu'à l'ordre K , on considère et on appelle par le même nom l'application analytique $\Phi : U \times \mathbb{R}^{Km-|\mu|} \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ qui ne dépend que de ses arguments éléments de U avec $K = \max\{\mu_i\}$. On a alors les relations

$$\begin{cases} x_i = \Phi_i(h, \dot{h}, \dots, h^{(K)}), & 1 \leq i \leq n \\ u_i = \Phi_{i+n}(h, \dot{h}, \dots, h^{(K)}), & 1 \leq i \leq m. \end{cases} \quad (1.18)$$

On étudie d'abord la première étape du procédé (étape 0).

Φ étant analytique sur $U \times \mathbb{R}^{Km-|\mu|}$, le rang de la jacobienne $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial h_i^{(K)}} \right)_{i=1, \dots, m}$ est constant sauf peut-être sur un sous-ensemble fermé d'intérieur vide. On considère alors deux entiers q_0 et p_0 les rangs respectifs de $\left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial h_i^{(K)}} \right)_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$ et de $\left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial h_i^{(K)}} \right)_{\substack{i=n+1, \dots, n+m \\ j=1, \dots, n}}$. Soit M_0 une mineure $((p_0 + q_0) \times (p_0 + q_0))$ de cette jacobienne de rang génériquement plein et Z_0 le fermé d'intérieur vide sur lequel le déterminant de M_0 est nul.

Quitte à permuter les indices de x, u et de h , on considère que cette mineure $M_0(h, \dots, h^{(K)})$ est celle définie par les dérivées partielles des Φ_i pour $i \in \{1, \dots, q_0, n+1, \dots, n+p_0\}$ par rapport aux variables $h_1, \dots, h_{p_0+q_0}$. On applique alors le lemme 0.2.1 avec pour Γ l'application

$$(h, \dots, h^{(K)}) \mapsto (h, \dots, h^{(K-1)}, h_{p_0+q_0+1}^{(K)}, \dots, h_m^{(K)}, x_1, \dots, x_{q_0}, u_1, \dots, u_{p_0}),$$

$h, \dots, h^{(K-1)}$ pour le x du lemme, $h^{(K)}$ pour le y du lemme et $p_0 + q_0$ pour le q' du lemme et on obtient :

$$\begin{cases} h_i^{(K)} = \Psi_i(h, \dots, h^{(K-1)}, h_{p_0+q_0+1}^{(K)}, \dots, h_m^{(K)}, x_1, \dots, x_{q_0}, u_1, \dots, u_{p_0}), & 1 \leq i \leq p_0 + q_0 \\ \tilde{\Phi}_{i,0}(h, \dots, h^{(K-1)}, x_1, \dots, x_{q_0}, u_1, \dots, u_{p_0}) = x_i, & q_0 + 1 \leq i \leq n \\ \tilde{\Phi}_{i+n,0}(h, \dots, h^{(K-1)}, x_1, \dots, x_{q_0}, u_1, \dots, u_{p_0}) = u_i, & p_0 + 1 \leq i \leq m. \end{cases} \quad (1.19)$$

$$h, \dots, h^{(K-1)}, h_{p_0+q_0+1}^{(K)}, \dots, h_m^{(K)}, x_1, \dots, x_{q_0}, u_1, \dots, u_{p_0}.$$

Le premier indice de $\tilde{\Phi}$ correspond aux indices de (1.18) et le deuxième indice est l'indice d'étape, ici zéro. Les Ψ_i correspondent aux fonctions G_i du lemme et les $\tilde{\Phi}_i$ les fonctions H_i .

Soit $\delta_0 = m - p_0$. Si le rang de $\left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_{i,0}}{\partial h^{(k)}} \right)_{\substack{i \in \{q_0+1, \dots, n, n+p_0+1, \dots, n+m\} \\ k \in \{0, \dots, K-1\}}}$ est strictement inférieur à $\delta_0 + n - q_0$, alors il existe une relation non triviale $S(x, u) = 0$. Or par tout point (x_0, u_0) passe une solution de $\dot{x} = f(x, u)$, notamment en un point ne vérifiant pas $S(x_0, u_0) = 0$, les relations sont donc indépendantes. On est donc dans le cas (ii) du théorème.

Sinon, pour collecter les relations (1.19) et les suivantes définies au cours de l'algorithme, on définit Π_0 par :

$$\Pi_0 = (\tilde{\Phi}_{q_0+1,0} - x_{q_0+1}, \dots, \tilde{\Phi}_{n,0} - x_n, \tilde{\Phi}_{n+p_0+1,0} - u_{p_0+1}, \dots, \tilde{\Phi}_{n+m,0} - u_m)$$

et on termine ainsi l'étape 0.

Étape $j \in \mathbb{N}$.

A la fin de l'étape $j - 1$ on a des entiers δ_{j-1} et p_{j-1} et on a défini des fonctions Ψ_i , pour $1 \leq i \leq q_0 + m - \delta_{j-1}$ qui définissent $\Delta_{j-1} = (\Psi_1, \dots, \Psi_{q_0+m-\delta_{j-1}})$ et une application Π_{j-1} :

$$\Pi_{j-1} = \left(\Pi_{j-2}, (\tilde{\Phi}_{i,j-1} - u_i^{j-1})_{1+m-\delta_{j-1} \leq i \leq m} \right), \quad (1.20)$$

pour $j \geq 2$, Π_0 étant déjà construite explicitement. Alors, (1.1) est équivalent à :

$$\begin{cases} \Pi_{j-1}(h, \dots, h^{(K-1)}, x, u, \dots, u^{(j-1)}) = 0 \\ h_i^{(K)} = \Psi_i(h, \dots, h^{(K-1)}, h_{1+q_0+m-\delta_{j-1}}^{(K)}, \dots, h_m^{(K)}, x, u, \dots, u^{(j-1)}). \end{cases} \quad (1.21)$$

On dérive par rapport au temps les équations $\tilde{\Phi}_{i,j-1} = u_i^{(j-1)}$, d'ordre de dérivation $K - 1$ en h , on fait ainsi réapparaître les variables $h_i^{(K)}$.

Δ_{j-1} nous donne les expressions de certains $h_i^{(K)}$ que l'on réinjecte alors dans les dérivées des $\tilde{\Phi}_{i,j-1}$ pour obtenir de nouvelles équations en utilisant $\dot{x} = f(x, u)$ pour exprimer $\dot{x}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{i,j-1}(h, \dots, h^{(K-1)}, h_{1+q_0+m-\delta_{(j-1)}}^{(K)}, \dots, h_m^{(K)}, x, u, \dots, u^{(j-1)}, u_1^{(j)}, \dots, u_{m-\delta_{(j-1)}}^{(j)}) \\ = u_i^{(j)}, \quad 1 + m - \delta_{j-1} \leq i \leq m, \end{aligned} \quad (1.22)$$

On appelle p_j le rang de $\left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_{i,j-1}}{\partial h_k^{(K)}} \right)_{\substack{1+m-\delta_{j-1} \leq i \leq m \\ 1+q_0+m-\delta_{j-1} \leq k \leq m}}$.

On définit $\delta_j = \delta_{j-1} - p_j$ et on considère, quitte à permuter des variables, la mineure $M_j(h, \dots, h^{(K+j)})$ formée des p_j lignes et colonnes correspondant aux dérivées partielles de $\tilde{\Phi}_{i,j-1}$ pour $i \in \{1 + m - \delta_{j-1}, \dots, m - \delta_j\}$ par rapport aux variables $h_i^{(K)}$ pour $i \in \{1 + q_0 + m - \delta_{j-1}, \dots, m - \delta_j\}$. M_j est ici considérée comme une fonction de h et de ses dérivées seulement en remplaçant dans $\tilde{\Phi}_{i,j-1}$ les variables x, u et les dérivées de u par leur expression en fonction de h et de ses dérivées issue de (1.18) et de ses conséquences différentielles. On appelle alors Z_j , fermé d'intérieur vide, le lieu où le déterminant de M_j s'annule et on se place en dehors de ce fermé. Comme pour l'étape 0, on applique le lemme 0.2.1 avec pour fonction Γ :

$$\begin{aligned} (h, \dots, h^{(K-1)}, h_{1+q_0+m-\delta_{(j-1)}}^{(K)}, \dots, h_m^{(K)}, x, u, \dot{u}, \dots, u^{(j-1)}, u_1^{(j)}, \dots, u_{m-\delta_{(j-1)}}^{(j)}) \\ \mapsto (h, \dots, h^{(K-1)}, h_{1+q_0+m-\delta_j}^{(K)}, \dots, h_m^{(K)}, x, u, \dot{u}, \dots, u^{(j-1)}, u_1^{(j)}, \dots, u_{m-\delta_j}^{(j)}) \end{aligned}$$

et obtenir :

$$\begin{aligned} h_i^{(K)} &= \Psi_i(h, \dots, h^{(K-1)}, h_{1+q_0+m-\delta_j}^{(K)}, \dots, h_m^{(K)}, x, u, \dots, u^{(j-1)}, u_1^{(j)}, \dots, u_{m-\delta_j}^{(j)}), \\ &\quad 1 + q_0 + m - \delta_{j-1} \leq i \leq q_0 + m - \delta_j, \\ \tilde{\Phi}_{i,j}(h, \dots, h^{(K-1)}, x, u, \dots, u_1^{(j)}, \dots, u_{m-\delta_j}^{(j)}) &= u_i^{(j)}, \quad 1 + m - \delta_j \leq i \leq m. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Si le rang de $\left(\frac{\partial \Pi_{j-1}}{\partial h^{(k)}}, \frac{\partial \tilde{\Phi}_{i,j}}{\partial h^{(k)}} \right)_{\substack{i \in \{1+m-\delta_j, \dots, m\} \\ k \in \{0, \dots, K-1\}}}$ est strictement inférieur à $\sum_{l=0}^j \delta_l + n - q_0$, alors

il existe une relation non triviale $S(x, u, \dots, u^{(j)}) = 0$. Or, par tout jet $(x_0, u_0, \dots, u_0^{(j)})$ passe une solution de $\dot{x} = f(x, u)$ et donc aussi en un jet n'annulant pas S . S est donc indépendante de $\dot{x} = f(x, u)$ et on est dans le point (ii) de la proposition.

Sinon, on définit $\Pi_j = (\Pi_{j-1}, (\tilde{\Phi}_{i,j})_{i \in \{1+m-\delta_j, \dots, m\}} - u_i^{(j)})$ et on termine ainsi l'étape j .

Le procédé s'arrête à l'étape L soit lorsqu'on a une relation $S(x, u, \dots, u^{(L)}) = 0$ indépendante de $\dot{x} = f(x, u)$, soit lorsque $\delta_L = 0$.

Dans le premier cas, on obtient le point (ii) du théorème.

Dans le deuxième cas, le rang de $(\frac{\partial \Pi_L}{\partial h^{(k)}})_{k \in \{0, \dots, K-1\}}$ est exactement $n - q_0 + \sum_{l=0}^L \delta_l$ et Π_L est une fonction des variables $h, \dots, h^{(K-1)}, x, u, \dots, u^{(L)}$. On peut remarquer que $q_0 = 0$ dans ce cas là. On applique le lemme 0.2.1 avec $h, \dots, h^{(K-2)}$ pour le x du lemme, $h^{(K-1)}$ pour y , une partie des $u_i^{(j)}$ pour z et les x_i et le reste des $u_i^{(j)}$ pour la variable ζ . On obtient alors des relations exprimant certains $h_i^{(K-1)}$ en fonction des $h, \dots, h^{(K-2)}$, de x et d'une partie des $u_i^{(j)}$. On extrait aussi en utilisant ce même lemme de façon itérative une partie des $h_i^{(K-2)}$ puis des $h_i^{(K-3)}$... On obtient ainsi une collection de relations exprimant certains $h_i^{(j)}$, appelons I_j l'ensemble des indices des $h_i^{(j)}$ ainsi obtenus. Pour le j le plus petit, appelons-le j_0 , on dérive les $h_i^{(j_0)}$ par rapport à t . On va alors substituer dans les formules obtenues précédemment les $h_i^{(j_0+1)}$ pour $i \in I_{j_0}$ et ainsi obtenir de nouvelles expressions des $h_i^{(j_0+1)}$ pour $i \in I_{j_0} \cup I_{j_0+1}$. Cependant, la substitution peut amener des relations triviales que l'on élimine. On itère jusqu'à l'ordre K ce procédé en dérivant les $h_i^{(j_0+1)}$ pour $i \in I_{j_0} \cup I_{j_0+1}$ et en substituant les expressions de ces dérivées dans les $h_i^{(j_0+2)}$ pour $i \in I_{j_0+2}$. On obtient bien alors les fonctions $H^0, \dots, H^N$ de (1.14) et on prend $Z = \bigcup_{i=0}^L Z_i$ ■

1.3 Platitude

1.3.1 Définition

La notion de platitude d'un système a été introduite par Michel Fliess, Jean Lévine, Philippe Martin et Pierre Rouchon, cf. [11, 13] pour les corps différentiels et [12] pour le cadre analytique ou $\mathcal{C}^\infty$.

La platitude est l'existence d'une sortie plate, i.e. un m -uplet de fonctions des variables du système et de leurs dérivées telles que

- (i). Les équations du système n'entraînent aucune relation différentielle entre les m fonctions qui constituent la sortie plate.
- (ii). Toutes les variables du système peuvent, réciproquement, être exprimées à l'aide des composantes de la sortie plate et de leurs dérivées.

Le point (i) exprime le fait que ces fonctions formant la sortie plate sont arbitraires.

Bien que l'accent soit plutôt mis sur la platitude dans [12], on y trouve aussi l'équivalent de la *paramétrisation régulière* définie à la section précédente (voir la remarque après la définition 1.2.4). Sans préciser le sens de chaque mot, l'existence d'une paramétrisation régulière coïncide avec l'existence d'une transformation par retour d'état dynamique exogène linéarisante, et

la platitude peut être vue comme l’existence d’une transformation par retour d’état dynamique *endogène* linéarisant. Suivant cette terminologie, on pourrait ici appeler endogène une paramétrisation régulière avec $N = 0$ donc à l’unicité de h pour une solution ξ donnée sans avoir à intégrer de système différentiel (h est donnée directement en fonction de ξ et des ses dérivées jusqu’à un certain ordre) puisque les équations (1.17) deviennent simplement

$$t \mapsto h(t) = H_0(\xi(t), \dots, \xi^{(L)}(t)). \quad (1.24)$$

On peut alors exprimer toutes les variables qui interviennent dans la paramétrisation, d’où le qualificatif d’endogène (si $N \geq 1$, on ne peut pas se passer de variables “exogènes” pour écrire la paramétrisation). Ainsi, on adopte, pour un système de plat, la définition suivante :

Définition 1.3.1 *Le système (1.1) est plat en un point $(\xi(0), \dot{\xi}(0), \dots, \xi^{(\nu)}(0)) \in \mathbb{R}^{(\nu+1)n}$ s’il est paramétrable au sens de la définition 1.2.4 avec $N = 0$. H^0 est appelée la sortie plate.*

Évidemment, l’existence de sorties plates entraîne l’existence d’une paramétrisation. La réciproque reste à notre connaissance une conjecture.

Remarque *Un système $\dot{x} = f(x, u)$ à n états et n contrôles est plat si et seulement si le rang de $\frac{\partial f}{\partial u}$ est constant égal à n . En effet, un tel système est équivalent au système $\dot{x} = u$.*

1.3.2 Approche algébrique

Nous allons maintenant donner une vision plus algébrique de la notion de la platitude à l’aide de la proposition 1.3.2, cette fois pour le système (1.2) par commodité.

Proposition 1.3.2 *Un système (1.2) est plat au sens donné dans la définition 1.3.1 si et seulement si il existe des éléments $\chi_1, \dots, \chi_m$ de $\mathcal{A}$ tels que $\{d\chi_1, \dots, d\chi_m\}$ soit une base de $\Lambda^1(\mathcal{A})$, en tant que $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$ -module.*

Notons que, d’après cette proposition, il est évident que la liberté du $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$ -module $\Lambda^1(\mathcal{A})$ est une condition *nécessaire* pour la platitude de (1.2).

Preuve : Sens direct.

Considérons le système (1.2) en un point où il est plat au sens de la définition 1.3.1. Alors toute solution (x, u) s’écrit de manière unique à l’aide d’une paramétrisation Φ , d’une fonction arbitraire du temps $h = (h_1, \dots, h_m)$ et de ses dérivées temporelles par une formule :

$$(x, u) = \Phi(h, \dot{h}, \dots, h^{(\mu)}) \quad (1.25)$$

Ainsi $dx, du, d\dot{u}, \dots$ s'écrivent de manière unique en fonction de dh et des différentielles des dérivées temporelles de h . Comme il existe χ telle que $h = \chi(x, \dots, x^{(J)})$ pour tout x solution de (1.2), en remplaçant $\dot{x}$ par $f(x, u)$ on obtient bien que les χ_i sont dans $\mathcal{A}$. $d\chi$ est alors une base de $\Lambda^1(\mathcal{A})$ en tant que $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$ -module.

Sens réciproque.

On considère $\chi = (\chi_1, \dots, \chi_m)$ éléments de $\mathcal{A}$ tels que $\{d\chi_1, \dots, d\chi_m\}$ soit une base de $\Lambda^1(\mathcal{A})$, en tant que $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$ -module. Les χ_i et leurs dérivées sont indépendants donc il existe deux entiers J et L et un difféomorphisme entre d'une part $x, u, \dots, u^{(J)}$ et d'autre part $\chi, \dot{\chi}, \dots, \chi^{(L)}$ et certains x_i et certaines dérivées de certains u_i . x et u s'écrivent alors de manière unique en fonction des χ_i et de leurs dérivées jusqu'à un certain plus a priori certains x_i et certains u_i et des dérivées de certains u_i . Or, les $d\chi_i$ forment une base de $\Lambda^1(\mathcal{A})$, donc dx et du s'expriment uniquement en fonction des $d\chi_i$. Donc, x et u s'expriment uniquement en fonction des χ et de leurs dérivées jusqu'à un certain ordre ■

La proposition suivante est la Proposition 3 de [1, §4] (où on utilise des fonctions C^∞ plutôt que des séries, et par "linearizing Pfaffian system", il faut entendre base de $\Lambda^1(\mathcal{A})$). On note par $\bullet$ la version matricielle de la loi "externe" décrite à la section 1.1.4, qui consiste donc à appliquer les opérateurs différentiels qui constituent la matrice P aux éléments du vecteur colonne Ω , qui sont des formes.

Proposition 1.1 *Soit Ω une base de $\Lambda^1(\mathcal{A})$, supposé libre. Le système (1.2) est plat si et seulement si il existe $P \in \mathcal{A}[\frac{d}{dt}]^{m \times m}$ inversible dans $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]^{m \times m}$ et tel que*

$$d(P \bullet \Omega) = 0. \quad (1.26)$$

Le démonstration de ceci tient dans le fait qu'étant donnée une base de $\Lambda^1(\mathcal{A})$, on obtient toutes les autres en lui appliquant tous les opérateurs inversibles P .

1.4 Les transformations

Les transformations suivantes vont préserver l'existence d'une paramétrisation pour un système.

1.4.1 Changement de coordonnées

Bien sûr, un *changement de coordonnées*, c'est-à-dire un difféomorphisme ϕ d'un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ à valeur dans $\mathbb{R}^n$

$$z \mapsto x = \phi(z) \quad (1.27)$$

définie au voisinage d'un point z_0 induit des transformations naturelles sur les systèmes. Il transforme le système (1.2) en $\dot{z} = \tilde{f}(z, u)$ où $\frac{\partial \phi}{\partial z}(z) \tilde{f}(z, u) = f(\phi(z), u)$.

1.4.2 Transformation par retour d'état statique

On peut définir une *transformation par retour d'état statique non singulière* pour le système (1.2) comme une application analytique réelle β d'un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ à valeur dans $\mathbb{R}^m$

$$(x, v) \mapsto u = \beta(x, v), \quad (1.28)$$

définie au voisinage d'un point (x_0, u_0) telle que

$$\frac{\partial \beta}{\partial v}(x_0, u_0) \text{ est inversible.} \quad (1.29)$$

Cette application transforme le système (1.2) en $\dot{x} = \tilde{f}(x, v) \triangleq f(x, \beta(x, v))$.

On peut désormais définir les systèmes réglés.

Définition 1.4.1 *Le système (1.2) est un système réglé au voisinage de zéro si et seulement si il existe une transformation par retour d'état statique non singulière $(u_1, u_2) = \beta(\xi, s, \lambda)$ analytique réelle où u_1 et s sont dans $\mathbb{R}^{m-1}$ et u_2 et λ sont dans $\mathbb{R}$, définie au voisinage de zéro, avec $\beta(0, 0, 0) = (0, 0)$ (voir (1.28)), qui transforme le système en*

$$\dot{\xi} = c(\xi, s) + \lambda X(\xi, s) \quad (1.30)$$

où c et X sont analytiques réelles à valeur dans $\mathbb{R}^n$.

Remarque On notera que si le système (1.2) est réglé et si le rang de $(\frac{\partial f}{\partial u_i}(0))_{i=1..m}$ est constant égal à m , alors $X(0, 0) \neq 0$ dans (1.30).

1.4.3 Transformation par retour d'état dynamique

Définition 1.4.2 *Une transformation par retour d'état dynamique non singulière pour le système (1.2) est un ensemble de deux applications analytiques réelles $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{T}$ d'un ouvert connexe*

de $\mathbb{R}^{m(d_s+1)+n}$ et d'un ouvert connexe de $\mathbb{R}^{m(d_t+1)+n}$ respectivement vers $\mathbb{R}^n$ pour deux entiers d_s et d_t

$$\begin{aligned}(x, u) &= \mathfrak{S}(z, v, \dot{v}, \dots, v^{(d_s)}) \\ (z, v) &= \mathfrak{T}(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(d_t)})\end{aligned}\tag{1.31}$$

telles qu'il existe g analytique réelle d'un ouvert connexe de $\mathbb{R}^{n+m}$ à valeur dans $\mathbb{R}^n$ définissant un système différentiel $\dot{z} = g(z, v)$ où (z, v) vérifie cette relation si et seulement si (z, v) est l'image par $\mathfrak{T}$ d'une solution (x, u) de (1.2). Inversement, on demande que $\dot{x} = f(x, u)$ si et seulement si (x, u) est l'image par $\mathfrak{S}$ d'une solution (z, v) de $\dot{z} = g(z, v)$.

Remarque Si le rang de $\frac{\partial f}{\partial u}$ est maximal, alors il suffit d'avoir z en fonction de $x, u, \dot{u}, \dots, u^{(d_t)}$ (réciproquement x en fonction de $z, v, \dot{v}, \dots, v^{(d_s)}$) car v est une fonction de z et $\dot{z}$ déterminée par inversion locale (réciproquement u est une fonction de x et $\dot{x}$).

Dans [42], Philippe Martin définit, dans le cadre analytique, l'équivalence dynamique de deux systèmes de la même façon.

1.5 Contrôlabilité

Pour un système de contrôle (1.2) la contrôlabilité caractérise, en gros, la possibilité d'influencer les trajectoires du système simplement par un choix approprié des variables de contrôles $u_1, \dots, u_m$ au cours du temps. Il y a une vaste littérature sur le sujet qui est par exemple référencée dans les manuels classiques [21, 45, 64, 68] ; donnons simplement les notions qui nous intéressent dans le cadre de cette étude.

Un cas évident de système non contrôlable est un système sans contrôle ($m = 0$), i.e. une équation différentielle ordinaire

$$\dot{z} = f(z).\tag{1.32}$$

L'évolution de z est alors entièrement déterminée par sa condition initiale.

De la même façon, un système (1.2) n'est certainement pas contrôlable s'il contient une partie *autonome*, i.e. si certaines coordonnées (ou fonction des coordonnées) vérifie une équation du type (1.32). La définition suivante donne une version de cette notion où on a remplacé l'équation (1.32) par une équation scalaire de plus grand ordre d'une variable différentielle que l'on appellera élément autonome [54].

Définition 1.5.1 On appelle *élément autonome* du système (1.2) une fonction analytique scalaire non triviale de la variable d'état x du système définie sur un ouvert connexe non vide, que

l'on notera $z = \Phi(x)$, qui vérifie une relation non triviale de la forme $\Psi(z, \dot{z}, \dots, z^{(s)}) = 0$ où Ψ est une fonction analytique réelle.

Remarque On aurait pu prendre $z = \Phi(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(r)})$, mais dans ce cas il est assez aisé de voir que la fonction Φ ne dépend pas des variables de contrôle et de leurs dérivées. En effet, considérons s le plus petit entier tel que Ψ dépende réellement de $z^{(s)}$. Comme $z^{(s)}$ dépend linéairement de $u^{(r+s)}$ par le biais du coefficient $\frac{\partial \Phi}{\partial u^{(r)}}$, la relation Ψ fait alors apparaître que $\frac{\partial \Phi}{\partial u^{(r)}} = 0$ sur un ouvert connexe et donc, comme Φ est analytique, Φ ne dépend pas de $u^{(r)}$ sur l'ouvert connexe considéré. Par récurrence décroissante sur r , on montre alors Φ ne dépend pas de u et de ses dérivées.

Exemple. Le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 + 2x_1x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_2^2 - u, \end{cases} \quad (1.33)$$

n'est pas contrôlable. En effet, $z = x_1 + x_2$ vérifie l'équation

$$\dot{z} = z^2. \quad (1.34)$$

On sait classiquement que les éléments autonomes sont des intégrales premières de la distribution d'accessibilité forte du système. Cette construction précise est due à Velimir Jurdjevic et Hector J. Sussmann dans [27] à la suite des travaux de Claude Lobry dans [34]. Reprenons la définition de [45, définition 3.19], mais dans $\mathbb{R}^{n+m}$ (pour rendre le système affine) : dans $\mathbb{R}^{n+m}$ on définit les champs de vecteurs

$$\mathbf{f}(x, u) = \begin{pmatrix} f(x, u) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_i = \frac{\partial}{\partial u_i}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (1.35)$$

L'algèbre d'accessibilité forte $\mathcal{C}_0$ est alors l'algèbre de Lie engendrée par

$$Ad_{\mathbf{f}}^j(\mathbf{g}_i), \quad 1 \leq i \leq m, \quad j \geq 0. \quad (1.36)$$

La distribution d'accessibilité forte $\mathcal{C}_0$ est la distribution engendrée par les champs de vecteurs de cette algèbre. La fonction f étant analytique, $\mathcal{C}_0$ est une algèbre de champs de vecteurs analytiques, le rang de $\mathcal{C}_0$ est donc constant presque partout.

Si $\mathcal{C}_0$ est de co-rang strictement positif, alors il existe des éléments autonomes autour de presque tout point. On verra dans ce qui suit (Proposition 1.5.2) que ces éléments autonomes sont une obstruction à l'existence d'une paramétrisation.

Cependant, si ce co-rang est nul presque partout, alors le système possède la propriété d'accessibilité forte autour de tout point où il est nul effectivement. Le sous-ensemble analytique sur lequel le rang de $\mathcal{C}_0$ chute est invariant, i.e. toute trajectoire issue d'un point de cet ensemble reste dans cet ensemble. On ne s'intéresse qu'aux points où le rang de $\mathcal{C}_0$ est maximum.

La condition d'accessibilité forte implique que le linéarisé du système est contrôlable autour de presque tout jet (d'ordre suffisamment élevé) [9, 63]. En terme d'algèbre différentielle (voir Section 1.1.4), cette condition se traduit par la liberté du $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$ -module des différentielles $\Lambda^1(\mathcal{A})$.

En outre, pour être paramétrable, un système doit être fortement accessible comme nous le montre la proposition suivante.

Proposition 1.5.2 *Si le système (1.1) a un élément autonome z vérifiant la relation $\Psi(z, \dot{z}, \dots, z^{(s)}) = 0$, alors le système n'est pas paramétrable.*

Preuve : On considère le système (1.1) doté de l'élément autonome z qui vérifie la relation $\Psi(z, \dot{z}, \dots, z^{(s)}) = 0$. Supposons l'existence d'une paramétrisation telle que $z = \phi(h, \dots, h^{(\mu)})$. En remplaçant z par son expression en h dans Ψ on obtient une relation faisant intervenir les $h_i^{(\mu_i+s)}$ en tant que différentielles de h à l'ordre le plus grand. Cette relation est non triviale si Ψ ne l'est pas, ce qui contredit le caractère arbitraire de h ■

1.6 Bref état de l'art

Comme présenté dans l'introduction de cette thèse, l'article de P. Zervos dans [70] fait un historique très complet de ce que l'on appelle "problème de Monge". Des travaux de E. Cartan [5], D. Hilbert [18], E. Goursat [16], pour n'en citer que quelques-uns y sont détaillés. Cet article a été étudié par M. Janet dans [24] en 1971.

Dans l'article de Hilbert, dont une traduction en anglais est proposée en annexe B, l'auteur montre l'impossibilité de paramétrer une certaine classe de systèmes. Ces résultats ont été exploités par Pierre Rouchon pour développer la condition nécessaire portant sur les systèmes réglés (voir ci-dessous). L'approche de David Hilbert nous a aussi permis de développer les résultats qui sont présentés dans le chapitre suivant 2.

Les résultats de Cartan ont permis de déterminer un critère pour la paramétrisation des systèmes affines à 2 contrôles (voir ci-dessous).

De nombreux articles que nous ne pouvons tous citer montrent que certains systèmes spécifiques sont plats. Ces applications peuvent concerner la robotique [28, 33], l'aéronautique

[43, 37], les moteurs électriques [36, 41, 40, 61, 71] et le génie chimique [48, 56, 55, 57, 59, 60] pour n'en citer que quelques uns. Cependant, s'il suffit de trouver une paramétrisation pour montrer qu'un système est paramétrable, tâche qui peut bien entendue se révéler ardue, il est très différent de montrer qu'un système est non paramétrable. Pour cela, il faut étudier les propriétés de systèmes paramétrés généraux et les contraintes qu'imposent la possibilité de paramétrer un système. Énonçons quelques-uns de ces résultats qui vont nous servir par la suite.

Systèmes affines à deux contrôles Le système

$$\dot{x} = f_1(x)u_1 + f_2(x)u_2 \quad (1.37)$$

est plat si et seulement si le rang générique de E_k est égal à $k + 2$ pour $k \in \{0, \dots, n - 2\}$ où $E_0 = \text{span}\{f_1, f_2\}$, $E_{k+1} = \text{span}\{E_k, [E_k, E_k]\}$, $k \geq 0$. Ce résultat a été démontré par P. Martin et P. Rouchon dans [39].

Systèmes à un contrôle. Lorsque $m = 1$, le système (1.2) est plat si et seulement si il est linéarisable par un retour d'état statique [7]. On peut alors caractériser les systèmes plats par des tests [22, 19].

Systèmes affines de codimension 1. Lorsque $m = n - 1$ un système affine (voir définition 1.1.2) est plat si et seulement si il est contrôlable (fortement accessible, voir 1.5) [7].

Condition nécessaire. Depuis [58, 62] on sait qu'un système doit être réglé (*cf.* définition 1.4.1) pour être plat .

Chapitre 2

Paramétrisation des systèmes différentiels de dimension 3 avec 2 contrôles

Contenu du chapitre

2.1	Condition nécessaire : contrôlabilité	37
2.2	Condition nécessaire : systèmes réglés	38
2.3	Rappel de résultats connus	40
2.3.1	Forme normale	42
2.3.2	Étude de certains systèmes sous forme normale	44
2.4	Résultats nouveaux	46
2.4.1	Un système d'équations aux dérivées partielles	46
2.4.2	Condition suffisante	48
2.4.3	Conditions nécessaires	49
2.4.4	Conclusion	52

Soit le système de contrôle général (1.2) que l'on redonne ici pour se rafraîchir la mémoire :

$$\dot{\xi} = \tilde{f}(\xi, u) \quad (2.1)$$

où $\xi \in \mathbb{R}^n$ et $u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m$ et $\tilde{f}$ est une fonction analytique réelle.

On a vu à la fin du chapitre précédent que le problème de paramétrisation est résolu pour ce système lorsque $m = 1$ ou $n = m$, sachant que par hypothèse $m \leq n$. Les plus petites dimensions pour lesquelles le problème reste ouvert sont $n = 3$ et $m = 2$. L'objet du chapitre est donc de déterminer les conditions nécessaires et suffisantes portant sur la fonction $\tilde{f}$ pour paramétrer au sens de 1.2.4 l'ensemble des solutions du système ci-dessus pour ces valeurs de m et n . Notre étude est locale autour d'un point $(\xi_0, u_0) = (0, 0)$. On suppose que

$$\text{Rang} \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u_1}(0), \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u_2}(0) \right) = 2. \quad (2.2)$$

Si ce rang était constant égal à 1 (zéro respectivement), on pourrait se ramener à un système équivalent (en termes de solutions) à un (zéro respectivement) contrôle. cf section 1.1.2. Les points où les rangs chutent sont des singularités que nous n'étudierons pas.

On donnera des résultats globaux "génériques". L'aspect "générique" évitera une étude portant sur les singularités qui apparaîtront au fil des résultats. Cependant, si les résultats ne portent pas sur les lieux de singularité, l'étude ne masquera pas leur existence. Ces singularités seront regroupées dans un même ensemble fermé d'intérieur vide, ce qui en justifie la dénomination.

Écrivons (2.1) dans des coordonnées x, y, z . Quitte à permuter x, y, z de telle manière que le rang 2 dans (2.2) provienne des deux premières coordonnées, on peut en appliquant le théorème des fonctions implicites aux deux premières lignes de (1.2) exprimer u_1 et u_2 en fonction de $x, y, z, \dot{x}$ et $\dot{y}$ et les reporter dans l'expression de $\dot{z}$. Le système ci-dessus est donc équivalent à la seule équation :

$$\dot{z} = f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}) \quad (2.3)$$

où f est une fonction analytique réelle de cinq variables scalaires qui sera étudiée de préférence à $\tilde{f}$.

Rappelons la définition de paramétrisation, cette fois adaptée au système (2.3) où, pour éviter d'utiliser des indices pour nos variables, nous considérons u et v à la place de h_1 et h_2 , x, y, z à la place de x_1, x_2, x_3 et k, ℓ à la place de μ_1 et μ_2 . Nous espérons qu'en rappelant la définition avec ces notations, nous clarifierons la lecture des résultats.

Une *paramétrisation d'ordre* (k, ℓ) , $k \leq \ell$ du système (2.3) en un jet $(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dots, x_0^{(\nu)}, y_0^{(\nu)})$ de $\mathbb{R}^{2\nu+3}$ est définie par un voisinage V de ce jet dans $\mathbb{R}^{2\nu+3}$, un sous-ensemble ouvert U de $\mathbb{R}^{k+\ell+2}$ et une application *analytique réelle* $\Phi = (\varphi, \psi, \chi)$ de U dans $\mathbb{R}^3$ tels que, en appelant Γ l'application $\mathcal{W}(U) \rightarrow \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ qui assigne à tout $(u, v) \in \mathcal{W}(U)$ le germe à $t = 0$ de l'application $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ suivante :

$$t \mapsto (x(t), y(t), z(t)) = \Phi(u(t), v(t), \dot{u}(t), \dot{v}(t), \dots, u^{(k)}(t), v^{(\ell)}(t)), \quad (2.4)$$

les trois propriétés suivantes sont vérifiées :

- (i). pour tout $(u, v) \in \mathcal{W}(U)$, $\Gamma(u, v)$ est une solution de (2.3),
- (ii). il existe deux entiers $i_0 \leq k$ et $j_0 \leq \ell$ et deux applications analytiques réelles U^0 et V^0 tels que pour tout $(x, y, z) \in \mathcal{W}(V)$ solution de (2.3), $(u, v) \in \mathcal{W}(U)$ est solution de $\Gamma(u, v) = (x, y, z)$ si et seulement si (u, v) est solution de

$$\begin{cases} u^{(i_0)} = U^{i_0}(u, \dots, u^{(i_0-1)}, v, \dots, v^{(i_0)}, x, y, \dots, x^{(L)}, y^{(L)}, z) \\ v^{(j_0)} = V^{j_0}(u, \dots, u^{(j_0)}, v, \dots, v^{(j_0-1)}, x, y, \dots, x^{(L)}, y^{(L)}, z). \end{cases} \quad (2.5)$$

- (iii). l'une au moins des application $\frac{\partial \varphi}{\partial w}, \frac{\partial \psi}{\partial w}, \frac{\partial \chi}{\partial w} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ pour $w \in \{u^{(k)}, v^{(\ell)}\}$ est non nulle.

2.1 Condition nécessaire : contrôlabilité

On a vu, avec la proposition 1.5.2, que l'existence d'un élément autonome rend un système non paramétrable. Le rang de la distribution d'accessibilité forte doit donc être maximal (voir section 1.5 avec $\mathbf{g}_1 = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}, \mathbf{g}_2 = \frac{\partial}{\partial \dot{y}}$ et $\mathbf{f} = \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial}{\partial y} + f \frac{\partial}{\partial z}$). Or,

$$\begin{aligned} [\mathbf{f}, \mathbf{g}_1] &= -\frac{\partial}{\partial x} - f \dot{x} \frac{\partial}{\partial z} \\ [\mathbf{f}, \mathbf{g}_2] &= -\frac{\partial}{\partial y} - f \dot{y} \frac{\partial}{\partial z} \\ [\mathbf{f}, [\mathbf{f}, \mathbf{g}_1]] &= (f_x + \dot{x} f_z - f f_{z\dot{x}} - \dot{y} f_{y\dot{x}} - \dot{x} f_{x\dot{x}}) \frac{\partial}{\partial z} \\ [\mathbf{f}, [\mathbf{f}, \mathbf{g}_2]] &= (f_y + \dot{y} f_z - f f_{z\dot{y}} - \dot{x} f_{x\dot{y}} - \dot{y} f_{y\dot{y}}) \frac{\partial}{\partial z} \\ [\mathbf{g}_1, [\mathbf{f}, \mathbf{g}_1]] &= -f \dot{x} \dot{x} \frac{\partial}{\partial z} \\ [\mathbf{g}_2, [\mathbf{f}, \mathbf{g}_1]] &= [\mathbf{g}_1, [\mathbf{f}, \mathbf{g}_2]] = -f \dot{y} \dot{x} \frac{\partial}{\partial z} \\ [\mathbf{g}_2, [\mathbf{f}, \mathbf{g}_2]] &= -f \dot{y} \dot{y} \frac{\partial}{\partial z} \\ [[\mathbf{f}, \mathbf{g}_1], [\mathbf{f}, \mathbf{g}_2]] &= (f_{x\dot{y}} + \dot{x} f_{z\dot{y}} - f_{y\dot{x}} - f_{y\dot{x}}) \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Comme $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, [\mathbf{f}, \mathbf{g}_1], [\mathbf{f}, \mathbf{g}_2]$ sont indépendants, le rang est maximal si et seulement si un des six derniers crochet est non nul. Alors, en terme de relation sur la fonction f , l'existence d'un

élément autonome se traduit par

$$\begin{aligned} f_{\dot{x}\dot{x}} &= f_{\dot{x}\dot{y}} = f_{\dot{y}\dot{y}} = f_{xy} + f_{\dot{x}}f_{zy} - f_{y\dot{x}} - f_{\dot{y}}f_{z\dot{x}} \\ &= f_x + f_{\dot{x}}f_z - f_{fz\dot{x}} - \dot{y}f_{y\dot{x}} - \dot{x}f_{x\dot{x}} = f_y + f_{\dot{y}}f_z - f_{fz\dot{y}} - \dot{y}f_{y\dot{y}} - \dot{x}f_{x\dot{y}} = 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

identiquement. Nous nous plaçons donc en un point $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y})$ où

$$\begin{aligned} (f_{\dot{x}\dot{x}}, f_{\dot{x}\dot{y}}, f_{\dot{y}\dot{y}}, f_{xy} + f_{\dot{x}}f_{zy} - f_{y\dot{x}} - f_{\dot{y}}f_{z\dot{x}}, f_x + f_{\dot{x}}f_z - f_{fz\dot{x}} - \dot{y}f_{y\dot{x}} - \dot{x}f_{x\dot{x}}, \\ f_y + f_{\dot{y}}f_z - f_{fz\dot{y}} - \dot{y}f_{y\dot{y}} - \dot{x}f_{x\dot{y}}) \neq (0, 0, 0, 0, 0, 0). \end{aligned} \quad (2.8)$$

2.2 Condition nécessaire : systèmes réglés

Depuis [58, 62], on sait qu'il est nécessaire (en dehors d'un point singulier où c et X (définis dans la définition 1.4.1) ne peuvent être prises lisses) qu'un système soit réglé pour qu'il admette une paramétrisation (voir section 1.6). Exprimons cette condition sur la fonction f .

La construction suivante dépend des coordonnées dans lesquelles on écrit le système (2.3) mais on peut montrer que le résultat lui-même (théorème 2.2.2) n'en dépend pas.

Définissons deux polynômes homogènes de degrés respectifs 2 et 3 de deux variables $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ et à coefficients dépendant de manière analytique du point considéré $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y})$:

$$P_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_{\dot{x}\dot{x}}\mathbf{x}^2 + 2f_{\dot{x}\dot{y}}\mathbf{x}\mathbf{y} + f_{\dot{y}\dot{y}}\mathbf{y}^2, \quad (2.9)$$

$$P_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_{\dot{x}\dot{x}\dot{x}}\mathbf{x}^3 + 3f_{\dot{x}\dot{x}\dot{y}}\mathbf{x}^2\mathbf{y} + 3f_{\dot{x}\dot{y}\dot{y}}\mathbf{x}\mathbf{y}^2 + f_{\dot{y}\dot{y}\dot{y}}\mathbf{y}^3. \quad (2.10)$$

où les arguments $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y})$ des dérivées partielles de f ont été omis et où les notations $P_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ et $P_3(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ sont préférées à $P_2(x, y, z, \dot{x}, \dot{y})(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ et $P_3(x, y, z, \dot{x}, \dot{y})(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Définition 2.2.1 Une direction nulle d'un polynôme homogène P en les deux variables $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ est un couple $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq (0, 0)$ tel que $P(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.

On parle de direction nulle car $P(\lambda\mathbf{x}, \lambda\mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow P(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ pour tout $\lambda \neq 0$.

Considérons l'application analytique réelle R de $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y})$ qui donne pour tout $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y})$ le résultant de P_2 et de P_3 et l'application Δ , discriminant de P_2 , définies par :

$$\Delta(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}) = f_{\dot{x}\dot{x}}f_{\dot{y}\dot{y}} - f_{\dot{x}\dot{y}}^2, \quad (2.11)$$

$$R(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}) = \begin{vmatrix} f_{\dot{x}\dot{x}} & 2f_{\dot{x}\dot{y}} & f_{\dot{y}\dot{y}} & 0 & 0 \\ 0 & f_{\dot{x}\dot{x}} & 2f_{\dot{x}\dot{y}} & f_{\dot{y}\dot{y}} & 0 \\ 0 & 0 & f_{\dot{x}\dot{x}} & 2f_{\dot{x}\dot{y}} & f_{\dot{y}\dot{y}} \\ f_{\dot{x}\dot{x}\dot{x}} & 3f_{\dot{x}\dot{x}\dot{y}} & 3f_{\dot{x}\dot{y}\dot{y}} & f_{\dot{y}\dot{y}\dot{y}} & 0 \\ 0 & f_{\dot{x}\dot{x}\dot{x}} & 3f_{\dot{x}\dot{x}\dot{y}} & 3f_{\dot{x}\dot{y}\dot{y}} & f_{\dot{y}\dot{y}\dot{y}} \end{vmatrix} \quad (2.12)$$

(les arguments $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y})$ ont été omis dans les membres de droite des ces égalités).

Remarque Rappelons que $R = 0$ si et seulement si P_2 et P_3 ont au moins une direction nulle commune et que $\Delta \geq 0$ si et seulement si les deux directions nulles de P_2 sont réelles (racine double si $\Delta = 0$).

Le théorème suivant est essentiellement une conséquence des résultats de [58, 62]. Nous donnons tout de même une preuve qui illustre bien pourquoi la condition ci-dessous est nécessaire.

Théorème 2.2.2 Si le système (2.3) admet une paramétrisation d'ordre (k, l) en un point $(0, 0, 0, x^{(1)}, y^{(1)}, x^{(2)}, y^{(2)}, \dots, x^{(L)}, y^{(L)})$ de $\mathbb{R}^{3+2L}$, alors $R = 0$ et $\Delta \geq 0$ sur un voisinage de $(0, 0, 0, x^{(1)}, y^{(1)})$.

Preuve : Considérons le système (1.2) avec $n = 3$ et $m = 2$ et supposons qu'il admet un paramétrage (ϕ, ψ, χ) d'ordre (k, l) autour d'un jet $(0, 0, 0, x^{(1)}, y^{(1)}, x^{(2)}, y^{(2)}, \dots, x^{(L)}, y^{(L)})$ dans $\mathbb{R}^{3+2L}$ que l'on note :

$$\begin{cases} x &= \phi(u, \dots, u^{(k)}, v, \dots, v^{(l)}) \\ y &= \psi(u, \dots, u^{(k)}, v, \dots, v^{(l)}) \\ z &= \chi(u, \dots, u^{(k)}, v, \dots, v^{(l)}). \end{cases} \quad (2.13)$$

On choisit (k, l) tels que les dérivées partielles de ϕ , ψ et χ par rapport aux variables $u^{(k)}$ et $v^{(l)}$ ne soient pas toutes identiquement nulles sur un ouvert où la paramétrisation est définie. Considérons de plus qu'elles ne s'annulent pas toutes au point considéré. En effet, si l'on montre le résultat pour tout point où elles ne sont pas toutes nulles, par continuité, on aura $R = 0$ et $\Delta \geq 0$ sur l'ensemble de définition du système.

Les fonctions ϕ , ψ et χ vérifient l'équation du système (2.3), donc

$$\dot{\chi} = f(\phi, \psi, \chi, \dot{\phi}, \dot{\psi}). \quad (2.14)$$

On remarque que cette équation fait intervenir les variables $u^{(k+1)}$ et $v^{(l+1)}$. Dérivons (2.14) par rapport à la variable $u^{(k+1)}$ et indiquons les dérivées partielles par un indice, nous obtenons alors l'équation

$$\chi_{u^{(k)}} = f_{\dot{x}} \phi_{u^{(k)}} + f_{\dot{y}} \psi_{u^{(k)}} \quad (2.15)$$

qui entraîne que $\phi_{u^{(k)}}$ et $\psi_{u^{(k)}}$ ne sont pas toutes les deux nulles. Dérivons encore deux fois cette équation par rapport à la même variable pour obtenir

$$\begin{aligned} 0 &= f_{\dot{x}\dot{x}} \phi_{u^{(k)}}^2 + 2f_{\dot{x}\dot{y}} \phi_{u^{(k)}} \psi_{u^{(k)}} + f_{\dot{y}\dot{y}} \psi_{u^{(k)}}^2 \\ 0 &= f_{\dot{x}\dot{x}\dot{x}} \phi_{u^{(k)}}^3 + 3f_{\dot{x}\dot{x}\dot{y}} \phi_{u^{(k)}}^2 \psi_{u^{(k)}} + 3f_{\dot{x}\dot{y}\dot{y}} \phi_{u^{(k)}} \psi_{u^{(k)}}^2 + f_{\dot{y}\dot{y}\dot{y}} \psi_{u^{(k)}}^3. \end{aligned} \quad (2.16)$$

qui nous donnent $(\phi_{u^{(k)}}, \psi_{u^{(k)}})$ comme direction nulle non triviale commune à P_2 et P_3 , réelle et donc $R = 0$ et $\Delta \geq 0$ ■

Remarque Cette preuve utilise des arguments proches des preuves des notes en annexe A. En effet, une équation du type (2.15) fait intervenir dans un des membres une dépendance linéaire par rapport à une variable qui doit s'interpréter dans l'autre membre de cette même équation.

Si la condition de ce théorème n'est pas vérifiée, le système n'admet donc pas de paramétrisation. On supposera donc que cette condition est remplie.

La proposition suivante affirme que les conditions ($R = 0$ et $\Delta \geq 0$) sont suffisantes pour que le système (2.3) soit réglé autour de presque tout point. Seulement presque tout point, car il peut exister des points singuliers autour desquels la direction des génératrices ne dépend pas de façon lisse du point.

Proposition 2.1 Si le système de contrôle (2.3) est tel que R est identiquement nul et Δ positif ou nul au voisinage d'un jet q et si une des quatre conditions

- (i) $\Delta(q) > 0$,
- (ii) Δ est identiquement nul sur le voisinage mais $(f''_{\dot{x}\dot{x}}, f''_{\dot{x}\dot{y}}, f''_{\dot{y}\dot{y}})(q) \neq (0, 0, 0)$,
- (iii) $f''_{\dot{x}\dot{x}}, f''_{\dot{x}\dot{y}}$ et $f''_{\dot{y}\dot{y}}$ sont identiquement nulles sur le voisinage

est vérifiée, alors le système est réglé au voisinage de q .

Remarque Lorsque $R = 0$ et $\Delta \geq 0$, presque partout au moins une de ces trois conditions est vérifiée. En effet, les points (ii) et (iii) regroupent les points où Δ est identiquement nul et les points où les dérivées secondes de f s'annulent, mais f étant analytique, si ces dérivées sont non identiquement nulles, elles s'annulent seulement sur un fermé d'intérieur vide. Le point (i) est lui vrai presque partout si Δ n'est pas identiquement nul, Δ étant aussi analytique.

La proposition 2.1 se retrouve avec d'autres notations dans [46] et nous ne développerons pas plus avant la manière de transformer le système pour le rendre affine. En considérant le fait qu'un système est nécessairement réglé pour être paramétrable et qu'un système réglé peut s'écrire dans certaines coordonnées sous la forme (1.30), nous allons maintenant considérer le système déjà sous cette dernière forme.

2.3 Rappel de résultats connus

Les résultats de cette section ont été publiés dans [50]. Ils sont rappelés ici pour pouvoir couvrir l'ensemble des cas possibles.

Si les conditions nécessaires $R = 0$ et $\Delta \geq 0$ sont vérifiées, on peut génériquement mettre ce système sous la forme (1.30) que nous détaillons ci-dessous :

$$\begin{cases} \dot{x} = c_1(x, y, z, s) + \mu X_1(x, y, z, s) \\ \dot{y} = c_2(x, y, z, s) + \mu X_2(x, y, z, s) \\ \dot{z} = c_3(x, y, z, s) + \mu X_3(x, y, z, s). \end{cases} \quad (2.17)$$

Notons que s et μ sont des fonctions de $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}$ telles que $(x, y, z, s, \mu) \mapsto (x, y, z, \dot{x}, \dot{y})$ soit un difféomorphisme local c'est-à-dire une transformation par retour d'état statique (voir définition 1.4.2).

A l'aide des trois fonctions X_i de quatre variables (x, y, z, s) on définit deux champs de vecteurs $X = X_1 \frac{\partial}{\partial x} + X_2 \frac{\partial}{\partial y} + X_3 \frac{\partial}{\partial z}$ et $Y = \frac{\partial}{\partial s}$ dans $\mathbb{R}^4$. On ne considère que les points où les rangs :

$$\begin{aligned} r_1 &= \text{Rang}\{X, Y, [X, Y]\} \\ r_2 &= \text{Rang}\{X, Y, [X, Y], [X, [X, Y]], [Y, [X, Y]]\} \end{aligned}$$

sont localement constants. Les notations $[,]$ désignent les crochets de Lie (voir 0.1.1). (r_1, r_2) vaut clairement soit $(2, 2)$, soit $(3, 3)$ soit $(3, 4)$ (voir la fin de la section 0.1.2).

Proposition 2.3.1 *Si $(r_1, r_2) = (2, 2)$ le système (2.17) est soit paramétrable d'ordre $(0, 1)$ ou $(1, 1)$ soit équivalent au système (2.18) et non paramétrable. Si $(r_1, r_2) = (3, 3)$, le système (2.17) est paramétrable d'ordre $(0, 1)$ ou $(1, 2)$.*

Preuve : La construction des paramétrisations se trouve dans [50, p.168, théorème 3.1]. L'état considéré est (x, y, z, s) et les contrôles sont μ et $\dot{s}$, le système est ainsi affine en les contrôles. En prenant comme état $\xi = (x, y, z, s)$ et comme contrôles μ et $\dot{s}$, on peut se ramener à un système $\dot{\xi} = X_0(\xi) + \mu X(\xi) + \dot{s}Y(\xi)$. Dans le théorème cité l'auteur utilise X_1 et X_2 à la place de nos X et Y . Le cas $(r_1, r_2) = (3, 3)$ correspond aux points 4 et 5 de ce théorème. Le cas $(r_1, r_2) = (2, 2)$ correspond aux points 2 et 3 du théorème. Dans le point 2, l'auteur montre que le système n'est pas plat dans un sous cas. En effet, le système (2.17) est équivalent à un système qui se décompose en deux sous-systèmes indépendants, l'un paramétrable trivialement et l'autre non paramétrable, à savoir :

$$\begin{cases} \dot{x} = a(x, y, z) \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = \mu \\ \dot{s} = \nu \end{cases} \quad (2.18)$$

avec a une fonction analytique réelle telle que $\frac{\partial^2 a}{\partial z^2}$ n'est pas identiquement nulle au voisinage de (x, y, z) . Le lemme suivant conclut la démonstration ■

Prouvons une version du lemme [50, p.184, Lemma 7.1] généralisé au cas d'une paramétrisation (la référence ne concerne que la platitude).

Lemme 2.3.2 *Le système (2.18) n'est paramétrable sur aucun voisinage d'un point $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{s})$ tel que*

$$\frac{\partial^2 a}{\partial z^2}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \neq 0. \quad (2.19)$$

Preuve : Supposons qu'il existe une paramétrisation $(\varphi, \psi, \chi, \zeta)$ d'ordre (k, ℓ) de (2.18) dépendant de deux fonctions arbitraires du temps u et v , on a entre autres :

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u, \dots, u^{(k)}, v, \dots, v^{(\ell)}) \\ y &= \psi(u, \dots, u^{(k)}, v, \dots, v^{(\ell)}) \end{aligned} \quad (2.20)$$

On considère le plus grand entier k_0 tel que φ ou ψ dépende effectivement de $u^{(k_0)}$. Alors comme $\dot{x} = a(x, y, \dot{y})$ on a :

$$\dot{\varphi} = a(\varphi, \psi, \dot{\psi}).$$

Or, le membre de gauche est linéaire par rapport à $u^{(k_0+1)}$ donc le membre de droite doit aussi être linéaire par rapport à $u^{(k_0+1)}$ donc en dérivant les deux membres de l'égalité une fois par rapport à $u^{(k_0+1)}$ on obtient :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u^{(k_0)}} = \frac{\partial a}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial u^{(k_0)}}.$$

En dérivant une deuxième fois par rapport à $u^{(k_0+1)}$, on a :

$$0 = \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} \frac{\partial \psi}{\partial u^{(k_0)}}.$$

Cette égalité entre fonctions analytiques étant vérifiée au voisinage de tout point où une paramétrisation existe, l'une des deux fonctions est identiquement nulle. Or si $\frac{\partial \psi}{\partial u^{(k_0)}}$ était identiquement nulle, alors $\frac{\partial \varphi}{\partial u^{(k_0)}}$ le serait aussi, ce qui contredit la définition de k_0 , donc $\frac{\partial^2 a}{\partial z^2}$ est identiquement nulle. Le lemme est donc démontré par contraposition ■

2.3.1 Forme normale

Proposition 2.3.3 *Si $(r_1, r_2) = (3, 4)$, alors il existe une transformation par retour d'état dynamique*

$$\begin{aligned} (x, y, z, \mu, s) &= \mathfrak{T}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{\mu}, \tilde{s}, \dot{\tilde{s}}) \\ (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{\mu}, \tilde{s}) &= \mathfrak{S}(x, y, z, \mu, s, \dot{s}), \end{aligned} \quad (2.21)$$

qui conjugue les solutions de (2.17) à celles de :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{\mu} \\ \dot{\tilde{y}} = \rho(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{s}) + \tilde{\mu}\tilde{z} \\ \dot{\tilde{z}} = \theta(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{s}) + \tilde{\mu}\tilde{s} \end{cases} \quad (2.22)$$

Avant de prouver ce résultat, introduisons le lemme suivant.

Lemme 2.3.4 Si $(r_1, r_2) = (3, 4)$, alors il existe une base $(\tilde{X}, \tilde{Y})$ de la distribution engendrée par X et Y et des coordonnées $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{s}$ telles que $\tilde{X} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \tilde{z} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} + \tilde{s} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}}$ et $\tilde{Y} = \frac{\partial}{\partial \tilde{s}}$.

Preuve : cf. [3, chapitre II, théorème 5.1]

Preuve de la proposition : On applique le lemme aux champs X et Y . On considère le champ $X_0 = c_1 \frac{\partial}{\partial x} + c_2 \frac{\partial}{\partial y} + c_3 \frac{\partial}{\partial z}$. $(\tilde{X}, \tilde{Y})$ étant une base de la distribution engendrée par X et Y (et inversement), il existe quatre fonctions $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ des quatre variables $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{s}$ telles que :

$$\begin{aligned} \tilde{X} &= a_{11}X + a_{12}Y \\ \tilde{Y} &= a_{21}X + a_{22}Y. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Appelons P le difféomorphisme $(x, y, z, s) \mapsto (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{s}) = (\phi, \psi, \chi, \zeta)$ où l'on a omis les arguments (x, y, z, s) aux fonctions. On dérive cette relation par rapport au temps (dérivée de Lie) et on obtient

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= X_0\phi + \mu X\phi + \dot{s}Y\phi \\ \dot{\tilde{y}} &= X_0\psi + \mu X\psi + \dot{s}Y\psi \\ \dot{\tilde{z}} &= X_0\chi + \mu X\chi + \dot{s}Y\chi \\ \dot{\tilde{s}} &= X_0\zeta + \mu X\zeta + \dot{s}Y\zeta. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Remarquons que :

$$\begin{aligned} \tilde{X}\phi &= 1 = a_{11}X\phi + a_{12}Y\phi \\ \tilde{Y}\zeta &= 1 = a_{21}X\zeta + a_{22}Y\zeta \\ \tilde{X}\zeta &= 0 = a_{11}X\zeta + a_{12}Y\zeta \\ \tilde{Y}\phi &= 0 = a_{21}X\phi + a_{22}Y\phi. \end{aligned} \quad (2.25)$$

donc

$$\begin{aligned} X &= (X\phi)\tilde{X} + (X\zeta)\tilde{Y} \\ Y &= (Y\phi)\tilde{X} + (Y\zeta)\tilde{Y}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Après un calcul élémentaire

$$(\dot{\tilde{y}}, \dot{\tilde{z}}, \dot{\tilde{s}}) = (X_0 + (\mu X\phi + \dot{s}Y\phi)\tilde{X} + (\mu X\zeta + \dot{s}Y\zeta)\tilde{Y})(\psi, \chi, \zeta). \quad (2.27)$$

Or, $\tilde{Y}(\psi, \chi, \zeta) = (0, 0, 1)$ et $\tilde{X}(\psi, \chi, \zeta) = (\tilde{z}, \tilde{s}, 0)$, donc, en posant $\tilde{\mu} = \dot{\tilde{x}}$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{\mu} \\ \dot{\tilde{y}} = X_0(\psi - \phi) + \tilde{\mu}\tilde{z} \\ \dot{\tilde{z}} = X_0(\chi - \phi) + \tilde{\mu}\tilde{s} \end{cases} \quad (2.28)$$

et avec

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} &= X_0\phi + \mu X\phi + \dot{s}Y\phi \\ \dot{\tilde{s}} &= X_0\zeta + \mu X\zeta + \dot{s}Y\zeta \end{aligned} \quad (2.29)$$

on a bien construit les applications $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{T}$ et donc la transformation par retour d'état dynamique (voir section 1.4.3) ■

2.3.2 Étude de certains systèmes sous forme normale

La proposition précédente nous amène alors à l'étude du système (2.22). Si ρ ne dépend pas de $\tilde{s}$, le système (2.22) est affine avec $m = n - 1 = 2$ en posant (en tant que nouveau contrôle remplaçant $\tilde{s}$) $\sigma = \theta(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{s}) + \tilde{\mu}\tilde{s}$. Ce cas est déjà résolu et est rappelé au premier chapitre (voir section 1.6). Dans ce cas là (2.22) admet une paramétrisation presque partout d'ordre (1, 1) et donc le système (2.3) admet une paramétrisation d'ordre au plus (2, 2) (on peut avoir à dériver les variables $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ et $\tilde{z}$ pour obtenir les variables x , y , z , voir section 1.6).

Sinon, on applique le théorème d'inversion locale à l'application $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{s}) \mapsto (x, y, z, s) = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \rho(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{s}))$ en définissant h et g deux fonctions analytiques de quatre variables telles que $h(x, y, z, \rho(x, y, z, s)) = \theta(x, y, z, s)$ et $g(x, y, z, \rho(x, y, z, s)) = s$, on obtient le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu \\ \dot{y} = s + \mu z \\ \dot{z} = h(x, y, z, s) + g(x, y, z, s)\mu. \end{cases} \quad (2.30)$$

Ce système est alors équivalent à l'équation

$$\dot{z} = h(x, y, z, \dot{y} - z\dot{x}) + g(x, y, z, \dot{y} - z\dot{x})\dot{x} \quad (2.31)$$

qui sera l'objet d'étude de la prochaine section (basée sur l'article en annexe A). Cependant, introduisons un résultat de Jean-Baptiste Pomet [50] qui règle en partie ce cas.

Tout d'abord, définissons trois fonctions S , T et J qui vont nous permettre de distinguer les différents cas de systèmes étudiés.

On appelle x , y , z , λ les variables de h et g .

Soit ω et η les formes différentielles (introduites de façon plus ou moins explicites dans [50]) dans les variables x, y, z, λ suivantes

$$\begin{aligned}\omega &= -2g_4^2 dx + (g_{44}h_4 - g_4h_{44})(dy - zdx) - g_{44}(dz - gdx), \\ \eta &= dz - gdx - h_4(dy - zdx),\end{aligned}$$

où la notation avec un chiffre i en indice indique la dérivée partielle d'une fonction par rapport à sa i -ème variable

Remarque En notant $\wedge$ le produit extérieur entre formes différentielles, on notera que

$$\omega \wedge (dy - zdx) \wedge \eta = 2g_4^2 dx \wedge dy \wedge dz \quad (2.32)$$

qui est non nul.

On peut alors décomposer le produit $d\omega \wedge \omega$ sur la base $(\omega, \eta, dy - zdx, d\lambda)$ et définir trois fonctions S, T et J :

$$d\omega \wedge \omega = \left(-\frac{S}{2g_4}d\lambda \wedge \eta - \frac{T}{2}d\lambda \wedge (dy - zdx) + J(dy - zdx) \wedge \eta\right) \wedge \omega. \quad (2.33)$$

L'expression de $d\omega$ étant :

$$\begin{aligned}d\omega &= d\lambda \wedge ((g_{444}g - 3g_4g_{44})dx + (g_{444}h_4 - h_{444}g_4)(dy - zdx) - g_{444}dz) + ((g_{144}h_4 - h_{144}g_4 + g_{44}h_{14} - g_{14}h_{44})dx + (g_{244}h_4 - h_{244}g_4 + g_{44}h_{24} - g_{24}h_{44})dy + (g_{344}h_4 - h_{344}g_4 + g_{44}h_{34} - g_{34}h_{44})dz) \wedge (dy - zdx) \\ &\quad - 4(g_4g_{24}dy + g_4g_{34}dz) \wedge dx + (g_{44}h_4 - h_{44}g_4)dx \wedge dz - (g_{144}dx + g_{244}dy + g_{344}dz) \wedge (dz - gdx) - g_{44}(g_1dx + g_2dy + g_3dz) \wedge (dz - gdx),\end{aligned}$$

nous ne détaillons pas la partie indépendante de $d\lambda$ dans ce qui suit. Nous pouvons toutefois remarquer que cette partie congrue bien à $J(dy - zdx) \wedge \eta$ modulo ω étant donné que $\omega \wedge (dy - zdx) \wedge \eta = 2g_4^2 dx \wedge dy \wedge dz$ (cf (2.32)).

De plus $dz = \eta + gdx + h_4(dy - zdx)$ et $dx = \frac{1}{2g_4^2}(-\omega + (-g_4h_{44} + h_4g_{44})(dy - zdx) - g_{44}(\eta + h_4(dy - zdx)))$ ce qui nous donne pour $d\omega \wedge \omega$:

$$d\omega \wedge \omega = (d\lambda \wedge ((\frac{3}{2}\frac{g_{44}^2}{g_4} - g_{444})\eta + (\frac{3}{2}g_{44}h_{44} - g_4h_{444})(dy - zdx)) + J(dy - zdx) \wedge \eta) \wedge \omega.$$

On obtient alors une expression de S et de T en fonction de dérivées partielles de g et h :

$$\begin{aligned}S &= 2g_4g_{444} - 3g_{44}^2 \\ T &= 2g_4h_{444} - 3g_{44}h_{44}.\end{aligned} \quad (2.34)$$

Remarque $S/(g_4)^2$ est la dérivée schwarziennne de g par rapport à son quatrième argument.

Théorème 2.3.5 *On considère $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ l'ensemble de définition de g et h . Si $d\omega \wedge \omega$ (ou (S, T, J)) est identiquement nulle sur Ω alors le système (2.31) admet génériquement (en dehors d'un fermé d'intérieur vide) une paramétrisation d'ordre $(1, 2)$ en tout point (générique) $(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \ddot{x}_0, \ddot{y}_0)$ tel que $(x_0, y_0, z_0, \dot{y}_0 - z_0\dot{x}_0) \in \Omega$.*

Par généricité, nous entendons partout sauf sur un fermé d'intérieur vide, comme indiqué dans le théorème. En effet, la démonstration nécessite des inversion locales de fonctions et certaines inégalités doivent être vérifiées. Lorsque ces inégalités ne sont pas vérifiées, il peut y avoir des singularités qui ne sont pas étudiées dans le cadre de cette thèse.

2.4 Résultats nouveaux

Dans cette section, nous allons étudier l'équation (2.31) de façon plus approfondie, en rappelant que $g_4 \neq 0$. Tous les résultats sont prouvés dans l'article en annexe. Ce qui suit sera essentiellement une discussion de ces résultats afin d'introduire la conjecture qui suivra. Comme il a été vu dans la section précédente, l'équation (2.31) est équivalente au seul cas qui reste à étudier après le travail de [50] en ce qui concerne les systèmes à trois états et deux entrées.

2.4.1 Un système d'équations aux dérivées partielles

Dans cette partie, nous introduisons un système d'équations et d'inéquations aux dérivées partielles, noté $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\gamma,\delta})$, qui nous permettra de caractériser l'existence d'une paramétrisation du système (2.31).

Les équations de $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\gamma,\delta})$ vont nous permettre d'expliciter les paramétrages possibles de (2.31) qui vérifient le point (i) de la définition 1.2.4. Les inéquations de $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\gamma,\delta})$ vont nous permettre d'introduire les contraintes portant sur ce possible paramétrage pour qu'il vérifie le point (ii) de la définition 1.2.4, c'est-à-dire que toute solution de (2.31) a un antécédent par la formule de paramétrisation Φ .

Pour k et ℓ deux entiers strictement positifs, on définit un système d'équations aux dérivées partielles à $k+\ell+1$ variables indépendantes $u, \dot{u}, \dots, u^{(k-1)}, v, \dot{v}, \dots, v^{(\ell-1)}, x$ et une variable dépendante p .

Pour raccourcir les notations, définissons un champs de vecteur F de $\mathbb{R}^{k+\ell+1}$ de coordon-

nées les variables indépendantes présentées ci-dessus :

$$F = \sum_{i=0}^{k-2} u^{(i+1)} \frac{\partial}{\partial u^{(i)}} + \sum_{i=0}^{\ell-2} v^{(i+1)} \frac{\partial}{\partial v^{(i)}} \quad (2.35)$$

où les sommes sont nulles lorsque $k = 1$ ou $\ell = 1$ respectivement. Considérons $\tilde{\Omega}$ un ouvert de $\mathbb{R}^4$ et γ et δ deux applications analytiques réelles $\tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\gamma_4 \neq 0$ pour tout point de $\tilde{\Omega}$.

On peut maintenant considérer le système de deux équations aux dérivées partielles et trois inéquations :

$$(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\gamma,\delta}) \begin{cases} p_{u^{(k-1)}} (Fp_x - \delta(x, p, p_x, p_{xx})) - p_{xu^{(k-1)}} (Fp - \gamma(x, p, p_x, p_{xx})) = 0, & (a) \\ p_{u^{(k-1)}} p_{xv^{(\ell-1)}} - p_{xu^{(k-1)}} p_{v^{(\ell-1)}} = 0, & (b) \\ p_{u^{(k-1)}} \neq 0, & (c) \\ p_{v^{(\ell-1)}} \neq 0, & (d) \\ \gamma_1 + \gamma_2 p_x + \gamma_3 p_{xx} + \gamma_4 p_{xxx} - \delta \neq 0. & (e) \end{cases} \quad (2.36)$$

Pour p satisfaisant ces équations et inéquations, définissons deux fonctions

$$\sigma = -\frac{p_{v^{(\ell-1)}}}{p_{u^{(k-1)}}}, \quad \tau = \frac{-Fp + \gamma(x, p, p_x, p_{xx})}{p_{u^{(k-1)}}}, \quad (2.37)$$

et deux champs de vecteur de $\mathbb{R}^{2(k+\ell)}$

$$E = \sigma \frac{\partial}{\partial u^{(k-1)}} + \frac{\partial}{\partial v^{(\ell-1)}}, \quad D = F + \tau \frac{\partial}{\partial u^{(k-1)}} + \sum_{i=0}^{k+\ell-2} x^{(i+1)} \frac{\partial}{\partial x^{(i)}}. \quad (2.38)$$

Afin de compléter ces conditions, on peut attacher à toute solution p de $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\gamma,\delta})$ un entier (ou $+\infty$) $K \in \mathbb{N} \cup +\infty$ tel que

$$\begin{aligned} ED^K p &\neq 0 \text{ sur } U \times \mathbb{R}^K \\ \forall 0 \leq i \leq K-1, \quad ED^i p &= 0 \text{ sur } U \times \mathbb{R}^i. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Dans l'annexe A (rédigée en anglais), une solution p de $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\gamma,\delta})$ vérifiant (2.39) est appelée “ K -regular solution”.

On peut en réalité restreindre K à l'ensemble $\{1, \dots, k + \ell - 1\} \cup \{+\infty\}$:

Proposition 2.4.1 *Si p , une solution de $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\gamma,\delta})$, vérifie*

$$\forall 0 \leq i \leq k + \ell - 1, \quad ED^i p = 0 \text{ sur } U \times \mathbb{R}^i \quad (2.40)$$

alors $\forall i \geq 0, \quad ED^i p = 0 \text{ sur } U \times \mathbb{R}^i$.

Preuve : On suppose qu'il existe un entier K tel que $ED^K p \neq 0$. Lorsque $K > k + \ell - 1$, on peut appliquer le lemme 0.2.1 avec les $2k + 2\ell + 1$ fonctions $x, \dot{x}, \dots, x^{(k+\ell-1)}, p_x, p, Dp, \dots, D^{k+\ell-1}p$ des $2k + 2\ell$ variables $x, \dot{x}, \dots, x^{(k+\ell-1)}, u, \dots, u^{(k-1)}, v, \dots, v^{(\ell-1)}$. L'entier q du lemme est le rang du jacobien des fonctions ci-dessus, la variable x du lemme correspond aux variables $x, \dot{x}, \dots, x^{(k+\ell-1)}$ et y à $u, \dots, u^{(k-1)}, v, \dots, v^{(\ell-1)}$. On pose $z_1 = p_x(\cdot)$, $z_{i+1} = D^i p(\cdot)$ pour $i \in \{1, \dots, k + \ell - 1\}$ où on a remplacé les arguments des fonctions par un point. On considère pour l'équation :

$$(z_1, \dots, z_{k+\ell} = F(x, \dot{x}, \dots, x^{(k+\ell-1)}, u, \dots, u^{(k-1)}, v, \dots, v^{(\ell-1)}))$$

où $F = (p_x \cdot p, \dots, D^{k+\ell-1}p)$. Alors, après substitution des z_i par les fonctions $p_x, p, Dp, \dots, D^{k+\ell-1}p$, il existe une relation $R(x, \dot{x}, \dots, x^{(k+\ell-1)}, p_x, p, Dp, \dots, D^{k+\ell-1}p) = 0$ non triviale et donc telle que la dérivée partielle de R par rapport à l'un de ses $k + \ell + 1$ derniers arguments est non nul. En utilisant (A.21), on a Dp_x fonction de $p_x, p, Dp, x, \dot{x}$. Alors, en appliquant $ED^{K-(k+\ell-1)}$ à cette relation on obtient que R ne dépend pas de $D^{k+\ell-1}p$ et donc de $x^{(k+\ell-1)}$ non plus. En appliquant $ED^{K-(k+\ell-1)+1}, ED^{K-(k+\ell-1)+2}$ et ainsi de suite on obtient finalement une relation $R(p_x, p, x) = 0$ avec $(R_{p_x}, R_p) \neq (0, 0)$. En dérivant par rapport à $u^{(k-1)}$ on obtient $R_{p_x} p_{xu^{(k-1)}} + R_p p_{u^{(k-1)}} = 0$, donc, d'après la première relation de (2.36-c), $R_{p_x} \neq 0$, et la relation $R(p_x, p, x) = 0$ qu'au voisinage de presque tout point, $p_x = f(p, x)$ pour une certaine fonction lisse f . D'après le lemme A.6.3, $\forall i \geq 0, ED^i p = 0$ sur $U \times \mathbb{R}^i$ contredisant ainsi l'existence de K ■

2.4.2 Condition suffisante

Dans cette partie, nous montrons que si $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\rho,\theta})$ (qui est le système $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\gamma,\delta})$ pour $\gamma = \rho$ et $\delta = \theta$ où ρ et θ sont les fonctions de quatre variables du système (2.22) équivalent à (2.31)) admet une solution, alors (2.31) admet une paramétrisation, déterminée de façon quasi explicite (voir le théorème qui suit pour une explication sur le terme quasi).

Le lemme suivant va nous permettre d'inverser localement le système en utilisant les variables de plus haut ordre de dérivation en dehors d'un fermé d'intérieur vide.

Lemme 2.4.2 Soit p une solution de $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\gamma,\delta})$ vérifiant (2.39) pour un certain K sur un ouvert connexe $\mathfrak{N} \subset \mathbb{R}^{k+\ell+K+1}$ et l'application $\pi : \mathfrak{N} \rightarrow \mathbb{R}^{K+2}$ définie par

$$\pi = (p_x, p, Dp, \dots, D^K p). \quad (2.41)$$

Alors, il existe deux entiers positifs $i_0 \leq k$ et $j_0 \leq \ell$ tels que $i_0 + j_0 = K + 2$ et

$$\det \left(\frac{\partial \pi}{\partial u^{(k-i_0)}}, \dots, \frac{\partial \pi}{\partial u^{(k-1)}}, \frac{\partial \pi}{\partial v^{(\ell-j_0)}}, \dots, \frac{\partial \pi}{\partial v^{(\ell-1)}} \right) \quad (2.42)$$

est non nul en dehors d'un fermé de $\mathbb{N}$ d'intérieur vide.

On peut désormais donner le théorème explicitant la condition suffisante annoncée.

Théorème 2.4.3 *Supposons que $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\rho,\theta})$ admet une solution p vérifiant (2.39) pour un certain K au voisinage d'un point $\nu = (u_0, \dots, u_0^{(k-1)}, x_0, \dots, x_0^{(K)}, v_0, \dots, v_0^{(\ell-1)})$. Pour cette solution p , on considère i_0 et j_0 donnés par le lemme 2.4.2 et on suppose que ni le déterminant (2.42), ni $p_{u^{(k-1)}}$, ni τ_x s'annulent au point ν . On considère de plus $u_0^{(k)}, v_0^{(\ell)}$ telles que*

$$u_0^{(k)} - \sigma(u_0, \dots, u_0^{(k-1)}, v_0, \dots, v_0^{(\ell-1)})v_0^{(\ell)} = \tau(u_0, \dots, u_0^{(k-1)}, x_0, v_0, \dots, v_0^{(\ell-1)}).$$

Soit φ, ψ, χ les fonctions des variables $(u, \dots, u^{(k)}, v, \dots, v^{(\ell)})$ définies au voisinage de $(u_0, \dots, u_0^{(k)}, v_0, \dots, v_0^{(\ell)})$ par les relations suivantes dans lesquelles (2.43) définit φ implicitement :

$$\tau(u, \dots, u^{(k-1)}, \varphi, v, \dots, v^{(\ell-1)}) = u^{(k)} - \sigma(u, \dots, v^{(\ell-1)})v^{(\ell)}, \quad (2.43)$$

$$\psi(u, \dots, u^{(k)}, v, \dots, v^{(\ell)}) = p(u, \dots, u^{(k-1)}, \varphi, v, \dots, v^{(\ell-1)}), \quad (2.44)$$

$$\chi(u, \dots, u^{(k)}, v, \dots, v^{(\ell)}) = p_x(u, \dots, u^{(k-1)}, \varphi, v, \dots, v^{(\ell-1)}). \quad (2.45)$$

Ces fonctions définissent une paramétrisation d'ordre (k, ℓ) de (2.31) en tout point $(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dots, x_0^{(K)}, y_0^{(K)})$ satisfaisant :

$$\begin{cases} z_0 = p_x(u_0, \dots, u_0^{(k-1)}, v_0, \dots, v_0^{(\ell-1)}, x_0) \\ y_0^{(i)} = D^i p(u_0, \dots, u_0^{(k-1)}, v_0, \dots, v_0^{(\ell-1)}, x_0, \dots, x_0^{(i)}), \quad 0 \leq i \leq K. \end{cases} \quad (2.46)$$

2.4.3 Conditions nécessaires

Les fonctions S, T et J , définies en section précédente, vont nous permettre de distinguer génériquement deux cas selon si S et T sont nulles identiquement toutes les deux ou si l'une des deux est non nulle (ici, génériquement signifie que le résultat lorsque S ou T est non nulle identiquement est vérifiée en tout point pour lequel la fonction ne s'annule pas, i.e. sur un ouvert privé d'un fermé d'intérieur vide). Lorsque S ou T est non nulle, il est nécessaire que $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\rho,\theta})$ admette une solution pour qu'une paramétrisation d'ordre (k, ℓ) existe. Dans le cas contraire, au moins un parmi deux systèmes d'équations aux dérivées partielles (que nous allons expliciter au moment opportun) doit avoir une solution.

2.4.3.1 S ou T ne sont pas identiquement nulles toutes les deux

Dans ce cas, le théorème qui suit nous donne une condition nécessaire de paramétrisation.

Théorème 2.4.4 *Supposons que soit S soit T n'est pas identiquement nulle sur Ω . Supposons aussi que (2.31) admette une paramétrisation (φ, ψ, χ) d'ordre (k, ℓ) en $\mathcal{X} = (x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dots, x_0^{(K)}, y_0^{(K)})$ tel que $(x_0, y_0, z_0, \dot{y}_0 - z_0 \dot{x}_0) \in \Omega$, avec des entiers $k, \ell, K, K \leq k + \ell - 2$.*

Alors $k \geq 1, \ell \geq 1$ et, s'il existe $(u_0, \dots, u_0^{(L)}, v_0, \dots, v_0^{(L)})$ ($L \geq \ell, L \geq k$) image de $\mathcal{X}$ par la paramétrisation et tel que

$$\varphi_{u^{(k)}}(u_0, \dots, u_0^{(k)}, v_0, \dots, v_0^{(\ell)}) \neq 0,$$

alors le système $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\rho,\theta})$ a une solution p sur un voisinage U de $(u_0, \dots, u_0^{(k-1)}, x_0, v_0, \dots, v_0^{(\ell-1)})$ qui vérifie (2.39).

Ce théorème forme avec le théorème 2.3.5 le résultat suivant

Théorème 2.4.5 *Supposons que soit S soit T n'est pas identiquement nulle sur Ω . Le système (2.31) admet génériquement (en dehors d'un fermé d'intérieur vide) une paramétrisation d'ordre (k, ℓ) sur Ω si et seulement si $k \geq 1, \ell \geq 1$ et le système $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\rho,\theta})$ admet une solution vérifiant (2.39) pour $K \leq k + \ell - 2$.*

Ce résultat vaut tous les bons discours et résume bien le lien, dans ce cas précis entre le système (2.31) et $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\rho,\theta})$.

2.4.3.2 S et T sont identiquement nulles

Dans ce cas, nous savons par le théorème 2.3.5 que si J est aussi identiquement nulle, le système admet une paramétrisation d'ordre $(1, 2)$, nous allons donc étudier le cas où J n'est pas nulle identiquement et en se plaçant au voisinage d'un point $(x_0, y_0, z_0, \dot{y}_0 - z_0 \dot{x}_0)$, le système (2.31) est alors équivalent (par changement de coordonnées mais en gardant les mêmes noms de variables) à

$$\dot{z} = \kappa (\dot{y} - \alpha \dot{x}) (\dot{y} - \beta \dot{x}) + a \dot{x} + b \dot{y} + c, \quad \kappa \neq 0, \alpha - \beta \neq 0, \frac{\partial \alpha}{\partial z} \neq 0, \frac{\partial \alpha}{\partial z} \neq 0 \quad (2.47)$$

où $\kappa, \alpha, \beta, a, b, c$ sont des fonctions lisses de trois variables telles que en un point où J ne s'annule pas

$$\kappa(x_0, y_0, z_0) \neq 0, \alpha(x_0, y_0, z_0) - \beta(x_0, y_0, z_0) \neq 0, \alpha_3(x_0, y_0, z_0) \neq 0, \beta_3(x_0, y_0, z_0) \neq 0. \quad (2.48)$$

Lorsque $J \neq 0$, α et β jouent un rôle similaire,

$$(x, y, z) \mapsto (x, y, \alpha(x, y, z)) \quad \text{and} \quad (x, y, z) \mapsto (x, y, \beta(x, y, z)) \quad (2.49)$$

définissent deux difféomorphismes locaux.

Selon que l'on choisisse l'un ou l'autre des deux facteurs dans (2.47) pour jouer le rôle de $\lambda = \dot{y} - z\dot{x}$ dans (2.31), on obtient deux possibilités pour le couple de fonctions (g, h) et donc deux couples possibles de fonctions (γ, δ)

$$\bar{\gamma}(x, y, z, w) = \frac{w - \left((\tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}\tilde{\alpha}_2 + \tilde{\alpha}_3(\tilde{a} + \tilde{\alpha}\tilde{b})) (x, y, z) \right)}{\left(\tilde{\kappa}\tilde{\alpha}_3(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}) \right) (x, y, z)}, \quad \bar{\delta} = \tilde{\alpha}_3\tilde{c} + (\tilde{\alpha}_2 + \tilde{\alpha}_3\tilde{b})\bar{\gamma} + \tilde{\alpha}_3\tilde{\kappa}\bar{\gamma}^2, \quad (2.50)$$

où le tilde signifie la composition avec l'inverse du premier difféomorphisme de (2.49) pour le premier couple ; le second étant obtenu en échangeant α et β

$$\hat{\gamma}(x, y, z, w) = \frac{w - \left((\tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}\tilde{\beta}_2 + \tilde{\beta}_3(\tilde{a} + \tilde{\beta}\tilde{b})) (x, y, z) \right)}{\left(\tilde{\kappa}\tilde{\beta}_3(\tilde{\beta} - \tilde{\alpha}) \right) (x, y, z)}, \quad \hat{\delta} = \tilde{\alpha}_3\tilde{c} + (\tilde{\beta}_2 + \tilde{\beta}_3\tilde{b})\hat{\gamma} + \tilde{\beta}_3\tilde{\kappa}\hat{\gamma}^2, \quad (2.51)$$

où le tilde dans ce cas signifie la composition avec l'inverse du second difféomorphisme de (2.49).

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème

Théorème 2.4.6 *Supposons S et T identiquement nulles sur Ω et J non identiquement nulle. Soit (x_0, y_0, z_0) tel que $J(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ et trois entiers positifs k, ℓ, K , $K \leq k + \ell - 2$. Si le système (2.31) admet une paramétrisation (φ, ψ, χ) d'ordre (k, ℓ) en $\mathcal{X} = (x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dots, x_0^{(K)}, y_0^{(K)})$ telle qu'il existe $(u_0, \dots, u_0^{(k+K)}, v_0, \dots, v_0^{(\ell+K)})$ antécédent de $\mathcal{X}$ par la paramétrisation et $\varphi_{u^{(k)}}(u_0, \dots, u_0^{(k)}, v_0, \dots, v_0^{(\ell)}) \neq 0$ alors un des deux systèmes $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\bar{\gamma}, \bar{\delta}})$ ou $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\hat{\gamma}, \hat{\delta}})$ a une solution p , vérifiant (2.39) pour un certain $K \leq k + \ell - 2$, sur un voisinage U de $(u_0, \dots, u_0^{(k-1)}, x_0, v_0, \dots, v_0^{(\ell-1)})$ dans $\mathbb{R}^{k+\ell+1}$. Le point $(u_0, \dots, u_0^{(k-1)}, x_0, v_0, \dots, v_0^{(\ell-1)})$ doit satisfaire les relations (2.46).*

En utilisant les inégalités (2.39) on obtient le théorème global

Théorème 2.4.7 *Supposons S et T identiquement nulles sur Ω . Le système (2.31) admet une paramétrisation d'ordre (k, ℓ) si et seulement si soit J est identiquement nulle sur Ω soit $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\bar{\gamma}, \bar{\delta}})$ soit $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\hat{\gamma}, \hat{\delta}})$ admet une solution vérifiant (2.39) pour un certain $K \leq k + \ell - 2$.*

2.4.4 Conclusion

Théorème 2.4.8 *On considère le système (2.31). Alors*

- (i). *Si $(S, T, J) = (0, 0, 0)$ identiquement, alors (2.3) admet une paramétrisation d'ordre $(1, 2)$ en presque tout point.*
- (ii). *Si $(S, T) = (0, 0)$ et $J \neq 0$ identiquement, alors (2.3) admet une paramétrisation d'ordre (k, ℓ) presque en tout point si et seulement si $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\bar{\gamma},\bar{\delta}})$ ou $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\hat{\gamma},\hat{\delta}})$ admet une solution vérifiant (2.39) pour un certain $K \leq k + \ell - 2$.*
- (iii). *Si $(S, T) \neq (0, 0)$ identiquement, alors (2.3) admet une paramétrisation d'ordre (k, ℓ) presque en tout point si et seulement si $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\rho,\theta})$ admet une solution vérifiant (2.39) pour un certain $K \leq k + \ell - 2$.*

Ce théorème est un résumé de l'ensemble des résultats établis précédemment. On notera que l'ensemble des cas est couvert et que, hormis dans le cas $(S, T, J) = (0, 0, 0)$, l'existence d'une paramétrisation est sujette à l'existence d'une solution pour un système d'équations aux dérivées partielles $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\gamma,\delta})$ pour lequel les fonctions γ et δ sont définies à partir des fonctions h et g .

Lorsque S , T et J sont non nuls, nous conjecturons qu'il n'y a pas de paramétrisation possible.

Conjecture 2.4.9 *On considère $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ l'ensemble de définition de g et h . Si $d\omega \wedge \omega$ (ou (S, T, J)) n'est pas identiquement zéro sur Ω alors (2.31) n'admet de paramétrisation en aucun point (pour un jet de tout ordre).*

On remarque que cette conjecture est la contrepartie du théorème 2.3.5.

Nous pouvons ici éclairer de quelle manière exprimer la conjecture à l'aide des solutions de $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\gamma,\delta})$.

Conjecture 2.4.10 *Toute solution p de $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\gamma,\delta})$ vérifie*

$$\forall i \geq 0, \quad ED^i p = 0. \quad (2.52)$$

Un autre résultat obtenu qui augure bien d'une preuve possible de la conjecture 2.4.9 et dont la preuve se trouve dans l'annexe A est le suivant :

Théorème 2.4.11 *Si le système (2.31) admet une paramétrisation d'ordre (k, ℓ) sur un certain jet, alors*

- soit $S = T = J = 0$,
- soit $k \geq 3$ et $\ell \geq 4$.

On peut comparer ces derniers résultats aux résultats obtenus dans [50]. Dans ce dernier article, l’auteur montre que les systèmes tels que $S = T = J = 0$ sont “ $(x, u) - plat$ ”, c’est-à-dire que les fonctions u et v sont dans notre cas des fonctions de $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}$. Cela revient à une paramétrisation d’ordre $(1, 2)$ pour le système (2.31). Cependant, l’auteur de [50] montre aussi que les systèmes tels que (S, T, J) n’est pas identiquement nul ne peuvent être “ $(x, u) - plat$ ” impliquant que $k \geq 3$ et $\ell \geq 4$, résultat que nous avons retrouvé plus simplement. L’apport de ce chapitre est de plus le lien entre l’existence d’une paramétrisation et l’existence de solution particulière d’un système d’équations aux dérivées partielles.

Chapitre 3

Filtration des équations de la platitude

Ce chapitre est la reproduction du rapport de recherche INRIA écrit par Jean-Baptiste Pomet, Laurent Baratchart et moi-même [2] : D. Avanessoff, L. Baratchart et J.-B. Pomet, *Sur l'intégrabilité (très) formelle d'une partie des équations de la platitude des systèmes de contrôle*, Rapport de recherche INRIA, 2003, <http://www.inria.fr/rrrt/rr-5045.html>.

Contenu du chapitre

3.1	Séries formelles d'un nombre fini de variables prises dans un ensemble infini	58
3.1.1	Généralités sur les séries formelles	59
3.1.2	Le cas d'une infinité d'indéterminées	60
3.1.3	Structure linéaire tangente	63
3.1.4	"Ordre" d'une série formelle	67
3.1.5	Substitutions dans les séries	73
3.2	L'algèbre différentielle locale associée à un système de contrôle	75
3.2.1	L'anneau $\mathcal{A}$ des fonctions	76
3.2.2	L'anneau $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$ des opérateurs différentiels	78
3.2.3	Les formes différentielles, l'algèbre extérieure	79
3.2.4	Opérateurs différentiels à coefficients formes	82
3.2.5	Matrices d'opérateurs différentiels	83
3.3	Une valuation naturelle	84
3.3.1	Hypothèses essentielles	84
3.3.2	Valuation des fonctions	85
3.3.3	Extension de Val à toutes les formes, matrices et opérateurs	90

3.3.4	Indépendance de la fonction Val par rapport au choix de la base . . .	95
3.3.5	Coordonnées adaptées	98
3.3.6	Filtration	106
3.4	Application aux équations de la platitude d'un système de contrôle . . .	109
3.4.1	Platitude des systèmes de contrôle, formulation du problème	109
3.4.2	Réécriture du problème	110
3.4.3	Condition nécessaire : système d'équations sur Π	111
3.4.4	Filtration du système d'équations sur Π	115
3.4.5	Résultat principal : intégrabilité (très) formelle	117
3.4.6	Interprétation des résultats	119

Introduction

Le but de cette note est d'introduire des outils d'analyse pour certains systèmes d'équations différentielles (EDP) dont ni l'ordre ni le nombre de variables indépendantes n'est fixé à l'avance. La motivation est l'étude de la "platitude" des systèmes de contrôle, ou plus généralement de la possibilité de paramétrer les solutions d'un système d'équations différentielles ordinaires sous-déterminé par un certain nombre de fonctions du temps arbitraires.

La rédaction est didactique. Certains arguments peuvent paraître très élémentaires. On ne trouvera ici de bibliographie exhaustive ni du point de vue de l'Automatique ni du point de vue des systèmes différentiels. Nous remercions le lecteur attentif de nous faire part de toutes ses remarques, d'ordre bibliographique, technique, ou du point de vue de l'exposition.

Rappelons qu'un système de contrôle $\dot{x} = f(x, u)$ ($x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$) est *plat* [11] si et seulement si il existe m fonctions $h_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{(K+1)m} \rightarrow \mathbb{R}$ pour un certain $K \in \mathbb{N}$:

$$h_i(x, u, \dot{u}, \ddot{u}, \dots, u^{(K)}) , \quad 1 \leq i \leq m ,$$

et des "formules" qui donnent la solution générale $(x(t), u(t))$ en fonction de ces fonctions et de leurs dérivées.

On ne sait pas estimer l'entier K a priori. Les objets recherchés (les h_i) sont donc par nature des fonction d'un nombre fini de variable prises parmi un ensemble infini de variables. Il est courant dans la théorie géométrique des équations différentielles [30, 4] de voir ces objets comme des fonctions "lisses" sur des espaces de jets infinis. Ce point de vue a été adopté en contrôle pour l'étude de la platitude [49, 12, 8]. Vu que notre ambition se limite à un étude *locale*, autour d'un jet donné, du problème de l'existence de sorties "plates", on choisit un cadre plus restreint que celui des fonctions "lisses" sur des espaces de jets infinis : on se contente de leurs germes en un point, c'est-à-dire des séries formelles (convergentes dans le cas analytique, mais on n'ira pas jusque là), dont le nombre d'indéterminées n'est pas fixé a priori.

La section 3.1 de cette note est consacré à des préliminaires sur les séries formelles en un nombre fini d'indéterminées prises dans un ensemble infini (on appelle *très formelles* les séries qui sont autorisées à dépendre d'une infinité d'indéterminées). Le but est de fixer les notions et notations utilisées par la suite.

La section 3.2 définit un anneau différentiel, dont les éléments sont des séries formelles au sens du chapitre 3.1, associé à un système de contrôle $\dot{x} = f(x, u)$, et un certain nombre

de structures algébriques afférentes. Cette section ne contient rien d'essentiellement nouveau.

La section 3.3 introduit une valuation, et donc une filtration, sur cet anneau et les autres structures algébriques introduites précédemment. Cette valuation est intrinsèque au système de contrôle. A la connaissance des auteurs, cette construction est nouvelle. On n'a du moins pas su trouver trace de construction semblable dans la littérature.

La section 3.4 utilise cette valuation pour analyser une partie des équations qui régissent l'existence des fonctions h_i évoquées plus haut. On établit un résultat qui équivaut à l'intégrabilité formelle de ces équations, en un sens insuffisant pour garantir l'existence de "vraies" solutions qui ne dépendraient que d'un nombre fini de variables ; on appelle donc cette propriété "intégrabilité très formelle".

Ce dernier résultat est en lui-même un peu abstrait. On aurait bien sûr préféré un résultat inverse, c'est-à-dire au moins exhiber des cas où les équations en question n'ont même pas de solutions "très formelle", ce qui aurait donné la preuve que les systèmes correspondants ne sont pas plats.

Les auteurs sont convaincus que la valuation introduite ici est tout de même un outil important utile (et nouveau dans ce contexte) pour l'étude locale de systèmes d'EDPs dont le nombre de variables indépendantes n'est pas fixé à priori. Le présent rapport n'apporte pas de confirmation concrète à cette conviction. Toutefois, même si nous n'avons pas d'exemple précis à exhiber, il semble que cette valuation, conjuguée aux résultats de [8] (qui, pour faire bref, permet d'écrire des équations supplémentaires sur les objets recherchés) permet de montrer que certaines classes de systèmes ne sont pas plats.

3.1 Séries formelles d'un nombre fini de variables prises dans un ensemble infini

Les propriétés des anneaux de séries formelles sont par exemple décrites en détails dans [69, Chap. VII, §1]. Reprenons une partie de cet exposé pour l'adapter au cas des séries "en un nombre fini de variables choisies parmi un ensemble infini", que nous manipulerons par la suite

Cette section introduit des notions dans un cadre général, plutôt que d'utiliser les notations spécifiques des chapitres suivants. La raison est double : d'une part l'exposé nous semble plus

clair de cette manière, et d'autre part les objets introduits ici sont utilisées ensuite dans plusieurs contextes (certes semblables). *Afin de rendre plus aisé le lien entre l'exposé général de cette section et l'utilisation qui en est faite ensuite, on introduit les situations à venir comme des exemples. Voir pages 60, 68 et 71 (en caractères penchés).*

Dans cette section, $k = \mathbb{R}$, ou $k = \mathbb{C}$.

3.1.1 Généralités sur les séries formelles

Pour F un ensemble fini (N son cardinal, $F = \{X_1, \dots, X_N\}$), dont on appelle les éléments des *indéterminées*. On note $k[[F]]$ ou $k[[X_1, \dots, X_N]]$ l'anneau des **séries formelles en N indéterminées** à coefficients dans k . Un élément g de $k[[X_1, \dots, X_N]]$ est défini par la donnée d'une famille $(a_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^N}$ d'éléments $a_\alpha \in k$, et il est noté

$$g = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^N} a_\alpha X^\alpha \quad (3.1)$$

avec, par convention, si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, $X^\alpha = X_1^{\alpha_1} \dots X_N^{\alpha_N}$. La notation X_i désigne à la fois un élément de F et la série dont tous les coefficients sont nuls sauf $a_{(0, \dots, 1, \dots, 0)}$, qui vaut 1. Pour chaque $q \in \mathbb{N}$, l'**ensemble homogène de degré q** de g est soit zéro soit un polynôme homogène de degré q :

$$g_q = \sum_{|\alpha|=q} a_\alpha X^\alpha \quad (3.2)$$

avec la notation

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N .$$

On écrit aussi $g = \sum_{q \in \mathbb{N}} g_q$. On appelle $g_0 \in k$ le **terme constant** de la série g . On notera aussi $g(0)$ au lieu de g_0 .

L'addition des séries se fait terme à terme et la multiplication selon la formule classique

$$\left(\sum_{q \in \mathbb{N}} f_q \right) \left(\sum_{q \in \mathbb{N}} g_q \right) = \sum_{q \in \mathbb{N}} h_q \quad \text{avec} \quad h_q = \sum_{i+j=q} f_i g_j . \quad (3.3)$$

Ceci fait de $k[[F]]$ un anneau commutatif, dont le sous-anneau des séries "constantes" est identifié à k .

La série (3.1) est une **série convergente** si et seulement si il existe des nombres réels positifs ρ et μ tels que $|a_\alpha| < \mu \rho^{-|\alpha|}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$. Les séries convergentes forment un sous-anneau, que l'on note en général $k\{X_1, \dots, X_N\}$, ou $k\{F\}$, mais que nous préférons

noter $k[[X_1, \dots, X_N]]_{cv}$ ou $k[[F]]_{cv}$. De toute façon, nous nous préoccupons peu de convergence dans cette note !

Bien sûr, si F et G sont deux ensembles finis avec $F \subset G$, il existe une inclusion naturelle $k[[F]] \subset k[[G]]$ qui identifie une série en des éléments de F avec une série en des éléments de G dont tous les coefficients de monômes contenant des puissances non nulles d'éléments de $G - F$ sont nuls. Sa restriction à $k[[F]]_{cv}$ donne une inclusion naturelle $k[[F]]_{cv} \subset k[[G]]_{cv}$.

Par convention, $k[[\emptyset]]_{cv} = k[[\emptyset]] = k$.

3.1.2 Le cas d'une infinité d'indéterminées

3.1.2.1 Séries formelles

Soit maintenant un ensemble S , non nécessairement fini. On peut définir $k[[S]]$, dont les éléments sont des **séries en un nombre fini¹ d'éléments de S** . Tout $g \in k[[S]]$ peut être vu comme un élément de $k[[F]]$ où F est une certaine partie finie de S , et alors aussi, d'après le paragraphe précédent, comme un élément de $k[[G]]$ pour toutes les parties finies G de S qui contiennent F . Si F et G sont finis, et $F \subset G \subset S$, on peut donc considérer que $k[[F]] \subset k[[G]] \subset k[[S]]$, et en admettant cette inclusion, on a

$$k[[S]] = \bigcup_{F \subset S, F \text{ fini}} k[[F]] .$$

En termes plus savants, $k[[S]]$ est la limite projective des $k[[F]]$ pour $F \subset S$ fini.

Exemple. Soient m et n deux entiers.

Au chapitre 3.2, on utilisera deux ensembles d'indéterminées, qui jouent le rôle de S :

- Υ contient les indéterminées $x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m$ ainsi que les $u_j^{(k)}$ pour $j \in \{1, \dots, m\}$ mais pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,
 - Ξ contient en plus tous les $x_i^{(k)}$ pour tout entier k .
- $u_j^{(k)}$ et $x_i^{(k)}$ jouent le rôle de la k ième dérivée par rapport au temps de la j ième commande et de la i ième coordonnée de l'état respectivement, mais considérés comme des indéterminées indépendantes.

Au chapitre 3.3, on utilisera un autre ensemble d'indéterminées

$\mathbf{Y} = \{y_j^k\}_{j \in \{1, \dots, m\}, k \in \mathbb{N}}$ comme “coordonnées adaptées”.

Dans tous les cas, il y a une infinité d'indéterminées, mais on ne veut considérer que les fonctions (ou les séries formelles) qui ne dépendent que d'un nombre fini d'entre elles.

¹A la section 3.1.2.2, on évoque aussi l'anneau $k[[S]]$ des séries en une infinité de variables.

On peut aussi définir le sous-anneau $k[[S]]_{cv}$ composé des éléments de $k[[S]]$ qui, en tant que séries d'un nombre fini de variables, sont convergentes. On a aussi

$$k[[S]]_{cv} = \bigcup_{F \subset S, F \text{ fini}} k[[F]]_{cv} .$$

On va maintenant cesser de mentionner le cas convergent.

Pour $X \in S$, on note aussi X la série $X \in k[[\{X\}]] \subset k[[S]]$, dont tous les coefficients sont nuls sauf celui du monôme X , qui vaut 1.

Tout $g \in k[[S]]$ peut s'écrire symboliquement

$$g = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_{\text{fini}}^S} a_{\alpha} \mathbf{S}^{\alpha} , \quad (3.4)$$

où

- un multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}_{\text{fini}}^S$ est, par définition, une application $\alpha : S \rightarrow \mathbb{N}$ telle que seul un nombre fini de $\alpha(X)$ sont non nuls, c'est-à-dire telle que

$$\{X \in S, \alpha(X) > 0\} \text{ est un sous-ensemble fini de } S \quad (3.5)$$

(sous-ensemble qui dépend bien sûr de α),

- $a_{\alpha} \in k$ pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}_{\text{fini}}^S$,
- $\mathbf{S}^{\alpha}$ est une notation pour

$$\mathbf{S}^{\alpha} = \prod_{X \in S} X^{\alpha(X)} , \quad (3.6)$$

- le fait que $g \in k[[F]]$ pour un certain ensemble fini $F \subset S$ se traduit par la propriété suivante, vraie pour tout multi-indice α ,

$$\left(\exists X, X \in S, X \notin F \text{ et } \alpha(X) \neq 0 \right) \Rightarrow a_{\alpha} = 0 . \quad (3.7)$$

On peut bien sûr toujours décomposer la somme symbolique (3.4) en ensembles homogènes comme en (3.1)-(3.2). Chaque ensemble homogène est soit zéro soit un polynôme homogène en un nombre fini de variables choisi parmi l'ensemble S . Notons que l'espace des ensembles homogènes de degré q n'est un espace vectoriel de dimension finie que si S est fini.

$k[[S]]$ est un anneau commutatif, où les opérations se font entre séries d'un nombre fini de variables : si $g, h \in k[[S]]$, alors il existe des parties finies G et H de S telles que $g \in k[[G]]$ et $h \in k[[H]]$, et l'on fait la somme et le produit en considérant h et g comme des éléments de $k[[G \cup H]]$. Le résultat suivant est une conséquence de [69, Chap. VII, §1, Th. 2] et du fait que si deux éléments f et g de $k[[S]]$ sont tels que $fg = 1$ et si f est dans $k[[F]]$, avec $F \subset S$ fini, alors nécessairement $g \in k[[F]]$:

Proposition 3.1 $g \in k[[S]]$ est inversible si et seulement si son terme constant $g(0)$ (cf. (3.1)-(3.2)) est non nul.

L'ensemble des éléments non inversibles de $k[[S]]$ est donc l'idéal des séries dont le terme constant est nul, c'est-à-dire l'idéal $\mathcal{M}$ engendré par les séries X pour $X \in S$, qui est l'unique idéal maximal de $k[[S]]$.

L'anneau $k[[S]]$ est Noethérien si S est fini d'après [69, Chap. VII, Théorème 5]. Si S est infini, il n'est pas noethérien car l'idéal $\mathcal{M}$ ne peut être engendré par un nombre fini d'éléments. En revanche, le Théorème de préparation de Weierstrass reste vrai :

Théorème 3.2

(Théorème de préparation de Weierstraß) Soit $f \in k[[S]]$ une série non inversible et régulière par rapport à un certain $X \in S$, c'est à dire que $f \in k[[F]]$ pour un certain F fini, $X \in F \subset S$, et que dans l'écriture (3.1), il y a au moins un terme aX^h avec $a \neq 0$; appelons $s(\geq 1)$ le plus petit exposant h ayant cette propriété. Alors, pour tout $G \subset S$ fini et tout $g \in k[[G]] \subset k[[S]]$, il existe $u \in k[[F \cup G]]$ et s autres séries formelles r_i ($0 \leq i \leq s-1$), avec la propriété que $r_i \in k[[F \cup G] - \{X\}]$, telles que :

$$g = uf + \sum_{i=0}^{s-1} X^i r_i.$$

Les séries formelles u et r_i sont définies de manière unique dans $k[[S]]$ par la donnée de g et f .

C'est une conséquence simple de [69, Chap. VII, Théorème 5] car tout se passe dans $k[[F \cup G]]$, qui est un anneau de séries formelles en un nombre fini d'indéterminées. Notons que ce théorème reste vrai pour des séries convergentes (voir les remarques pages 141 à 145 de [69, Chap. VII, §1]). On utilisera le corollaire suivant de ce théorème :

Corollaire 3.3

Soient F un sous-ensemble fini de S , η un entier positif, $f_1, \dots, f_\nu \in k[[F]] \subset k[[S]]$, et $X_1, \dots, X_\nu$ des éléments non inversibles distincts de F tels que

$$\forall i \in \{1, \dots, \nu\}, \quad f_i = X_i + \tilde{f}_i$$

avec $\tilde{f}_i \in k[[F - \{X_i\}]] \subset k[[F]] \subset k[[S]]$. Alors, pour tout $h \in k[[F]] \subset k[[S]]$, il existe d'uniques $u_i \in k[[F]]$ et $r \in k[[F - \{X_1, \dots, X_\nu\}]]$, telles que :

$$h = \sum_{i=1}^{\nu} u_i f_i + r.$$

Étant donnés les f_i et h , il n'existe pas d'autres $u \in k[[S]]$ et $r \in k[[S - \{X_1, \dots, X_\nu\}]]$ que ceux-ci.

Il suffit d'appliquer ν fois le théorème, avec $s = 1$, $a = 1$, $f = f_i$ et $F = G = F \cup G$.

3.1.2.2 Séries très formelles

On peut se demander pourquoi se restreindre aux séries ne faisant intervenir qu'un nombre fini d'indéterminées prises dans l'ensemble infini S . Une bonne raison pour cela est que le problème qui nous intéresse (voir chapitre 3.4) se pose en terme de fonctions, ou de séries, d'un nombre *fini* de variables.

Il va tout de même être commode d'utiliser à l'occasion l'ensemble des séries d'une infinité de variables. On appellera un tel objet une **série très formelle**. Une série très formelle est donnée par une somme symbolique (3.4), où l'on ne demande plus qu'il existe un ensemble fini $F \subset S$ tel que (3.7) soit satisfait, c'est-à-dire que tous les coefficients a_α peuvent être non nuls ; en revanche, les monômes restent des produits finis, c'est-à-dire que les multi-indices α continuent de ne courir que sur $\mathbb{N}_{\text{fini}}^S$, ensemble des α qui vérifient (3.5).

La somme de deux séries très formelles se calcule en additionnant deux à deux les coefficients des mêmes monômes, et l'on peut vérifier aisément que chaque coefficient du produit de deux séries très formelles est une somme finie de produits de coefficients des deux séries en question. On note $k[[[S]]]$ l'anneau des séries très formelles en les éléments de S .

On ne cherche pas à donner un sens à la convergence de telles séries.

3.1.3 Structure linéaire tangente

3.1.3.1 Dérivées partielles

Pour $g \in k[[[S]]]$, donné par (3.4), et $X \in S$ on définit la dérivée partielle de g par rapport à X comme

$$\frac{\partial g}{\partial X} = \sum_{\beta \in \mathbb{N}_{\text{fini}}^S} b_\beta \mathbf{S}^\beta \quad (3.8)$$

avec $b_\beta = (\beta(X) + 1) a_{\beta + \epsilon_X}$,

le multi-indice ϵ_X étant défini par $\epsilon_X(X) = 1$ et $\epsilon_X(Y) = 0$ pour $Y \neq X$.

Rappelons que, par définition de $k[[[S]]]$, il existe, pour chaque g , un ensemble fini $F \subset S$ tel que $g \in k[[[F]]]$. Pour $X \in S$, on a bien

$$X \notin F \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial X} = 0, \quad (3.9)$$

c'est-à-dire que si g “ne dépend pas de X ”, sa dérivée partielle par rapport à X est bien nulle. Formellement, (3.9) découle de la définition (3.8) car $(\beta + \epsilon_X)(X)$ vaut au moins 1 pour chaque β , si bien que, d'après (3.7) tous les b_β sont nuls si $X \notin F$.

Par ailleurs, si $X \in F$, la définition est bien la définition classique de la dérivée partielle d'une série en un nombre fini d'indéterminées par rapport à l'un de ces indéterminées.

On vérifie aisément que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X} : k[[S]] &\rightarrow k[[S]] \\ g &\mapsto \frac{\partial g}{\partial X} \end{aligned}$$

est une k -dérivation, c'est-à-dire qu'elle est nulle sur k , qu'elle est linéaire pour la structure de k -espace vectoriel, et que $\partial(gh)/\partial X = g \partial h/\partial X + h \partial g/\partial X$.

3.1.3.2 Module des différentielles, dérivations

La construction de la “dérivation universelle” d'un anneau quelconque dans son module des “différentielles de Kähler” est faite par exemple dans [32, chapitre XIX, §3], voir aussi [26] pour le cas d'un anneau différentiel. La construction étant plus directe dans notre cas d'un anneau de séries formelles, donnons la explicitement.

Soit $\Lambda^1(k[[S]])$ le $k[[S]]$ -module libre engendré par les éléments de S , ou plutôt, ce qui revient formellement au même, par les éléments d'un ensemble dS , qui est en bijection avec S (on note dX l'image de X par cette bijection) :

$$\Lambda^1(k[[S]]) = \bigoplus_{Y \in dS} k[[S]] Y = \bigoplus_{X \in S} k[[S]] dX, \quad (3.10)$$

et la k -dérivation

$$\begin{aligned} d : k[[S]] &\rightarrow \Lambda^1(k[[S]]) \\ g &\mapsto \sum_{X \in S} \frac{\partial g}{\partial X} dX \end{aligned} \quad (3.11)$$

(cette somme est en réalité finie).

A une application quelconque $\delta : S \rightarrow k[[S]]$, on associe

$$\begin{aligned} D_\delta : k[[S]] &\rightarrow k[[S]] \\ g &\mapsto \sum_{X \in S} \delta(X) \frac{\partial g}{\partial X} \end{aligned} \quad (3.12)$$

(pour tout $g \in k[[S]]$, cette somme est en réalité finie puisque $\frac{\partial g}{\partial X}$ est nul sauf pour X dans une partie finie de S). Il est facile de vérifier de D_δ est une k -dérivation, et que, réciproquement,

toute k -dérivation $D : k[[S]] \rightarrow k[[S]]$ est de la forme D_δ , en définissant, $\delta(X)$, pour tout $X \in S$, comme étant égal à $D(X)$, où l'on considère X comme un élément de $k[[S]]$.

Cette remarque entraîne que toute k -dérivation $D : k[[S]] \rightarrow M$ où M est un $k[[S]]$ -module peut s'écrire $D = L \circ d$ où $L : \Lambda^1(k[[S]]) \rightarrow M$ est $k[[S]]$ -linéaire (c'est-à-dire est un homomorphisme de $k[[S]]$ -modules). $d : k[[S]] \rightarrow \Lambda^1(k[[S]])$ est donc la dérivation universelle décrite dans [32, chap XIX, §3], et $\Lambda^1(k[[S]])$ est le module des différentielles ("différentielles de Kähler" dans [26]), habituellement noté $\Omega_{k[[S]]/k}^1$.

3.1.3.3 Algèbre extérieure, lemme de Poincaré

$\Lambda^1(k[[S]])$ étant un module sur l'anneau commutatif $k[[S]]$, on peut définir sa puissance extérieure comme dans [32, chapitre XIX, §1] et on note, pour tout $j \in \mathbb{N}$

$$\Lambda^j(k[[S]]) = \bigwedge^j \left(\Lambda^1(k[[S]]) \right).$$

Le symbole $\wedge$ désigne le produit extérieur entre deux formes. Pour tout $r, s \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \wedge : \Lambda^r(k[[S]]) \times \Lambda^s(k[[S]]) &\rightarrow \Lambda^{r+s}(k[[S]]) \\ (\eta, \xi) &\mapsto \eta \wedge \xi \end{aligned}$$

est une application $k[[S]]$ -bilinéaire. En plus de cette distributivité, $\wedge$ est associatif et vérifie, pour $\eta \in \Lambda^r(k[[S]])$ et $\xi \in \Lambda^s(k[[S]])$, la propriété d'alternance

$$\eta \wedge \xi = (-1)^{rs} \xi \wedge \eta.$$

La r ième puissance extérieure d'un module libre est aussi un module libre. On peut, comme en [32, page 734], construire une base de $\Lambda^r(k[[S]])$ à partir d'une base du $k[[S]]$ -module libre $\Lambda^1(k[[S]])$: si $\{\eta_\alpha\}_{\alpha \in J}$ est une base du $k[[S]]$ -module $\Lambda^1(k[[S]])$, où J est un ensemble muni d'un ordre total, alors une base du $k[[S]]$ -module $\Lambda^r(k[[S]])$ est donnée par

$$\{\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_r\}_{(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in J^r, \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_r}. \quad (3.13)$$

En particulier, puisque $(dX)_{X \in S}$ est une base de $\Lambda^1(k[[S]])$, si l'on choisit un ordre total sur S , une base de $\Lambda^r(k[[S]])$ est donnée par

$$\{dX_1 \wedge \dots \wedge dX_r\}_{(X_1, \dots, X_r) \in S^r, X_1 < X_2 < \dots < X_r}. \quad (3.14)$$

Ainsi tout $\eta \in \Lambda^r(k[[S]])$ s'écrit de manière unique

$$\eta = \sum_{\substack{(X_1, \dots, X_r) \in S^r \\ X_1 < X_2 < \dots < X_r}} a_{(X_1, \dots, X_r)} dX_1 \wedge \dots \wedge dX_r \quad (3.15)$$

avec $a_{(X_1, \dots, X_r)} \in k[[S]]$ pour tout $(X_1, \dots, X_r)$.

Pour tout $r \in \mathbb{N}$, la différentielle extérieure

$$d : \Lambda^r(k[[S]]) \rightarrow \Lambda^{r+1}(k[[S]])$$

associe à tout $\eta \in \Lambda^r(k[[S]])$ donné par (3.15) la forme de degré $r + 1$:

$$d\eta = \sum_{\substack{(X_1, \dots, X_r) \in S^r \\ X_1 < X_2 < \dots < X_r}} da_{(X_1, \dots, X_r)} \wedge dX_1 \wedge \dots \wedge dX_r \in \Lambda^{r+1}(k[[S]]) .$$

Le lemme de Poincaré est valable dans les séries formelles, c'est-à-dire que :

Proposition 3.4 (Lemme de Poincaré) *Pour tout entier $j \geq 1$ et toute j -forme $\omega \in \Lambda^j(k[[S]])$ telle que $d\omega = 0 \in \Lambda^{j+1}(k[[S]])$, il existe $\eta \in \Lambda^{j-1}(k[[S]])$ telle que $\omega = d\eta$.*

Le fait que S soit infini ne change rien à la preuve de cette proposition : une forme ω ne fait intervenir qu'un nombre fini de variable, et l'on peut appliquer le résultat bien connu pour les séries formelle en ce nombre fini d'indéterminées.

En d'autres termes, le complexe de de Rahm

$$k[[S]] \xrightarrow{d} \Lambda^1(k[[S]]) \xrightarrow{d} \Lambda^2(k[[S]]) \xrightarrow{d} \Lambda^3(k[[S]]) \xrightarrow{d} \dots \dots \quad (3.16)$$

est exact.

Comme chaque $k[[S]]$ -module $\Lambda^j(k[[S]])$ est engendré (librement) par des éléments de la forme $d\eta$ avec $\eta \in \Lambda^{j-1}(k[[S]])$, on peut étendre toute dérivation $D : k[[S]] \rightarrow k[[S]]$ (voir (3.12)) en une dérivation $D : \Lambda^j(k[[S]]) \rightarrow \Lambda^j(k[[S]])$ qui "commute avec" la différentielle extérieure, c'est-à-dire que, pour tout $\eta \in \Lambda^{j-1}(k[[S]])$, on a $d(D\eta) = D(d\eta) \in \Lambda^j(k[[S]])$. Cette dérivation est une classique "dérivée de lie".

On considère aussi l'algèbre extérieure $\Lambda(k[[S]])$ définie par

$$\Lambda(k[[S]]) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \Lambda^i(k[[S]]) . \quad (3.17)$$

Un élément quelconque de $\Lambda(k[[S]])$ est une somme "symbolique" de formes de différents degrés. Seules les formes homogènes, c'est-à-dire les sommes symboliques dont un seul terme est non nul ont un sens concret. L'intérêt d'introduire cette somme abstraite est que le produit extérieur devient une multiplication interne, faisant de $\Lambda(k[[S]])$ une $k[[S]]$ -algèbre, et l'on peut étendre $d : \Lambda(k[[S]]) \rightarrow \Lambda(k[[S]])$ (dérivation extérieure, qui fait augmenter le degré des formes différentielles de 1), ainsi que toute dérivation $D : k[[S]] \rightarrow k[[S]]$ en une dérivation $D : \Lambda^j(k[[S]]) \rightarrow \Lambda^j(k[[S]])$, qui commute avec d et préserve le degré des formes différentielles.

3.1.4 “Ordre” d’une série formelle

3.1.4.1 Poids des indéterminées

Il est classique —cf. [69, Chap. VII, §1]— de définir l’ordre d’une série comme étant le degré de l’ensemble homogène non nul de plus bas degré ($+\infty$ pour la série nulle). On va reprendre ceci, mais en comptant les différentes variables avec des poids différents. On suppose donné un ensemble S , et une application **poids** :

$$\pi : S \rightarrow \mathbb{N} - \{0\}$$

Le poids “classique” est celui défini par $\pi(X) = 1$ pour tout X . C’est celui qui est implicitement utilisé usuellement, y compris précédemment quand on parle de degré. Ce n’est pas celui qui nous intéressera le plus.

Définition 3.5 On dira que le **poids** π est **gros** si et seulement si, pour tout entier j , l’ensemble

$$S_{[\leq j]} = \{X \in S, \pi(X) \leq j\} \quad \text{est fini.} \quad (3.18)$$

Si S est fini, tous les poids sont gros. Si S est infini, le poids “classique” n’est évidemment pas gros. Il existe des poids gros sur S si et seulement si S est dénombrable.

A l’aide du poids π , on définit, pour tout multi-indice² α , la grandeur

$$|\alpha|_\pi = \sum_{X \in S} \pi(X) \alpha(X), \quad (3.19)$$

qui coïncide avec le traditionnel $|\alpha| = \sum_{X \in S} \alpha(X)$ si π est le poids “classique”.

3.1.4.2 Polynômes homogènes

Définition 3.6 Soit $q \in \mathbb{N}$. Une série $g \in k[[S]]$, écrite symboliquement comme en (3.4), est un **polynôme homogène de degré q** si $g \neq 0$ et $a_\alpha = 0$ pour tout α tel que $|\alpha|_\pi \neq q$. On note $k[S]^{[q]}$ le k -espace vectoriel des polynômes homogènes de degré q , auxquels on rajoute zéro.

Si S est infini, le k -espace vectoriel $k[S]^{[q]}$ est en général infini ; c’est par exemple le cas pour le poids “classique”. Ici intervient l’intérêt des poids “gros” (cf. Définition 3.5) : un

² Les multi-indices ont été introduits en (3.4)-(3.6). Un multi-indice $\alpha : S \rightarrow \mathbb{N}$ associe à chaque indéterminée un entier $\alpha(X)$, qui est son exposant dans le monôme correspondant ; tout multi-indice vérifie (3.7), c’est-à-dire que seul un nombre fini parmi les $\alpha(X)$ sont non nuls.

polynôme homogène de degré q appartient forcément à $k[[S_{[\leq q]}]] \subset k[[S]]$ ($S_{[\leq q]}$ est défini en (3.18)) car, si $X \notin S_{[\leq q]}$ et $\alpha(X) > 0$, on a forcément (cf. (3.19)) $|\alpha|_\pi > q$. Si le poids π est gros, les polynômes homogènes sont donc des polynômes en un nombre fini de variables, homogènes au sens d'un certain poids. En particulier, on a :

Proposition 3.7 *Si le poids π est gros, chaque $k[S]^{[q]}$ est un k -espace vectoriel de dimension finie. Plus précisément, si N_q est le cardinal de l'ensemble fini $S_{[\leq q]}$; la dimension de $k[S]^{[q]}$ est égale au nombre de solutions entières $(\alpha(X))_{X \in S_{[\leq q]}} \in \mathbb{N}^{N_q}$ de*

$$\sum_{X \in S_{[\leq q]}} \pi(X) \alpha(X) = q. \quad (3.20)$$

Voyons ceci sur un exemple qui sera repris dans les chapitres suivants.

Exemple. Reprenons le cas où l'ensemble d'indéterminées est $S = \mathbf{Y} = \{y_j^k\}_{j \in \{1, \dots, m\}, k \in \mathbb{N}}$ (utilisé au chapitre 3.3 comme “coordonnées adaptées”, déjà cité en exemple page 60). L'ensemble étant infini, le poids “classique” n'est pas gros. En revanche, le poids donné par

$$\pi(y_j^k) = k + 1 \quad (3.21)$$

est gros puisque le cardinal de $S_{[\leq j]}$ est mj . De fait, les polynômes homogènes de degré q forment un k espace vectoriel qui a pour dimension le nombre de solutions entières $(\alpha_{\mu, \lambda})_{\substack{1 \leq \mu \leq m \\ 0 \leq \lambda \leq q-1}} \in \mathbb{N}^{qm}$ de

$$\sum_{\substack{1 \leq \mu \leq m \\ 0 \leq \lambda \leq q-1}} (\lambda + 1) \alpha_{\mu, \lambda} = q. \quad (3.22)$$

On note $\nu(m, q)$ ce nombre de solutions entières.

3.1.4.3 Ordre d'une série

On peut décomposer la somme symbolique (3.4) en :

$$g = \sum_{q \in \mathbb{N}} g_q, \quad \text{avec } g_q \in k[S]^{[q]}, \quad (3.23)$$

en définissant g_q , l'ensemble homogène (pondéré) de degré q de g par :

$$g_q = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_{\text{fini}}^S, |\alpha|_\pi = q} a_\alpha S^\alpha. \quad (3.24)$$

Des formules comme (3.3) restent vraies pour des poids quelconques, comme pour le poids “classique”.

Définition 3.8 L'ordre de $g \in k[[S]]$, noté $\mathbf{o}(g)$, est le plus petit entier q tel que l'ensemble homogène (pondéré) de degré q de g (g_q dans (3.24)) soit non nul, c'est $+\infty$ si $g = 0$.

Si g est donné par (3.4),

$$\mathbf{o}(g) = \min_{\alpha \in \mathbb{N}_{\text{fini}}^S, a_\alpha \neq 0} \sum_{X \in S} \pi(X) \alpha(X). \quad (3.25)$$

Plusieurs résultats concernant l'ordre sont précisés dans [69, Chap. VII, §1]. En particulier, $\mathbf{o}$ est une *valuation* sur $k[[S]]$, c'est-à-dire que, pour tout g, h dans $k[[S]]$,

$$\begin{cases} \mathbf{o}(g) = +\infty \Leftrightarrow g = 0, \\ \mathbf{o}(g + h) \geq \min\{\mathbf{o}(g), \mathbf{o}(h)\}, \\ \mathbf{o}(gh) = \mathbf{o}(g) + \mathbf{o}(h). \end{cases} \quad (3.26)$$

La propriété suivante relie l'ordre d'une série à celui de ses dérivées partielles :

Proposition 3.9 Pour $g \in k[[S]]$ tel que $g(0) = 0$, on a

$$\mathbf{o}(f) = \min_{X \in S} \{ \pi(X) + \mathbf{o}\left(\frac{\partial f}{\partial X}\right) \}.$$

Démonstration : Soit $g \in k[[S]]$ donné par (3.4) tel que $g(0) = 0$, c'est-à-dire $a_0 = 0$. Pour tout $X \in S$, on définit le multi-indice ϵ_X par $\epsilon_X(Y) = \delta_{X,Y}$, où δ est le symbole de Kronecker, pour tout $Y \in S$ (autrement dit $\epsilon_X(X) = 1$ et $\epsilon_X(Y) = 0$ si $Y \neq X$). On peut alors écrire

$$\frac{\partial f}{\partial X} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_{\text{fini}}^S} a_\alpha \alpha(X) \mathbf{S}^{(\alpha - \epsilon_X)}.$$

D'après (3.25) (issu de la Définition 3.8), on a

$$\begin{aligned} \mathbf{o}(g) &= \min_{\alpha \in \mathbb{N}_{\text{fini}}^S, a_\alpha \neq 0} \sum_{Y \in S} \pi(Y) \alpha(Y), \\ \mathbf{o}\left(\frac{\partial g}{\partial X}\right) &= \min_{\alpha \in \mathbb{N}_{\text{fini}}^S, a_\alpha \alpha(X) \neq 0} \sum_{Y \in S} \pi(Y) (\alpha(Y) - \delta_{X,Y}). \end{aligned}$$

En développant la seconde expression, on obtient

$$\mathbf{o}\left(\frac{\partial g}{\partial X}\right) + \pi(X) = \min_{\alpha \in \mathbb{N}_{\text{fini}}^S, a_\alpha \alpha(X) \neq 0} \sum_{Y \in S} \pi(Y) \alpha(Y).$$

Ceci entraîne clairement, au vu de l'expression de $\mathbf{o}(g)$, que $\mathbf{o}\left(\frac{\partial g}{\partial X}\right) + \pi(X) \geq \mathbf{o}(g)$ pour tout $X \in S$. De plus, comme $a_0 = 0$, il existe, pour tout α tel que $a_\alpha \neq 0$, un $X \in S$ tel que $\alpha(X) \neq 0$, donc l'égalité ci-dessus entraîne

$$\min_{X \in S} \left(\mathbf{o}\left(\frac{\partial g}{\partial X}\right) + \pi(X) \right) = \min_{\alpha \in \mathbb{N}_{\text{fini}}^S, a_\alpha \neq 0} \sum_{Y \in S} \pi(Y) \alpha(Y) = \mathbf{o}(g). \quad \blacksquare$$

3.1.4.4 Ordre d'une forme différentielle

On peut étendre les constructions ci-dessus à tout $\Lambda(k[[S]])$, en donnant à chaque dX le même poids que X .

Définition 3.10 Soit $q \in \mathbb{N}$. Une forme différentielle $\eta \in \Lambda^r(k[[S]])$, donnée par (3.15) est une **r -forme différentielle polynomiale homogène de degré q** si et seulement si $\eta \neq 0$ et

$$\begin{aligned} \pi(X_1) + \cdots + \pi(X_r) > q &\Rightarrow a_{(X_1, \dots, X_r)} = 0, \\ \pi(X_1) + \cdots + \pi(X_r) \leq q &\Rightarrow a_{(X_1, \dots, X_r)} \in k[S]^{[q - \pi(X_1) - \cdots - \pi(X_r)]}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

On note $\Lambda^r(k[S])^{[q]}$ le k -espace vectoriel des r -forme différentielles polynomiales homogènes de degré q , auxquelles on rajoute zéro.

Comme pour les séries (3.23), on peut décomposer (3.15) en

$$\eta = \sum_{q \in \mathbb{N}} \eta_q, \quad \text{avec } \eta_q \in \Lambda^r(k[S])^{[q]}, \quad (3.28)$$

en définissant η_q , l'**ensemble homogène (pondéré) de degré q** de η qui sélectionne, dans chaque $a_{(X_1, \dots, X_r)}$ sa composante homogène de degré $q - \pi(X_1) - \cdots - \pi(X_r)$. On peut alors définir l'**ordre** de η , noté $\mathbf{o}(\eta)$, comme le plus petit q tel que η_q soit non nul ($+\infty$ si ils sont tous nuls). C'est aussi égal à

$$\mathbf{o}(\eta) = \min_{\substack{(X_1, \dots, X_r) \in S^r \\ X_1 < X_2 < \cdots < X_r}} \mathbf{o}(a_{(X_1, \dots, X_r)}) + \pi(X_1) + \cdots + \pi(X_r). \quad (3.29)$$

La proposition 3.7 est un cas particulier de la suivante :

Proposition 3.11 Si le poids π est gros, chaque $\Lambda^r(k[S])^{[q]}$ est un k -espace vectoriel de dimension finie.

On ne donne pas sa dimension en général, mais seulement sur l'exemple qui nous importera.

Exemple. Supposons, comme page 68, que $S = \mathbf{Y} = \{y_j^k\}_{j \in \{1, \dots, m\}, k \in \mathbb{N}}$ et que le poids est donné par (3.21). Notons toujours $\nu(m, q)$ le nombre de solutions entières $(\alpha_{\mu, \lambda})_{1 \leq \mu \leq m, 0 \leq \lambda \leq q-1} \in \mathbb{N}^{qm}$ de (3.22). La dimension du k -espace vectoriel $\Lambda^r(k[\mathbf{Y}])^{[q]}$ vaut, pour $r = 1$ ou $r = 2$,

$$\begin{aligned} \dim_k \Lambda^1(k[\mathbf{Y}])^{[q]} &= m \sum_{j=0}^{q-1} \nu(m, j), \\ \dim_k \Lambda^2(k[\mathbf{Y}])^{[q]} &= m \sum_{j=0}^{q-2} \nu'(m, q-j) \nu(m, j) \end{aligned} \quad (3.30)$$

où $\nu'(m, i)$ est le nombre de $dy_j^k \wedge dy_{j'}^{k'}$ indépendants tels que $k + k' + 2 = i$, c'est-à-dire

$$\nu'(m, 2p+1) = m^2 p, \quad \nu'(m, 2p) = m^2(p-1) + \frac{m(m-1)}{2}. \quad (3.31)$$

Introduisons enfin une notation utile. On écrira $g = h + \mathcal{O}_k$ pour dire que g et h ne diffèrent que par un terme d'ordre au moins k :

Définition 3.12 (notation $\mathcal{O}$) pour tous entiers r et q et tout g, h dans $\Lambda^r(k[S])$, l'écriture

$$g = h + \mathcal{O}_q, \quad \text{ou} \quad g + \mathcal{O}_q = h + \mathcal{O}_q \quad (3.32)$$

signifie $\mathbf{o}(g - h) \geq q$. En particulier, $g = \mathcal{O}_q$ signifie $\mathbf{o}(g) \geq q$.

3.1.4.5 Lemme de Poincaré homogène

Il est facile de vérifier que nos définitions de l'ordre et des polynômes homogènes sont telle que, pour tout $r \geq 0$ la différentielle extérieure d'une r -forme différentielle polynomiale homogène de degré q (Si $r = 0$, 0-forme différentielle polynomiale signifie polynôme) est soit nulle soit une $(r+1)$ -forme différentielle polynomiale homogène de degré q . Autrement dit, pour tout q , on a une restriction de (3.16) aux parties homogènes :

$$k[S]^{[q]} \xrightarrow{d} \Lambda^1(k[S])^{[q]} \xrightarrow{d} \Lambda^2(k[S])^{[q]} \xrightarrow{d} \Lambda^3(k[S])^{[q]} \xrightarrow{d} \dots \dots \quad (3.33)$$

Il est à noter que $\Lambda^r(k[S])^{[q]} = \{0\}$ si $r > q$ et donc la suite ci-dessus s'arrête, ce qui n'est pas le cas de (3.16). On a de plus

Proposition 3.13 (Lemme de Poincaré homogène) Pour tous entiers r et q strictement positifs, et tout $\omega \in \Lambda^r(k[S])^{[q]}$ tel que $d\omega = 0 \in \Lambda^{r+1}(k[S])^{[q]}$, il existe $\eta \in \Lambda^{r-1}(k[S])^{[q]}$ tel que $\omega = d\eta$.

Corollaire 3.14

Pour tous entiers r et q strictement positifs, et tout $\omega \in \Lambda^r(k[[S]])$, si $d\omega = \mathcal{O}_q$, alors il existe $\eta \in \Lambda^{r-1}(k[[S]])$ tel que $\omega = d\eta + \mathcal{O}_q$.

3.1.4.6 Filtration associée

Pour tout entier j , soit

$$k[[S]]_j = \{g \in k[[S]], \mathfrak{o}(g) \geq j\} \quad (3.34)$$

l'ensemble des séries d'ordre au moins j . Grâce à la propriété multiplicative (3.26) de l'ordre, il s'agit d'un idéal de $k[[S]]$. On a en fait

$$\begin{aligned} k[[S]] &= k[[S]]_0 \supset k[[S]]_1 \supset k[[S]]_2 \supset \cdots, \\ k[[S]]_i k[[S]]_j &\subset k[[S]]_{i+j}, \\ \bigcap_{j \in \mathbb{N}} k[[S]]_j &= \{0\}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Notons que, pour tout $g \in k[[S]]$, on a

$$\mathfrak{o}(g) = j \iff g \in k[[S]]_j \text{ et } g \notin k[[S]]_{j+1}, \quad (3.36)$$

si bien que la donnée de $\mathfrak{o}(\cdot)$ est équivalente à la donnée des $k[[S]]_j$.

On peut aussi, pour tous entiers r et j , définir

$$\Lambda^r(k[[S]])_j = \{g \in \Lambda^r(k[[S]]), \mathfrak{o}(g) \geq j\}, \quad (3.37)$$

qui est, pour les mêmes raisons, un sous $k[[S]]$ -module de $\Lambda^r(k[[S]])$. On a une filtration du $k[[S]]$ -module $\Lambda^r(k[[S]])$:

$$\Lambda^r(k[[S]]) = \Lambda^r(k[[S]])_0 \supset \Lambda^r(k[[S]])_1 \supset \Lambda^r(k[[S]])_2 \supset \cdots. \quad (3.38)$$

La proposition suivante concerne les quotients de $k[[S]]$ ou $\Lambda^r(k[[S]])$ par ces idéaux ou sous-modules, quotients qui représentent les séries “tronquées” à un ordre fini.

Proposition 3.15 *Si le poids π est gros, alors pour tout entier j , l'anneau quotient $k[[S]]/k[[S]]_j$ est un k -espace vectoriel de dimension finie, isomorphe à*

$$\bigoplus_{i=0}^{j-1} k[S]^{[i]},$$

et le module quotient $\Lambda^r(k[[S]]) / \Lambda^r(k[[S]])_j$ est aussi, pour tout r , un k -espace vectoriel de dimension finie, isomorphe à

$$\bigoplus_{i=0}^{j-1} \Lambda^r(k[S])^{[i]}.$$

Démonstration : Suivant (3.23), une série s'écrit, de manière unique, comme une somme de polynômes homogènes de degrés 0 à $j - 1$ et d'une série d'ordre au moins j , ce qui prouve la première partie d'après la proposition 3.7. La seconde partie en découle d'après la Proposition 3.11. ■

3.1.5 Substitutions dans les séries

3.1.5.1 Substitutions

Cas d'un nombre fini d'indéterminées Si $F = \{X_1, \dots, X_N\}$ et $G = \{Y_1, \dots, Y_P\}$ sont deux ensembles finis, et si on se donne P séries $\zeta_i \in k[[F]]$, $1 \leq i \leq P$, toutes non inversibles, on peut associer à toute série $g \in k[[G]]$ une série $g(\zeta_1, \dots, \zeta_N) \in k[[F]]$ obtenue en “substituant” dans g chaque indéterminée Y_i par la série ζ_i (en les indéterminées X_j). Cette substitution ne va pas d'elle même a priori puis que l'on semble écrire des sommes infinies, mais il est facile de se convaincre que, puisque les termes constants de chaque ζ_i sont nuls, chaque coefficients de la série en X_i résultant de la substitution est une somme finie de produits de coefficients des séries ζ_i et de la série g (ce qui serait faux si les ζ_i avaient des termes constants); dans [69, Chap. VII, §1] est décrite la topologie suivant laquelle la série substituée est la limite des sommes partielles.

Bien sûr, la famille des ζ_i représente (si elles étaient convergentes !...) un germe d'application (analytique) $\zeta : k^N \rightarrow k^P$ qui envoie zéro sur zéro, et si l'on considère g comme un germe de fonction $k^P \rightarrow k$, $g(\zeta_1, \dots, \zeta_N)$ est le germe de $g \circ \zeta : k^N \rightarrow k$.

Cas général Si maintenant S et T sont deux ensembles non nécessairement finis, et si on se donne une famille $\zeta = (\zeta_Y)_{Y \in T}$ d'éléments non inversibles $\zeta_Y \in k[[S]]$, alors à tout $g \in k[[T]]$ on peut associer une série $g(\zeta) \in k[[S]]$ obtenue en “substituant” chaque $Y \in T$ par la série ζ_Y . Pour g donné, cette substitution ne fait intervenir qu'un nombre fini de variables : en effet, par définition, il existe une partie finie G de T telle que $g \in k[[G]]$, et il existe alors aussi une partie finie F de S telle que $\zeta_Y \in k[[F]]$ pour tout $Y \in G$, si bien que $g(\zeta) \in k[[F]]$.

Ici aussi, on peut voir la famille $\{\zeta_Y\}_{Y \in T}$ comme une application $k^S \rightarrow k^T$ et la substitution comme une composition. La règle de dérivation des applications composées (“chain rule”)

prend la forme suivante :

Proposition 3.16 Si $\zeta = (\zeta_Y)_{Y \in T}$ est une famille d'éléments non inversibles de $k[[S]]$, et $g \in k[[T]]$, on a

$$d(g(\zeta)) = \sum_{Y \in T} \frac{\partial g}{\partial Y}(\zeta) d(\zeta_Y) . \quad (3.39)$$

On peut aussi utiliser la famille ζ pour associer à une forme de degré r en les “anciennes indéterminées” $\eta \in \Lambda^r(k[[T]])$ une forme de degré r en les “nouvelles indéterminées”, notée $\eta(\zeta) \in \Lambda^r(k[[S]])$ (la notation classique en géométrie différentielle serait $\zeta_* \eta$). Si, comme en (3.15), η s'écrit

$$\eta = \sum_{\substack{(Y_1, \dots, Y_r) \in T^r \\ Y_1 < Y_2 < \dots < Y_r}} b_{(Y_1, \dots, Y_r)} dY_1 \wedge \dots \wedge dY_r$$

avec $b_{(Y_1, \dots, Y_r)} \in k[[T]]$ pour tout $(Y_1, \dots, Y_r)$, elle est définie par

$$\eta(\zeta) = \sum_{\substack{(Y_1, \dots, Y_r) \in T^r \\ Y_1 < Y_2 < \dots < Y_r}} b_{(Y_1, \dots, Y_r)}(\zeta) d(\zeta_{Y_1}) \wedge \dots \wedge d(\zeta_{Y_r}) . \quad (3.40)$$

3.1.5.2 Système de coordonnées locales, changement d'indéterminées

Définition 3.17 Étant donné S un ensemble, un **système de coordonnées** sur $k[[S]]$ est une famille $\zeta = (\zeta_Y)_{Y \in T}$ d'éléments de $k[[S]]$, indicée³ par un autre ensemble T , telle que

- (i). chaque $\zeta_Y \in k[[S]]$ est non inversible,
- (ii). il existe une famille $\xi = (\xi_X)_{X \in S}$ — que l'on notera parfois ζ^{-1} — d'éléments de $k[[T]]$ telle que
 - (a) chaque $\xi_X \in k[[T]]$ est non inversible,
 - (b) pour tout $X \in S$, $\xi_X(\zeta) = X$,
 - (c) pour tout $Y \in T$, $\zeta_Y(\xi) = Y$.

Un système de coordonnées est un “germe de difféomorphisme” $k^S \rightarrow k^T$; il définit un isomorphisme (de k -algèbre)

$$\begin{aligned} k[[T]] &\rightarrow k[[S]] \\ h &\mapsto h(\xi) , \end{aligned}$$

et aussi, selon (3.40), un isomorphisme $\Lambda^r(k[[T]]) \rightarrow \Lambda^r(k[[S]])$ pour tout entier r .

³ Il peut paraître surprenant d'utiliser la même notation T (ou S) pour l'ensemble des indéterminées elles-mêmes (notation $k[[T]]$ par exemple) et pour l'ensemble des indices des coordonnées (notation $(\zeta_Y)_{Y \in T}$ par exemple). C'est le choix le plus simple en l'absence d'une “numérotation” naturelle de l'ensemble T (ou S). Bien sûr, si par exemple $S = \{X_1, X_2\}$, $T = \{Y_1, Y_2\}$, on préférera noter le changement de coordonnées (y_1, y_2) que (y_{Y_1}, y_{Y_2}) !

3.1.5.3 Changement d'indéterminées homogène pour l'ordre pondéré

Supposons donnés, pour chacun des ensembles S et T une application “poids”, comme à la section 3.1.4 :

$$\pi : S \rightarrow \mathbb{N} - \{0\}, \quad \rho : T \rightarrow \mathbb{N} - \{0\},$$

et notons

$$\mathbf{o}_\pi : k[[S]] \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}, \quad \mathbf{o}_\rho : k[[T]] \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

les “ordres pondérés” sur $k[[S]]$ et $k[[T]]$ respectivement, associés à ces poids. On dira qu'un changement de coordonnées est **homogène** si et seulement si la substitution par ces changements d'indéterminées envoie un ordre pondéré sur l'autre, c'est-à-dire si, pour tout $g \in k[[S]]$ et $h \in k[[T]]$, on a

$$\mathbf{o}_\rho(h) = \mathbf{o}_\pi(h(\zeta)) \quad , \quad \mathbf{o}_\pi(g) = \mathbf{o}_\rho(g(\zeta^{-1})) \quad (3.41)$$

(pour la signification de ζ^{-1} , voir la Définition 3.17).

Pour qu'un changement de coordonnées soit homogène, il faut bien sûr que $\mathbf{o}_\pi(\zeta_Y) = \rho(Y)$ pour tout $Y \in T$, mais cela ne suffit pas.

Proposition 3.18 *Un changement de coordonnées $\zeta = (\zeta_Y)_{Y \in T}$ est homogène si et seulement si la substitution induit, pour chaque entier j , un isomorphisme*

$$k[T]^{[j]} \rightarrow k[[S]]_j / k[[S]]_{j+1}.$$

Remarque : On peut aussi considérer que cet isomorphisme va de $k[[T]]_j / k[[T]]_{j+1}$ dans $k[[S]]_j / k[[S]]_{j+1}$ en choisissant, par troncation, un représentant du quotient dans $k[T]^{[j]}$; en revanche, la substitution n'envoie pas, en général $k[T]^{[j]}$ dans $k[S]^{[j]}$.

Démonstration : Comme remarqué à la fin de la section 3.1.5.2, la substitution induit un isomorphisme $k[[T]] \rightarrow k[[S]]$; la donnée de la filtration étant, d'après (3.36), équivalente à celle de l'ordre, le changement de coordonnées est homogène si et seulement si les restrictions de cet isomorphisme aux $k[[T]]_j$ sont des isomorphismes $k[[T]]_j \rightarrow k[[S]]_j$. Le résultat est obtenu en passant aux quotients et utilisant, à gauche, le relèvement $(k[[T]]_j / k[[T]]_{j+1}) \rightarrow k[T]^{[j]}$ par troncation. ■

3.2 L'algèbre différentielle locale associée à un système de contrôle

On considère un système de contrôle

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (3.42)$$

où

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ et } u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m, \quad (3.43)$$

(m et n sont des entiers) et f est analytique réelle.

L'étude qui suit est locale autour d'un point d'équilibre, c'est-à-dire que l'on suppose⁴ que $f(0, 0) = 0$.

Comme l'étude est locale, on peut considérer f comme la donnée de n séries (convergentes, bien sûr, mais vu qu'on ne l'exploitera pas, on ne le note même pas) :

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \quad f_i \in \mathbb{R}[[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m]], \quad f_i(0) = 0, \quad i \in \{1, \dots, n\}. \quad (3.44)$$

Cette section donne une construction détaillée des germes de fonctions, de formes différentielles, d'opérateurs différentiels, etc... le long des solutions de ce système. Toutes les données sont supposées analytiques, mais on ne se soucie pas de la convergence des séries. On omet le mot "germe" dans tout ce qui suit, et on dit ainsi souvent "fonction" au lieu de "série formelle".

3.2.1 L'anneau $\mathcal{A}$ des fonctions

Définissons deux ensembles d'indéterminées, l'un contenant $x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m$ et toutes leurs "dérivées par rapport au temps" (la k ème dérivée de h est notée $h^{(k)}$), considérées comme des indéterminées indépendantes, et l'autre contenant $x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m$, mais les dérivées de $u_1, \dots, u_m$ seulement :

$$\Xi = \{x_i^{(k)}\}_{\substack{(i,k) \in \mathbb{N}^2 \\ 1 \leq i \leq n}} \cup \{u_j^{(k)}\}_{\substack{(j,k) \in \mathbb{N}^2 \\ 1 \leq j \leq m}}, \quad \Upsilon = \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \cup \{u_j^{(k)}\}_{\substack{(j,k) \in \mathbb{N}^2 \\ 1 \leq j \leq m}}. \quad (3.45)$$

Puisque $\{x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m\} \subset \Upsilon \subset \Xi$, on a, avec les notations de la section 3.1.2 et au vu de (3.44),

$$f_i \in \mathbb{R}[[\Upsilon]] \subset \mathbb{R}[[\Xi]], \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

$\mathbb{R}[[\Xi]]$ étant l'anneau des séries formelles d'un nombre fini de variables prises parmi $x, u, \dot{x}, \dot{u}, \dots$, on lui donne une structure d'anneau différentiel en définissant

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} : \mathbb{R}[[\Xi]] &\rightarrow \mathbb{R}[[\Xi]] \\ g &\mapsto \frac{d}{dt} \bullet g \end{aligned} \quad (3.46)$$

⁴ L'hypothèse $f(0, 0) = 0$ est utilisée tout au long de cette note. La situation au voisinage de points où f (ou les dérivées des contrôles) ne s'annule pas n'est donc pas traitée ici, ce qui permet une exposition allégée. Voir aussi le début du chapitre suivant.

comme l'unique $\mathbb{R}$ -dérivation qui envoie $x_i^{(j)}$ sur $x_i^{(j+1)}$ et $u_i^{(j)}$ sur $u_i^{(j+1)}$. Pour tout $g \in \mathbb{R}[[\Xi]]$, on utilise la notation $\dot{g}$ pour désigner $\frac{d}{dt} \bullet g$ et la notation $g^{(i)}$ est définie, pour tout $i \in \mathbb{N}$, par $g^{(0)} = g, g^{(1)} = \dot{g}, \dots, g^{(i+1)} = \frac{d}{dt} \bullet (g^{(i)})$. Soit alors $\mathcal{I}$ l'idéal différentiel de $\mathbb{R}[[\Xi]]$ engendré par les éléments de $\mathbb{R}[[\Xi]]$ suivants :

$$\dot{x}_i - f_i, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (3.47)$$

Remarque 3.19 *Tout élément de $\mathcal{I}$ est non inversible (i.e. tout élément de $\mathcal{I}$ a un terme constant nul). En effet, d'après (3.44), les éléments $\{\dot{x}_i - f_i, 1 \leq i \leq n\}$ sont non inversibles et leurs dérivées sont aussi non inversibles de manière évidente. $\square$*

Le résultat suivant montre que toute classe du quotient $\mathbb{R}[[\Xi]]/\mathcal{I}$ a un unique représentant dans $\mathbb{R}[[\Upsilon]]$. Notons que $\mathbb{R}[[\Upsilon]]$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}[[\Xi]]$, mais pas un sous-anneau différentiel.

Lemme 3.20 *Pour tout g dans $\mathbb{R}[[\Xi]]$, il existe un unique $r \in \mathbb{R}[[\Upsilon]] \subset \mathbb{R}[[\Xi]]$ tel que $g - r \in \mathcal{I}$.*

Démonstration : Pour tous entiers $q, s, i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n$, on définit

$$\begin{aligned} F_{i,q} &= (\dot{x}_i - f_i)^{(q)}, \\ \Xi_{q,s} &= \{x_i^{(k)}\}_{\substack{i \in \{1, \dots, n\} \\ k \in \{0, \dots, q\}}} \cup \{u_j^{(k)}\}_{\substack{j \in \{1, \dots, m\} \\ k \in \{0, \dots, s\}}}. \end{aligned}$$

Il est clair que $\Xi_{0,s} \subset \Upsilon$, que $F_{i,q} \in \mathbb{R}[[\Xi_{q+1,q}]] \cap \mathcal{I}$ et que

$$F_{i,q} = x_i^{(q+1)} + \tilde{F}_{i,q} \text{ avec } \tilde{F}_{i,q} \in \mathbb{R}[[\Xi_{q,q}]]. \quad (3.48)$$

Soit g dans $\mathbb{R}[[\Xi]]$. Par définition, il existe un ensemble fini $G \subset \Xi$ tel que $g \in \mathbb{R}[[G]]$. Vu que $(\Xi_{q+1,q})_{q \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'ensembles finis dont la réunion est Ξ , et que G est fini, il existe un entier Q tel que $G \subset \Xi_{Q+1,Q}$, et on a donc $g \in \mathbb{R}[[\Xi_{Q+1,Q}]]$. Appliquons maintenant le Corollaire 3.3 avec $\nu = n, f_i = F_{i,Q}, h = g, F = \Xi_{Q+1,Q}, X_i = x_i^{(Q+1)}$ (si bien que $F - \{X_1, \dots, X_\nu\} = \Xi_{Q,Q}$); on obtient des séries $u_1, \dots, u_n$, que l'on va plutôt noter $v_{1,Q}, \dots, v_{n,Q}$ et une série $r_Q \in \mathbb{R}[[\Xi_{Q,Q}]]$ telles que $g = \sum_i v_{i,Q} F_{i,Q} + r_Q$. On peut alors appliquer à nouveau le Corollaire 3.3 avec $\nu = n$, mais $f_i = F_{i,Q-1}, h = r_Q, F = \Xi_{Q,Q}, X_i = x_i^{(Q)}$ (si bien que $F - \{X_1, \dots, X_\nu\} = \Xi_{Q-1,Q}$), pour obtenir des séries $v_{1,Q-1}, \dots, v_{n,Q-1}$ et une série $r_{Q-1} \in \mathbb{R}[[\Xi_{Q-1,Q}]]$ telles que $r_Q = \sum_i v_{i,Q-1} F_{i,Q-1} + r_{Q-1}$. De proche en proche,

après avoir appliqué le Corollaire 3.3 Q fois, on obtient des séries $v_{i,q}$, pour $i \in \{1, \dots, n\}$ et $q \in \{1, \dots, Q\}$ telles que

$$g = r_0 + \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, n\} \\ q \in \{1, \dots, Q\}}} v_{i,q} F_{i,q}$$

avec $r_0 \in \mathbb{R}[[\Xi_{0,Q}]] \subset \mathbb{R}[[\Upsilon]]$, si bien que $g - r_0 \in \mathcal{I}$. $r = r_0$ convient donc et son unicité résulte de l'unicité contenue dans le corollaire 3.3 à chaque étape.

Proposition 3.21 *L'anneau différentiel $\mathbb{R}[[\Xi]]/\mathcal{I}$ est isomorphe à $\mathcal{A} = \mathbb{R}[[\Upsilon]]$ muni de la dérivation :*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} : \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{A} \\ g &\mapsto \frac{d}{dt} \bullet g = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} f_i + \sum_{i=1, j \geq 0}^m \frac{\partial g}{\partial u_i^{(j)}} u_i^{(j+1)}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Démonstration : Considérons l'application qui à tout élément r de $\mathcal{A}$ associe sa classe d'équivalence $\bar{r}$ dans $\mathbb{R}[[\Xi]]/\mathcal{I}$. Cette application est bien définie, est un morphisme d'anneaux différentiels et le lemme 3.20 rend cette application inversible. On a donc construit un isomorphisme d'anneaux différentiels de $\mathcal{A}$ vers $\mathbb{R}[[\Xi]]/\mathcal{I}$ ■

Ceci montre en particulier que $\mathbb{R}[[\Xi]]/\mathcal{I}$ est intègre et donc que $\mathcal{I}$ est premier, ce que l'on aurait pu montrer directement.

3.2.2 L'anneau $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$ des opérateurs différentiels

On abandonne $\mathbb{R}[[\Xi]]/\mathcal{I}$ pour travailler sur $\mathcal{A}$, muni de la dérivation (3.49), qui est un anneau différentiel plus concret.

Appelons $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$ l'anneau des opérateurs différentiels sur $\mathcal{A}$, qui sont polynomiaux en $\frac{d}{dt}$ à coefficients dans $\mathcal{A}$. Un élément $p \in \mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$ sera noté $\sum a_k \frac{d^k}{dt^k}$ avec a_k dans $\mathcal{A}$, la somme étant finie. Pour $p \in \mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$ et $h \in \mathcal{A}$, on note $p \bullet h = \sum a_k h^{(k)} \in \mathcal{A}$ l'élément obtenu en appliquant l'opérateur p à h .

Ceci définit une multiplication externe $\bullet : \mathcal{A}[\frac{d}{dt}] \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$. La multiplication dans $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$ n'est pas la multiplication commutative usuelle des polynômes, mais la composition des opérateurs différentiels, qui donne une multiplication non commutative des polynômes. On la notera multiplicativement⁵ : pour tout $p, q \in \mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$ et $h \in \mathcal{A}$, on a $(pq) \bullet h = p \bullet (q \bullet h)$. Ceci fait

⁵Cette notation est aussi celle de la multiplication usuelle des polynômes, mais cette dernière ne sera jamais utilisée ici. Noter par ailleurs que cette notation multiplicative est cohérente avec la notation $\sum a_k \frac{d^k}{dt^k}$, où chaque a_k peut être vu comme un polynôme de degré zéro : l'opérateur $a_k \frac{d^k}{dt^k}$ est bien $\frac{d^k}{dt^k}$ suivi de la multiplication par a_k .

de $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$ une $\mathbb{R}$ -algèbre non commutative, et de $\mathcal{A}$ un $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$ -module à gauche. Par unification avec les polynômes à coefficients formes différentielles (voir plus loin), on utilisera parfois le symbole $\wedge$, c'est-à-dire que l'on notera indifféremment pq ou $p \wedge q$. Il faut prendre garde à ne pas confondre les lois internes et externes lorsque l'on applique un polynômes. Par exemple, en notant $\wedge$ la loi interne (dans les membres de gauche, mais pas dans les membres de droite) pour insister, on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \bullet u_1 &= \dot{u}_1, \\ \frac{d}{dt} \wedge u_1 &= \dot{u}_1 + u_1 \frac{d}{dt}, \\ u_1 \wedge \frac{d}{dt} &= u_1 \frac{d}{dt},\end{aligned}$$

(sans $\wedge$, la deuxième égalité se lit $\frac{d}{dt} u_1 = \dot{u}_1 + u_1 \frac{d}{dt}$).

$\mathcal{A}$ est aussi un sous-anneau de $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$, l'inclusion $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$ consistant à identifier a dans $\mathcal{A}$ au polynôme de degré zéro a ou à l'opérateur différentiel de degré zéro "multiplication par a ". On va être amené à étudier des modules sur $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$. Les $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$ -modules ont aussi une structure de modules sur $\mathcal{A}$.

Proposition 3.22 Soit M un $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$ -module libre et $\{\omega_j\}_{j \in \{1, \dots, m\}}$ une base de M sur $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$. M est alors aussi un $\mathcal{A}$ -module libre et $\{\omega_j^{(k)}\}_{j \in \{1, \dots, m\}, k \in \mathbb{N}}$ en est une base.

Démonstration : Soit $\eta = \sum_{j \in \{1, \dots, m\}, k \in \mathbb{N}} \eta_{j,k} \frac{d^k}{dt} \omega_j \in M$, où $\eta_{j,k} \in \mathcal{A}$ pour $j \in \{1, \dots, m\}$ et $k \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{j \in \{1, \dots, m\}, k \in \mathbb{N}} \eta_{j,k} \frac{d^k}{dt} \omega_j = \sum_{j \in \{1, \dots, m\}, k \in \mathbb{N}} \eta_{j,k} \omega_j^{(k)},$$

d'où le résultat ■

3.2.3 Les formes différentielles, l'algèbre extérieure

3.2.3.1 Module $\Lambda^1(\mathcal{A})$ des formes différentielles

On a défini (section 3.1.3), pour tout anneau de séries formelles, un module sur cet anneau, qui est le module des différentielles. On peut bien sûr appliquer cette construction à $\mathcal{A} = \mathbb{R}[[Y]]$. Comme $\Lambda^1(\mathcal{A})$ est non seulement un $\mathcal{A}$ -module, mais aussi un $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$ -module, construisons le directement en tant que $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$ -module.

On considère le $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$ -module libre engendré par les $n + m$ éléments dx et du ($dx =$

$(dx_1, \dots, dx_n)$ et $du = (du_1, \dots, du_m)$:

$$M = \left(\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{A}[\frac{d}{dt}] dx_i \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^m \mathcal{A}[\frac{d}{dt}] du_i \right) ,$$

et N le sous-module de M engendré par les “linéarisés” de $\dot{x}_i - f_i(x, u)$:

$$N = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{A}[\frac{d}{dt}] \left(\frac{d}{dt} dx_i - df_i \right) .$$

$\Lambda^1(\mathcal{A})$ est le $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$ -module quotient :

$$\Lambda^1(\mathcal{A}) = M/N .$$

Il est facile de vérifier que $\Lambda^1(\mathcal{A})$ est aussi un $\mathcal{A}$ -module, que ce $\mathcal{A}$ -module est libre et qu’une base est donnée par $\{dz\}_{z \in \Upsilon}$. Puisque $\mathcal{A} = \mathbb{R}[[\Upsilon]]$, ceci est bien la construction (3.10) de $\Lambda^1(\mathcal{A})$ en tant que $\mathcal{A}$ -module.

3.2.3.2 Liberté du $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$ -module des formes différentielles

Bien sûr, $\Lambda^1(\mathcal{A})$ construit ci-dessus n’a aucune raison a priori d’être un $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$ -module libre.

Comme discuté dans [10] ce module est libre si et seulement si l’approximation linéaire du système est commandable. Voir aussi [1, pp.24-28]. Puisqu’on a fait ici l’hypothèse que l’on est en un point d’équilibre, ceci s’exprime aisément. Définissons les matrices $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(0) , \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(0) . \quad (3.50)$$

En d’autres termes, l’élément (i, j) de A est le terme constant de $\partial f_i / \partial x_j$ et l’élément (i, k) de B le terme constant de $\partial f_i / \partial u_k$.

Proposition 3.23 $\Lambda^1(\mathcal{A})$ est un $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$ -module libre si et seulement si le rang des colonnes de $\{B, AB, \dots, A^{n-1}B\}$ est égal à n .

On pourrait donner de ceci une preuve directe, mais c’est en dehors du propos de cette note. Dans [1] on donne une manière simple de construire une base en un point dit “Brunovský-régulier”. On ne rappelle pas ici cette notion, mais on peut donner une condition suffisante (générique) pour que le point d’équilibre $(0, 0, 0, \dots)$ soit Brunovský-régulier, et des précisions sur la base obtenue dans ce cas-là. Cette condition est que le rang des colonnes de $B, AB, \dots, A^j B$ soit maximal pour tout j :

Proposition 3.24 Soient ρ et σ les entiers tels que

$$n = m\rho + \sigma, \quad 0 \leq \sigma \leq m-1.$$

Si le rang des colonnes de $B, AB, \dots, A^{\rho-1}B$ est égal à $m\rho$ et celui des colonnes de $B, AB, \dots, A^\rho B$ à n , alors il existe une base $\{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ de $\Lambda^1(\mathcal{A})$ en tant que $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$ -module, telle que chaque forme ω_j s'écrit $\omega_j = \sum_{\ell=1}^n a_{j,\ell} dx_\ell$ avec $a_{j,\ell} \in \mathcal{A}$, et les formes

$$\begin{array}{ccccccc} \omega_1, & \dot{\omega}_1, & \dots & \dots & \omega_1^{(\rho)}, \\ \vdots & & & & \vdots \\ \omega_\sigma, & \dot{\omega}_\sigma, & \dots & \dots & \omega_\sigma^{(\rho)}, \\ \omega_{\sigma+1}, & \dot{\omega}_{\sigma+1}, & \dots & \dots & \omega_{\sigma+1}^{(\rho-1)}, \\ \vdots & & & & \vdots \\ \omega_m, & \dot{\omega}_m, & \dots & \dots & \omega_m^{(\rho-1)} \end{array}$$

appartiennent au $\mathcal{A}$ -module engendré par $dx_1, \dots, dx_n$ et en forment une base.

Le cas $m = 1$

Si $m = 1$, les deux cas ci-dessus se confondent, et dès que le linéarisé est commandable, il existe une forme $\omega = \sum_{\ell=1}^n a_\ell dx_\ell$ ($a_\ell \in \mathcal{A}$) telle que $\{\omega\}$ est une base de $\Lambda^1(\mathcal{A})$, c'est-à-dire que toute forme $\eta \in \Lambda^1(\mathcal{A})$ s'écrit $p \bullet \omega$ pour un certain $p \in \mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$. Il est du reste facile de voir que cette base est unique à coefficient multiplicatif inversible près : toute base s'écrit $\{\lambda\omega\}$ avec $\lambda \in \mathcal{A}$, $\lambda(0) \neq 0$.

Cette unicité de la base est propre à la dimension 1 : pour $m = 2$, par exemple, si $\{\omega_1, \omega_2\}$ est une base, $\{\omega_1, \omega_2 + \omega_1^{(s)}\}$ est une base pour tout $s \in \mathbb{N}$.

3.2.3.3 Algèbre extérieure

On peut appliquer les constructions de la section 3.1.3 et construire, pour tout entier $r \in \mathbb{N}$, $\Lambda^r(\mathcal{A}) = \bigwedge^r(\Lambda^1(\mathcal{A}))$, et $d : \Lambda^r(\mathcal{A}) \rightarrow \Lambda^{r+1}(\mathcal{A})$.

La différentielle extérieure d commute avec la dérivation $\frac{d}{dt}$ (voir par exemple [25]).

Chacun des $\Lambda^r(\mathcal{A})$ est construit (cf. section 3.1.3) comme un $\mathcal{A}$ -module ; comme on a vu en (3.13), si $\Lambda^1(\mathcal{A})$ est un $\mathcal{A}$ -module libre, alors tous les $\Lambda^r(\mathcal{A})$ sont des $\mathcal{A}$ -modules libres. Construisons, comme en (3.13), une base de ces $\mathcal{A}$ -modules. On suppose pour cela, comme discuté à la section précédente (et par la suite on sera dans ce cas), que $\Lambda^1(\mathcal{A})$ est un $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$ -module libre, et que $\{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ en est une base ; alors $\{\omega_j^{(k)}\}_{j \in \{1, \dots, m\}, k \in \mathbb{N}}$ est une base de

$\Lambda^1(\mathcal{A})$ en tant que $\mathcal{A}$ -module, lui aussi libre. Comme en (3.13), on a besoin d'un ordre sur cette base ; prenons l'ordre lexicographique sur les indices, c'est à dire que pour (j, k) et (j', k') dans $\{1, \dots, m\} \times \mathbb{N}$,

$$(j, k) \leq (j', k') \Leftrightarrow j \leq j' \text{ et } (j = j' \Rightarrow k \leq k') ; \quad (3.51)$$

alors

$$\left\{ \omega_{j_1}^{(k_1)} \wedge \dots \wedge \omega_{j_r}^{(k_r)} \right\}_{\substack{(j_i, k_i) \in \{1, \dots, m\} \times \mathbb{N} \\ (j_1, k_1) < \dots < (j_r, k_r)}} \quad (3.52)$$

est une base de $\Lambda^r(\mathcal{A})$ en tant que $\mathcal{A}$ -module.

$\Lambda^r(\mathcal{A})$ a aussi une structure de $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$ -module, de la liberté duquel on ne se soucie pas.

On peut définir comme en (3.17) l'algèbre extérieure $\bigoplus_{i=0}^{\infty} \Lambda^i(\mathcal{A})$ dont les éléments sont des somme symboliques de formes de degrés différents.

3.2.4 Opérateurs différentiels à coefficients formes

Pour tout entier $r \in \mathbb{N}$, on peut définir l'ensemble $\Lambda^r(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$ des polynômes en $\frac{d}{dt}$ à coefficients dans $\Lambda^r(\mathcal{A})$. Un élément de $\Lambda^r(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$ s'écrit

$$p = \sum_{j=0}^J \eta_j \frac{d^j}{dt^j}$$

avec $\eta_j \in \Lambda^r(\mathcal{A})$, et il définit naturellement, pour tout entier $i \in \mathbb{N}$, un opérateur différentiel

$$\begin{aligned} \Lambda^i(\mathcal{A}) &\rightarrow \Lambda^{i+r}(\mathcal{A}) \\ \omega &\mapsto p \bullet \omega = \sum_{j=0}^J \eta_j \wedge \left(\frac{d^j}{dt^j} \bullet \omega \right) = \sum_{j=0}^J \eta_j \wedge \omega^{(j)}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

On peut étendre le produit extérieur aux polynômes comme correspondant à la composition des opérateurs ci-dessus, c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} \wedge : \Lambda^r(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}] \times \Lambda^s(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}] &\rightarrow \Lambda^{r+s}(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}] \\ (p, q) &\mapsto p \wedge q \end{aligned}$$

est tel que, pour tout ω ,

$$(p \wedge q) \bullet \omega = p \bullet (q \bullet \omega).$$

Cette loi est similaire à la multiplication définie à la section 3.2.2 pour les opérateurs différentiels à coefficients fonctions ($\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$ s'identifie à $\Lambda^0(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$), le produit extérieur des formes remplaçant la multiplication dans $\mathcal{A}$.

On peut alors, comme en (3.17), définir une grande algèbre par :

$$\Lambda(\mathcal{A})\left[\frac{d}{dt}\right] = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \Lambda^i(\mathcal{A})\left[\frac{d}{dt}\right]. \quad (3.54)$$

Un élément de $\Lambda(\mathcal{A})\left[\frac{d}{dt}\right]$ peut aussi s'écrire comme un polynôme en $\frac{d}{dt}$ à coefficients dans $\Lambda(\mathcal{A})$. Tous les objets considérés par la suite peuvent être vus comme des éléments de $\Lambda(\mathcal{A})\left[\frac{d}{dt}\right]$, ou des matrices d'éléments de $\Lambda(\mathcal{A})\left[\frac{d}{dt}\right]$.

Notons que, d'après (3.52) et (3.54), une base de $\mathcal{A}$ -module $\Lambda(\mathcal{A})\left[\frac{d}{dt}\right]$ est donnée par :

$$\left\{ \omega_{j_1}^{(k_1)} \wedge \cdots \wedge \omega_{j_r}^{(k_r)} \frac{d^{\lambda}}{dt^{\lambda}} \right\}_{\substack{r \in \mathbb{N} \\ \lambda \in \mathbb{N} \\ (j_i, k_i) \in \{1, \dots, m\} \times \mathbb{N} \\ (j_1, k_1) < \cdots < (j_r, k_r)}}. \quad (3.55)$$

3.2.5 Matrices d'opérateurs différentiels

On sera amené à faire agir des opérateurs sur des m -uplets (m un entier positif) de formes, ou de fonctions, que l'on notera comme des vecteurs colonnes d'éléments de $\mathcal{A}$ ou de $\Lambda^i(\mathcal{A})$. les opérateurs qui agissent sur ces m -uplets seront notés comme des matrices carrées. On note

$$(\Lambda^j(\mathcal{A}))^m \quad \text{et} \quad \left(\Lambda^i(\mathcal{A})\left[\frac{d}{dt}\right] \right)^{m \times m}$$

les $\mathcal{A}\left[\frac{d}{dt}\right]$ -modules formés respectivement des vecteurs (colonnes) de dimension m dont chaque élément est dans $\Lambda^j(\mathcal{A})$ et des matrices carrées $m \times m$, dont chaque élément est dans $\Lambda^i(\mathcal{A})\left[\frac{d}{dt}\right]$.

Pour $M \in (\Lambda^i(\mathcal{A})\left[\frac{d}{dt}\right])^{m \times m}$ et $X \in (\Lambda^j(\mathcal{A}))^m$, on note $M \bullet X \in (\Lambda^{i+j}(\mathcal{A}))^m$ le vecteur obtenu par multiplication matricielle classique en prenant $\bullet$ (voir (3.53)) comme multiplication entre éléments des matrices. Pour $M \in (\Lambda^i(\mathcal{A})\left[\frac{d}{dt}\right])^{m \times m}$ et $M' \in (\Lambda^{i'}(\mathcal{A})\left[\frac{d}{dt}\right])^{m \times m}$, on note $M \wedge M' \in (\Lambda^{i+i'}(\mathcal{A})\left[\frac{d}{dt}\right])^{m \times m}$ la matrice obtenue par une multiplication matricielle où la multiplication entre éléments des matrices est celle définie à la section 3.2.4. On a bien sûr $(M \wedge M') \bullet X = M \bullet (M' \bullet X)$.

On confondra un élément de $M \in (\Lambda^i(\mathcal{A})\left[\frac{d}{dt}\right])^{m \times m}$ avec l'opérateur différentiel

$$\begin{aligned} \Lambda(\mathcal{A})^m &\rightarrow \Lambda(\mathcal{A})^m \\ X &\mapsto M \bullet X \end{aligned}$$

qui envoie chaque $(\Lambda^r(\mathcal{A}))^m$ dans $(\Lambda^{r+i}(\mathcal{A}))^m$.

3.3 Une valuation naturelle

3.3.1 Hypothèses essentielles

Point d'équilibre

Comme au chapitre précédent on suppose ici que l'on travaille au *point d'équilibre* $(0, 0)$, ce qui se traduit par (3.44) et entraîne, que, pour tout $h \in \mathcal{A}$, on a

$$\dot{h}(0) = 0. \quad (3.56)$$

C'est cette dernière propriété (ou autrement dit le fait que l'idéal maximal de $\mathcal{A}$ soit un idéal différentiel), qui est exploitée dans le présent chapitre.

On peut se passer de cette propriété moyennant des constructions un peu plus générales qui ne sont pas données ici.

Liberté du module des différentielles

On a aussi besoin de supposer que

$$\Lambda^1(\mathcal{A}) \text{ est un } \mathcal{A}[\frac{d}{dt}]\text{-module libre.} \quad (3.57)$$

A la section 3.2.3.2, on a rappelé que cette hypothèse est celle de la commandabilité du linéarisé et donné des conditions dans le cas d'un point d'équilibre.

Contrairement à (3.56), il ne semble pas que l'on puisse se passer facilement de cette hypothèse. Il est à noter que cette hypothèse est en fait une condition nécessaire pour la platitude, voir chapitre 3.4 et en particulier la remarque qui suit la définition 3.40.

On suppose choisie une base, dans la suite. On la note verticalement :

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_m \end{pmatrix}. \quad (3.58)$$

Les constructions faites aux sections 3.3.2 et 3.3.3 dépendent a priori du choix de cette base, supposée fixée sans plus de précision. A la section 3.3.4, on montrera que la valuation que l'on a construit ne dépend en réalité pas du choix de cette base.

3.3.2 Valuation des fonctions

On va ici construire la valuation “Val” sur l’anneau $\mathcal{A}$ des “fonctions” (c’est-à-dire des séries). On donne ensuite un certain nombre de propriétés de Val, mais on ne prouvera qu’à la section 3.3.5.3 qu’il s’agit d’une valuation.

3.3.2.1 Définition

Proposition 3.25 *Il existe une unique application*

$$\text{Val} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

telle que les propriétés suivantes soient vérifiées pour tout $g \in \mathcal{A}$:

$$\bullet \quad g = 0 \iff \text{Val}(g) = +\infty \quad (3.59)$$

$$\bullet \quad g(0) \neq 0 \iff \text{Val } g = 0 \quad (3.60)$$

$$\bullet \quad \text{si } g(0) = 0, \text{ en définissant les } g_{j,k} \in \mathcal{A} \text{ par } dg = \sum_{1 \leq j \leq m, k \in \mathbb{N}} g_{j,k} \omega_j^{(k)},$$

$$\text{on a } \text{Val}(g) = \min_{1 \leq j \leq m, k \in \mathbb{N}} \{k + 1 + \text{Val}(g_{j,k})\} \quad (3.61)$$

Pour un élément h de $\mathcal{A}$ non nul (le cas nul étant donné par (3.59)), expliquons brièvement comment utiliser les propriétés de la proposition 3.25 pour calculer $\text{Val } h$. On utilise une première fois (3.60) avec $g = h$ et on a :

Si $h(0) \neq 0$, $\text{Val}(h) = 0$.

Si $h(0) = 0$, on différencie h et on décompose dh sur la base Ω :

$$dh = \sum_{1 \leq j \leq m, k \in \mathbb{N}} h_{j,k} \omega_j^{(k)}.$$

La somme est finie, c’est-à-dire que seul un nombre fini de $h_{j,k}$ sont non nuls. On applique alors (3.61), avec $g = h$: $\text{Val}(h) = \min_{1 \leq j \leq m, k \in \mathbb{N}} \{k + 1 + \text{Val}(h_{j,k})\}$, le minimum étant à prendre sur un nombre fini de couples (j, k) . On est alors ramené à évaluer l’image par Val de chaque $h_{j,k}$, ou tout au moins d’un nombre fini, non nuls. Pour chacun d’eux, on recommence l’étude ci-dessus en remplaçant h par $h_{j,k}$:

pour (j, k) tel que $h_{j,k}(0) \neq 0$, $\text{Val}(h_{j,k}) = 0$,

pour (j, k) tel que $h_{j,k}(0) = 0$, on doit décomposer $dh_{j,k}$ sur la base Ω :

$$dh_{j,k} = \sum_{1 \leq j' \leq m, k' \in \mathbb{N}} h_{j,k,j',k'} \omega_{j'}^{(k')},$$

et, en appliquant (3.61) à $g = h_{j,k}$, on a :

$$\text{Val}(h_{j,k}) = \min_{1 \leq j' \leq m, k' \in \mathbb{N}} \{k' + 1 + \text{Val}(h_{j,k,j',k'})\}$$

⋮

Il n'est pas évident a priori que cette procédure s'arrête. On montre dans la preuve ci-dessous que si h est non nulle, après un nombre fini d'étapes, on a rencontré un élément de $\mathcal{A}$ dont le terme constant est non nul et dont la valuation est donc connue. On verra que ceci entraîne que $\text{Val}(h)$ est bien défini et fini.

Démonstration : On considère g dans $\mathcal{A}$, alors soit $g(0) \neq 0$ et $\text{Val}(g) = 0$, soit $\text{Val}(g) = \min_{1 \leq j \leq m, k \in \mathbb{N}} \{k + 1 + \text{Val}(g_{j,k})\}$, avec $dg = \sum_{1 \leq j \leq m, k \in \mathbb{N}} g_{j,k} \omega_j^{(k)}$. Considérons l'ensemble G des séries de $\mathcal{A}$ issues de la décomposition de dg le long de Ω puis de la décomposition de la différentielle de chacune des $g_{j,k}$ et ainsi de suite.

- Si tous les éléments de G sont nuls en zéro. En décomposant dg le long de la base $dx, du, d\bar{u}, \dots$, les coefficients sont nuls aussi en zéro, par indépendance des éléments de la base. Donc une fonction dont tous les coefficients de sa différentielle sont nuls en zéro a toutes ses dérivées partielles du premier ordre nulles en zéro. Alors, si dg a tous ses coefficients nuls en zéro, puis les coefficients des différentielles de ses coefficients et ainsi de suite, alors il est évident que toutes les dérivées partielles des $g_{j,k}$ sont nulles en zéro et donc les $g_{j,k}$ sont toutes la série nulle car une série dont tous les coefficients sont nuls est la série nulle, donc $g = 0$ et $\text{Val}(g) = +\infty$ et est bien défini.
- Si un des $g_{j,k}$ (coefficient issu de la décomposition de dg lui-même) est non nul en 0 par exemple $g_{\bar{j}, \bar{k}}$, alors $\text{Val}(g) \leq 1 + \bar{k}$. Alors, il suffit de différentier $\bar{k}$ fois successivement les coefficients de g , puis les coefficients des différentielles des coefficients de g et ainsi de suite jusqu'à l'ordre $\bar{k}$ et de tester la valeur de ces fonctions en 0, $\text{Val}(g)$ est alors bien défini en tant que minimum d'un ensemble fini d'entiers.
- Si il existe un élément de G non nul en 0 mais qu'aucun des coefficients $g_{j,k}$ de dg est non nul en zéro, alors on différentie ces derniers et on regarde la valeur des coefficients de leur différentielle en zéro. On itère alors le processus de différentiation jusqu'à ce qu'un des coefficients soit non nul en zéro, alors on est ramené au cas ci-dessus et $\text{Val}(g)$ est bien défini. ■

3.3.2.2 Propriétés de la fonction Val sur $\mathcal{A}$.

La proposition suivante donne des propriétés de la fonction Val qui en font “presque” une valuation. On verra plus loin (section 3.3.5.3) qu'il est bien vrai que $\text{Val}(gh) = \text{Val } g + \text{Val } h$ pour tout g et h , mais il sera plus aisé de le démontrer après avoir établi à la section 3.3.5 l'existence de coordonnées dans lesquelles Val coïncide avec une valuation plus classique.

D'ici là, on va se contenter de l'inégalité (3.64) ci-dessous.

Proposition 3.26 *Pour tous g et h dans $\mathcal{A}$, on a :*

$$\text{Val}(g + h) \geq \min\{\text{Val}(g), \text{Val}(h)\}, \quad (3.62)$$

$$\text{Val}(h) > \text{Val}(g) \implies \text{Val}(g + h) = \text{Val}(g), \quad (3.63)$$

$$\text{Val}(gh) \geq \text{Val}(g) + \text{Val}(h), \quad (3.64)$$

$$\text{Val}(h) = 0 \implies \text{Val}(gh) = \text{Val}(g), \quad (3.65)$$

$$\text{Val}(\dot{h}) \geq 1 + \text{Val}(h). \quad (3.66)$$

Démonstration : Pour g ou h dans $\mathcal{A}$, fixons une fois pour toute la notation suivante : on développe dg et dh sur la base $(\omega_j^{(k)})_{1 \leq j \leq m, k \in \mathbb{N}}$ du $\mathcal{A}$ -module $\Lambda^1(\mathcal{A})$, définissant des fonctions $g_{j,k}$ et $h_{j,k}$ par :

$$\begin{aligned} dg &= \sum_{1 \leq j \leq m, k \in \mathbb{N}} g_{j,k} \omega_j^{(k)}, \\ dh &= \sum_{1 \leq j \leq m, k \in \mathbb{N}} h_{j,k} \omega_j^{(k)}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Démonstration de (3.62). Montrons par récurrence sur i que la propriété suivante est vraie pour tout $i \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{R}_i : \begin{cases} \text{pour tout } g \text{ et } h \text{ dans } \mathcal{A}, \text{ tels que } \text{Val}(g + h) \leq i, \\ \text{Val}(g + h) \geq \min\{\text{Val}(g), \text{Val}(h)\}. \end{cases}$$

– Si $\text{Val}(g + h) = 0$ alors, d'après (3.60), $(g + h)(0) = g(0) + h(0) \neq 0$ et donc soit $g(0) \neq 0$ soit $h(0) \neq 0$, et donc, toujours d'après (3.60), $\text{Val } g$ ou $\text{Val } h$ est nul. Ceci prouve $\mathcal{R}_0$.

– Soit $i \geq 0$. Supposons $\mathcal{R}_i$ vraie et montrons alors que $\mathcal{R}_{i+1}$ est vraie.

Soient g et h dans $\mathcal{A}$, tels que $\text{Val}(g + h) \leq i + 1$. Si $\text{Val}(g + h) \leq i$, l'inégalité $\text{Val}(g + h) \geq \min\{\text{Val}(g), \text{Val}(h)\}$ est une conséquence de $\mathcal{R}_i$; on suppose donc que $\text{Val}(g + h) = i + 1$. D'après (3.61), en utilisant les notations (3.67), il existe des entiers $\bar{j}$ et $\bar{k}$ tels que

$$i + 1 = \text{Val}(g + h) = \bar{k} + 1 + \text{Val}(g_{\bar{j},\bar{k}} + h_{\bar{j},\bar{k}}).$$

Ceci entraîne $\text{Val}(g_{\bar{j},\bar{k}} + h_{\bar{j},\bar{k}}) \leq i$ et donc, en appliquant $\mathcal{R}_i$ à $g_{\bar{j},\bar{k}}$ et $h_{\bar{j},\bar{k}}$, on a

$$\text{Val}(g_{\bar{j},\bar{k}} + h_{\bar{j},\bar{k}}) \geq \min\{\text{Val}(g_{\bar{j},\bar{k}}), \text{Val}(h_{\bar{j},\bar{k}})\}.$$

Comme $\text{Val } g \leq \bar{k} + 1 + \text{Val } g_{\bar{j},\bar{k}}$ et $\text{Val } h \leq \bar{k} + 1 + \text{Val } h_{\bar{j},\bar{k}}$, les deux relations ci-dessus entraînent $\text{Val}(g + h) \geq \min\{\text{Val}(g), \text{Val}(h)\}$. Ceci prouve $\mathcal{R}_{i+1}$.

Démonstration de (3.63). Il est très classique que (3.62) entraîne (3.63) ; rappelons pourquoi. Si $\text{Val } g < \text{Val } h$, alors (3.62) entraîne évidemment $\text{Val}(g + h) \geq \text{Val } g$, mais aussi

$$\text{Val } g = \text{Val}(g + h - h) \geq \min\{\text{Val}(g + h), \text{Val}(-h)\}. \quad (3.68)$$

Il est clair, d'après la construction de $\text{Val}()$, que $\text{Val}(-h) = \text{Val } h$ (par récurrence sur $\text{Val } h$: $\text{Val}(-h) = 0$ si et seulement si $\text{Val } h = 0$, et si $\text{Val } h > 0$, on se ramène à des fonctions de valuation strictement inférieure en décomposant dh comme en (3.61)). Comme $\text{Val}(-h) = \text{Val } h > \text{Val } g$, la relation (3.68) entraîne $\text{Val } g \geq \text{Val}(g + h)$.

Démonstration de (3.64). Montrons par récurrence sur i que la propriété suivante est vraie pour tout $i \in \mathbb{N}$.

- $\mathcal{R}_i : \{\text{pour tout } g \text{ et } h \text{ dans } \mathcal{A}, \text{ si } \text{Val}(gh) \leq i \text{ alors } \text{Val}(gh) \geq \text{Val}(g) + \text{Val}(h) \}.$
- Si $\text{Val}(gh) = 0$, alors $g(0)h(0) \neq 0$, donc $\text{Val}(g) = \text{Val}(h) = 0$. $\mathcal{R}_0$ est donc vérifiée.
 - Soit $i \geq 0$. Supposons $\mathcal{R}_i$ vraie et montrons alors que $\mathcal{R}_{i+1}$ est vraie.
- $\mathcal{R}_i$ étant vraie, il suffit, pour prouver $\mathcal{R}_{i+1}$, de considérer g et h dans $\mathcal{A}$, tels que $\text{Val}(gh) = i + 1$. Comme $\text{Val}(gh) > 0$, (3.60) entraîne $gh(0) = 0$ et donc, avec les notations (3.67), (3.61) entraîne, puisque $d(gh) = g dh + h dg$,

$$\text{Val}(gh) = \min_{1 \leq j \leq m, k \in \mathbb{N}} k + 1 + \text{Val}(gh_{j,k} + g_{j,k}h).$$

Soient $\bar{j}, \bar{k}$ des indices tels que le minimum soit atteint. On a, en utilisant (3.62) pour l'inégalité,

$$\begin{aligned} i + 1 &= \text{Val}(gh) = \bar{k} + 1 + \text{Val}(gh_{\bar{j},\bar{k}} + g_{\bar{j},\bar{k}}h) \\ &\geq \bar{k} + 1 + \min\{\text{Val}(gh_{\bar{j},\bar{k}}), \text{Val}(g_{\bar{j},\bar{k}}h)\}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Quitte à inverser le rôle de g et h , on peut supposer que $\text{Val}(gh_{\bar{j},\bar{k}}) \geq \text{Val}(g_{\bar{j},\bar{k}}h)$. On a alors $\text{Val}(g_{\bar{j},\bar{k}}h) \leq i - \bar{k}$, d'où, en appliquant $\mathcal{R}_i$ à $g_{\bar{j},\bar{k}}$ et h , l'inégalité $\text{Val}(g_{\bar{j},\bar{k}}h) \geq \text{Val } g_{\bar{j},\bar{k}} + \text{Val } h$. L'équation ci-dessus entraîne alors

$$\text{Val}(gh) \geq \bar{k} + 1 + \text{Val}(g_{\bar{j},\bar{k}}h) \geq \bar{k} + 1 + \text{Val } g_{\bar{j},\bar{k}} + \text{Val } h$$

Comme $\text{Val } g \leq \bar{k} + 1 + \text{Val}(g_{\bar{j},\bar{k}})$, cela entraîne bien $\text{Val}(gh) \geq \text{Val } g + \text{Val } h$, ce qui prouve $\mathcal{R}_{i+1}$.

Démonstration de (3.65). C'est une conséquence de (3.64). En effet, si $\text{Val } h = 0$, alors $h(0) \neq 0$ c'est à dire que la série h à un terme constant non nul, si bien qu'il existe une série $\frac{1}{h} \in \mathcal{A}$ telle que $g = \frac{1}{h} gh$ et $\text{Val } \frac{1}{h} = \text{Val } h = 0$. Alors, on obtient $\text{Val } g \geq \text{Val}(gh)$ en appliquant (3.64) à gh et $\frac{1}{h}$, et $\text{Val}(gh) \geq \text{Val } g$ en appliquant (3.64) à g et h .

Démonstration de (3.66).

Soit, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $A_i = \{g \in \mathcal{A}, \text{Val } \dot{g} = i \text{ et } \text{Val } g \geq i\}$.

D'après (3.56) et (3.60), $\text{Val } \dot{h} \geq 1$ pour tout h , et donc $A_0 = \emptyset$. Par ailleurs, si $\text{Val } \dot{h} = +\infty$, il est trivialement vrai que $\text{Val } \dot{h} \geq 1 + \text{Val } h$. Par conséquent, (3.66) est vraie pour tout $h \in \mathcal{A}$ si et seulement si tous les A_i sont vides pour $i \geq 1$, ce que nous allons prouver par l'absurde. Si il existait un A_i non vide, soit $\nu \geq 1$ le plus petit entier tel que $A_\nu \neq \emptyset$, et un élément h de A_ν . Le fait que $\text{Val } h \geq \nu \geq 1$ entraîne $h(0) = 0$ (grâce à (3.60)), et donc, d'après (3.61), en utilisant les notations (3.67),

$$\text{Val } h_{j,k} \geq \nu - 1 - k \quad (3.70)$$

pour tout j, k . Écrivons maintenant que $\text{Val } \dot{h} = \nu$. En appliquant $\frac{d}{dt}$ à (3.67), on obtient (avec la convention $h_{j,-1} = 0$, qui ne contredit pas (3.70)) :

$$d\dot{h} = \sum_{1 \leq j \leq m, k \in \mathbb{N}} (\dot{h}_{j,k} + h_{j,k-1}) \omega_j^{(k)},$$

qui, puisque $\dot{h}(0) = 0$, entraîne, en appliquant (3.61),

$$\nu = \text{Val } \dot{h} = \min_{k \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq m} k + 1 + \text{Val } (\dot{h}_{j,k} + h_{j,k-1}). \quad (3.71)$$

Par ailleurs, pour tout j, k , on a

$$\text{Val } \dot{h}_{j,k} \geq \nu - k \text{ et } \text{Val } h_{j,k-1} \geq \nu - k \quad (3.72)$$

car la seconde inégalité vient de (3.70), la première est évidemment vraie si $\text{Val } \dot{h}_{j,k} \geq \nu$, et si $\text{Val } \dot{h}_{j,k} < \nu$, le fait que $A_i = \emptyset$ pour $i < \nu$ entraîne $\text{Val } \dot{h}_{j,k} \geq 1 + \text{Val } h_{j,k}$, ce qui, avec (3.70), montre que la première inégalité est vraie dans ce cas aussi. Les inégalités (3.72) entraînent, à l'aide de (3.62),

$$k + 1 + \text{Val } (\dot{h}_{j,k} + h_{j,k-1}) \geq \nu + 1$$

pour tout j, k . En reportant ceci dans (3.71), on obtient la contradiction $\nu \geq \nu + 1$. ■

3.3.3 Extension de Val à toutes les formes, matrices et opérateurs

Maintenant que l'on a défini la “valuation” (on utilise ce mot bien qu'on n'ait pas encore prouvé que “Val” définit bien une valuation sur $\mathcal{A}$) des fonctions, c'est-à-dire des éléments de $\mathcal{A}$, on l'étend sans mal à tous les objets plus généraux définis aux sections 3.2.4 et 3.2.5.

3.3.3.1 Valuation des opérateurs à coefficients formes

Définissons $\text{Val} : \Lambda(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}] \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, qui étend $\text{Val} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ défini plus haut.

Comme vu en (3.55), un élément de $\xi \in \Lambda(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$ s'écrit

$$\xi = \sum_{\substack{q, \lambda \in \mathbb{N} \\ (j_i, k_i) \in \{1, \dots, m\} \times \mathbb{N} \\ (j_1, k_1) < \dots < (j_q, k_q)}} a_{\lambda, q, (j_1, k_1), \dots, (j_q, k_q)} \omega_{j_1}^{(k_1)} \wedge \dots \wedge \omega_{j_q}^{(k_q)} \frac{d^\lambda}{dt^\lambda}. \quad (3.73)$$

les $a_{\lambda, q, (j_1, k_1), \dots, (j_q, k_q)} \in \mathcal{A}$ étant définis de manière unique.

Définition 3.27 Pour tout $\xi \in \Lambda(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$, $\text{Val } \xi$ est défini par

$$\text{Val } \xi = \min_{\substack{q, \lambda \in \mathbb{N} \\ (j_i, k_i) \in \{1, \dots, m\} \times \mathbb{N} \\ (j_1, k_1) < \dots < (j_q, k_q)}} \text{Val}(a_{\lambda, q, (j_1, k_1), \dots, (j_q, k_q)}) + \lambda + \sum_{i=1}^q (1 + k_i) \quad (3.74)$$

où les $a_{\lambda, q, (j_1, k_1), \dots, (j_q, k_q)} \in \mathcal{A}$ sont définis par (3.73).

Il est clair que cette définition de Val coïncide avec la précédente sur $\mathcal{A} \subset \Lambda(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$ (un élément de $\Lambda(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$ de la forme (3.73) où tous les $a_{\lambda, q, (j_1, k_1), \dots, (j_q, k_q)}$ sont nuls sauf l'unique correspondant à $q = \lambda = 0$).

Un élément de $\Lambda(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$ étant assez abstrait, spécialisons cette définition aux éléments plus concrets que sont les formes différentielles et les opérateurs différentiels.

Opérateurs différentiels (scalaires) : pour un élément de $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$, polynôme en $\frac{d}{dt}$ de degré

$K \in \mathbb{N}$, on a

$$\text{Val} \left(\sum_{\lambda=0}^K a_\lambda \frac{d^\lambda}{dt^\lambda} \right) = \min_{\lambda \in \{0, \dots, K\}} (\lambda + \text{Val } a_\lambda) \quad (3.75)$$

où les coefficients a_λ sont dans $\mathcal{A}$.

Formes différentielles de degré 1 : pour $\eta = \sum_{(j,k) \in \{1, \dots, m\} \times \mathbb{N}} a_{j,k} \omega_j^{(k)} \in \Lambda^1(\mathcal{A})$, où les $a_{j,k}$ sont dans $\mathcal{A}$ (et la somme est finie), on a $\text{Val } \eta = \min_{j,k} (1 + k + \text{Val } a_{j,k})$.

Comme $\Lambda^1(\mathcal{A})$ est un $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$ -module libre, on peut aussi décomposer η comme

$$\eta = \sum_{j=1}^m P_j \bullet \omega_j$$

avec $P_j \in \mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$, et on a alors

$$\text{Val } \eta = \min_{1 \leq j \leq m} (1 + \text{Val } P_j) . \quad (3.76)$$

Formes différentielles de degré $p \geq 2$: pour $\eta \in \Lambda^p(\mathcal{A})$, donné par

$$\eta = \sum_{\substack{(j_i, k_i) \in \{1, \dots, m\} \times \mathbb{N} \\ (j_1, k_1) < \dots < (j_p, k_p)}} a_{j_1, \dots, j_p, k_1, \dots, k_p} \wedge \omega_{j_1}^{(k_1)} \wedge \dots \wedge \omega_{j_p}^{(k_p)}$$

(somme finie), on a

$$\text{Val}(\eta) = \min_{\substack{(j_i, k_i) \in \{1, \dots, m\} \times \mathbb{N} \\ (j_1, k_1) < \dots < (j_p, k_p)}} \{p + k_1 + \dots + k_p + \text{Val}(a_{j_1, \dots, j_p, k_1, \dots, k_p})\} . \quad (3.77)$$

Opérateurs différentiels à coefficients p -formes : pour $P \in \Lambda^p(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$, donné par $P =$

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{N}} \eta_\lambda \frac{d^\lambda}{dt} \quad (\text{somme finie}), \text{ avec pour tout } \lambda \in \mathbb{N}, \eta_\lambda \in \Lambda^p(\mathcal{A}),$$

$$\text{Val}(P) = \min_{\lambda \in \mathbb{N}} \{\lambda + \text{Val}(\eta_\lambda)\} . \quad (3.78)$$

3.3.3.2 Propriétés

La Proposition 3.26 peut se généraliser à l'ensemble $\Lambda(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$:

Proposition 3.28 Pour tous g et h dans $\Lambda(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$, on a :

$$\text{Val}(g + h) \geq \min\{\text{Val}(g), \text{Val}(h)\} , \quad (3.79)$$

$$\text{Val}(h) > \text{Val}(g) \implies \text{Val}(g + h) = \text{Val}(g) , \quad (3.80)$$

$$\text{Val}(g \wedge h) \geq \text{Val}(g) + \text{Val}(h) , \quad (3.81)$$

$$\text{Val}(g) = 0 \implies \text{Val}(g \wedge h) = \text{Val}(h) , \quad (3.82)$$

$$\text{Val}(\dot{g}) \geq 1 + \text{Val}(g) . \quad (3.83)$$

$$\text{Val}(dg) \geq \text{Val}(g) . \quad (3.84)$$

Démonstration :

(3.84) est une conséquence très directe des définitions. En utilisant (3.73) et (3.74), le fait que, dans $g + h$, les coefficients de g et de h s'additionnent termes à termes et en appliquant (3.62) à l'addition de ces coefficients, on obtient l'inégalité (3.79). Il en va de même pour l'égalité (3.80) en utilisant en plus (3.63).

Démonstration de (3.83). Soit $h \in \Lambda(\mathcal{A})$,

$$h = \sum_{\substack{q \in \mathbb{N} \\ (j_i, k_i) \in \{1, \dots, m\} \times \mathbb{N} \\ (j_1, k_1) < \dots < (j_q, k_q)}} h_{q, j_1, \dots, j_q, k_1, \dots, k_q} \omega_{j_1}^{(k_1)} \wedge \dots \wedge \omega_{j_q}^{(k_q)}.$$

On utilise la notation $\dot{h}$ pour le résultat de l'application de l'opérateur différentiel $\frac{d}{dt}$ sur l'élément h .

$$\dot{h} = \sum_{\substack{q \in \mathbb{N} \\ \delta_0 + \dots + \delta_q = 1 \\ (j_i, k_i) \in \{1, \dots, m\} \times \mathbb{N} \\ (j_1, k_1) < \dots < (j_q, k_q)}} h_{q, j_1, \dots, j_q, k_1, \dots, k_q}^{(\delta_0)} \omega_{j_1}^{(k_1 + \delta_1)} \wedge \dots \wedge \omega_{j_q}^{(k_q + \delta_q)}.$$

Donc

$$\text{Val}(\dot{h}) \geq \min_{\substack{q \in \mathbb{N} \\ \delta_0 + \dots + \delta_q = 1 \\ (j_i, k_i) \in \{1, \dots, m\} \times \mathbb{N} \\ (j_1, k_1) < \dots < (j_q, k_q)}} \left\{ q + \sum_{i=1}^q (k_i + \delta_i) + \text{Val}(h_{\lambda, q, j_1, \dots, j_q, k_1, \dots, k_q}^{(\delta_0)}) \right\}$$

et d'après (3.66), $\text{Val}(h_{\lambda, q, j_1, \dots, j_q, k_1, \dots, k_q}^{(\delta_0)}) \geq \delta_0 + \text{Val}(h_{\lambda, q, j_1, \dots, j_q, k_1, \dots, k_q})$, d'où le résultat presque immédiatement.

Démonstration de (3.81). Montrons la propriété dans des cas plus restrictifs en premier lieu.

i). Soient $g \in \Lambda^q(\mathcal{A})$ et $h \in \Lambda^{q'}(\mathcal{A})$, avec

$$g = \sum_{\substack{(j_i, k_i) \in \{1, \dots, m\} \times \mathbb{N} \\ (j_1, k_1) < \dots < (j_q, k_q)}} g_{j_1, \dots, j_q, k_1, \dots, k_q} \omega_{j_1}^{(k_1)} \wedge \dots \wedge \omega_{j_q}^{(k_q)},$$

$$h = \sum_{\substack{(j'_i, k'_i) \in \{1, \dots, m\} \times \mathbb{N} \\ (j'_1, k'_1) < \dots < (j'_{q'}, k'_{q'})}} h_{j'_1, \dots, j'_{q'}, k'_1, \dots, k'_{q'}} \omega_{j'_1}^{(k'_1)} \wedge \dots \wedge \omega_{j'_{q'}}^{(k'_{q'})}.$$

L'inégalité $\text{Val}(g \wedge h) \geq \text{Val } g + \text{Val } h$ est entraînée par

$$\text{Val} \left(g_{j_1, \dots, j_q, k_1, \dots, k_q} h_{j'_1, \dots, j'_{q'}, k'_1, \dots, k'_{q'}} \omega_{j_1}^{(k_1)} \wedge \dots \wedge \omega_{j_q}^{(k_q)} \wedge \omega_{j'_1}^{(k'_1)} \wedge \dots \wedge \omega_{j'_{q'}}^{(k'_{q'})} \right) \geq \text{Val } g + \text{Val } h,$$

valable pour n'importe quelle valeur des indices, car $g \wedge h$ est une somme de termes comme celui dans le membre de gauche. L'inégalité ci-dessus est vraie car le membre de gauche est égal, par définition, à

$$\text{Val} \left(\begin{matrix} g_{j_1, \dots, j_q} & h_{j'_1, \dots, j'_{q'}} \\ k_1, \dots, k_q & k'_1, \dots, k'_{q'} \end{matrix} \right) + \sum_{i=1}^q (1 + k_i) + \sum_{i=1}^{q'} (1 + k'_i),$$

et qu'en appliquant (3.64) au produit d'éléments de $\mathcal{A}$ qui apparaît, on minore la quantité ci-dessus par une quantité qui, par définition (3.77) de $\text{Val } g$ et $\text{Val } h$, est elle-même minorée par $\text{Val } g + \text{Val } h$.

- ii). Soit h et g dans $\Lambda^q(\mathcal{A})$ et $\Lambda^{q'}(\mathcal{A})$ respectivement. Soit λ et μ dans $\mathbb{N}$. Considérons les monômes $h \frac{d^\mu}{dt^\mu}$ et $g \frac{d^\lambda}{dt^\lambda}$ de $\Lambda^q(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$ et $\Lambda^{q'}(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$ respectivement.

Alors $g \frac{d^\lambda}{dt^\lambda} \wedge h \frac{d^\mu}{dt^\mu} = \sum_{i=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{i} (g \wedge h^{(i)}) \frac{d^{\mu+\lambda-i}}{dt^{\mu+\lambda-i}}$ et en utilisant (3.79) sur le membre de droite on obtient

$$\text{Val}(g \frac{d^\lambda}{dt^\lambda} \wedge h \frac{d^\mu}{dt^\mu}) \geq \min_{i \in \{0, \dots, \lambda\}} \{ \text{Val}(g \wedge h^{(i)}) \frac{d^{\mu+\lambda-i}}{dt^{\mu+\lambda-i}} \}.$$

D'après (3.78) la valuation du i -ème terme dans le min vaut $\mu + \lambda - i + \text{Val}(g \wedge h^{(i)})$, mais (3.64) entraîne $\text{Val}(g \wedge h^{(i)}) \geq \text{Val}(g) + \text{Val}(h^{(i)})$ et (3.79) itéré i fois entraîne $\text{Val}(h^{(i)}) \geq i + \text{Val}(h)$ et (3.3.3.2) implique donc

$$\text{Val}(g \frac{d^\lambda}{dt^\lambda} \wedge h \frac{d^\mu}{dt^\mu}) \geq \mu + \lambda + \text{Val}(g) + \text{Val}(h), \text{ i.e.}$$

$$\text{Val}(g \frac{d^\lambda}{dt^\lambda} \wedge h \frac{d^\mu}{dt^\mu}) \geq \text{Val}(g \frac{d^\lambda}{dt^\lambda}) + \text{Val}(h \frac{d^\mu}{dt^\mu}).$$

- iii). Soit $g = \sum_{\lambda \in \mathbb{N}} g_\lambda \frac{d^\lambda}{dt^\lambda}$ et $h = \sum_{\mu \in \mathbb{N}} h_\mu \frac{d^\mu}{dt^\mu}$ dans $\Lambda(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$, où les g_λ et les h_μ sont des formes homogènes.

$$\text{Alors } \text{Val}(g \wedge h) = \text{Val}((\sum_{\lambda \in \mathbb{N}} g_\lambda \frac{d^\lambda}{dt^\lambda}) \wedge (\sum_{\mu \in \mathbb{N}} h_\mu \frac{d^\mu}{dt^\mu})),$$

$$\text{donc } \text{Val}(g \wedge h) \geq \text{Val}(\sum_{\lambda \in \mathbb{N}} \sum_{\mu \in \mathbb{N}} g_\lambda \frac{d^\lambda}{dt^\lambda} \wedge h_\mu \frac{d^\mu}{dt^\mu})$$

$$\text{et avec (3.79), } \text{Val}(g \wedge h) \geq \min_{\lambda, \mu \in \mathbb{N}} \{ g_\lambda \frac{d^\lambda}{dt^\lambda} \wedge h_\mu \frac{d^\mu}{dt^\mu} \}.$$

Le point ii) permet ainsi de conclure que $\text{Val}(g \wedge h) \geq \text{Val}(g) + \text{Val}(h)$.

iv). Soit $h = \sum_{i \in \mathbb{N}} h_i$ et $g = \sum_{i \in \mathbb{N}} g_i$ dans $\Lambda(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$ quelconques avec les h_i et les g_i des polynômes en $\frac{d}{dt}$ à coefficients formes homogènes.

$$\text{Val}(g \wedge h) = \text{Val}\left(\sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} g_i \wedge h_j\right)$$

et avec (3.79) on obtient $\text{Val}(g \wedge h) \geq \min_{i,j \in \mathbb{N}} \{\text{Val}(g_i \wedge h_j)\}$ le point iii). permet alors de conclure la démonstration de (3.81).

Démonstration de (3.82). Soient g et h dans $\Lambda(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$ avec $\text{Val } g = 0$. Comme les seuls éléments homogènes $\zeta \in \Lambda(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$ tels que $\text{Val } \zeta = 0$ sont dans $\mathcal{A}$, on a $g = g_0 + g_1$ avec $g_0 \in \mathcal{A}$, $\text{Val } g_0 = 0$, $\text{Val } g_1 \geq 1$. Alors, comme $g \wedge h = g_0 \wedge h + g_1 \wedge h$, il suffit, d'après (3.80) et (3.81), de montrer que $\text{Val}(g_0 h) = \text{Val } h$ (puisque $g_0 \in \mathcal{A}$, on préfère noter $g_0 h$ que $g \wedge h$). Si l'on décompose h comme en (3.73), on obtient la décomposition de $g_0 h$ en multipliant les coefficients fonctions $(a_{\lambda, q, (j_1, k_1), \dots, (j_q, k_q)}$ dans (3.73)) par g_0 ; en appliquant (3.65) à ces produits de fonctions, les définitions (3.74) de $\text{Val } h$ et $\text{Val}(g_0 h)$ montrent qu'ils sont égaux. ■

3.3.3.3 Le cas des matrices

La valuation d'une matrice ou d'un vecteur d'opérateurs différentiels ou de formes (voir section 3.2.5) sera simplement, par définition, la plus petite des valuations de ses éléments : pour $M \in (\Lambda^k(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}])^{m \times m}$ et $X \in (\Lambda^{k'}(\mathcal{A}))^m$, donnés par

$$M = [M_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m}}, \quad X = [X_i]_{1 \leq i \leq m},$$

on a

$$\text{Val } M = \min_{i,j} \text{Val } M_{i,j}, \quad \text{Val } X = \min_i \text{Val } X_i, \quad (3.85)$$

où les $M_{i,j}$ sont dans $\Lambda^k(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$ et les X_i dans $\Lambda^{k'}(\mathcal{A})$, et relèvent donc de la section précédente.

L'essentiel des propriétés de la Proposition 3.28 restent vraies en remplaçant les produits par des produits matriciels. Indiquons simplement précisément ce qui nous sera utile par la suite :

Proposition 3.29 *Pour tous M, M' dans $(\Lambda^i(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}])^{m \times m}$ et W, W' dans $(\Lambda^j(\mathcal{A}))^m$, on a :*

$$\text{Val}(W + W') \geq \min\{\text{Val } W, \text{Val } W'\} , \quad (3.86)$$

$$\text{Val}(M + M') \geq \min\{\text{Val } M, \text{Val } M'\} , \quad (3.87)$$

$$\text{Val}(M \bullet W) \geq \text{Val } M + \text{Val } W , \quad (3.88)$$

$$\text{Val}(M \wedge M') \geq \text{Val } M + \text{Val } M' , \quad (3.89)$$

$$\text{Val}(dM) \geq \text{Val } M \text{ et } \text{Val}(dW) \geq \text{Val } W . \quad (3.90)$$

3.3.3.4 Notation $\mathcal{O}$

On utilisera pour Val la même notation “ $\mathcal{O}$ ” introduite à la Définition 3.12 pour l’ordre (pondéré) des séries. Pour $q \in \mathbb{N}$, le symbole $\mathcal{O}_q$ désigne n’importe quelle quantité (élément de $\mathcal{A}$, d’un $\Lambda^i(\mathcal{A})$, d’un $\Lambda^i(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$, ou une matrice à coefficients dans l’un de ces ensembles) auquel Val assigne une valeur supérieure ou égale à q .

Par exemple, $g = h + \mathcal{O}_q$, ou $g + \mathcal{O}_q = h + \mathcal{O}_q$, ou $g - h = \mathcal{O}_q$ signifient que $\text{Val}(g - h) \geq q$, mais aussi, si F est une application, $F(g + \mathcal{O}_q) = h + \mathcal{O}_r$ signifie que pour tout v tel que $\text{Val } v \geq q$, on a $\text{Val}(F(g + v) - h) \geq r$.

3.3.4 Indépendance de la fonction Val par rapport au choix de la base

On a défini jusqu’ici la fonction “ Val ” à l’aide d’une base (3.58) du $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$ -module $\Lambda^1(\mathcal{A})$. Dans ce paragraphe nous verrons que, bien que nous ne sachions pas donner de définition de la fonction Val sans avoir recours à une base, cette fonction elle-même ne dépend pas du choix de la base.

Pour deux bases $\eta = \{\eta_1, \dots, \eta_m\}$ et $\omega = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$, on note Val_η et Val_ω les deux fonctions a priori distinctes qui résultent de la construction précédente en utilisant chacune de ces bases. La proposition qui suit énonce que Val ne dépend pas de la base utilisée pour la définir.

Proposition 3.30 *Soit $\eta = \{\eta_1, \dots, \eta_m\}$ et $\omega = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ deux bases du $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$ -module $\Lambda^1(\mathcal{A})$, alors Val_η et Val_ω coïncident.*

Cette proposition permet d’utiliser maintenant la notation Val , indépendamment de la base de $\Lambda^1(\mathcal{A})$ choisie, sans aucune ambiguïté.

Démonstration : Montrons d'abord que Val_η et Val_ω coïncident sur $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$. Pour ceci, montrons, par récurrence sur i , que l'on a, pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{R}_i : \begin{cases} \text{Pour tout } h \in \mathcal{A}[\frac{d}{dt}], \text{ si il existe une base } \omega \text{ de } \Lambda^1(\mathcal{A}) \\ \text{telle que } \text{Val}_\omega(h) \leq i, \\ \text{alors, pour toute base } \eta \text{ de } \Lambda^1(\mathcal{A}), \text{Val}_\eta(h) = \text{Val}_\omega(h). \end{cases}$$

$\mathcal{R}_0$ est vraie car pour tout élément h de $\mathcal{A}$ et toute base de $\Lambda^1(\mathcal{A})$, $\text{Val}(h) = 0$ si et seulement si $h(0) \neq 0$.

Soit $i \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{R}_i$ vraie et, pour montrer que $\mathcal{R}_{i+1}$ l'est aussi, considérons $h \in \mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$, ω une base de $\Lambda^1(\mathcal{A})$ telle que $\text{Val}_\omega h = i + 1$, et η une autre base.

Tout d'abord, il est clair que $\text{Val}_\eta(h) \geq \text{Val}_\omega(h)$ (c'est-à-dire $\text{Val}_\eta(h) \geq i + 1$) car sinon, $\text{Val}_\eta(h) \leq i$, ce qui permet d'appliquer $\mathcal{R}_i$ à h , avec η jouant le rôle d' ω , et d'obtenir $\text{Val}_\omega(h) = \text{Val}_\eta(h)$, ce qui serait absurde puisque $\text{Val}_\omega h = i + 1$.

Montrons maintenant que $\text{Val}_\eta(h) \leq \text{Val}_\omega(h)$. On peut bien sûr écrire

$$h = \sum_{j=0}^J h_j \frac{d^j}{dt^j}, \quad h_j \in \mathcal{A},$$

et, d'après (3.75), $\text{Val}_\omega(h) = \min_{0 \leq j \leq J} (j + \text{Val}_\omega h_j)$. Distinguons deux cas.

- Si ce minimum est atteint pour au moins un entier $j \neq 0$, alors, pour cet entier j , on a $\text{Val}_\omega(h_j) = i + 1 - j \leq i$, on peut donc appliquer $\mathcal{R}_i$ à h_j avec la base ω pour obtenir $\text{Val}_\eta h_j = i + 1 - j$, ce qui entraîne $\text{Val}_\eta h \leq \text{Val}_\omega h$.
- Sinon, on a $\text{Val}_\omega h_j > i + 1 - j$ pour tout $j \geq 1$ et $\text{Val}_\omega h_0 = \text{Val}_\omega h = i + 1$. Ceci implique, d'après (3.60), que $h_0(0) = 0$; alors, d'après (3.61), si l'on écrit

$$dh_0 = \sum_{k \in \{1, \dots, m\}} a_k \bullet \omega_k = \sum_{k \in \{1, \dots, m\}} b_k \bullet \eta_k,$$

avec $a_b, b_k \in \mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$ (ce sont des opérateurs différentiels), on a, d'après (3.61) (voir aussi (3.76)) :

$$\text{Val}_\omega h_0 = \text{Val}_\omega dh_0 = \min_{1 \leq k \leq m} (1 + \text{Val}_\omega a_k), \quad (3.91)$$

$$\text{Val}_\eta h_0 = \text{Val}_\eta dh_0 = \min_{1 \leq k \leq m} (1 + \text{Val}_\eta b_k). \quad (3.92)$$

Soient $p_{k,j}$ et $q_{k,j}$ les éléments de $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$ qui donnent le changement de base :

$$\eta_k = \sum_{j=1}^m p_{k,j} \bullet \omega_j, \quad \omega_k = \sum_{j=1}^m q_{k,j} \bullet \eta_j, \quad k = 1, \dots, m. \quad (3.93)$$

On a clairement, pour tout k ,

$$a_k = \sum_{\ell=1}^m b_\ell q_{\ell,k} , \quad b_k = \sum_{\ell=1}^m a_\ell p_{\ell,k} . \quad (3.94)$$

Alors, d'après (3.79), (3.91) entraîne

$$i + 1 = \text{Val}_\omega h_0 \geq 1 + \min_{k, \ell \in \{1, \dots, m\}} (\text{Val}_\omega b_\ell + \text{Val}_\omega q_{\ell,k}) ;$$

il existe donc au moins un $\bar{\ell} \in \{1, \dots, m\}$ tel que $\text{Val}_\omega b_{\bar{\ell}} \leq i$, et on peut appliquer $\mathcal{R}_i$ à ce $b_{\bar{\ell}}$ pour obtenir $\text{Val}_\eta b_{\bar{\ell}} = \text{Val}_\omega b_{\bar{\ell}}$, et donc $\text{Val}_\eta b_{\bar{\ell}} \leq i$. D'après (3.92), cela entraîne $\text{Val}_\eta h_0 \leq i + 1$, et donc, puisque $\text{Val}_\eta h \leq \text{Val}_\eta h_0$ et $\text{Val}_\omega h = i + 1$, on a bien montré que $\text{Val}_\eta h \leq \text{Val}_\omega h$ dans ce cas aussi

Ceci achève de prouver que $\mathcal{R}_i$ est vrai pour tout i et donc que, pour tout $h \in \mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$, l'entier $\text{Val}_\epsilon h$ est indépendant de la base ϵ de $\Lambda^1(\mathcal{A})$ que l'on choisit. On considère désormais un élément général $\xi \in \Lambda(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$. Pour montrer que $\text{Val}_\epsilon \xi$ est aussi indépendant de la base ϵ , ce qui terminera la preuve de la proposition, il suffit de montrer que, étant donné deux bases ω et η , on a $\text{Val}_\eta \xi \geq \text{Val}_\omega \xi$ (η et ω jouant ici des rôles symétriques, l'inverse aura lieu aussi).

Montrons donc que l'on a $\text{Val}_\eta \xi \geq \text{Val}_\omega \xi$. Pour cela, on écrit, comme en (3.73),

$$\xi = \sum_{\substack{\lambda, q \in \mathbb{N} \\ (j_i, k_i) \in \{1, \dots, m\} \times \mathbb{N} \\ (j_1, k_1) < \dots < (j_q, k_q)}} h_{j_1, \dots, j_q, k_1, \dots, k_q, \lambda, q} \omega_{j_1}^{(k_1)} \wedge \dots \wedge \omega_{j_q}^{(k_q)} \frac{d^\lambda}{dt} \quad (3.95)$$

avec les $h_{j_1, \dots, j_q, k_1, \dots, k_q, \lambda, q}$ dans $\mathcal{A}$, si bien que, d'après la première partie de la preuve, on peut noter

$$\text{Val}_\omega h_{j_1, \dots, j_q, k_1, \dots, k_q, \lambda, q} = \text{Val}_\eta h_{j_1, \dots, j_q, k_1, \dots, k_q, \lambda, q} = \text{Val} h_{j_1, \dots, j_q, k_1, \dots, k_q, \lambda, q} .$$

Alors, d'après (3.74) et (3.95), on a

$$\text{Val}_\omega \xi = \min_{\substack{\lambda, q \in \mathbb{N} \\ (j_i, k_i) \in \{1, \dots, m\} \times \mathbb{N} \\ (j_1, k_1) < \dots < (j_q, k_q)}} \left(\text{Val} (h_{j_1, \dots, j_q, k_1, \dots, k_q, \lambda, q}) + \lambda + \sum_{i=1}^q (1 + k_i) \right) .$$

Par ailleurs, d'après (3.79) et (3.81), valables dans toutes les bases, on a

$$\text{Val}_\eta \xi \geq \min_{\substack{\lambda, q \in \mathbb{N} \\ (j_i, k_i) \in \{1, \dots, m\} \times \mathbb{N} \\ (j_1, k_1) < \dots < (j_q, k_q)}} \left(\text{Val} (h_{j_1, \dots, j_q, k_1, \dots, k_q, \lambda, q}) + \text{Val}_\eta \left(\omega_{j_1}^{(k_1)} \wedge \dots \wedge \omega_{j_q}^{(k_q)} \frac{d^\lambda}{dt} \right) \right) .$$

Ceci et l'expression de $\text{Val}_\omega \xi$ entraînent bien $\text{Val}_\eta \xi \geq \text{Val}_\omega \xi$ car, en utilisant (3.83), (3.81) et le fait que $\text{Val}_\omega \omega_i \geq 1$ dans n'importe quelle base, on obtient

$$\text{Val}_\eta \left(\omega_{j_1}^{(k_1)} \wedge \dots \wedge \omega_{j_q}^{(k_q)} \frac{d^\lambda}{dt^\lambda} \right) \geq \lambda + \sum_{i=1}^q (1 + k_i). \quad \blacksquare$$

3.3.5 Coordonnées adaptées

3.3.5.1 Définition

On va d'abord fixer une notation. Soit

$$\mathbf{Y} = \{Y_j^k\}_{1 \leq j \leq m, k \in \mathbb{N}}$$

un ensemble d'indéterminées, et $\mathbb{R}[[\mathbf{Y}]]$ l'anneau de séries défini à la section 3.1.2. C'est l'exemple évoqué pages 68 et 71, et on choisit, comme dans cet exemple, de donner à chaque variable y_j^k le poids

$$\pi(y_j^k) = k + 1. \quad (3.96)$$

On note

$$\mathbf{o} : \mathbb{R}[[\mathbf{Y}]] \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\} \quad (3.97)$$

l'ordre pondéré (cf. section 3.1.4) sur cet anneau de séries formelles associé au poids (3.96).

Rappelons (voir section 3.1.5) que, si $\mathbf{y} = (y_j^k)_{1 \leq j \leq m, k \in \mathbb{N}}$ est une famille de séries ⁶ de $x, u, \dot{u} \dots$ (c'est-à-dire $y_j^k \in \mathcal{A}$ pour tout j, k), alors, pour tout $h \in \mathbb{R}[[\mathbf{Y}]]$, on désigne par $h(\mathbf{y}) \in \mathcal{A}$ la série obtenue en substituant chaque indéterminée y_j^k par la série $y_j^k \in \mathcal{A}$. On peut alors définir, à l'aide de la fonction $\text{Val} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, une fonction $\text{Val}_{\mathbf{y}} : \mathbb{R}[[\mathbf{Y}]] \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ par

$$\text{Val}_{\mathbf{y}} h = \text{Val}(h(\mathbf{y})) \quad \text{pour tout } h \in \mathbb{R}[[\mathbf{Y}]]. \quad (3.98)$$

Si la famille $\mathbf{y}$ forme un *système de coordonnées* sur $\mathcal{A}$ (voir Définition 3.17), il existe une famille d'éléments de $\mathbb{R}[[\mathbf{Y}]]$, que l'on peut noter $\mathbf{y}^{-1} = (\zeta_\alpha)_{\alpha \in \Upsilon}$ (l'équation (3.45) définit l'ensemble Υ), telle que la substitution par $\mathbf{y}^{-1}$ "inverse" la substitution par $\mathbf{y}$, et vice-versa : $h \mapsto h(\mathbf{y})$ définit un isomorphisme de $\mathbb{R}[[\mathbf{Y}]] \rightarrow \mathcal{A}$, et $g \mapsto g(\mathbf{y}^{-1})$ l'isomorphisme inverse $\mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}[[\mathbf{Y}]]$. Dans cas, $\text{Val}_{\mathbf{y}}$ vérifie, comme Val , les propriétés (3.59) et (3.62) à (3.65), ce qui en fait "presque" une valuation sur $\mathbb{R}[[\mathbf{Y}]]$, et l'on peut aussi "transporter" l'ordre $\mathbf{o}$, qui est

⁶Comme il a été dit dans la note du bas de la page 74, les notations générales de la section 3.1.5, où les indéterminées n'étaient pas "numérotées" conduiraient à noter $y_{y_j^k}$ les séries de la famille $\mathbf{y}$; on utilise ici la notation plus légère y_j^k .

lui-même une valuation sur $\mathbb{R}[[\mathbf{Y}]]$, en une valuation sur $\mathcal{A}$ définie par $\mathbf{o}_{\mathbf{y}}(g) = \mathbf{o}(h(\mathbf{y}^{-1}))$. On va rechercher des coordonnées $\mathbf{y}$ telles que Val coïncide avec cette valuation $\mathbf{o}_{\mathbf{y}}$, ou de manière équivalente telles que $\text{Val}_{\mathbf{y}}$ coïncide avec $\mathbf{o}$.

Définition 3.31 On dit qu'une famille $\mathbf{y} = \{y_j^k\}_{1 \leq j \leq m, k \in \mathbb{N}}$ est un système de **coordonnées adaptées** si et seulement si

- (i). c'est un système de coordonnées sur $\mathcal{A}$, au sens de la Définition 3.17,
- (ii). $\text{Val}_{\mathbf{y}}$, défini par (3.98), coïncide avec $\mathbf{o}$,
c'est-à-dire que l'on a $\mathbf{o}(h) = \text{Val}(h(\mathbf{y}))$ pour tout $h \in \mathbb{R}[[\mathbf{Y}]]$.

La proposition suivante donne une condition suffisante pour que des coordonnées soient adaptées. C'est l'outil pratique utile pour construire des coordonnées adaptées après avoir construit une base. La section suivante explique pourquoi il existe toujours des coordonnées vérifiant cette condition suffisante, mais leur construction est en général aisée.

Proposition 3.32 Si $\mathbf{y} = \{y_j^k\}_{1 \leq j \leq m, k \in \mathbb{N}}$ forme un système de coordonnées sur $\mathcal{A}$, et si, pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$ et $k \in \mathbb{N}$, on a

$$dy_j^k = \omega_j^{(k)} + \mathcal{O}_{k+2} \quad (3.99)$$

(c'est-à-dire $\text{Val}(dy_j^k - \omega_j^{(k)}) \geq k + 2$), alors $\mathbf{y}$ est un système de coordonnées adaptées.

Montrons tout d'abord le lemme suivant.

Lemme 3.33 Si $\mathbf{y} = \{y_j^k\}_{1 \leq j \leq m, k \in \mathbb{N}}$ forme un système de coordonnées sur $\mathcal{A}$ et vérifie (3.99) pour tout j, k , alors, pour tout $h \in \mathbb{R}[[\mathbf{Y}]]$ tel que $h(0) = 0$, $\text{Val}_{\mathbf{y}}(h) = \min_{\substack{1 \leq j \leq m \\ k \in \mathbb{N}}} \{k + 1 + \text{Val}_{\mathbf{y}}(\frac{\partial h}{\partial y_j^k})\}$.

Démonstration de la proposition : Si $h(0) \neq 0$, $\mathbf{o}(h)$ et $\text{Val}_{\mathbf{y}}(h)$ sont tous les deux nuls. Une récurrence très simple fondée sur le lemme ci-dessus et la proposition 3.9 étend $\mathbf{o}(h) = \text{Val}_{\mathbf{y}}(h)$ à tout $h \in \mathbb{R}[[\mathbf{Y}]]$. ■

Démonstration du lemme. Définissons des $\eta_{j,k} \in \Lambda^1(\mathcal{A})$ et des $a_{j,k,i,l} \in \mathcal{A}$, pour tout j et i dans $\{1, \dots, m\}$ et tout k et l dans $\mathbb{N}$ par :

$$dy_j^k = \omega_j^{(k)} + \eta_{j,k} , \quad \eta_{j,k} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ l \in \mathbb{N}}} a_{j,k,i,l} \omega_i^{(l)} , \quad (3.100)$$

avec $\text{Val}(\eta_{j,k}) \geq k + 2$, d'où, pour tous i, j, k, l ,

$$\text{Val}(a_{j,k,i,l}) \geq k + 1 - l. \quad (3.101)$$

Soit maintenant $h \in \mathbb{R}[[\mathbf{Y}]]$, tel que $h(0) = 0$. D'après (3.39) et (3.100), on a

$$d(h(\mathbf{y})) = \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ k \in \mathbb{N}}} \left(\frac{\partial h}{\partial y_j^k}(\mathbf{y}) + \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ l \in \mathbb{N}}} a_{i,l,j,k} \frac{\partial h}{\partial Y_i^l}(\mathbf{y}) \right) \omega_j^{(k)},$$

et donc, d'après (3.60),

$$\text{Val}_{\mathbf{y}} h = \text{Val } h(\mathbf{y}) = \min_{\substack{1 \leq j \leq m \\ k \in \mathbb{N}}} k + 1 + \text{Val} \left(\frac{\partial h}{\partial y_j^k}(\mathbf{y}) + \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ l \in \mathbb{N}}} a_{i,l,j,k} \frac{\partial h}{\partial Y_i^l}(\mathbf{y}) \right). \quad (3.102)$$

Posons

$$H = \min_{\substack{1 \leq j \leq m \\ k \in \mathbb{N}}} \{k + 1 + \text{Val}_{\mathbf{y}}(\frac{\partial h}{\partial y_j^k})\} = \min_{\substack{1 \leq j \leq m \\ k \in \mathbb{N}}} \{k + 1 + \text{Val} \left(\frac{\partial h}{\partial y_j^k}(\mathbf{y}) \right)\}.$$

On doit montrer $\text{Val}_{\mathbf{y}} h = H$. D'après (3.62), (3.102) implique clairement que $\text{Val}_{\mathbf{y}}(h) \geq H$. Montrons l'inégalité inverse. Tout d'abord, (3.62), (3.64) et (3.101) entraînent, pour tous j, k ,

$$\text{Val} \left(\sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ l \in \mathbb{N}}} a_{i,l,j,k} \frac{\partial h}{\partial Y_i^l}(\mathbf{y}) \right) \geq \min_{\substack{1 \leq i \leq m \\ l \in \mathbb{N}}} l + 1 - k + \text{Val} \left(\frac{\partial h}{\partial Y_i^l}(\mathbf{y}) \right) = -k + H. \quad (3.103)$$

Considérons maintenant des indices $\bar{j}$ et $\bar{k}$ tels que

$$\bar{k} + 1 + \text{Val} \left(\frac{\partial h}{\partial Y_{\bar{j}}^{\bar{k}}}(\mathbf{y}) \right) = \min_{\substack{1 \leq j \leq m \\ k \in \mathbb{N}}} k + 1 + \text{Val} \left(\frac{\partial h}{\partial y_j^k}(\mathbf{y}) \right) = H.$$

Ceci entraîne, d'après (3.103) (avec $k = \bar{k}$) et (3.63),

$$\text{Val} \left(\frac{\partial h}{\partial Y_{\bar{j}}^{\bar{k}}}(\mathbf{y}) + \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ l \in \mathbb{N}}} a_{i,l,\bar{j},\bar{k}} \frac{\partial h}{\partial Y_i^l}(\mathbf{y}) \right) = \text{Val} \left(\frac{\partial h}{\partial Y_{\bar{j}}^{\bar{k}}}(\mathbf{y}) \right) = H - \bar{k} - 1,$$

et donc, avec (3.102), $\text{Val}_{\mathbf{y}} h \leq \bar{k} + 1 + \text{Val} \left(\frac{\partial h}{\partial Y_{\bar{j}}^{\bar{k}}}(\mathbf{y}) \right) = H$. ■

3.3.5.2 Construction de coordonnées adaptées

Nous allons maintenant voir que ces coordonnées adaptées existent sous les hypothèses faites au début de cette section.

Cette construction se fait en trois étapes : des coordonnées particulières sont construites dans les deux lemmes suivants (3.34 et 3.35), puis des coordonnées adaptées en sont déduites dans la Proposition 3.36.

Dans la plupart des cas, les coordonnées $x, u, \dot{u}, \dots$, ou des coordonnées déduites aisément des précédentes (prendre quelques contrôles comme états supplémentaires et leurs dérivées comme contrôles) ont déjà les propriétés du lemme suivant. Par exemple, dans le cas de la Proposition 3.24, $x, u, \dot{u}, \dots$ convient si $\sigma = 0$: pour les ξ_j^k , $1 \leq j \leq m$, $0 \leq k \leq \rho - 1$ prendre les x_i , et pour $k \geq \rho$, prendre $\xi_j^k = u_j^{(k-\rho)}$, et si $\sigma > 0$, il suffit de prendre σ contrôles comme nouveaux états pour se ramener au cas $\sigma = 0$. Le lemme suivant donne ces coordonnées généralement, à partir d'une base du module des différentielles. Noter qu'entre autre, les propriétés de ces coordonnées sont telles que $X = (\xi_j^k)_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 0 \leq k \leq K-1}}$ peut être pris comme état et $(\xi_1^K, \dots, \xi_m^K)$ comme contrôle c'est-à-dire que le système de contrôle s'écrit $\dot{X} = F(X, U)$.

Lemme 3.34 Si $\Lambda^1(\mathcal{A})$ est un $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$ -module libre de base $\{\omega_j\}_{1 \leq j \leq m}$, alors il existe $K \in \mathbb{N}$ et $\{\xi_j^k\}_{1 \leq j \leq m, k \in \mathbb{N}}$ des coordonnées de $\mathcal{A}$ telles que

- Pour tout $k \in \{0, \dots, K-1\}$, $\dot{\xi}_j^k$ est fonction des $\{\xi_j^k\}_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 0 \leq k \leq K}}$ seulement, et pour tout entier $p \geq K$,
- on a la relation $\xi_j^{p+1} = \dot{\xi}_j^p$,
- $\{\omega_j^{(k)}\}_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 0 \leq k \leq p}}$ est une base du sous- $\mathcal{A}$ -module de $\Lambda^1(\mathcal{A})$ engendré par $\{d\xi_j^k\}_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 0 \leq k \leq p}}$.

Démonstration du lemme 3.34 : $\{\omega_j^{(k)}\}_{\substack{1 \leq j \leq m \\ k \in \mathbb{N}}}$ est une base de $\Lambda^1(\mathcal{A})$ sur $\mathcal{A}$ donc $\{\omega_{j_1}^{(k_1)} \wedge \omega_{j_2}^{(k_2)}\}_{\substack{(j_1, k_1), (j_2, k_2) \in \{1, \dots, m\} \times \mathbb{N} \\ (j_1, k_1) < (j_2, k_2)}}$ est une base de $\Lambda^2(\mathcal{A})$ sur $\mathcal{A}$, donc pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$,

$$d\omega_j = \sum_{\substack{(j_1, k_1), (j_2, k_2) \in \{1, \dots, m\} \times \{0, \dots, L\} \\ (j_1, k_1) < (j_2, k_2)}} a_{j, j_1, j_2, k_1, k_2} \omega_{j_1}^{(k_1)} \wedge \omega_{j_2}^{(k_2)}.$$

On appelle L l'entier défini par $L = \max\{\{k_1 | a_{j, j_1, j_2, k_1, k_2} \neq 0\}, \{k_2 | a_{j, j_1, j_2, k_1, k_2} \neq 0\}\}$.

En appliquant $2L$ fois $\frac{d}{dt}$ à l'expression ci-dessus de $d\omega_j$, on obtient

$$d\omega_j^{(2L)} = \sum_{\substack{(j_1, k_1), (j_2, k_2) \in \{1, \dots, m\} \times \mathbb{N} \\ (j_1, k_1) < (j_2, k_2), \\ q \in \{0, \dots, 2L\}}} \binom{2L}{q} a_{j, j_1, j_2, k_1, k_2}^{(2L-q)} \sum_{r=0}^q \binom{q}{r} \omega_{j_1}^{(k_1+r)} \wedge \omega_{j_2}^{(k_2+q-r)}.$$

Si $r \leq L$, alors $k_1 + r \leq 2L$ et si $r > L$, alors $k_2 + q - r \leq 2L$, ainsi $d\Omega_j^{(2L)}$ congrue à 0 modulo $\{\omega_j^{(k)}\}_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 0 \leq k \leq 2L}}$. On obtient par intégration que pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$ et tout $k \in \{0, \dots, 2L\}$, $d\Omega_j^{(k)}$ congrue à 0 modulo $\{\omega_j^{(k)}\}_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 0 \leq k \leq 2L}}$. On peut alors appliquer le théorème de Frobenius pour $K = 2L$ à $\{\omega_j^{(k)}\}_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 0 \leq k \leq K}}$, il existe donc $\{\xi_j^k\}_{1 \leq j \leq m, k \in \mathbb{N}}$ un système de coordonnées de $\mathcal{A}$ tel que $\{d\xi_j^k\}_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 0 \leq k \leq K}}$ et $\{\omega_j^{(k)}\}_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 0 \leq k \leq K}}$ sont deux bases du même sous- $\mathcal{A}$ -module de $\Lambda^1(\mathcal{A})$. Nous pourrions appliquer le théorème de Frobenius pour tout $p \geq K$ pour obtenir le premier point, cependant, construisons plutôt les coordonnées de façon à obtenir le deuxième point du lemme, le premier point du lemme sera alors obtenu de façon évidente. Considérons maintenant le module engendré par $\{\{d\xi_j^k\}_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 0 \leq k \leq K}}, \{d\xi_j^k\}_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 0 \leq k \leq K}}\}$, une base naturelle de ce module est d'après ce qui précède $\{\omega_j^{(k)}\}_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 0 \leq k \leq K+1}}$, on peut donc extraire m formes indépendantes parmi les $\{d\xi_j^k\}_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 0 \leq k \leq K}}$ telles que ces m formes plus les $\{d\xi_j^k\}_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 0 \leq k \leq K}}$ en forment une base. Considérons, quitte à changer les indices, que ces m formes sont $\{d\xi_j^K\}_{1 \leq j \leq m}$. Il ne reste qu'à poser $\xi_j^{K+1} = \xi_j^K$ pour $j \in \{1, \dots, m\}$ et nous obtenons le deuxième point pour $p = K$. Montrons dans le cas $p \geq K$ la propriété par récurrence. Soit $\mathcal{R}_i$ la propriété de récurrence sur i suivante.

$\mathcal{R}_i$: $\{ \text{Pour tout } j \in \{1, \dots, m\}, \xi_j^{K+1+i} = \xi_j^{K+i}. \}$
 $\{d\xi_j^k\}_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 0 \leq k \leq K+i}}$ et $\{\omega_j^{(k)}\}_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 0 \leq k \leq K+i}}$ sont deux bases du même sous- $\mathcal{A}$ -module de $\Lambda^1(\mathcal{A})$ et seuls les $d\xi_j^{K+i}$ dépendent des $\omega_j^{(K+i)}$.

$\mathcal{R}_0$: vrai d'après ce qui précède. Soit $i \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{R}_i$ vérifiée. En différentiant les relations entre les ξ_j^k et les $\omega_j^{(k)}$, on obtient que $\{\{d\xi_j^k\}_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 0 \leq k \leq K+i}}, \{d\xi_j^k\}_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 0 \leq k \leq K+i}}\}$ génère le même module que $\{\omega_j^{(k)}\}_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 0 \leq k \leq K+i+1}}$. Or $\{\omega_j^{(k)}\}_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 0 \leq k \leq K+i+1}}$ forme une base, donc on peut extraire m éléments de $\{d\xi_j^k\}_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 0 \leq k \leq K+i}}$ tels que ces m formes plus les $\{d\xi_j^k\}_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 0 \leq k \leq K+i}}$ forment une base. Comme seuls les $d\xi_j^{K+i}$ dépendent des $\omega_j^{(K+i)}$, ces m formes extraites sont les $d\xi_j^{K+i}$, en posant $\xi_j^{K+i+1} = \xi_j^{K+i}$ on obtient $\mathcal{R}_{i+1}$. Par principe de récurrence, le lemme est vrai ■

Le lemme suivant est un corollaire du lemme précédent.

Lemme 3.35 Si $\Lambda^1(\mathcal{A})$ est un $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$ -module libre de base $\{\omega_j\}_{1 \leq j \leq m}$, alors il existe $K \in \mathbb{N}$ et des coordonnées $\{z_j^k\}_{\substack{1 \leq j \leq m \\ k \in \mathbb{N}}}$ de $\mathcal{A}$ telles que :

- Pour tout $k \geq K$, $\dot{z}_j^k = z_j^{k+1}$.
- Pour tout $k \in \{0, \dots, K-1\}$, $\dot{z}_j^k$ est fonction des $\{z_j^k\}_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 0 \leq k \leq K}}$ seulement.

– Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$dz_j^k = \omega_j^{(k)} + \sum_{\substack{1 \leq j' \leq m \\ k' \in \mathbb{N}}} a_{j,k,j',k'} \omega_{j'}^{(k')}, \quad (3.104)$$

avec $\text{Val}(a_{j,k,j',k'}) \geq 1$.

Démonstration du lemme 3.35 : On utilise tout d'abord le lemme 3.34 et on effectue une transformation linéaire à coefficients constants aux $\{\xi_j^k\}_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 0 \leq k \leq K}}$ pour obtenir les $\{z_j^k\}_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 0 \leq k \leq K}}$: pour

$$\omega_j^{(k)} = \sum_{\substack{1 \leq j' \leq m \\ k' \in \mathbb{N}}} \alpha_{j,k,j',k'} d\xi_{j'}^{k'}, \quad (3.105)$$

la somme étant finie. On pose

$$z_j^k = \sum_{\substack{1 \leq j' \leq m \\ k' \leq K}} \alpha_{j,k,j',k'}(0) \xi_{j'}^{k'}. \quad (3.106)$$

Le premier point du lemme 3.34 nous assure que la matrice des $\alpha_{j,k,j',k'}(0)$ est de rang plein. On pose de plus pour $k \geq K$, $z_j^{k+1} = z_j^k$. Ainsi les z_j^k forment bien un système de coordonnées de $\mathcal{A}$. Les trois points du lemme viennent alors aisément. Le premier point est obtenu par construction des z_j^k pour $k \geq K$. Les z_j^k pour $k \leq K - 1$ sont dans le module engendré par les ξ_j^k pour $k \leq K$, donc en ré-exprimant les ξ_j^k en fonction des z_j^k on obtient le deuxième point. Pour obtenir le troisième point il suffit alors de différentier (3.106), $dz_j^k = \sum_{\substack{1 \leq j' \leq m \\ k' \leq K}} \alpha_{j,k,j',k'}(0) d\xi_{j'}^{k'}$. Or pour $k \leq K$, $\omega_j^{(k)} = \sum_{\substack{1 \leq j' \leq m \\ k' \leq K}} \alpha_{j,k,j',k'} d\xi_{j'}^{k'}$, donc $\omega_j^{(k)} = dz_j^k + \sum_{\substack{1 \leq j' \leq m \\ k' \in \mathbb{N}}} b_{j,k,j',k'} d\xi_{j'}^{k'}$, avec $\text{Val}(b_{j,k,j',k'}) \geq 1$. Il suffit alors de remplacer les $d\xi_j^k$ par leur expression en fonction des $\omega_j^{(k)}$ pour obtenir le troisième point pour $k \leq K$. Un simple calcul (en utilisant le lemme 3.66 appliqué aux $a_{j,k,j',k'}$) permet de conclure la démonstration pour $k \geq K + 1$ ■

La proposition suivante donne une construction de coordonnées qui vérifient les conditions de la Proposition 3.32, et sont donc des coordonnées adaptées.

Proposition 3.36 Si $\Lambda^1(\mathcal{A})$ est un $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$ -module libre, il existe des coordonnées $\{y_j^k\}_{1 \leq j \leq m, k \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{A}$ qui vérifient les conditions de la Proposition 3.32.

Démonstration : On va d'abord construire les y_j^k de proche en proche pour k croissant de 0 à $K - 1$. Précisément, démontrons la propriété $\mathcal{R}_q$ suivante pour $1 \leq q \leq K$:

$$\mathcal{R}_q : \begin{cases} \text{Il existe des coordonnées } \{\{y_j^k\}_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 0 \leq k \leq q-1}}, \{z_j^k\}_{\substack{1 \leq j \leq m \\ k \geq q}}\} \text{ sur } \mathcal{A} \text{ telles que} \\ \text{tous les } y_j^k, \text{ pour } k \in \{0, \dots, q-1\}, \text{ vérifient (3.99) et} \\ \text{(3.104) est vérifiée pour tout } k \geq q, \text{ et} \\ \text{Val}(z_j^k) \geq q+1 \text{ pour tout } k \in \{q, \dots, K\}. \end{cases}$$

On part des coordonnées (z_j^k) qui satisfont les trois propriétés de la conclusion du Lemme 3.35. Si l'on prend $y_j^0 = z_j^0$ et que l'on ne modifie pas les autres z_j^k , $\mathcal{R}_1$ est satisfaite ; en particulier, les y_j^0 satisfont (3.99) pour $k = 0$ car, dans (3.104), la somme est bien de valuation supérieure ou égale à deux.

Supposons maintenant que $\mathcal{R}_q$ est vraie pour un entier $q \in \{1, \dots, K-1\}$, et établissons $\mathcal{R}_{q+1}$. On montre tout d'abord que $\mathcal{R}_q$ entraîne la propriété suivante, où $\eta(0) = 0$ pour $\eta \in \Lambda^1(\mathcal{A})$ signifie que, dans une décomposition sur une base de $\Lambda^1(\mathcal{A})$ en tant que $\mathcal{A}$ -module, tous les coefficients sont des séries non inversibles :

$$\begin{aligned} &\text{pour tout } \eta \in \Lambda^1(\mathcal{A}) \text{ tel que } \eta(0) = 0 \text{ et } \text{Val}(\eta) \geq q+1 \text{ et } \text{Val}(d\eta) \geq q+2, \\ &\text{il existe } p, \text{ un polynôme homogène (au sens de la section 3.1.4.2,} \\ &\text{avec les poids (3.96)) de degré } q+1 \\ &\text{en les variables } \{y_j^k\}_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 0 \leq k \leq q-1}} \text{ seulement, tel que } \eta = dp + \mathcal{O}_{q+2}. \end{aligned} \quad (3.107)$$

En effet, puisque les éléments ci-dessus forment des coordonnées, leurs différentielles forment une base de $\Lambda^1(\mathcal{A})$ comme $\mathcal{A}$ -module, si bien que l'on peut écrire

$$\eta = \sum_{\substack{1 \leq j' \leq m \\ 0 \leq k' \leq q-1}} \mu_{j',k'} dy_{j'}^{k'} + \sum_{\substack{1 \leq j' \leq m \\ k' \geq q}} \nu_{j',k'} dz_{j'}^{k'}.$$

Chaque $\nu_{j',k'}$ est de valuation au moins 1 (car non inversible), et $\text{Val}(dz_{j'}^{k'}) \geq q+1$, donc chaque terme de la seconde somme, et donc cette somme (finie) elle-même, est de valuation au moins $q+2$ donc cette seconde somme rentre dans le $\mathcal{O}_{q+2}$. Dans la première, chaque $\mu_{j',k'} \in \mathcal{A}$ peut s'écrire, après substitution, comme une série en un nombre fini de variables parmi $\{\{y_j^k\}_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 0 \leq k \leq q-1}}, \{z_j^k\}_{\substack{1 \leq j \leq m \\ k \geq q}}\}$, et l'on peut décomposer cette série en deux parties : $\mu_{j',k'} = \mu_{j',k'}^0 + \mu_{j',k'}^1$ où $\mu_{j',k'}^0$ contient tous les monômes qui ne contiennent que les y_j^k , et $\mu_{j',k'}^1$ tous les autres ; on peut clairement mettre au moins un z_j^k en facteur dans chaque monôme de $\mu_{j',k'}^1$ et finalement écrire $\mu_{j',k'}^1 = \sum_{\text{finie}} z_j^k s_j^k$ avec les s_j^k des séries, et donc, comme $\text{Val } z_j^k \geq q+1$,

on a $\text{Val } \mu_{j',k'}^1 \geq q + 1$, et cela entraîne finalement, comme $\text{Val } y_{j'}^{k'} \geq 1$, que la contribution des $\mu_{j',k'}^1$ à la première somme est de valuation au moins $q + 2$. Finalement, on peut écrire $\mu_{j',k'}^0 = \mu_{j',k'}^{00} + \mu_{j',k'}^{01}$, où $\mu_{j',k'}^{00}$ contient les monômes de degré (pondéré) $\leq q + 1$ et $\mu_{j',k'}^{01}$ ceux de degré (pondéré) $\geq q + 2$, et la contribution des $\mu_{j',k'}^{01}$ à la première somme est donc aussi de valuation au moins $q + 2$. Ceci entraîne

$$\eta = \sum_{\substack{1 \leq j' \leq m \\ 0 \leq k' \leq q-1}} \mu_{j',k'}^{00} dy_{j'}^{k'} + \mathcal{O}_{q+2},$$

où chaque $\mu_{j',k'}^{00}$ est un *polynôme* en les variables $\{y_j^k\}_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 0 \leq k \leq q-1}}$, homogène de degré $q + 1$.

L'hypothèse implique

$$\sum_{\substack{1 \leq j' \leq m \\ 0 \leq k' \leq q-1}} d\mu_{j',k'}^{0,0} \wedge dy_{j'}^{k'} = \mathcal{O}_{q+2}$$

mais avec ces coordonnées, cette différentielle est soit nulle soit homogène de degré $q + 1$, elle est donc nulle, et le lemme de Poincaré parmi les polynômes homogènes (voir section 3.1.4.5) donne alors l'existence d'un polynôme p tel que $dp = \sum \mu_{j',k'}^{00} dy_{j'}^{k'}$, et finalement qui vérifie la propriété demandée en (3.107).

Utilisons maintenant (3.107) pour prouver $\mathcal{R}_{q+1}$. Dans (3.104) (pour $k = q$), la différentielle extérieure du membre de gauche est nulle et $d\omega_j^{(q)} \geq q + 2$ (d'après (3.84) et le fait que $\text{Val } d\omega_j \geq 2$), donc la différentielle extérieure de la somme est de valuation au moins $q + 2$, si bien que toutes les conditions de la propriété (3.107) sont satisfaites, et qu'il existe donc un polynôme p_j en les variables $y_{j'}^{k'}$ tel que $dz_j^q = \omega_j^{(q)} + dp_j + \mathcal{O}_{q+2}$. Prenons $y_j^q \triangleq z_j^q - p_j$; la propriété (3.99) se lit sur la relation précédente, et l'on obtient bien des coordonnées en remplaçant z_j^q par cet y_j^q car les p_j ne dépendent d'aucun z_j^q . On a construit les y_j^k demandés dans $\mathcal{R}_{q+1}$; il reste à modifier les z_j^k pour $q + 1 \leq k \leq K$. Ceux hérités de $\mathcal{R}_q$ satisfont toujours (3.104), mais seulement $\text{Val}(z_j^k) \geq q + 1$; modifions-les pour obtenir $q + 2$. Prenons la différentielle extérieure de chaque membre dans (3.104), pour $k \geq q + 1$: celle du membre de gauche est nulle, et comme noté plus haut $d\omega_j^{(k)} \geq k + 2 \geq q + 2$, donc la valuation de la différentielle extérieure de la somme est au moins égale à $q + 2$; on peut, comme plus haut, appliquer la propriété (3.107) à cette somme, ce qui donne un polynôme $p_{j,k}$ tel que $dz_j^k = \omega_j^{(k)} + dp_{j,k} + \mathcal{O}_{q+2}$. On remplace z_j^k par $z_j^k - p_{j,k}$.

La propriété $\mathcal{R}_q$ est vraie pour tout $q \in \{0, \dots, K\}$, et en particulier pour $q = K$. On termine en définissant les y_j^k pour $k \geq K + 1$ par $y_j^k = \frac{d}{dt}^{k-K} \bullet y_j^K$. Il est aisé que ceci fait des y_j^k des coordonnées, comme les z_j^k , et que la propriété (3.99) se propage. ■

3.3.5.3 La fonction Val est bien une valuation sur $\mathcal{A}$, et sur $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$.

Concernant la fonction Val, la propriété multiplicative établie jusqu'ici est seulement l'inégalité (3.64). L'existence de coordonnées adaptées permet de prouver aisément l'on a en fait, pour tout $p, q \in \mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$, l'égalité suivante, qui fait bien de Val une valuation :

$$\text{Val}(pq) = \text{Val } p + \text{Val } q. \quad (3.108)$$

Proposition 3.37 *L'application $\text{Val} : \mathcal{A}[\frac{d}{dt}] \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ définit une valuation sur l'anneau $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$, et donc a fortiori sur son sous-anneau $\mathcal{A}$.*

Démonstration : Soit y un système de coordonnées adaptées (voir Définition 3.31). D'une part, $h \mapsto h(y)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$ -algèbre $\mathbb{R}[[Y]] \rightarrow \mathcal{A}$. D'autre part cet isomorphisme envoie $\mathfrak{o}$, qui coïncide avec Val_y , sur Val. On a vu (cf. (3.26)) que $\mathfrak{o}$ est une valuation sur $\mathbb{R}[[Y]]$, donc Val est une valuation sur $\mathcal{A}$, ce qui prouve (3.108) quand p et q sont dans $\mathcal{A}$. S'ils sont dans $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$, soit

$$p = \sum_{k=0}^K p_k \frac{d^k}{dt^k}, \quad q = \sum_{j=0}^J q_j \frac{d^j}{dt^j},$$

avec $p_k \in \mathcal{A}$ et $q_j \in \mathcal{A}$. Soit $\bar{K}$ le plus grand des entiers k tels que $k + \text{Val } p_k = \text{Val } p$, et $\bar{j}$ le plus grand j tel que $j + \text{Val } q_j = \text{Val } q$. On peut écrire $p = p' + p''$, où p' ne comprend que les termes pour $0 \leq k \leq \bar{K}$ et p'' les autres, et de même $q = q' + q''$. Alors $pq = p'q' + p'q'' + p''q' + p''q''$. Par définition, on a $\text{Val } p'' > \text{Val } p$ et $\text{Val } q'' > \text{Val } q$. D'après (3.79) et (3.81), ceci entraîne $\text{Val}(p'q' + p''q' + p''q'') > \text{Val } p + \text{Val } q$. Pour établir (3.108), il suffit donc, d'après (3.80), de montrer que $\text{Val}(p'q') = \text{Val } p + \text{Val } q$. La relation (3.81) implique évidemment $\text{Val}(p'q') \geq \text{Val } p + \text{Val } q$; inversement, le terme de degré $\bar{K} + \bar{j}$ (en $\frac{d}{dt}$) dans $p'q'$ est $p_{\bar{K}} q_{\bar{j}} \frac{d^{\bar{K}+\bar{j}}}{dt^{\bar{K}+\bar{j}}}$, ce qui entraîne, puisque $\bar{K} + \text{Val } p_{\bar{K}} = \text{Val } p$ et $\bar{j} + \text{Val } q_{\bar{j}} = \text{Val } q$, en utilisant (3.75), l'inégalité $\text{Val}(p'q') \leq \text{Val } p + \text{Val } q$. ■

3.3.6 Filtration

On va utiliser la valuation définie jusque là pour filtrer chaque⁷ $\Lambda^r(\mathcal{A})$ ou chaque $\Lambda^r(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$ définis aux sections 3.2.3 et 3.2.4. Dans la suite, $r = 0, 1, 2$ sont les seuls cas qui nous intéresseront. Pour $r \geq 1$, il n'y a pas de loi multiplicative interne à $\Lambda^r(\mathcal{A})$ ou $\Lambda^r(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$ mais seulement une structure de module sur $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$, en prenant pour loi externe la composition des

⁷On pourrait aussi filtrer $\Lambda(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$ et considérer, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\Lambda(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]_k = \{g \in \Lambda(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}] / \text{Val } g \geq k\}.$$

opérateurs dans le cas de $\Lambda^r(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$, et l’“application” des opérateurs (la loi $\bullet$, comme en (3.53)) dans le cas de $\Lambda^r(\mathcal{A})$ (ceci en plus de la structure évidente de module sur $\mathcal{A}$).

Pour tous entiers r et k ,

$$\begin{aligned} (\Lambda^r(\mathcal{A}))_k &= \{g \in \Lambda^r(\mathcal{A}) / \text{Val } g \geq k\} \\ \text{et } \left(\Lambda^r(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}] \right)_k &= \{g \in \Lambda^r(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}] / \text{Val } g \geq k\} \end{aligned} \quad (3.109)$$

sont, d’après (3.81), des sous- $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$ -module de $\Lambda^r(\mathcal{A})$ et $\Lambda^r(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$ respectivement. On obtient alors une filtration de $\Lambda^r(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$ et de $\Lambda^r(\mathcal{A})$:

$$\Lambda^r(\mathcal{A}) = (\Lambda^r(\mathcal{A}))_0 \supset (\Lambda^r(\mathcal{A}))_1 \supset \cdots \supset (\Lambda^r(\mathcal{A}))_k \supset \cdots, \quad (3.110)$$

$$\Lambda^r(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}] = (\Lambda^r(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}])_0 \supset (\Lambda^r(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}])_1 \supset \cdots \supset (\Lambda^r(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}])_k \supset \cdots. \quad (3.111)$$

On vient d’établir à la section précédente l’existence –et un moyen de construction– de systèmes de coordonnées adaptées pour la valuation Val . Ces coordonnées établissent un isomorphisme entre $\mathcal{A}$ et $k[[\mathbf{Y}]]$ (cf. le début de la section 3.3.5) qui envoie la valuation Val sur la valuation $\mathfrak{o}$ (voir Définition 3.31). Cet isomorphisme envoie donc la filtration (3.109) sur la filtration (3.38) (qui se ramène à (3.35) si $r = 0$) :

$$\Lambda^r(\mathbb{R}[[\mathbf{Y}]]) = (\Lambda^r(\mathbb{R}[[\mathbf{Y}]]))_0 \supset (\Lambda^r(\mathbb{R}[[\mathbf{Y}]]))_1 \supset \cdots \supset (\Lambda^r(\mathbb{R}[[\mathbf{Y}]]))_k \supset \cdots,$$

et induit donc un isomorphisme de $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels entre les quotients

$$\Lambda^r(\mathcal{A}) / (\Lambda^r(\mathcal{A}))_{k+1} \quad \text{et} \quad \Lambda^r(\mathbb{R}[[\mathbf{Y}]]) / (\Lambda^r(\mathbb{R}[[\mathbf{Y}]]))_{k+1}.$$

Ceci entraîne en particulier la propriété suivante :

Proposition 3.38 *Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $r \in \mathbb{N}$, les quotients*

$$\Lambda^r(\mathcal{A}) / (\Lambda^r(\mathcal{A}))_{k+1} \quad \text{et} \quad \Lambda^r(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}] / \left(\Lambda^r(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}] \right)_{k+1} \quad (3.112)$$

La propriété multiplicative (3.81) de Val fait de chaque $\Lambda(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]_k$ un idéal (à gauche et à droite) de $\Lambda(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$. On obtient une filtration de $\Lambda(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$:

$$\Lambda(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}] = \Lambda(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]_0 \supset \Lambda(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]_1 \supset \cdots \supset \Lambda(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]_k \supset \cdots,$$

qui “épouse” bien l’anneau, c’est-à-dire que l’intersection de tous les $\Lambda(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]_k$ est réduite à 0.

Ceci dit, l’algèbre $\Lambda(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$ est bien grande et bien abstraite : les formes différentielles non homogènes ne sont qu’une commodité d’écriture, et il est plus intéressant d’étudier chaque $\Lambda^r(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$ séparément.

sont des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels de dimension finie. On note respectivement $\aleph_0(r, k)$ et $\aleph(r, k)$ leurs dimensions. Pour tout r, k , on a la relation :

$$\aleph(r, k) = \sum_{\ell=0}^k \aleph_0(r, \ell) . \quad (3.113)$$

Démonstration : On déduit de (3.78) que $\Lambda^r(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]/\Lambda^r(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]_{k+1}$ est isomorphe, en tant que $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, à

$$\bigoplus_{\ell=0}^k \Lambda^r(\mathcal{A})/(\Lambda^r(\mathcal{A}))_{\ell+1} .$$

Sous réserve que chaque $\Lambda^r(\mathcal{A})/(\Lambda^r(\mathcal{A}))_{\ell+1}$ soit de dimension finie, cela prouve que $\Lambda^r(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]/\Lambda^r(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]_{k+1}$ l'est aussi, et que sa dimension est donnée par (3.113).

D'après les remarques qui précèdent la proposition, en utilisant un quelconque système de coordonnées adaptées, chaque $\Lambda^r(\mathcal{A})/(\Lambda^r(\mathcal{A}))_{k+1}$ est isomorphe, en tant que $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, à $\Lambda^r(\mathbb{R}[[\mathbf{Y}]])/\Lambda^r(\mathbb{R}[[\mathbf{Y}]])_{k+1}$, lui-même isomorphe, d'après la Proposition 3.15, à

$$\bigoplus_{i=0}^k (\Lambda^r(\mathbb{R}[\mathbf{Y}]))^{[i]} .$$

Comme chaque $\Lambda^r(\mathbb{R}[\mathbf{Y}])^{[i]}$ est un espace vectoriel de dimension finie, dont la dimension est donnée en (3.30)-(3.31), ceci permet de conclure. ■

Notons que les filtrations (3.110) et (3.111), ainsi que les quotients (3.112), sont définis indépendamment des coordonnées adaptées, et leur dimension est bien définie aussi, indépendamment du choix des coordonnées adaptées, mais il n'y pas, en revanche, de notion de "polynôme homogène" au sens de Val. Le cas de la valuation $\mathfrak{o}$ sur $\mathbb{R}[[\mathbf{Y}]]$ (ou $\Lambda^r(\mathbb{R}[[\mathbf{Y}]])[\frac{d}{dt}]$) est plus simple : chaque élément du quotient $\mathbb{R}[[\mathbf{Y}]]/\mathbb{R}[[\mathbf{Y}]]_{k+1}$ est représenté de manière canonique par un élément particulier de sa classe : un unique polynôme de "degré" (au sens du poids (3.96)) inférieur ou égal à k , ou en d'autres termes $\mathbb{R}[[\mathbf{Y}]]/\mathbb{R}[[\mathbf{Y}]]_{k+1}$ est canoniquement isomorphe à $\bigoplus_{i=0}^k \mathbb{R}[\mathbf{Y}]^{[i]}$, qui est naturellement une partie de $\mathbb{R}[[\mathbf{Y}]]$. On a remarqué dans la démonstration ci-dessus que chaque quotient $\mathcal{A}/\mathcal{A}^{[k+1]}$ est aussi isomorphe à $\bigoplus_{i=0}^k \mathbb{R}[\mathbf{Y}]^{[i]}$, mais cet isomorphisme *dépend* du choix des coordonnées adaptées, et les coordonnées adaptées permettent aussi d'envoyer $\bigoplus_{i=0}^k \mathbb{R}[\mathbf{Y}]^{[i]}$ sur une partie de $\mathcal{A}$ qui *dépend aussi* du choix des coordonnées adaptées ; autrement dit, pour $g \in \mathcal{A}$, il n'y a pas d'élément de $\mathcal{A}$ privilégié parmi tous ceux qui ne diffèrent de g que par un élément de valuation strictement plus grande que k . Les coordonnées adaptées sont tout de même d'un grand secours pour faire des calculs, ou pour prouver des propriétés comme la suivante, qui est une conséquence du Corollaire 3.14.

Proposition 3.39 Soient r et k des entiers positifs et $\omega \in \Lambda^r(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$ (resp $\omega \in \Lambda^r(\mathcal{A})$) tel que

$$d\omega = \mathcal{O}_{k+1}. \quad (3.114)$$

Alors il existe $\eta \in \Lambda^{r-1}(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$ (resp. $\eta \in \Lambda^{r-1}(\mathcal{A})$) tel que

$$\omega = d\eta + \mathcal{O}_{k+1}. \quad (3.115)$$

Démonstration : pour le cas $\omega \in \Lambda^r(\mathcal{A})$, ceci est une conséquence directe du Corollaire 3.14 et du fait que l'isomorphisme induit par les coordonnées adaptées envoie d sur d et $\mathbf{Val}$ sur $\mathbf{o}$.

Pour le cas $\omega \in \Lambda^r(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$, si

$$\omega = \sum_{\ell=0}^L \omega_\ell \frac{d^\ell}{dt^\ell},$$

il suffit d'appliquer le cas précédent à chaque $\omega_\ell \in \Lambda^r(\mathcal{A})$. ■

3.4 Application aux équations de la platitude d'un système de contrôle

3.4.1 Platitude des systèmes de contrôle, formulation du problème

Les systèmes “différentiellement plats” ont été introduits dans [11], et les auteurs même de ce papier ont remarqué ensuite que le problème de la caractérisation de cette propriété, pour des systèmes d'équations différentielles sous-déterminés, avait été posé dès le début du vingtième siècle.

On prendra la définition suivante, qui est équivalente, via un théorème d'inversion locale, à la définition classique. Voir plus de détails dans [49, §7, Théorème 5] (dans cette référence, on utilise des fonctions C^∞ plutôt que des séries, et par “dynamic linearizable”, il faut entendre plat).

Définition 3.40 On dira qu'un système (3.42)-(3.44) est plat si et seulement si il existe des éléments $h_1, \dots, h_m$ de $\mathcal{A}$ tels que $\{dh_1, \dots, dh_m\}$ soit une base de $\Lambda^1(\mathcal{A})$, en tant que $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$ -module.

Ceci est bien sûr une version locale et formelle (on ne dit rien de la convergence des séries $h_1, \dots, h_m$).

Notons que, d'après cette définition, il est évident que la liberté du $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$ -module $\Lambda^1(\mathcal{A})$ est une condition *nécessaire* pour la platitude de (3.42)-(3.44). Ceci légitime la seconde hypothèse faite au chapitre précédent, section 3.3.1.

Dans le cas $m = 1$ (systèmes à entrée scalaire), les bases ont un seul élément. Soit $\{\omega\}$ une base. On a déjà noté (fin de la section 3.3.1), que toutes les autres bases s'écrivent $\{\lambda\omega\}$, $\lambda \in \mathcal{A}$, $\lambda(0) \neq 0$. Le système est donc plat si et seulement si il existe un $h \in \mathcal{A}$ et un $\lambda \in \mathcal{A}$, $\lambda(0) \neq 0$, tels que $dh = \lambda\omega$. Le théorème de Frobenius nous dit qu'il existe ce λ et ce h si et seulement si $d\omega \wedge \omega = 0$. Comme ω peut être construit très explicitement, cela donne une caractérisation aisée de la platitude pour les systèmes à une seule entrée.

Le cas à une seule entrée est de fait bien connu, voir [7], et aussi [6] dans un langage différent.

Dans le cas $m \geq 2$, en revanche, il est très difficile de décider en général si un système est plat ou non. Citons quelques travaux dans ce sens. Les systèmes à *deux* contrôles, *linéaires* par rapport aux contrôles (en dehors de certaines singularités), sont aussi traités dans [6], comme remarqué dans [39]. On y trouve une condition pour que ces systèmes soient plats, et les systèmes de cette classe ne satisfaisant pas cette condition ne sont pas plats. En dehors de ce cas, on peut trouver dans la littérature des travaux qui donnent des classes de systèmes plats, en construisant explicitement, pour ces systèmes, les fonctions $h_1, \dots, h_m$. Face à un système pour lequel on ne sait pas construire ces fonctions, il est difficile de démontrer qu'il n'est *pas* plat. Une condition nécessaire générale ("critère de surface réglée") est connue, mais elle est loin d'être suffisante : elle est satisfaite par de nombreux systèmes dont on ne sait prouver si ils sont plats ; notons tout de même que les systèmes ne satisfaisant pas cette condition sont génériques. Pour un système qui satisfait cette condition, on peut en principe décider par un processus fini si il existe des h_i satisfaisant aux conditions *et dépendant d'un nombre fini de variable fixé à l'avance*, mais en l'absence d'une borne a priori sur le nombre de variables nécessaires, cela est insuffisant pour montrer qu'un système n'est pas plat.

Pour une bibliographie plus complète, voir [49], ou [38], ou aussi [31].

3.4.2 Réécriture du problème

La proposition suivante est la Proposition 3 de [1, §4] (où, à nouveau, on utilise des fonctions C^∞ plutôt que des séries, et par "linearizing Pfaffian system", il faut entendre base de $\Lambda^1(\mathcal{A})$). On note par $\bullet$ la version matricielle de la loi "externe" décrite à la section 3.2.2, qui consiste donc à appliquer les opérateurs différentiels qui constituent la matrice P aux éléments du vecteur colonne Ω , qui sont des formes.

Proposition 3.41 *Soit Ω une base de $\Lambda^1(\mathcal{A})$, supposé libre. (3.42)-(3.44) est plat si et seule-*

ment si il existe $P \in \mathcal{A}[\frac{d}{dt}]^{m \times m}$ inversible dans $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]^{m \times m}$ et tel que

$$d(P \bullet \Omega) = 0. \quad (3.116)$$

Le démonstration de ceci tient dans le fait qu'étant donnée une base de $\Lambda^1(\mathcal{A})$, on obtient toutes les autres en lui appliquant tous les opérateurs inversibles P .

Le seconde équation de (3.116) peut se réécrire

$$dP \bullet \Omega + P \bullet d\Omega = 0$$

ce qui implique, P étant inversible,

$$d\Omega = -P^{-1} \bullet (dP \bullet \Omega) = (-P^{-1} \wedge dP) \bullet \Omega.$$

Si (3.116) est vérifié, il existe donc une matrice $\Pi \in (\Lambda^1(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}])^{m \times m}$ telle que $d\Omega = \Pi \bullet \Omega$: elle est donnée par

$$\Pi = -P^{-1} \wedge dP, \quad (3.117)$$

et en différentiant ceci, on obtient $d\Pi = -dP^{-1} \wedge dP$, or $dP^{-1} = -P^{-1} \wedge dP \wedge P^{-1}$, d'où $d\Pi = \Pi \wedge \Pi$.

Comme (3.117) est équivalent, si P est inversible, à $dP + P \wedge \Pi = 0$, on a montré la proposition suivante, que l'on trouve aussi, avec des notations différentes, dans [8] :

Proposition 3.42 *Soit Ω une base de $\Lambda^1(\mathcal{A})$, supposé libre. (3.42)-(3.44) est plat si et seulement si il existe $\Pi \in (\Lambda^1(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}])^{m \times m}$ qui*

(i). *satisfasse les équations suivantes :*

$$d\Omega - \Pi \bullet \Omega = 0, \quad (3.118)$$

$$d\Pi - \Pi \wedge \Pi = 0, \quad (3.119)$$

et

(ii). *soit telle qu'il existe $P \in (\mathcal{A}[\frac{d}{dt}])^{m \times m}$ inversible dans $(\mathcal{A}[\frac{d}{dt}])^{m \times m}$ et vérifiant $dP + P \wedge \Pi = 0$.*

3.4.3 Condition nécessaire : système d'équations sur Π

La condition 2 de la proposition 3.42 est difficile à vérifier à plus d'un titre. D'une part, il est difficile de caractériser les opérateurs $P \in (\mathcal{A}[\frac{d}{dt}])^{m \times m}$ qui sont inversibles dans $(\mathcal{A}[\frac{d}{dt}])^{m \times m}$.

D'autre part, il est encore moins aisé de traduire cette inversibilité en une condition sur l'opérateur Π qui donne naissance à P . Ce problème est étudié dans l'article récent [8].

Dans ce qui suit, nous allons mettre de côté la seconde condition de la Proposition 3.42, c'est-à-dire l'équation (3.117), pour étudier seulement la condition 1, et tenter de caractériser l'existence d'une solution Π au système d'équations (3.118)-(3.119).

Cette existence n'est, répétons le, qu'une condition *nécessaire* pour la platitude. Il se pourrait bien sûr que cette condition nécessaire soit inopérante, c'est-à-dire que le système d'équations (3.118)-(3.119) ait une solution Π quel que soit le système (3.42)-(3.44) considéré. Nous allons donner au moins un exemple qui montre que cette condition nécessaire peut ne pas être satisfaite. Dans cet exemple, nous aurons besoin du lemme suivant, qui concerne une version "scalaire" de (3.119).

Lemme 3.43 Si $\pi \in \Lambda^1(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$ vérifie $d\pi - \pi \wedge \pi = 0$, alors π est de degré au plus 1 par rapport à $\frac{d}{dt}$, c'est-à-dire qu'il s'écrit $\pi = \pi_0 + \pi_1 \frac{d}{dt}$ avec π_0 et π_1 dans $\Lambda^1(\mathcal{A})$.

Démonstration : Soit $\pi = \sum_{j=0}^J \pi_j \frac{d^j}{dt^j}$. Supposons $J \geq 2$. Le coefficient de $\frac{d^{2J}}{dt^{2J}}$ dans $d\pi - \pi \wedge \pi$ est $-\pi_J \wedge \pi_J$, qui est automatiquement nul, mais, comme $2J - 1 > J$, le coefficient de $\frac{d^{2J-1}}{dt^{2J-1}}$ est égal à $-\pi_J \wedge \dot{\pi}_J$, et l'on a donc $\pi_J \wedge \dot{\pi}_J = 0$. Ceci entraîne $\pi_J = 0$ car $\Lambda^1(\mathcal{A})$ est libre⁸. ■

Exemple. Pour des systèmes à une entrée scalaire ($m = 1$), une base de $\Lambda^1(\mathcal{A})$ est constituée d'un seul élément ω (voir section 3.4.1), et les équations (3.118)-(3.119) sont scalaires : Π est une matrice 1×1 , c'est-à-dire un élément de $\Lambda^1(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$ que l'on note simplement π . Alors (3.119) entraîne, au vu du lemme ci-dessus, que π s'écrit $\pi = \pi_0 + \pi_1 \frac{d}{dt}$ avec π_0 et π_1 dans $\Lambda^1(\mathcal{A})$, et (3.118) s'écrit $d\omega = \pi_0 \wedge \omega + \pi_1 \wedge \dot{\omega}$, si bien que l'existence d'un π solution de (3.118)-(3.119) entraîne $d\omega \wedge \omega \wedge \dot{\omega} = 0$. Il suffit donc de donner un exemple de système pour lequel $d\omega \wedge \omega \wedge \dot{\omega}$ n'est pas nul. C'est le cas de

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \frac{1}{2}u^2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= u\end{aligned}$$

⁸Si la forme π_J ne s'annule pas en zéro, ceci entraîne qu'il existe $\lambda \in \mathcal{A}$ tel que $\dot{\pi}_J = \lambda \pi_J$ et donc π_J est un élément de torsion car $(\frac{d}{dt} - \lambda) \bullet \pi_J = 0$. Si la forme π_J s'annule en zéro, ce raisonnement ne fonctionne plus, mais on peut tout de même montrer que $\pi_J \wedge \dot{\pi}_J = 0$ entraîne $\pi_J = 0$ en décomposant π_J sur une base.

($n = 3, m = 1$). On prend comme base

$$\omega = dx_1 + \dot{u}dx_2 - udx_3. \quad (3.120)$$

Alors

$$\dot{\omega} = (1 + x_2^{(4)}) dx_2, \quad \ddot{\omega} = u^{(3)} dx_2 + (1 + \ddot{u}) dx_3,$$

ce qui permet de vérifier que ω engendre $\Lambda^1(\mathcal{A})$ en exprimant dx_1, dx_2 et dx_3 comme des combinaisons linéaires de $\omega, \dot{\omega}$ et $\ddot{\omega}$ à coefficients dans $\mathcal{A}$, et

$$\begin{aligned} d\omega &= du \wedge dx_2 - du \wedge dx_3, \\ d\omega \wedge \omega \wedge \dot{\omega} &= -(1 + \ddot{u}) du \wedge dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2, \end{aligned} \quad (3.121)$$

qui est clairement une 4-forme non nulle.

Nature du système d'équations sur Π . Détaillons les équations (3.118)-(3.119). Ω est un vecteur colonnes de formes $\omega_1, \dots, \omega_m$ qui ont été construites explicitement, et forment une base de $\Lambda^1(\mathcal{A})$. $\Pi \in (\Lambda^1(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}])^{m \times m}$ est l'inconnue ; pour mieux comprendre les équations, ramenons Π à une famille de fonctions (c'est-à-dire d'éléments de $\mathcal{A}$) qui le définissent. En appelant J le plus grand exposant de $\frac{d}{dt}$ qui figure dans les éléments de Π , cette matrice s'écrit :

$$\Pi = \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^J \pi_{1,1,j} \frac{d^j}{dt^j} & \cdots & \sum_{j=0}^J \pi_{1,m,j} \frac{d^j}{dt^j} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=0}^J \pi_{m,1,j} \frac{d^j}{dt^j} & \cdots & \sum_{j=0}^J \pi_{m,m,j} \frac{d^j}{dt^j} \end{pmatrix}, \quad (3.122)$$

et on peut aussi décomposer chaque forme $\pi_{p,q,j} \in \Lambda(\mathcal{A})$ sur la base $\{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ et écrire, pour tout $(p, q, j) \in \{1, \dots, m\}^2 \times \{0, \dots, J\}$, K étant un entier qui dépend de Π ,

$$\pi_{p,q,j} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^K a_{p,q,j,i,k} \omega_i^{(k)} \quad (3.123)$$

avec $a_{p,q,j,i,k} \in \mathcal{A}$ pour tout p, q, j, i, k .

On peut alors voir les équations (3.118)-(3.119) comme des relations sur la collection de fonctions $a_{p,q,j,i,k}$. L'équation (3.118) est simplement une équation non différentielle (linéaire) sur ces fonctions, tandis que (3.119) est une équation différentielle d'ordre J sur ces mêmes fonctions. Comme J n'est pas fixé a priori, (3.118)-(3.119) est un système d'EDP d'un ordre

qui n'est pas fixé à l'avance, et de plus le nombre de fonctions inconnues n'est pas non plus majoré à l'avance.

Si l'on fixe J et K a priori, de manière arbitraire, (3.118)-(3.119) se traduit par un système d'EDP "classique", dont on peut en principe décider si il a des solutions ou non. Le difficulté est alors que, si le système n'admet pas de solutions pour certaines valeurs de J et K , il faut passer à des valeurs supérieures.

Il est donc tentant d'analyser (3.118)-(3.119) sans préjuger de la valeur de ces entiers, et c'est le but de la présente note. Comme on l'a remarqué, ceci conduit à un système d'EDP d'ordre potentiellement infini en un nombre de fonctions potentiellement infini.

Cessons donc d'exiger que le nombre de variables ou de fonctions soit fini, et observons naïvement la situation. Il suffit de remplacer les entiers K et J par $+\infty$, et de chercher les $a_{p,q,j,i,k}$ non pas dans $\mathcal{A}$, mais dans ce que l'on a noté $\mathbb{R}[[[\Upsilon]]]$ à la section 3.1.2.2. Rappelons que Υ est défini en (3.45), et qu'un élément de $\mathbb{R}[[[\Upsilon]]]$ est une série "très formelle" en l'infinité de variables $x, u, \dot{u}, \dots$, alors que l'on demande à chaque élément de $\mathcal{A} = \mathbb{R}[[\Upsilon]]$ de ne faire intervenir que des monômes en un nombre fini de variables prises parmi $x, u, \dot{u}, \dots$.

On a vu que la multiplication de deux séries très formelles ne pose pas de problème particulier puisque le coefficient de chaque monôme est une somme finie de produits finis de nombres. Les membres de gauche des équations (3.118)-(3.119) contiennent non seulement des multiplications, mais aussi des applications de l'opérateur $\frac{d}{dt}$, et il n'est pas vrai, si l'on autorise des sommes infinies, que chaque coefficient du membre de gauche de (3.119), par exemple, ne dépende que d'un nombre fini de coefficients définissant Π . Pour s'en convaincre, il suffit d'essayer de donner un sens à l'équation

$$\left(\sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_j \frac{d^j}{dt} \right) \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \beta_j \frac{d^j}{dt} \right) = \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \gamma_j \frac{d^j}{dt} \right) \quad (3.124)$$

où chaque α_j, β_j ou γ_j est dans $\mathbb{R}[[[\Upsilon]]]$: même l'équation sur le premier coefficient du membre de droite, γ_0 , s'écrit formellement $\gamma_0 = \sum \alpha_j \beta_0^{(j)}$, somme infinie à laquelle on ne peut donner de sens a priori car, sauf exceptions, chaque coefficient de $\sum \alpha_j \beta_0^{(j)}$ (vu comme une série très formelle en $x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, \dot{u}_1, \dots, \dot{u}_m, \dots$) est lui-même une somme infinie de nombres, dont il faudrait analyser la convergence.

Au lieu de cela, on va utiliser la valuation définie au chapitre 3.3 pour analyser le système (3.118)-(3.119). En un sens, les coordonnées adaptées décrites à la section 3.3.5, sont des coordonnées privilégiées telles que, si l'on considère les α_j, β_j et γ_j comme des séries en ces coordonnées (plutôt qu'en $x, u, \dot{u}, \dots$), on peut donner un sens à (3.124) car, précisément, chaque

coefficient de $\sum \alpha_j \beta_0^{(j)}$, est une somme finie de produits finis d'un nombre fini de coefficients parmi ceux définissant les séries α_j et β_0 . Cette remarque est sans doute plus pittoresque et éclairante que la construction générale qui suit, où l'on ne parle pas de coordonnées adaptées, ni de séries très formelles.

3.4.4 Filtration du système d'équations sur Π

Notons

$$\mathcal{Q}_\infty \triangleq \left(\Lambda^1(\mathcal{A}) \left[\frac{d}{dt} \right] \right)^{m \times m}, \quad (3.125)$$

et définissons les applications Φ et Ψ par

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{Q}_\infty &\rightarrow (\Lambda^1(\mathcal{A}))^m & \Psi : \mathcal{Q}_\infty &\rightarrow (\Lambda^2(\mathcal{A}) \left[\frac{d}{dt} \right])^{m \times m} \\ \Pi &\mapsto d\Pi - \Pi \bullet \Omega & \Pi &\mapsto d\Pi - \Pi \wedge \Pi \end{aligned} \quad (3.126)$$

Le système (3.118)-(3.119) s'écrit évidemment

$$\Phi(\Pi) = 0, \quad \Psi(\Pi) = 0. \quad (3.127)$$

Par ailleurs, les deux applications Φ et Ψ satisfont les propriétés suivantes :

Proposition 3.44 *Les applications Φ et Ψ vérifient⁹, pour tout $\Pi \in \mathcal{Q}_\infty$ et tout entier j :*

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\Pi + \mathcal{O}_j) &= \Phi(\Pi) + \mathcal{O}_{j+1}, \\ \Psi(\Pi + \mathcal{O}_j) &= \Psi(\Pi) + \mathcal{O}_j. \end{aligned} \right\} \quad (3.128)$$

Démonstration : On a, pour tout Π et Δ dans $\mathcal{Q}_\infty$, $\Phi(\Pi + \Delta) = \Phi(\Pi) + \Delta \bullet \Omega$ et $\Psi(\Pi + \Delta) = \Psi(\Pi) + d\Delta - \Delta \wedge \Pi - \Pi \wedge \Delta - \Delta \wedge \Delta$. Si $\text{Val } \Delta \geq j$, on a, d'après (3.86)-(3.90), $\text{Val}(d\Delta - \Delta \wedge \Pi - \Pi \wedge \Delta - \Delta \wedge \Delta) \geq j$, et par ailleurs, comme $\text{Val } \Omega \geq 1$ (parce que Ω est un vecteur de 1-formes), $\text{Val}(\Delta \bullet \Omega) \geq j + 1$. ■

Les quotients étant ceux évoqués dans la Proposition 3.38, on note¹⁰, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{Q}_k \triangleq \left(\Lambda^1(\mathcal{A}) \left[\frac{d}{dt} \right] \Big/ \Lambda^1(\mathcal{A}) \left[\frac{d}{dt} \right]_{k+1} \right)^{m \times m}, \quad (3.129)$$

$$\mathcal{T}_k \triangleq \left(\Lambda^1(\mathcal{A}) \Big/ \Lambda^1(\mathcal{A})_{k+2} \right)^m \times \left(\Lambda^2(\mathcal{A}) \left[\frac{d}{dt} \right] \Big/ \Lambda^2(\mathcal{A}) \left[\frac{d}{dt} \right]_{k+1} \right)^{m \times m}, \quad (3.130)$$

$$\mathcal{T}_\infty \triangleq (\Lambda^1(\mathcal{A}))^m \times \left(\Lambda^2(\mathcal{A}) \left[\frac{d}{dt} \right] \right)^{m \times m}. \quad (3.131)$$

⁹ On rappelle (voir section 3.3.6) que les équations (3.128) signifient que, pour tout $\Pi' \in (\Lambda^1(\mathcal{A}) \left[\frac{d}{dt} \right])^{m \times m}$ tel que $\text{Val}(\Pi - \Pi') \geq j$, on a nécessairement $\text{Val}(\Phi(\Pi') - \Phi(\Pi)) \geq j + 1$ et $\text{Val}(\Psi(\Pi') - \Psi(\Pi)) \geq j$.

¹⁰ La définition de $\mathcal{Q}_k$ est cohérente avec (3.125) car $\Lambda^1(\mathcal{A}) \left[\frac{d}{dt} \right]_{+\infty} = \{0\}$.

D'après la Proposition 3.38, pour $k < \infty$, $\mathcal{Q}_k$ et $\mathcal{T}_k$ sont des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels de dimension finie, et on a plus précisément

$$\mathcal{Q}_k \simeq \mathbb{R}^{(m^2 \aleph(1,k))}, \quad \mathcal{T}_k \simeq \mathbb{R}^{(m \aleph_0(1,k+1) + m^2 \aleph(2,k))}.$$

La Proposition 3.44 signifie qu'il existe, pour tout k ($k = j - 1$), des applications

$$\Phi_k : \mathcal{Q}_k \rightarrow (\Lambda^1(\mathcal{A}) / \Lambda^1(\mathcal{A})_{k+2})^m \quad \text{et} \quad \Psi_k : \mathcal{Q}_k \rightarrow (\Lambda^2(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}] / \Lambda^2(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]_{k+1})^{m \times m}$$

qui font commuter le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Q}_\infty & \xrightarrow{\Phi \times \Psi} & \mathcal{T}_\infty \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{Q}_k & \xrightarrow{\Phi_k \times \Psi_k} & \mathcal{T}_k \end{array} \quad (3.132)$$

On peut donc associer à toute solution $\Pi \in \mathcal{Q}_\infty$ de (3.127) son représentant $\Pi \in \mathcal{Q}_k$ dans le quotient $\mathcal{Q}_k$, qui satisfait **l'équation tronquée à l'ordre k** :

$$\Phi_k(\Pi) = 0, \quad \Psi_k(\Pi) = 0. \quad (3.133)$$

Rien n'indique en revanche qu'un $\Pi \in \mathcal{Q}_k$ solution de (3.133) soit le “début” d'une solution de (3.127).

Passage de l'ordre k à l'ordre $k + 1$. Un début de réponse à cette interrogation consiste à déterminer si un $\Pi \in \mathcal{Q}_k$ solution de (3.133) “se prolonge” en un $\Pi' \in \mathcal{Q}_{k+1}$ solution de (3.133) où l'on remplace k par $k + 1$. Formalisons ceci. Soit

$$\mathcal{S}_k \triangleq \{ \Pi \in \mathcal{Q}_k, \Phi_k(\Pi) = 0 \text{ et } \Psi_k(\Pi) = 0 \} \quad (3.134)$$

la partie de $\mathcal{Q}_k$ qui est solution de (3.133), ce qui se traduit par la suite exacte suivante, pour tout k (i_k est l'injection canonique $\mathcal{S}_k \hookrightarrow \mathcal{Q}_k$) :

$$\{0\} \rightarrow \mathcal{S}_k \xrightarrow{i_k} \mathcal{Q}_k \xrightarrow{\Phi_k \times \Psi_k} \mathcal{T}_k. \quad (3.135)$$

Notons au passage que $\mathcal{S}_k$ est une sous-variété algébrique de l'espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{Q}_k$ puisque (3.133) se traduit par $m \aleph_0(1, k+1) + m^2 \aleph(2, k)$ équations algébriques en $m^2 \aleph(1, k)$ coefficients des séries formelles définissant Π . Voyons maintenant le passage de $\mathcal{S}_k$ à $\mathcal{S}_{k+1}$. $\mathcal{Q}_k$ est un quotient de $\mathcal{Q}_{k+1}$, et la Proposition 3.44 entraîne que la projection naturelle

$\mathcal{Q}_{k+1} \rightarrow \mathcal{Q}_k$ envoie $\mathcal{S}_{k+1}$ dans $\mathcal{S}_k$, si bien que sa restriction à $\mathcal{S}_{k+1}$ définit $\rho_k : \mathcal{S}_{k+1} \rightarrow \mathcal{S}_k$. $\mathcal{T}_k$ étant également un quotient de $\mathcal{T}_{k+1}$, on peut écrire le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \{0\} & \rightarrow & \mathcal{S}_{k+1} & \hookrightarrow & \mathcal{Q}_{k+1} & \xrightarrow{\Phi_{k+1} \times \Psi_{k+1}} & \mathcal{T}_{k+1} \\
 & & \downarrow \rho_k & & \downarrow & & \downarrow \\
 \{0\} & \rightarrow & \mathcal{S}_k & \hookrightarrow & \mathcal{Q}_k & \xrightarrow{\Phi_k \times \Psi_k} & \mathcal{T}_k \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow
 \end{array} \tag{3.136}$$

Notion d'intégrabilité très formelle. On est maintenant ramené à une situation familière. Dans la théorie de l'intégrabilité des systèmes d'EDP (voir [3, 53]), on a coutume de dire qu'un système est formellement intégrable si et seulement si, lorsqu'on calcule une série formelle solution, les polynômes solution à l'ordre k se prolongent tous en un polynôme de degré immédiatement supérieur solution à l'ordre $k+1$, ou, suivant le vocabulaire de l'appendice de [35], que tout polynôme solution à l'ordre k est "fortement prolongeable". Dans ces références, la notion d'ordre est l'ordre de différentiation, qui revient à prendre la valuation classique sur les séries formelles, mais l'on obtient un diagramme exactement semblable à (3.136), et l'on dit (voir la condition (5) (page 397) de [3, Chap. IX], ou la Définition 9 dans [53, Chap. III]), que le système d'équations est formellement intégrable si et seulement si chaque ρ_k est surjectif.

Ici, l'étude est seulement locale en un point (dans les références citées, on a cette situation au dessus de chaque point), et la valuation est différente de celle définie par les ordres de dérivation. La situation est toutefois très semblable, quoique plus formelle encore vu que le nombre de variables est potentiellement infini. On dira donc que le système (3.127) est **très formellement intégrable** si toutes les applications ρ_k sont surjectives.

3.4.5 Résultat principal : intégrabilité (très) formelle

Théorème 3.45 (Intégrabilité très formelle de (3.118)-(3.119))

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $\Pi \in \mathcal{S}_k$, il existe $\Pi' \in \mathcal{S}_{k+1}$ tel que $\rho_k(\Pi') = \Pi$.

On aurait pu donner une version de ce résultat qui fasse intervenir beaucoup moins de notations, et qui est évidemment équivalente :

Théorème 3.46

Pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tout $\Pi \in \mathcal{Q}_\infty$ tel que $\Phi(\Pi) = \mathcal{O}_{j+1}$ et $\Psi(\Pi) = \mathcal{O}_j$,

il existe $\Pi' \in \mathcal{Q}_\infty$ tel que $\Pi' = \Pi + \mathcal{O}_j$ et

$$\Phi(\Pi') = \mathcal{O}_{j+2}, \quad \Psi(\Pi') = \mathcal{O}_{j+1}.$$

Le fait que ces deux formulations sont équivalentes est une évidence. Avant d'établir le Théorème 3.45, on donne deux lemmes utiles.

Lemme 3.47 *Pour tout entier j , si $\Pi \in \mathcal{Q}_\infty$ est tel que $d\Pi - \Pi \wedge \Pi = \mathcal{O}_j$ alors il vérifie aussi $d(\Pi \wedge \Pi) = \mathcal{O}_{j+1}$.*

Démonstration : $d\Pi = \Pi \wedge \Pi + \mathcal{O}_j$ et $\Pi = \mathcal{O}_1$ entraînent $d\Pi \wedge \Pi = \Pi \wedge \Pi \wedge \Pi + \mathcal{O}_{j+1}$ et $\Pi \wedge d\Pi = \Pi \wedge \Pi \wedge \Pi + \mathcal{O}_{j+1}$; comme $d(\Pi \wedge \Pi) = d\Pi \wedge \Pi - \Pi \wedge d\Pi$, on obtient bien la conclusion du lemme. ■

Lemme 3.48 *Pour tout entier j , si $\Pi \in \mathcal{Q}_\infty$ est tel que $d\Pi - \Pi \wedge \Pi = \mathcal{O}_j$ et $d\Omega - \Pi \bullet \Omega = \mathcal{O}_j$, alors il vérifie aussi $d(\Pi \bullet \Omega) = \mathcal{O}_{j+1}$.*

Démonstration : les deux relations vérifiées par Π ainsi que le fait, vrai pour toutes 1-formes, que $\Pi = \mathcal{O}_1$ et $\Omega = \mathcal{O}_1$ entraînent $d\Pi \bullet \Omega = (\Pi \wedge \Pi) \bullet \Omega + \mathcal{O}_{j+1}$ et $\Pi \bullet d\Omega = \Pi \bullet (\Pi \bullet \Omega) + \mathcal{O}_{j+1}$; comme $(\Pi \wedge \Pi) \bullet \Omega = \Pi \bullet (\Pi \bullet \Omega)$ et $d(\Pi \bullet \Omega) = d\Pi \bullet \Omega - \Pi \bullet d\Omega$, on obtient bien la conclusion du lemme. ■

Démonstration du Théorème 3.45 . Soit $\Pi \in \mathcal{S}_k \subset \mathcal{Q}_k$ et $\Pi \in \mathcal{Q}_\infty$ un représentant de Π . Le lemme 3.47, avec $j = k + 1$, entraîne $d(-d\Pi + \Pi \wedge \Pi) = \mathcal{O}_{k+2}$. Il existe donc, d'après la proposition 3.39, un $\Sigma \in (\Lambda^1(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}])^{m \times m}$ tel que

$$\Sigma = \mathcal{O}_{k+1} \quad \text{et} \quad -d\Pi + \Pi \wedge \Pi = d\Sigma + \mathcal{O}_{k+2}.$$

Alors $\Pi + \Sigma$ vérifie

$$d(\Pi + \Sigma) - (\Pi + \Sigma) \wedge (\Pi + \Sigma) = \mathcal{O}_{k+2} \tag{3.137}$$

et aussi, puisque $\Sigma \bullet \Omega = \mathcal{O}_{k+2}$ dès lors que $\Sigma = \mathcal{O}_{k+1}$,

$$d\Omega - (\Pi + \Sigma) \bullet \Omega = \mathcal{O}_{k+2}. \tag{3.138}$$

D'après ces deux relations, le lemme 3.48, avec $j = k + 2$ entraîne

$$d(d\Omega - (\Pi + \Sigma) \bullet \Omega) = \mathcal{O}_{k+3},$$

et donc l'existence de $\Gamma \in (\Lambda^1(\mathcal{A}))^m$ tel que

$$\begin{aligned}\Gamma &= \mathcal{O}_{k+2}, \\ d\Omega - (\Pi + \Sigma) \bullet \Omega &= d\Gamma + \mathcal{O}_{k+3}.\end{aligned}$$

Puisque Ω est une base de $\Lambda^1(\mathcal{A})$, il existe un (unique) $A \in (\mathcal{A}[\frac{d}{dt}])^{m \times m}$ tel que $\Gamma = A \bullet \Omega$, et $A = \mathcal{O}_{k+1}$. Les relations ci-dessus entraînent

$$d\Omega - (\Pi + \Sigma) \bullet \Omega - d(A \bullet \Omega) = \mathcal{O}_{k+3},$$

et finalement, vu que $A \bullet d\Omega = \mathcal{O}_{k+3}$,

$$d\Omega - (\Pi + \Sigma + dA) \bullet \Omega = \mathcal{O}_{k+3}.$$

On aussi, d'après (3.137),

$$d(\Pi + \Sigma + dA) - (\Pi + \Sigma + dA) \wedge (\Pi + \Sigma + dA) = \mathcal{O}_{k+2}$$

car la contribution de dA au premier terme est nulle et sa contribution au second est de valuation au moins $k+2$ car $\Pi + \Sigma + dA$ est de valuation au moins 1. Si l'on prend alors pour Π' la classe de $\Pi + \Sigma + dA$ dans le quotient $\mathcal{Q}_{k+1}$, on a clairement $\Pi' \in \mathcal{S}_{k+1}$. ■

3.4.6 Interprétation des résultats

Dans le cas de systèmes d'EDP (en un nombre fini de variables), l'intégrabilité formelle en un point entraîne tautologiquement l'existence d'une série formelle solution (par exemple le théorème 4.2 de [35, appendice, §4] est une tautologie si l'on ôte "convergente au voisinage de 0") puisque construire des polynômes de degrés croissants dont les termes de mêmes degrés coïncident revient au même que définir une série formelle par ses sommes finies de degré croissant. Des efforts supplémentaires sont requis pour montrer que, dans le cas de données analytiques, on peut choisir une série convergente. En termes plus savants, la limite projective des ensembles de polynômes de degrés croissants est l'ensemble des séries formelles, et non l'ensemble des séries convergentes. Bien sûr, s'il n'existe pas de série formelle solution, alors il n'existe pas de solution tout court, ni analytique ni même C^∞ .

Dans notre cas, quelle est la conséquence de la surjectivité de chaque ρ_k sur les solutions du système (3.127) lui-même ? Il est facile de voir que cette surjectivité permet de définir un objet "très formel" qui soit "solution". Cet objet n'est pas en général un élément de $(\Lambda^1(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}])^{m \times m}$, mais de ce que l'on pourrait noter $(\Lambda^1(\mathbb{R}[[[\Upsilon]]])[[\frac{d}{dt}]])^{m \times m}$, c'est-à-dire (cf.

la fin de la section 3.4.3) que cet objet Π solution s'écrit comme en (3.122)-(3.123), mais avec $J = K = +\infty$, chaque $a_{p,q,j,i,k}$ étant une série très formelle et non pas formelle, c'est-à-dire $a_{p,q,j,i,k} \in \mathbb{R}[[[\Upsilon]]]$ au lieu de $a_{p,q,j,i,k} \in \mathcal{A}$.

On vient de prouver qu'il existe toujours un tel objet, mais il reste du travail pour décider si il existe un "vrai" $\Pi \in (\Lambda^1(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}])^{m \times m}$ solution de (3.127). En revanche, si pour certains systèmes il n'existait pas un tel objet, on aurait pu affirmer que (3.127) n'a pas de solution.

Conclusion

Synthèse Cette thèse a tenté de répondre à la question de l'existence d'une paramétrisation d'un système différentiel sous-déterminé, i.e. la possibilité de démontrer son inexistence si c'est le cas ou donner une paramétrisation si elle existe. Trouver une paramétrisation pour un système répond au problème, mais il est très difficile de savoir si un système est non paramétrable sans préjuger d'un ordre de différentiation des fonctions arbitraires du temps. A la question : "le système S admet-il une paramétrisation d'ordre K ?", la réponse peut être donnée par un calcul fini en exprimant un système d'équation aux dérivées partielles dont les solutions, si elles existent, donnent la paramétrisation d'ordre K attendue. L'intégrabilité des systèmes aux dérivées partielles a fait et fait encore l'objet de nombreuses études, notamment [65] et [3] pour la théorie et [51] pour un aspect plus effectif. Cela donne un algorithme qui permet de vérifier si le système d'EDP est contradictoire, même les calculs peuvent exploser. Au contraire, la question plus spécifique de la paramétrisation est restée très longtemps négligée en mathématiques, peu de résultats ayant été obtenus dans la seconde moitié du XX^e siècle à notre connaissance. Deux approches ont été considérées dans cette thèse.

Néanmoins, si S n'admet pas de paramétrisation d'ordre K , il peut éventuellement admettre une paramétrisation à l'ordre $K + 1$. Alors, il faut écrire un autre système d'équation aux dérivées partielles. Cette méthode ne permet pas alors de clore le problème.

dans cette étude, pour toute valeur possible de l'ordre de différentiation des fonctions arbitraires du temps, l'écriture d'un système d'équations (et inéquations) aux dérivées partielles dont l'existence d'une solution est équivalente à l'existence d'une paramétrisation de cet ordre.

La première approche a consisté à étudier de façon la plus exhaustive possible des systèmes généraux de faible dimension (trois pour l'état et deux pour le contrôle). L'étude n'a pas complètement répondu à cette attente, la question des systèmes paramétrables pour des petites dimensions n'est donc pas close. Le principal résultat obtenu dans cette étude est, pour toute

valeur possible de l'ordre de différentiation des fonctions arbitraires du temps, l'écriture d'un système d'équations (et inéquations) aux dérivées partielles dont l'existence d'une solution est équivalente à l'existence d'une paramétrisation de cet ordre. Cette approche applique l'idée du passage au système d'EDP décrit ci-dessus, l'apport de cette thèse est d'avoir exprimé ces systèmes d'équations aux dérivées partielles proprement pour tout ordre (k, ℓ) de paramétrisation et d'avoir obtenu un système simple de deux équations d'une variable ainsi que des inéquations donnant des conditions nécessaires et suffisantes. Notons que le fait d'avoir établi que ces conditions sont nécessaires et suffisantes permettent de s'intéresser à ce système d'EDPs indépendamment du système de contrôle ou de la question de paramétrages : toute solution pour un tel système donne un paramétrage et toute contradiction entre les équations et les inéquations prouve l'inexistence de paramétrage. J'espère que l'on pourra montrer que ce système est toujours contradictoire, mais je n'ai pas pu arriver jusqu'à ce point. De plus, les résultats de [50] —article technique, dont une preuve utilise un outil de calcul formel pour obtenir une simplification par ailleurs mal comprise— sont une conséquence des résultats obtenus ici par des raisonnements beaucoup plus directs.

Dans la deuxième approche, on étudie les équations de la platitude d'un point de vue plus algébrique par la recherche d'un facteur intégrant inversible pour obtenir une base exacte du module représentant le système différentiel étudié. On s'intéresse à la platitude et non à des paramétrisations générales mais ici on ne préjuge absolument pas de l'ordre de dérivations ; on cherche plutôt à donner un sens à des équations qui font a priori intervenir une infinité de dérivées. L'étude n'a pu permettre d'exprimer les conditions sur ce facteur intégrant garantissant son inversibilité. Il s'est avéré que ce problème affaibli l'a été trop car il est formellement soluble dans tout les cas et semble donc faire peu obstruction à la paramétrisation. Il eut été bien entendu plus satisfaisant d'obtenir au moins des conditions nécessaires plus fortes. Néanmoins, ce travail est encore en cours à l'occasion d'une collaboration avec V. Chetverikov.

Perspectives Cette thèse a suivi deux orientations : l'étude d'un cas particulier et l'étude du problème simplifié en dimension quelconque. Le but poursuivi a été de circonscrire le problème en cherchant une structure permettant de passer d'un problème à dimension fixe à un problème général. Il n'est pas évident qu'une telle structure existe, si l'étude en petites dimensions nous amène à un système d'équations aux dérivées partielles, elle utilise des résultats spécifiques à cette dimension comme la forme normale. De plus, les calculs ayant été faits deviennent très rapidement difficiles à conduire à mesure que les dimensions augmentent. Le problème simplifié n'apporte lui aussi que peu d'éléments de réponse quant à une éventuelle structure si

ce n'est que l'affaiblissement des contraintes que nous nous sommes données ferait disparaître une telle structure si elle existait.

La longue histoire mathématique de ce problème nous a montré qu'il n'admet pas de réponse aisé. Cette étude, avec ses forces et ses faiblesses le confirme. Il est néanmoins remarquable que la relecture des résultats disponibles concernant la paramétrisation de Monge continue à nous apporter des réponses. Il est donc envisageable d'étudier de manière plus approfondie la littérature sur ce sujet, nous avons par exemple peu exploité les résultats de Goursat dans [17]. Bien entendu, cette remarque faite a posteriori ne reflète que l'impossibilité d'exploiter l'ensemble des données d'un problème pour qu'il puisse être réglé en un temps restreint. Il peut aussi être envisageable d'étudier le problème pour des systèmes moins généraux, comme les systèmes polynomiaux, comme autre angle d'approche et permettre des calculs plus circonscrits. Cependant, après avoir étudié des exemples de systèmes polynomiaux, ils ne semblent pas être spécialement plus évidents.

Les possibilités d'utiliser une classification des systèmes différentielles paramétrable pour la conception d'artefact plus facilement commandable ou pour le suivi de trajectoire nous donne de l'espoir quant à la possibilité de voir des travaux sur ce sujet se développer dans l'avenir.

Annexe A

Parameterization of control systems of dimension 3 with 2 controls

A.1 Problem statement

A.1.1 The systems under consideration

This paper studies the solutions $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ of the scalar differential equation

$$\dot{z} = h(x, y, z, \lambda) + g(x, y, z, \lambda) \dot{x} \quad \text{with} \quad \lambda = \dot{y} - z\dot{x} \quad (\text{A.1})$$

where g and h are two real analytic functions $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, Ω being an open connected subset of $\mathbb{R}^4$. To g we associate a map $G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^4$ defined by

$$G(x, y, z, \lambda) = (x, y, z, g(x, y, z, \lambda)),$$

and we assume that

$$g_4 \text{ does not vanish on } \Omega \quad \text{and} \quad G \text{ defines a diffeomorphism } \Omega \rightarrow G(\Omega). \quad (\text{A.2})$$

(g_4 denotes the derivative of g with respect to its fourth argument). We denote by $\widehat{\Omega}$ the open connected subset of $\mathbb{R}^5$ defined from Ω by :

$$(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}) \in \widehat{\Omega} \Leftrightarrow (x, y, z, \dot{y} - z\dot{x}) \in \Omega. \quad (\text{A.3})$$

From g and h one may define γ and δ , two real analytic functions $G(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, such that $G^{-1}(x, y, z, w) = (x, y, z, \gamma(x, y, z, w))$ and $\delta = h \circ G^{-1}$, i.e.

$$w = g(x, y, z, \lambda) \Leftrightarrow \lambda = \gamma(x, y, z, w), \quad (\text{A.4})$$

$$h(x, y, z, \lambda) = \delta(x, y, z, g(x, y, z, \lambda)), \quad \text{i.e.} \quad \delta(x, y, z, w) = h(x, y, z, \gamma(x, y, z, w)). \quad (\text{A.5})$$

Then, to (A.1), one may associate a control-affine system in $\mathbb{R}^4$ with two controls

$$\dot{\xi} = X_0(\xi) + w_1 X_1(\xi) + w_2 X_2(\xi)$$

where $\xi \in \mathbb{R}^4$ is the state, w_1 and w_2 are the two scalar controls that reads, in some coordinates

$$\dot{\xi}_1 = w_1, \quad \dot{\xi}_2 = \gamma(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) + \xi_3 w_1, \quad \dot{\xi}_3 = \delta(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) + \xi_4 w_1, \quad \dot{\xi}_4 = w_2. \quad (\text{A.6})$$

One can eliminate w_1 and w_2 and, renaming $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ as x, y, z, w , obtain the two following relations between these four functions of time :

$$\begin{cases} \dot{y} = \gamma(x, y, z, w) + z\dot{x} \\ \dot{z} = \delta(x, y, z, w) + w\dot{x} \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

(this can also be seen as a control system with state (x, y, z) and controls w and $\dot{x}$).

We study system (A.1) defined by g and h as above. Let us set some conventions :

The functions γ and δ Unless otherwise stated, when using the notations γ and δ , it is *not* assumed that they are related to g and h by (A.4) and (A.5). However, g and h being as above, there does exist such real analytic functions $G(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$; we will sometimes use them and the representation (A.7) of equation (A.1).

Notations for the derivatives We denote partial derivatives by subscript indexes. For functions of many variables, like $\varphi(u, \dots, u^{(k)}, v, \dots, v^{(\ell)})$ in (A.10), we use the name of the variable as a subscript: $\varphi_{v^{(\ell)}}$ means $\partial\varphi/\partial v^{(\ell)}$; $p_{xu^{(k-1)}}$ means $\partial^2 p/\partial x \partial u^{(k-1)}$ in (A.16-b). Since the arguments of g, h, γ, δ and a few other functions will sometimes be intricate functions of other variables, we use numeric subscripts for their partial derivatives: h_2 stands for $\partial h/\partial y$, or $g_{4,4,4}$ for $\partial^3 g/\partial \lambda^3$. To avoid confusions, we will not use numeric subscripts for other purposes than partial derivatives, except the subscript 0, as in $(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0)$ for a reference point.

For derivatives with respect to time, we use the standard with the dot and $^{(j)}$ for the j^{th} time-derivatives; sometimes d/dt .

The following very elementary lemma—we do write it explicitly because the argument is used repeatedly in the paper—states that no differential equation independent from (A.1) can be satisfied identically by *all* solutions of (A.1).

Lemma A.1.1 For $M \in \mathbb{N}$, let W be an open subset of $\mathbb{R}^{3+2M}$ and $R : W \rightarrow \mathbb{R}$ be some smooth function. If any solution $(x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot))$ of system (A.1), defined on some time-interval $I =]-\varepsilon, \varepsilon[$ and such that $(z(t), x(t), \dots, x^{(M)}(t), y(t), \dots, y^{(M)}(t)) \in W$ for all $t \in I$ satisfies

$$R(z(t), y(t), \dots, y^{(M)}(t), x(t), \dots, x^{(M)}(t)) = 0,$$

for all $t \in I$, then R is identically zero.

Proof : For any $\mathcal{X} \in W$ there is a germ of solution of (A.1) such that $(z(0), x(0), \dots, x^{(M)}(0), y(0), \dots, y^{(M)}(0)) = \mathcal{X}$. Indeed, take e.g. for $x(\cdot)$ and $y(\cdot)$ the polynomials in t of degree M that have these derivatives at time zero; Cauchy-Lipschitz theorem then yields a (unique) $z(\cdot)$ solution of (A.1) with the prescribed $z(0)$. ■

A.1.2 The notion of parameterization

In order to give somehow rigorous definitions without taking care of time-intervals of definition of the solutions, we consider germs of solutions at time 0, instead of solutions themselves. For O an open subset of $\mathbb{R}^n$, the notation $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}, O)$ stands for the set of germs at $t = 0$ of smooth functions of one variable with values in O , see e.g. [15].

Let k and ℓ be two non negative integers and U an open subset of $\mathbb{R}^{k+\ell+2}$; we denote by $\mathcal{U} \subset \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ the set of germs of smooth functions $t \mapsto (u(t), v(t))$ such that $(u(t), \dot{u}(t), \dots, u^{(k)}(t), v(t), \dots, v^{(\ell)}(t))$ is in U for $t = 0$ (and hence for t in a neighborhood of zero) :

$$\mathcal{U} = \{(u, v) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) | (u(0), \dot{u}(0), \dots, u^{(k)}(0), v(0), \dots, v^{(\ell)}(0)) \in U\}. \quad (\text{A.8})$$

This is an open set for the Whitney C^∞ topology [15, p.42]. In the same way, for $V \subset \mathbb{R}^{2L+3}$ open, $L \in \mathbb{N}$, we denote by $\mathcal{V}$ the following set of germs of smooth functions $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$:

$$\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3) | (x(0), y(0), z(0), \dot{x}(0), \dot{y}(0), \dots, x^{(L)}(0), y^{(L)}(0)) \in V\}. \quad (\text{A.9})$$

Definition A.1.2 (Monge parameterization) *Let k, ℓ, L be non negative integers, $L > 0$, and $\mathcal{X} = (x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dots, x_0^{(L)}, y_0^{(L)})$ be a point in $\widehat{\Omega} \times \mathbb{R}^{2L-2}$ ($\widehat{\Omega}$ is defined in (A.3)). A parameterization of order (k, ℓ) at $\mathcal{X}$ for system (A.1) is defined by*

- a neighborhood V of $\mathcal{X}$ in $\widehat{\Omega} \times \mathbb{R}^{2L-2}$,
- an open subset $U \subset \mathbb{R}^{k+\ell+2}$ and
- three real analytic functions $U \rightarrow \mathbb{R}$, denoted φ, ψ, χ ,

such that, with $\mathcal{U}$ and $\mathcal{V}$ defined from U and V according to (A.8)-(A.9), and $\Gamma : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ the map that assigns to $(u, v) \in \mathcal{U}$ the germ $\Gamma(u, v)$ at $t = 0$ of

$$t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(u(t), \dot{u}(t), \dots, u^{(k)}(t), v(t), \dot{v}(t), \dots, v^{(\ell)}(t)) \\ \psi(u(t), \dot{u}(t), \dots, u^{(k)}(t), v(t), \dot{v}(t), \dots, v^{(\ell)}(t)) \\ \chi(u(t), \dot{u}(t), \dots, u^{(k)}(t), v(t), \dot{v}(t), \dots, v^{(\ell)}(t)) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.10})$$

the following three properties hold :

- (i). for all (u, v) belonging to $\mathcal{U}$, $\Gamma(u, v)$ is a solution of system (A.1),
- (ii). the map Γ is open and $\Gamma(\mathcal{U}) \supset \mathcal{V}$,
- (iii). the two maps $U \rightarrow \mathbb{R}^3$ defined by the triples $(\varphi_{u^{(k)}}, \psi_{u^{(k)}}, \chi_{u^{(k)}})$ and $(\varphi_{v^{(\ell)}}, \psi_{v^{(\ell)}}, \chi_{v^{(\ell)}})$ are identically zero on no open subset of U .

Remark 1 (On ordering the pairs (k, ℓ)) To compare two orders of parameterization (k, ℓ) and (k', ℓ') , we use (total) lexicographic order or ordered pairs, i.e. $(k, \ell) \leq (k', \ell')$ means either $\min\{k, \ell\} < \min\{k', \ell'\}$ or $\min\{k, \ell\} = \min\{k', \ell'\}$ and $\max\{k, \ell\} \leq \max\{k', \ell'\}$. Hence order (1,5) is smaller than (2,2).

Since u and v play a symmetric role, they can always be exchanged, and one can assume, in the definition of a parameterization, that $k \leq \ell$. If this is assumed, $(k, \ell) \leq (k', \ell')$ means either $k < k'$ or $k = k'$ and $\ell \leq \ell'$.

Example 1 Suppose that the function γ in (A.7) depends on x, y, z only (this is treated in [50, case 6 in Theorem 3.1]). For such systems, eliminating w does not lead to (A.1), but to the simpler relation $\dot{y} - z\dot{x} = \gamma(x, y, z)$. One can easily adapt the above definition replacing (A.1) by this relation. Let us prove that this system $\dot{y} - z\dot{x} = \gamma(x, y, z)$ admits a parameterization of order (1,1) at any $(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0)$ such that $\dot{x}_0 + \gamma_3(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

In a neighborhood of such a point,, the map $(x, \dot{x}, y, z) \mapsto (x, \dot{x}, y, \gamma(x, y, z) + z\dot{x})$ is a local diffeomorphism, whose inverse can be written as $(x, \dot{x}, y, \dot{y}) \mapsto (x, \dot{x}, y, \chi(x, \dot{x}, y, \dot{y}))$, thus defining a map χ . Then $x = u, y = v, z = \chi(u, \dot{u}, v, \dot{v})$ defines a parameterization of order (1,1) in a neighborhood of these points.

Remark 2 The integer L only characterizes the number of derivatives needed to describe the open set in which the parameterization is valid. This is illustrated in the above example, where L must be taken at least equal to 1. Obviously, a parameterization of order (k, ℓ) at $(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dots, x_0^{(L)}, y_0^{(L)})$ is also, for $K > L$ and any value of $(x_0^{(L+1)}, y_0^{(L+1)}, \dots, x_0^{(K)}, y_0^{(K)})$, a parameterization of the same order at $(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dots, x_0^{(K)}, y_0^{(K)})$.

The above definition is local around some jet of solutions of (A.1). In general, the idea of a global parameterization, meaning that Γ would be defined globally, is not realistic ; it is not realistic either to require that there exists a parameterization around all jets (this would be “everywhere local” rather than “global”) : the systems in example 1 admit a local parametrization around “almost every” jets, meaning jets outside the zeroes of a real analytic function (namely jets such that $\dot{x} + \gamma_3(x, y, z) \neq 0$). We shall not define more precisely the notion of “almost everywhere local” parameterizability, but rather the following (sloppier) one.

Definition A.1.3 We say that system (A.1) admits a parameterization of order (k, ℓ) somewhere in Ω if there exists an integer L , and at least one jet $(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dots, x_0^{(L)}, y_0^{(L)}) \in \widehat{\Omega} \times \mathbb{R}^{2L-2}$ with a parameterization of order (k, ℓ) at this jet in the sense of Definition A.1.2

In a colloquial way this is a “somewhere local” property. Using real analyticity, “somewhere local” should imply “almost everywhere local”, but we do not investigate this.

A.1.3 The functions S, T and J

Given g, h , let us define three functions S, T and J , to be used to discriminate different cases. They were already more or less present in [50]. The most compact way is as follows : let ω, ω^1 and η be the following differential forms in the variables x, y, z, λ :

$$\begin{aligned} \omega^1 &= dy - z dx \\ \omega &= -2g_4^2 dx + (g_{4,4} h_4 - g_4 h_{4,4}) \omega^1 - g_{4,4} (dz - g dx) , \\ \eta &= dz - g dx - h_4 \omega^1 . \end{aligned} \tag{A.11}$$

From (A.2), $\omega \wedge \omega^1 \wedge \eta = 2g_4^2 dx \wedge dy \wedge dz \neq 0$. Decompose $d\omega \wedge \omega$ on the basis $\omega, \omega^1, \eta, d\lambda$, thus defining the functions S, T and J :

$$d\omega \wedge \omega = - \left(\frac{S}{2g_4} d\lambda \wedge \eta + \frac{T}{2} d\lambda \wedge \omega^1 + J \omega^1 \wedge \eta \right) \wedge \omega . \tag{A.12}$$

The expressions for S and T are the following (not that $S/(g_4)^2$ is the Schwartzian derivative of g with respect to its fourth argument) :

$$S = 2g_4 g_{4,4,4,4} - 3g_{4,4}^2 , \quad T = 2g_4 h_{4,4,4,4} - 3g_{4,4} h_{4,4} . \tag{A.13}$$

A.1.4 Contributions of the paper

Our (unachieved) goal is to give necessary and sufficient conditions on g and h for system (A.1) to admit a parameterization of some order.

If $S = T = J = 0$, we prove that system (A.1) admits a parameterization of order (1,2), at all points except some singularities. This is Theorem A.3.2, adapted from [50].

If $(S, T, J) \neq (0, 0, 0)$, we conjecture that system (A.1) admits no parameterization of any order. We are not able to prove this conjecture, but

- we prove (Theorem A.4.3) that system (A.1) admits no parameterization of order less than¹ (3, 4),
- we prove (Theorem A.4.1) that a parameterization of order (k, ℓ) is always related to a solution of a system of PDEs $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\gamma,\delta})$,
- since a solution of this system of PDEs is also sufficient to construct a parameterization (Theorem A.2.4), the conjecture can be entirely re-formulated in terms of this (very compact) system of partial differential relation.

To the best of our knowledge, the most general result available up to date on the class of systems studied here is in [50] : the control system (A.6) associated to g and h is “ (x, u) -dynamic linearizable” if and only if $S = T = J = 0$. See section A.7 for the relation dynamic linearization or flatness and Monge parameterizations. It turns out (Proposition A.7.2) that “ (x, u) -dynamic linearizability” in the sense of [50] implies existence of a parameterization of order (k, ℓ) with k and ℓ no larger than 3 ; hence Theorem A.4.3, recalled above, allows us to recover all the results from that paper.

Section A.2 introduces this partial differential system $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\gamma,\delta})$ and proves that a “regular solution” of this system induces a parameterization of order (k, ℓ) . Section A.3 is devoted to some special constructions for the case where $S = T = 0$. The main results are stated in Section A.4 ; necessary conditions are stated in a more detailed locally, and proved, in Section A.5. Section A.6 is devoted to proving that the partial differential system $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\gamma,\delta})$ cannot have regular solutions unless $(k, \ell) \leq (3, 4)$. Finally, Section A.7 says a word of how our results translates to flatness instead of parameterization.

A.2 A system of partial differential equations

A.2.1 The equation $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\gamma,\delta})$; regular solutions

For k and ℓ some positive integers, we define a partial differential system in $k + \ell + 1$ independent variables and one dependent variable, i.e. the unknown is one function of $k + \ell + 1$ variables. The dependent variable is denoted by p and the independent variables by $u, \dot{u}, \dots, u^{(k-1)}, x, v, \dot{v}, \dots, v^{(\ell-1)}$. Note that, although the name of the variables may suggest some “time-derivatives”, time is not a variable here and there is no relation between the independent variables v and $\dot{v}$ for instance.

¹in the sense of the order on orders of parameterizations described in Remark 1

Denote by F the following differential operator of order 1 (vector field) in $\mathbb{R}^{k+\ell+1}$, with coordinates the $k + \ell + 1$ independent variables mentioned above :

$$F = \sum_{i=0}^{k-2} u^{(i+1)} \frac{\partial}{\partial u^{(i)}} + \sum_{i=0}^{\ell-2} v^{(i+1)} \frac{\partial}{\partial v^{(i)}} \quad (\text{A.14})$$

where the first sum is zero if $k \leq 1$ and the second one is zero if $\ell \leq 1$.

Let $\tilde{\Omega}$ be an open connected subset of $\mathbb{R}^4$ and γ, δ two real analytic functions $\tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ such that

$$\gamma_4 \neq 0 \quad (\text{A.15})$$

(partial derivative of γ with respect to its 4th argument, see end of section A.1.1) at every point in $\tilde{\Omega}$. Consider the system of two partial differential equations and three inequations :

$$(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\gamma,\delta}) \begin{cases} p_{u^{(k-1)}} (Fp - \delta(x, p, p_x, p_{xx})) - p_{xu^{(k-1)}} (Fp - \gamma(x, p, p_x, p_{xx})) = 0, & (\text{a}) \\ p_{u^{(k-1)}} p_{xv^{(\ell-1)}} - p_{xu^{(k-1)}} p_{v^{(\ell-1)}} = 0, & (\text{b}) \\ p_{u^{(k-1)}} \neq 0, & (\text{c}) \\ p_{v^{(\ell-1)}} \neq 0, & (\text{d}) \\ \gamma_1 + \gamma_2 p_x + \gamma_3 p_{xx} + \gamma_4 p_{xxx} - \delta \neq 0. & (\text{e}) \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

To any p satisfying these equations and inequations, we may associate two functions σ and τ , and a vector field E defined as follows :

$$\sigma = -\frac{p_{v^{(\ell-1)}}}{p_{u^{(k-1)}}}, \quad \tau = \frac{-Fp + \gamma(x, p, p_x, p_{xx})}{p_{u^{(k-1)}}}, \quad E = \sigma \frac{\partial}{\partial u^{(k-1)}} + \frac{\partial}{\partial v^{(\ell-1)}}. \quad (\text{A.17})$$

We also introduce a differential operator D defined as

$$D = F + \tau \frac{\partial}{\partial u^{(k-1)}} + \sum_{i=0}^{k+\ell-2} x^{(i+1)} \frac{\partial}{\partial x^{(i)}}. \quad (\text{A.18})$$

It involves the additional variables $\dot{x}, \dots, x^{(k+\ell-1)}$, i.e. it is a vector field in $\mathbb{R}^{2k+2\ell}$ rather than $\mathbb{R}^{k+\ell+1}$; however, D will only be applied (recursively) to functions of $u, \dots, u^{(k-1)}, x, v, \dots, v^{(\ell-1)}$ (see $D^i p$ below), and the result is a polynomial in $\dot{x}, \dots, x^{(k+\ell-1)}$ with coefficients depending on $u, \dots, u^{(k-1)}, x, v, \dots, v^{(\ell-1)}$. Such expressions are used to define “regular” solutions :

Definition A.2.1 (Regular solutions of $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\gamma,\delta})$) A regular solution of system $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\gamma,\delta})$ is a real analytic function $p : O \rightarrow \mathbb{R}$, with O a connected open subset of $\mathbb{R}^{k+\ell+1}$, such that the image of O by (x, p, p_x, p_{xx}) is contained in $\tilde{\Omega}$, (A.16-a,b) are identically satisfied on O , the left-hand sides of (A.16-c,d,e) are not identically zero, and, for at least one integer $K \in \{1, \dots, k + \ell - 2\}$,

$$ED^K p \neq 0 \quad (\text{A.19})$$

(not identically zero, as a function of $u, \dots, u^{(k-1)}, x, v, \dots, v^{(\ell-1)}, \dot{x}, \dots, x^{(K)}$ on $O \times \mathbb{R}^K$).

We call it K -regular if K is the smallest such integer, i.e. if $ED^i p = 0$ for all $i \leq K - 1$.

Definition A.2.2 We say that system $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\gamma,\delta})$ admits a regular (resp. K -regular) solution somewhere in $\widehat{\Omega}$ if there exists at least an open connected $O \subset \mathbb{R}^{k+\ell+1}$ and a regular (resp. K -regular) solution $p : O \rightarrow \mathbb{R}$.

Remark 3 It is easily seen that p is solution of $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\gamma,\delta})$ if and only if there exists σ and τ such that (p, σ, τ) is a solution of

$$\begin{aligned} Fp + \tau p_{u^{(k-1)}} &= \gamma(x, p, p_x, p_{xx}) & Ep &= 0, \sigma_x = 0, \\ Fp_x + \tau p_{x,u^{(k-1)}} &= \delta(x, p, p_x, p_{xx}) & p_{u^{(k-1)}} &\neq 0, \tau_x \neq 0, \sigma \neq 0 \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Indeed, (A.16) does imply the above relations with σ and τ given by (A.17); in particular, $\tau_x \neq 0$ is equivalent to (e) and $\sigma \neq 0$ to (d); conversely, eliminating σ and τ in (A.20), one recovers $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\gamma,\delta})$. Note also that any solution of the above equations and inequations satisfies

$$Dp_x = h(x, p, p_x, Dp - p_x \dot{x}) + g(x, p, p_x, Dp - p_x \dot{x}) \dot{x} \quad (\text{A.21})$$

where g and h are related to γ and δ by (A.4) and (A.5).

A.2.2 The relation with parameterizations

Let us now explain the link between solutions of this system of PDEs and parameterizations of system (A.1). Consider a solution $p : O \rightarrow \mathbb{R}$ of $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\gamma,\delta})$. We saw in remark 3 that (A.16-e) is equivalent to $\tau_x \neq 0$; let $(u_0 \dots v_0^{(\ell-1)})$ be a point in O such that

$$\tau_x(u_0, \dots, u_0^{(k-1)}, x_0, v_0, \dots, v_0^{(\ell-1)}) \neq 0. \quad (\text{A.22})$$

Chose any pair $(u_0^{(k)}, v_0^{(\ell)}) \in \mathbb{R}^2$ (for instance with $v_0^{(\ell)} = 0$) such that

$$u_0^{(k)} - \sigma(u_0, \dots, u_0^{(k-1)}, v_0, \dots, v_0^{(\ell-1)}) v_0^{(\ell)} = \tau(u_0, \dots, u_0^{(k-1)}, x_0, v_0, \dots, v_0^{(\ell-1)}). \quad (\text{A.23})$$

Then, the implicit function theorem provides a neighborhood V of $(u_0, \dots, u_0^{(k)}, v_0, \dots, v_0^{(\ell)})$ in $\mathbb{R}^{k+\ell+2}$ and a real analytic map $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$ such that $\varphi(u_0, \dots, u_0^{(k)}, v_0, \dots, v_0^{(\ell)}) = x_0$ and

$$\tau(u, \dots, u^{(k-1)}, \varphi(u \dots v^{(\ell)}), v, \dots, v^{(\ell-1)}) = u^{(k)} - \sigma(u, \dots, u^{(k-1)}, v, \dots, v^{(\ell-1)}) v^{(\ell)} \quad (\text{A.24})$$

identically on V . Two other maps $V \rightarrow \mathbb{R}$ may be defined by

$$\psi(u, \dots, u^{(k)}, v, \dots, v^{(\ell)}) = p(u, \dots, u^{(k-1)}, \varphi(\dots), v, \dots, v^{(\ell-1)}), \quad (\text{A.25})$$

$$\chi(u, \dots, u^{(k)}, v, \dots, v^{(\ell)}) = p_x(u, \dots, u^{(k-1)}, \varphi(\dots), v, \dots, v^{(\ell-1)}). \quad (\text{A.26})$$

From these φ , ψ and χ , one can define a map Γ as in (A.10) that is a candidate for a parameterization. We prove below that, if p is a regular solution of $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\gamma,\delta})$, then it is indeed a parameterization. This is true at least away from some singularities; the following lemma describes them. It is proved in the appendix.

Lemma A.2.3 Let O be an open connected subset of $\mathbb{R}^{k+\ell+1}$ and $p : O \rightarrow \mathbb{R}$ be a K -regular solution of system $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\gamma,\delta})$, see (A.16). Define the map $\pi : O \times \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}^{K+2}$ by

$$\pi(u \dots u^{(k-1)}, x, v \dots v^{(\ell-1)}, \dot{x} \dots x^{(K)}) = \begin{pmatrix} p_x(u \dots u^{(k-1)}, x, v \dots v^{(\ell-1)}) \\ p(u \dots u^{(k-1)}, x, v \dots v^{(\ell-1)}) \\ Dp(u \dots u^{(k-1)}, x, v \dots v^{(\ell-1)}, \dot{x}) \\ \vdots \\ D^K p(u \dots u^{(k-1)}, x, v \dots v^{(\ell-1)}, \dot{x} \dots x^{(K)}) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.27})$$

There exist two non-negative integers $i_0 \leq k$ and $j_0 \leq \ell$ such that $i_0 + j_0 = K + 2$ and

$$\det \left(\frac{\partial \pi}{\partial u^{(k-i_0)}}, \dots, \frac{\partial \pi}{\partial u^{(k-1)}}, \frac{\partial \pi}{\partial v^{(\ell-j_0)}}, \dots, \frac{\partial \pi}{\partial v^{(\ell-1)}} \right) \quad (\text{A.28})$$

is a nonzero real analytic function on $O \times \mathbb{R}^K$.

We can now state precisely the announced sufficient condition. The interest of this result is discussed in Remark 4.

Theorem A.2.4 Let $p : O \rightarrow \mathbb{R}$, with $O \subset \mathbb{R}^{k+\ell+1}$ open, be a K -regular solution of system $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\gamma,\delta})$, and i_0, j_0 be given by Lemma A.2.3. Then, the maps φ, ψ, χ constructed above define a parameterization Γ of system (A.1) of order (k, ℓ) (see Definition A.1.2) at any jet of solutions $(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dots, x_0^{(K)}, \dot{y}_0, \dots, y_0^{(K)})$ such that, for some $u_0, \dots, u_0^{(k-1)}, v_0, \dots, v_0^{(\ell-1)}$,

$$\left. \begin{aligned} (u_0, \dots, u_0^{(k-1)}, x_0, v_0, \dots, v_0^{(\ell-1)}) &\in O, \\ z_0 &= p_x(u_0, \dots, u_0^{(k-1)}, v_0, \dots, v_0^{(\ell-1)}, x_0), \\ y_0^{(i)} &= D^i p(u_0, \dots, u_0^{(k-1)}, v_0, \dots, v_0^{(\ell-1)}, x_0, \dots, x_0^{(i)}) \quad 0 \leq i \leq K, \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.29})$$

the left-hand sides of (A.16-c,d,e) are all nonzero at $(u_0, \dots, u_0^{(k-1)}, x_0, v_0, \dots, v_0^{(\ell-1)})$, and the function $ED^K p$ and the determinant (A.28) are nonzero at point $(u_0, \dots, u_0^{(k-1)}, x_0, \dots, x_0^{(K)}, v_0, \dots, v_0^{(\ell-1)}) \in O \times \mathbb{R}^K$.

Proof : Let us prove that Γ given by (A.10), with the maps φ, ψ, χ constructed above, satisfies the three points of Definition A.1.2. Differentiating (A.24) with respect to $u^{(k)}$ and $v^{(\ell)}$ yields $\varphi_{u^{(k)}} \tau_x = 1$, $\varphi_{v^{(\ell)}} \tau_x = -\sigma$, hence the point (iii) ($\sigma \neq 0$ from (A.20)). To prove point (i), let $u(\cdot), v(\cdot)$ be arbitrary and $x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot)$ be defined by (A.10). Differentiating (A.25) and (A.26), taking $u^{(k)}$ from (A.24), one has, with F given by (A.14),

$$\dot{y}(t) = Fp + v^{(\ell)}(t)Ep + \dot{x}(t)z(t), \quad \dot{z}(t) = Fp_x + v^{(\ell)}(t)Ep_x + \dot{x}(t)p_{xx}$$

where the argument $(u(t) \dots u^{(k-1)}(t), x(t), v(t) \dots v^{(\ell-1)}(t))$ for Fp, Fp_x, Ep, Ep_x and p_{xx} is omitted. Then, (A.20) implies, again omitting the arguments of p_{xx} , $\dot{y}(t) = \gamma(x(t), y(t), z(t), p_{xx}) + z(t)\dot{x}(t)$, and $\dot{z}(t) = \delta(x(t), y(t), z(t), p_{xx}) + p_{xx}\dot{x}(t)$. The first equation yields $p_{xx} = g(x(t), y(t),$

$z(t), \dot{y}(t) - z(t)\dot{x}(t)$ with g related to γ by (A.4), and then the second one yields (A.1), with h related to δ by (A.5). This proves point (i). The rest of the proof is devoted to point (ii).

Let $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ be a solution of (A.1). We may consider $\Gamma(u, v) = (x, y, z)$ (see (A.10)) as a system of three ordinary differential equations in two unknown functions u, v :

$$u^{(k)} - \sigma(u, \dots, u^{(k-1)}, v, \dots, v^{(\ell-1)})v^{(\ell)} - \tau(u, \dots, u^{(k-1)}, x, v, \dots, v^{(\ell-1)}) = 0, \quad (\text{A.30})$$

$$p(u, \dots, u^{(k-1)}, x, v, \dots, v^{(\ell-1)}) = y, \quad (\text{A.31})$$

$$p_x(u, \dots, u^{(k-1)}, x, v, \dots, v^{(\ell-1)}) = z. \quad (\text{A.32})$$

Differentiating (A.31) $K+1$ times, substituting $u^{(k)}$ from (A.30), and using the fact that $ED^i p = 0$ for $i \leq K$ (see Definition A.2.1), we get

$$D^i p(u(t), \dots, u^{(k-1)}(t), v(t), \dots, v^{(\ell-1)}(t), x(t), \dots, x^{(i)}(t)) = \frac{d^i y}{dt^i}(t), \quad 1 \leq i \leq K, \quad (\text{A.33})$$

$$\begin{aligned} & v^{(\ell)}(t) ED^K p(u(t), \dots, u^{(k-1)}(t), v(t), \dots, v^{(\ell-1)}(t), x(t), \dots, x^{(K)}(t)) \\ & + D^{K+1} p(u(t), \dots, u^{(k-1)}(t), v(t), \dots, v^{(\ell-1)}(t), x(t), \dots, x^{(K+1)}(t)) = \frac{d^{K+1} y}{dt^{K+1}}(t). \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

Equations (A.31)-(A.32)-(A.33) can be written

$$\pi(u, \dots, u^{(k-1)}, x, v, \dots, v^{(\ell-1)}, \dot{x}, \dots, x^{(K)}) = \begin{pmatrix} z \\ y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(K)} \end{pmatrix} \quad (\text{A.35})$$

with π given by (A.27). Since the determinant (A.28) is nonzero, the implicit function theorem implies that (A.32)-(A.32)-(A.33) is, locally, equivalent to a system giving explicitly $u^{(k-i_0)}, \dots, u^{(k-1)}, v^{(\ell-j_0)}, \dots, v^{(\ell-1)}$ as functions of $u, \dots, u^{(k-i_0-1)}, v, \dots, v^{(\ell-j_0-1)}, x, \dots, x^{(K)}, y, \dots, y^{(K)}$ and z .

Let us single out these giving the lowest order derivatives :

$$\begin{aligned} u^{(k-i_0)} &= f^1(u, \dots, u^{(k-1-i_0-1)}, v, \dots, v^{(\ell-j_0-1)}, x, \dots, x^{(K)}, z, y, \dots, y^{(K)}), \\ v^{(\ell-j_0)} &= f^2(u, \dots, u^{(k-1-i_0-1)}, v, \dots, v^{(\ell-j_0-1)}, x, \dots, x^{(K)}, z, y, \dots, y^{(K)}). \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

Let us prove that, provided that (x, y, z) is a solution of (A.1), system (A.36) is equivalent to (A.30)-(A.31)-(A.32), i.e. to $\Gamma(u, v) = (x, y, z)$. It is obvious that any $t \mapsto (u(t), v(t), x(t), y(t), z(t))$ that satisfies (A.1), (A.30), (A.31) and (A.32) also satisfies (A.36), because these equations were obtained from consequences of those. Conversely, let $t \mapsto (u(t), v(t), x(t), y(t), z(t))$ be such that (A.1) and (A.36) are satisfied ; differentiating (A.36) and substituting each time $\dot{z}$ from (A.1) and $(u^{(k-i_0)}, v^{(\ell-j_0)})$ from (A.36), one obtains

$$\begin{aligned} u^{(k-i_0+i)} &= f^{1,i}(u, \dots, u^{(k-1-i_0-1)}, v, \dots, v^{(\ell-j_0-1)}, x, \dots, x^{(K+i)}, z, y, \dots, y^{(K+i)}), \quad i \in \mathbb{N}, \\ v^{(\ell-j_0+j)} &= f^{2,j}(u, \dots, u^{(k-1-i_0-1)}, v, \dots, v^{(\ell-j_0-1)}, x, \dots, x^{(K+j)}, z, y, \dots, y^{(K+j)}), \quad j \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

Now, substitute the values of $u^{(k-i_0)}, \dots, u^{(k)}, v^{(\ell-j_0)}, \dots, v^{(\ell)}$ from (A.37) into (A.30), (A.31) and (A.32); either the obtained relations are identically satisfied, and hence it is true that any solution of (A.1) and (A.36) also satisfies (A.30)-(A.31)-(A.32), or one obtains at least one relation of the form (we assume $k \leq \ell$; if not put $K + k$ instead of $K + \ell$):

$$R(u, \dots, u^{(k-1-i_0-1)}, v, \dots, v^{(\ell-j_0-1)}, x, \dots, x^{(K+\ell)}, z, y, \dots, y^{(K+\ell)}) = 0.$$

This relation has been obtained (indirectly) by differentiating and combining (A.1)-(A.30)-(A.31)-(A.32). This is absurd because (A.30)-(A.31)-(A.32)-(A.33)-(A.34) are the only independent relations of order k, ℓ obtained by differentiating and combining² (A.30)-(A.31)-(A.32) because, on the one hand, since $D^K p \neq 0$, differentiating more (A.34) and (A.30) will produce higher order differential equations in which higher order derivatives cannot be eliminated, and on the other hand, differentiating (A.32) and substituting $\dot{z}$ from (A.1), $u^{(k)}$ from (A.30) and $\dot{y}$ from (A.33) for $i = 1$ yields the trivial $0 = 0$ because p is a solution of $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\gamma,\delta})$, see the proof of point (i) above.

We have now established that, for (x, y, z) a solution of (A.1), $\Gamma(u, v) = (x, y, z)$, is equivalent to (A.36). Using Cauchy Lipschitz theorem with continuous dependence on the parameters, one can define a continuous map $s : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ mapping a (germ of) (x, y, z) to the unique (germ of) solution of (A.36) with fixed initial condition $(u, \dots, u^{(k-i_0-1)}, v, \dots, v^{(\ell-j_0-1)}) = (u_0, \dots, u_0^{(k-i_0-1)}, v_0, \dots, v_0^{(\ell-j_0-1)})$. s is then a continuous right inverse (or a section) of Γ , i.e. $\Gamma \circ s = Id$. This proves point (ii). ■

A.3 Remarks on the case where $S = T = 0$.

We need some special constructions for the case where $S = T = 0$.

Lemma A.3.1 *Consider an open subset Ω of $\mathbb{R}^4$, and g and h two smooth functions $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, and assume that S and T , given by (A.13), are identically zero. Then, for any point $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0) \in \Omega$ such that $g_4(x_0, y_0, z_0, \lambda_0) \neq 0$, there exists*
- an open set $W \subset \mathbb{R}^3$ and an open interval $I \subset \mathbb{R}$ such that $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0) \in \Omega' = W \times I \subset \Omega$,

² In other words, (A.30)-(A.31)-(A.32)-(A.33)-(A.34), as a system of ODEs in u and v , is formally integrable (see e.g. [3, Chapter IX]). This means, for a systems of ODEs with independent variable t , that no new independent equation of the same orders (k with respect to u and ℓ with respect to v) can be obtained by differentiating with respect to t (an arbitrary number of times) and combining these equations. It is known [3, Chapter IX] that a sufficient condition is that this is true when differentiating only once and the system allows one to express the highest order derivatives as functions of the others. Formal integrability also means that, given any initial condition $(u(0), \dots, u^{(k)}(0), v(0), \dots, v^{(\ell)}(0))$ that satisfies these relations, there is a solution of the system of ODEs with these initial conditions.

- and seven smooth functions $W \rightarrow \mathbb{R}$ denoted by $\hat{a}^0, \hat{a}^1, \hat{a}^2, \hat{b}^0, \hat{b}^1, \hat{c}^0, \hat{c}^1$ such that

$$\text{Rank} \begin{pmatrix} \hat{a}^0 & (g_{4,4} h_4 - h_{4,4} g_4) \lambda^2 + (2 h_4 g_4 - h_{4,4} g_4) \lambda - 2 h g_4 \\ \hat{a}^1 & -2 (g_{4,4} h_4 - h_{4,4} g_4) \lambda + h g_{4,4} - 2 h_4 g_4 \\ \hat{a}^2 & g_{4,4} h_4 - h_{4,4} g_4 \\ \hat{b}^0 & (-g g_{4,4} + 2 g_4^2) \lambda - 2 g g_4 \\ \hat{b}^1 & g g_{4,4} - 2 g_4^2 \\ \hat{c}^0 & -g_{4,4} \lambda - 2 g_4 \\ \hat{c}^1 & g_{4,4} \end{pmatrix} = 1 \quad (\text{A.38})$$

(this means that the first column is proportional to the second one, that cannot be zero for $g_4 \neq 0$). Then, $\hat{c}^0 + \hat{c}^1 \lambda \neq 0$ on Ω , $\hat{c}^1 \hat{b}^0 - \hat{b}^1 \hat{c}^0 \neq 0$ on W , and, for all x, y, z, λ in Ω ,

$$\begin{aligned} g(x, y, z, \lambda) &= \frac{\hat{b}^0(x, y, z) + \hat{b}^1(x, y, z) \lambda}{\hat{c}^0(x, y, z) + \hat{c}^1(x, y, z) \lambda}, \\ h(x, y, z, \lambda) &= \frac{\hat{a}^0(x, y, z) + \hat{a}^1(x, y, z) \lambda + \hat{a}^2(x, y, z) \lambda^2}{\hat{c}^0(x, y, z) + \hat{c}^1(x, y, z) \lambda}. \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

Proof : By differentiating, one checks that the ratios between the elements of the second column in (A.38) do not depend on λ . Chosen as follows, the functions $\hat{c}^i, \hat{b}^i, \hat{a}^i$ therefore do not depend on λ :

$$\begin{aligned} \text{if } g_{4,4} \neq 0, & \begin{cases} \hat{a}^0 = (h_4 - g_4 h_{4,4} / g_{4,4}) \lambda^2 + (2 h_4 g_4 / g_{4,4} - h) \lambda - 2 h g_4 / g_{4,4}, \\ \hat{a}^1 = -2 (h_4 - g_4 h_{4,4} / g_{4,4}) \lambda + h - 2 h_4 g_4 / g_{4,4}, \\ \hat{a}^2 = h_4 - g_4 h_{4,4} / g_{4,4}, \\ \hat{b}^0 = (-g + 2 g_4^2 / g_{4,4}) \lambda - 2 g g_4 / g_{4,4}, \quad \hat{b}^1 = g - 2 g_4^2 / g_{4,4}, \\ \hat{c}^0 = -\lambda - 2 g_4 / g_{4,4}, \quad \hat{c}^1 = 1; \end{cases} \\ \text{if } g_{4,4} = 0, & \begin{cases} \hat{a}^0 = \frac{1}{2} h_{4,4} \lambda^2 - h_4 \lambda + h, \quad \hat{a}^1 = -h_{4,4} \lambda + h_4, \quad \hat{a}^2 = \frac{1}{2} h_{4,4}, \\ \hat{b}^0 = -g_4 \lambda + g, \quad \hat{b}^1 = g_4, \quad \hat{c}^0 = 1, \quad \hat{c}^1 = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

The relation (A.39) is a simple consequence of (A.38) or (A.40). ■

To analyze further the case of systems for which $S = T = 0$, let us assume that g and h take the form (A.39). Then define the differential forms in the three variables x, y, z :

$$\hat{\omega}^1 = dy - z dx, \quad \hat{\omega}^2 = \hat{b}^1 dx + \hat{a}^2 \hat{\omega}^1 - \hat{c}^1 dz, \quad \hat{\omega}^3 = \hat{b}^0 dx + \hat{a}^1 \hat{\omega}^1 - \hat{c}^0 dz. \quad (\text{A.41})$$

Denoting by ξ the point of coordinates x, y, z , equation (A.1) can be written

$$\langle \hat{\omega}^1, \dot{\xi} \rangle \langle \hat{\omega}^2, \dot{\xi} \rangle + \langle \hat{\omega}^3, \dot{\xi} \rangle + \hat{a}^0 = 0. \quad (\text{A.42})$$

Note that $\hat{\omega}^1, \hat{\omega}^2$ and $\hat{\omega}^3$ are differential forms in the variables x, y, z only, but, from (A.38), $\hat{\omega}^2$ is proportional to ω defined in (A.11), i.e. there is a functions $k \neq 0$, of the four variables x, y, z, λ , such

that³ $\omega = k \hat{\omega}^2$. Hence, from (A.12), assuming $S = T = 0$ one has

$$J = 0 \Leftrightarrow d\omega \wedge \omega = 0 \Leftrightarrow d\hat{\omega}^2 \wedge \hat{\omega}^2 = 0. \quad (\text{A.43})$$

Theorem A.3.2 *If $S = T = J = 0$, then system (A.1) admits a parameterization of order (1, 2) at any $(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \ddot{x}_0, \ddot{y}_0) \in (\hat{\Omega} \times \mathbb{R}^2) \setminus F$, where $F \subset \hat{\Omega} \times \mathbb{R}^2$ is closed with empty interior.*

This is a consequence of [50, Proposition 4.5], although orders of parameterizations are not given in [50]. For the sake of self-containedness, let us however give a short proof. *Proof*: From Lemma A.3.1, system (A.1) can be written as (A.42) where, from (A.43), $d\hat{\omega}^2 \wedge \hat{\omega}^2 = 0$. Since, in addition, $\hat{\omega}^1$ and $\hat{\omega}^2$ are linearly independent there is a (local) change of coordinates $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = P(x, y, z)$ such that $\hat{\omega}^2 = k' d\tilde{x}$ and $\hat{\omega}^1 = k''(d\tilde{y} - \tilde{z} d\tilde{x})$ with $k' \neq 0$ and $k'' \neq 0$; in these coordinates, with κ, a, b, c some smooth maps, $\kappa \neq 0$, system (A.42) reads

$$\dot{\tilde{z}} = \kappa(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \dot{\tilde{x}} \tilde{\lambda} + a(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \tilde{\lambda} + b(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \dot{\tilde{x}} + c(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \quad \text{with} \quad \tilde{\lambda} = \dot{\tilde{y}} - \tilde{z} \dot{\tilde{x}}.$$

In $\mathbb{R}^4$ with coordinates $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \dot{\tilde{x}}$, define the vector fields X, Y, Ξ as follows, and compute the bracket $[Y, \Xi]$:

$$X = \dot{\tilde{x}} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \tilde{z} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right) + (b\dot{\tilde{x}} + c) \frac{\partial}{\partial \tilde{z}}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} + (a + \dot{\tilde{x}}\kappa) \frac{\partial}{\partial \tilde{z}}, \quad \Xi = \frac{\partial}{\partial \dot{\tilde{x}}}, \quad [Y, \Xi] = -\kappa \frac{\partial}{\partial \dot{\tilde{z}}}$$

Since $\kappa \neq 0$, $[Y, \Xi]$ and Y are linearly independent. Let φ be a function of four variables $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \dot{\tilde{x}})$ such that $Y\varphi = 0$ and $[Y, \Xi]\varphi \neq 0$; since $Y\varphi = 0$, one has $[Y, \Xi]\varphi = Y\Xi\varphi$. Define

$$\varphi'(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \dot{\tilde{x}}, \ddot{\tilde{x}}) = X\varphi(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \dot{\tilde{x}}) + \ddot{\tilde{x}} \Xi\varphi(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \dot{\tilde{x}}).$$

Since $Y\Xi\varphi$ is nonzero real analytic, this is a closed subset of $W \times \mathbb{R}^2$ with empty interior:

$$\tilde{F} = \{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \dot{\tilde{x}}, \ddot{\tilde{x}}) \in W \times \mathbb{R}^2, YX\varphi(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \dot{\tilde{x}}) + \ddot{\tilde{x}} Y\Xi\varphi(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \dot{\tilde{x}}) = 0\}.$$

At any point $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \dot{\tilde{x}}, \ddot{\tilde{x}}) \in (W \times \mathbb{R}^2) \setminus \tilde{F}$, the map

$$\left(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \dot{\tilde{x}}, \ddot{\tilde{x}} \right) \mapsto \left(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \dot{\tilde{x}}), \varphi'(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \dot{\tilde{x}}, \ddot{\tilde{x}}), \dot{\tilde{x}}, \ddot{\tilde{x}} \right)$$

is a local diffeomorphism; let its inverse be

$$\left(\tilde{x}, u, \dot{u}, \dot{\tilde{x}}, \ddot{\tilde{x}} \right) \mapsto \left(\tilde{x}, \tilde{\psi}(\tilde{x}, u, \dot{u}, \dot{\tilde{x}}, \ddot{\tilde{x}}), \tilde{\chi}(\tilde{x}, u, \dot{u}, \dot{\tilde{x}}, \ddot{\tilde{x}}), \dot{\tilde{x}}, \ddot{\tilde{x}} \right).$$

Let then F be the set of $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \ddot{x}, \ddot{y}) \in \hat{\Omega} \times \mathbb{R}^2$ such that

$$(P^1(x, y, z), P^2(x, y, z), P^3(x, y, z), \dot{P}^1(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}), \ddot{P}^1(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \ddot{x}, \ddot{y})) \in \tilde{F}$$

where $\dot{P}^1$ and $\ddot{P}^1$ are computed according to (A.1). Then, in a neighborhood of any $(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \ddot{x}_0, \ddot{y}_0) \in (\hat{\Omega} \times \mathbb{R}^2) \setminus F$, a parameterization (A.10) of order (1,2) is provided by $(x, y, z) = P^{-1}(v, \tilde{\psi}(v, u, \dot{u}, \dot{v}, \ddot{v}), \tilde{\chi}(v, u, \dot{u}, \dot{v}, \ddot{v}))$. ■

Now, let us turn to the case where J is nonzero.

³ In fact, from (A.12), $S = T = 0$ means that the Lie derivative of ω along $\partial/\partial\lambda$ is co-linear to ω , and this classically implies that ω itself is collinear to a form in three variables x, y, z , the first integrals of $\partial/\partial\lambda$.

Proposition A.3.3 Assume that the functions g and h defining system (A.1) are such that S and T defined by (A.12) or (A.13) are identically zero on Ω , but J is not, and let $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0) \in \Omega$ be such that $J(x_0, y_0, z_0, \lambda_0) \neq 0$.

There exists an open set $W \subset \mathbb{R}^3$ and an open interval $I \subset \mathbb{R}$ such that $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0) \in \Omega' = W \times I \subset \Omega$, a smooth diffeomorphism P from W to $P(W) \subset \mathbb{R}^3$ and six smooth functions $P(W) \rightarrow \mathbb{R}$ denoted $\kappa, \alpha, \beta, a, b, c$ such that, with the change of coordinates $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = P(x, y, z)$, system (A.1) reads

$$\dot{\tilde{z}} = \kappa(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) (\dot{\tilde{y}} - \alpha(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \dot{\tilde{x}}) (\dot{\tilde{y}} - \beta(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \dot{\tilde{x}}) + a(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \dot{\tilde{x}} + b(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \dot{\tilde{y}} + c(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \quad (\text{A.44})$$

and none of the functions $\kappa, \alpha - \beta, \alpha_3$ and β_3 vanish on W .

Note that if no denominator appears in (A.39) (i.e. $\hat{c}^0 = 1$ and $\hat{c}^1 = 0$), then (A.39) is already in the form (A.44) with $\kappa = -\hat{a}^2$, $\alpha = z$, $\beta = z + \hat{b}^1/\hat{a}^2$, $a = \hat{b}^0 - \hat{a}^1 z$, $b = \hat{a}^1$, $c = \hat{a}^0$.

Proof :From Lemma A.3.1, g and h are given by (A.39). Let P^1, P^2 be a pair of independent first integrals of the vector field $\hat{c}^1 \left(\frac{\partial}{\partial x} + z \frac{\partial}{\partial y} \right) + \hat{b}^1 \frac{\partial}{\partial z}$ in the coordinates x, y, z ; from (A.41), $\hat{\omega}^1, \hat{\omega}^2$ span the annihilator of this vector field, and hence are linear combinations of dP^1 and dP^2 . Possibly modifying P^1, P^2 , the component on dP^1 of $\hat{\omega}^1$ and $\hat{\omega}^2$ are nonzero, i.e. there exists smooth function k^1, k^2, f^1, f^2 such that $\hat{\omega}^i = k^i (dP^2 - f^i dP^1)$, $k^i \neq 0$, $i = 1, 2$. Now, take for P^3 any function such that $dP^1 \wedge dP^2 \wedge dP^3 \neq 0$. Decomposing $\hat{\omega}^3$, we get three smooth functions p^0, p^1, p^2 such that $\hat{\omega}^3 = p^0 (-dP^3 + p^1 dP^1 + p^2 dP^2)$.

From (A.41), $\hat{\omega}^1 \wedge \hat{\omega}^2 \wedge \hat{\omega}^3 = (\hat{b}^1 \hat{c}^0 - \hat{b}^0 \hat{c}^1) dx \wedge dy \wedge dz \neq 0$ while, from the above expressions, $\hat{\omega}^1 \wedge \hat{\omega}^2 \wedge \hat{\omega}^3 = p^0 (f^1 - f^2) dP^1 \wedge dP^2 \wedge dP^3$; hence $p^0 \neq 0$ and $f^1 - f^2 \neq 0$. Also, (A.41) implies $d\hat{\omega}^1 \wedge \hat{\omega}^1 \neq 0$, (A.43) implies $d\hat{\omega}^2 \wedge \hat{\omega}^2 \neq 0$, while, from the above expressions, $d\hat{\omega}^i \wedge \hat{\omega}^i = -(k^i)^2 dP^1 \wedge dP^2 \wedge df^i$ for $i = 1, 2$; hence, recalling the above inequality,

$$p^0 \neq 0, \quad f^1 - f^2 \neq 0, \quad dP^1 \wedge dP^2 \wedge df^i, \quad i = 1, 2. \quad (\text{A.45})$$

Defining a change of coordinates $\tilde{x} = P^1(x, y, z), \tilde{y} = P^2(x, y, z), \tilde{z} = P^3(x, y, z)$, with inverse $(x, y, z) = \psi(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$, and six functions $\kappa, \alpha, \beta, a, b, c$ by :

$$\kappa = \frac{k^1 k^2}{p^0} \circ \psi, \quad \alpha = f^1 \circ \psi, \quad \beta = f^2 \circ \psi, \quad a = p^1 \circ \psi, \quad b = p^2 \circ \psi, \quad c = \frac{\hat{a}^0}{p^0} \circ \psi,$$

equation (A.42) translates into (A.44) and (A.45) implies, since $k^1 \neq 0$ and $k^2 \neq 0$, that $\kappa, \alpha - \beta, \alpha_3$ and β_3 are nonzero. ■

Equation (A.44), where α and β play exactly the same role, is not really a particular case of (A.1), but it would be with z instead of α or β . Since $\alpha_3 \neq 0$ and $\beta_3 \neq 0$,

$$(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \mapsto A(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = (\tilde{x}, \tilde{y}, \alpha(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})) \quad \text{and} \quad (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \mapsto B(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = (\tilde{x}, \tilde{y}, \beta(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})) \quad (\text{A.46})$$

define two local diffeomorphisms, both providing coordinates that turn (A.44) to a system of the form (A.1) with h and g as in (A.39) and $\hat{c}^1 = 0, \hat{c}^0 = 1$, but with different functions $\hat{a}^i$ and $\hat{b}^i$; in both cases,

$\hat{c}^1 = 0, \hat{c}^0 = 1$). These two different possibilities for g and h yield two possible sets of functions γ and δ —to be used in the differential system $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\gamma,\delta})$, see (A.16)—computed according to (A.4) and (A.5); let us give their explicit expression :

$$\gamma^i(x, y, z, w) = \frac{w - m^{i,0}(x, y, z)}{m^{i,1}(x, y, z)}, \quad \delta^i = n^{i,0} + n^{i,1}\gamma + n^{i,2}\gamma^2, \quad i \in \{1, 2\} \quad (\text{A.47})$$

with (these are obtained from each other by interchanging α and β) :

$$\begin{aligned} m^{1,0} &= (\alpha_1 + \alpha \alpha_2 + (a + b \alpha) \alpha_3) \circ A^{-1}, \quad m^{1,1} = (\kappa \alpha_3 (\alpha - \beta)) \circ A^{-1}, \\ n^{1,0} &= \alpha_3 \circ A^{-1}, \quad n^{1,1} = (\alpha_2 + b \alpha_3) \circ A^{-1}, \quad n^{1,2} = (\kappa \alpha_3) \circ A^{-1}, \\ m^{2,0} &= (\beta_1 + \beta \beta_2 + (a + b \beta) \beta_3) \circ B^{-1}, \quad m^{2,1} = (\kappa \beta_3 (\beta - \alpha)) \circ B^{-1}, \\ n^{2,0} &= \beta_3 \circ B^{-1}, \quad n^{2,1} = (\beta_2 + b \beta_3) \circ B^{-1}, \quad n^{2,2} = (\kappa \beta_3) \circ B^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

A.4 Main results

The following theorem is central in this paper. The proof is very short because it relies on local necessary conditions and sufficient conditions that are stated separately elsewhere. Since the singularities are not the same for necessary and sufficient conditions, we do not give necessary and sufficient conditions at a precise point ; but we use the “somewhere” as in Definitions A.2.2 and A.1.3.

Theorem A.4.1 *System (A.1) admits a parameterization of order (k, ℓ) somewhere in Ω if and only if*

- (i). *either $S = T = J = 0$ on Ω (in this case, one can take $(k, \ell) = (1, 2)$),*
- (ii). *or $S = T = 0$ on Ω and one of the two systems $(\mathcal{E}_{k,\ell}^{\gamma^1, \delta^1})$ or $(\mathcal{E}_{k,\ell}^{\gamma^2, \delta^2})$ with γ^i, δ^i given by (A.47)-(A.48), admits a regular solution somewhere in $\hat{\Omega}$.*
- (iii). *or S and T are not both identically zero, and the system $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\gamma,\delta})$ with γ and δ defined from g and h according to (A.4) and (A.5) admits a regular solution somewhere in $\hat{\Omega}$.*

Proof : Sufficiency : the parameterization is provided, away from an explicitly described set of singularities, by Theorem A.3.2 if point (i) holds, and by Theorem A.3.2 if one of the two other points holds. For necessity, assume that there is a parameterization of order (k, ℓ) at a point $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dots, x^{(L)}, y^{(L)})$ in $(\hat{\Omega} \times \mathbb{R}^{2L-2}) \setminus F$. From Theorems A.5.2 and A.5.4, it implies that one of the three points holds. ■

This theorem clearly gives some importance to the system of PDEs $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\gamma,\delta})$. Our conjecture (Conjecture A.6.1) is that this system never has “regular solutions”, and this would imply the

Conjecture A.4.2 *If $d\omega \wedge \omega$ (or (S, T, J)) is not identically zero on Ω , then system (A.1) does not admit a parameterization of any order at any point (jet of any order).*

Remark 4 *If our conjecture A.6.1 is correct, the systems $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\gamma,\delta})$ never have any regular solutions, and the sufficiency part of Theorem A.4.1 (apart from case (i)) is essentially void, and so is Theorem A.2.4. However, Conjecture A.6.1 is still a conjecture, and the interest of these sufficient conditions is that they*

make the two conjecture —the above one on parameterizations of system (A.1) and Conjecture A.6.1 that only deals with a set of partial differential equalities and inequalities— equivalent. For instance, if one comes up with a regular solution of some of these systems $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\gamma,\delta})$, this will yield a new class of systems that admit a parameterization, and are probably flat.

We do have the following result, weaker than the conjecture because it is restricted to “small” values of (k, ℓ) (small in the sense of the order in remark 1, but still, the conjecture is proved if k is 1 or 2 and ℓ arbitrary).

Theorem A.4.3 *If system (A.1) admits a parameterization of order (k, ℓ) , with $k \leq \ell$, at some jet, then either $S = T = J = 0$ or $k \geq 3$ and $\ell \geq 4$.*

Proof : This is a simple consequence of Theorem A.4.1 and Proposition A.6.2. ■

Finally, note that the results of the present paper are sufficient to recover the results contained in the very technical paper [50]. The main result in that reference can be phrased :

“(A.6) is (x, u) -dynamic linearizable (i.e. (x, u) -flat) if and only if $S = T = J = 0$ ”,

and the difficult part is to prove that $S = T = J = 0$ is necessary ; in fact that proof is very technical, and relies on some simplifications performed via computer algebra. From our Proposition A.7.2, (x, u) -flatness implies existence of a parameterization of some order (k, ℓ) with $k \leq 3$ and $\ell \leq 3$. Hence Theorem A.4.1 does imply the above statement (provided that a parameterization of order (1,2) for (A.1) implies (x, u) -flatness for (A.6); this is elementary seen the construction in the proof of Theorem A.3.2).

A.5 Necessary conditions

A.5.1 The case where S and T are not both zero

The following lemma is needed to state the theorem.

Lemma A.5.1 *If $(S, T, J) \neq (0, 0, 0)$ and system (A.1) admits a parameterization (φ, ψ, χ) of order (k, ℓ) at point $(x_0, y_0, z_0, \dots, x_0^{(L)}, y_0^{(L)}) \in \mathbb{R}^{2L+3}$, then $\varphi_{u^{(k)}}$ is a nonzero real analytic function.*

Proof : Assume a parameterization where φ does not depend on $u^{(k)}$. Substituting in (A.1) yields

$$\dot{\chi} = h(\varphi, \psi, \chi, \dot{\psi} - \chi\dot{\varphi}) + g(\varphi, \psi, \chi, \dot{\psi} - \chi\dot{\varphi})\dot{\varphi}.$$

Since $\dot{\varphi}$ does not depend on $u^{(k+1)}$, differentiating twice with respect to $u^{(k+1)}$ yields

$$\chi_{u^{(k)}} = \psi_{u^{(k)}}(h_{4,4} + g_{4,4}\dot{\varphi}), \quad 0 = \psi_{u^{(k)}}^2(h_{4,4} + g_{4,4}\dot{\varphi}).$$

If $\psi_{u^{(k)}}$ was zero, then, from the first relation, $\chi_{u^{(k)}}$ would too, and this would contradict point (iii) in Definition A.1.2 ; hence the second relation implies that $h_{4,4} + g_{4,4}\dot{\varphi}$ is identically zero. From point (ii)

in the same definition, it implies that *all* solutions of (A.1) satisfy the relation : $h_{4,4}(x, y, z, \dot{y} - z\dot{x}) + g_{4,4}(x, y, z, \dot{y} - z\dot{x})\dot{x} = 0$. From Lemma A.1.1, this implies that $h_{4,4}$ and $g_{4,4}$ are the zero function of four variables, and hence $S = T = J = 0$. This proves the lemma. ■

Theorem A.5.2 Assume that either S or T is not identically zero on Ω , and that system (A.1) admits a parameterization of order (k, ℓ) at $\mathcal{X} = (x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dots, x_0^{(L)}, y_0^{(L)}) \in \widehat{\Omega} \times \mathbb{R}^{2L-2}$, with k, ℓ, L some integers and φ, ψ, χ defined on $U \subset \mathbb{R}^{k+\ell+2}$.

Then $k \geq 1, \ell \geq 1$ and, for any point $(u_0, \dots, u_0^{(k)}, v_0, \dots, v_0^{(\ell)}) \in U$ (not necessarily sent to $\mathcal{X}$ by the parameterization) such that

$$\varphi_{u^{(k)}}(u_0, \dots, u_0^{(k)}, v_0, \dots, v_0^{(\ell)}) \neq 0,$$

there exists a neighborhood O of $(u_0, \dots, u_0^{(k-1)}, \varphi(u_0 \dots v_0^{(\ell)}), v_0, \dots, v_0^{(\ell-1)})$ in $\mathbb{R}^{k+\ell+1}$ and a regular solution $p : O \rightarrow \mathbb{R}$ of $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\gamma,\delta})$, related to φ, ψ, χ by (A.24), (A.25) and (A.26), the functions γ and δ being related to g and h by (A.4) and (A.5).

Remark 5 From theorem A.2.4, if p is a K -regular solution ($K \leq k + \ell - 2$), one can always take $L \geq K$ in the jet at which the parameterization is valid. In other word, the open set $\mathcal{V}$ of germs of solutions in Definition A.1.2 derives from $V \subset \widehat{\Omega} \times \mathbb{R}^{2K-2}$.

Proof: Assume that system (A.1) admits a parameterization (φ, ψ, χ) of order (k, ℓ) at $(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dots, x_0^{(L)}, y_0^{(L)})$. Since $\varphi_{u^{(k)}}$ does not vanish, one can apply the inverse function theorem to the map

$$(u, \dot{u}, \dots, u^{(k)}, v, \dot{v}, \dots, v^{(\ell)}) \mapsto (u, \dots, u^{(k-1)}, \varphi(u, \dots, u^{(k)}, v, \dots, v^{(\ell)}), v, \dots, v^{(\ell)})$$

and define locally a function r of $k + \ell + 2$ variables such that

$$\varphi(u, \dot{u}, \dots, u^{(k)}, v, \dot{v}, \dots, v^{(\ell)}) = x \Leftrightarrow r(u, \dot{u}, \dots, u^{(k-1)}, x, v, \dot{v}, \dots, v^{(\ell)}) = u^{(k)}. \quad (\text{A.49})$$

Defining two functions p, q by substitution of $u^{(k)}$ in ψ, χ , the parameterization can be re-written implicitly as

$$\begin{cases} y = p(u, \dot{u}, \dots, u^{(k-1)}, x, v, \dot{v}, \dots, v^{(\ell)}), \\ z = q(u, \dot{u}, \dots, u^{(k-1)}, x, v, \dot{v}, \dots, v^{(\ell)}), \\ u^{(k)} = r(u, \dot{u}, \dots, u^{(k-1)}, x, v, \dot{v}, \dots, v^{(\ell)}). \end{cases} \quad (\text{A.50})$$

We now work with this form of the parameterization and $u, \dot{u}, \dots, u^{(k-1)}, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, v, \dot{v}, \dots, v^{(\ell)}, v^{(\ell+1)}, \dots$ instead of $u, \dot{u}, \dots, u^{(k-1)}, u^{(k)}, u^{(k+1)}, \dots, v, \dot{v}, \dots, v^{(\ell)}, v^{(\ell+1)}, \dots$.

In order to simplify notations, we define (the vector field F is defined in (A.14))

$$\mathcal{P} = Fp + rp_{u^{(k-1)}} + v^{(\ell)}p_{v^{(\ell-1)}} + v^{(\ell+1)}p_{v^{(\ell)}} , \quad \mathcal{Q} = Fq + rq_{u^{(k-1)}} + v^{(\ell)}q_{v^{(\ell-1)}} + v^{(\ell+1)}q_{v^{(\ell)}} .$$

We shall prove later that $\ell \geq 1$ and $k \geq 1$; until then, all terms involving $\ell - 1$ or $k - 1$ are assumed to be zero by convention. $\mathcal{P}$ and $\mathcal{Q}$ depend on $u, \dot{u}, \dots, u^{(k-1)}, x, v, \dot{v}, \dots, v^{(\ell)}, v^{(\ell+1)}$ but not on $\dot{x}$; Fp

and Fq depend neither on $\dot{x}$ nor on $v^{(\ell+1)}$. When substituting (A.50) in (A.1), using $\dot{y} = \mathcal{P} + \dot{x}p_x$ and $\dot{z} = \mathcal{Q} + \dot{x}q_x$, one obtains :

$$\mathcal{Q} + \dot{x}q_x = h(x, p, q, \lambda) + g(x, p, q, \lambda)\dot{x} \quad \text{with } \lambda = \mathcal{P} + \dot{x}(p_x - q). \quad (\text{A.51})$$

Differentiating each side three times with respect to $\dot{x}$, one obtains :

$$q_x = (h_4(x, p, q, \lambda) + g_4(x, p, q, \lambda)\dot{x})(p_x - q) + g(x, p, q, \lambda), \quad (\text{A.52})$$

$$0 = (h_{4,4}(x, p, q, \lambda) + g_{4,4}(x, p, q, \lambda)\dot{x})(p_x - q)^2 + 2g_4(x, p, q, \lambda)(p_x - q), \quad (\text{A.53})$$

$$0 = (h_{4,4,4}(x, p, q, \lambda) + g_{4,4,4}(x, p, q, \lambda)\dot{x})(p_x - q)^3 + 3g_{4,4}(x, p, q, \lambda)(p_x - q)^2. \quad (\text{A.54})$$

Combining (A.53) and (A.54) to cancel the first term in each equation, one obtains (see S and T in (A.13)) :

$$\left(T(x, p, q, \lambda) + S(x, p, q, \lambda)\dot{x} \right) (p_x - q)^2 = 0. \quad (\text{A.55})$$

If $T + S\dot{x}$ was identically zero as a function of $u, \dots, u^{(k-1)}, x, v, \dots, v^{(\ell-1)}$, this would imply, by Definition A.1.2 (point (ii)), that *all* solutions $(x(t), y(t), z(t))$ of (A.1) satisfy $T(x, y, z, \dot{y} - z\dot{x}) + \dot{x}S(x, y, z, \dot{y} - z\dot{x}) = 0$ identically; this would imply that S and T are identically zero functions of 4 variables, but we supposed the contrary. Hence $q = p_x$.

We first notice that this implies

$$\lambda = \mathcal{P} = Fp + rp_{u^{(k-1)}} + v^{(\ell)}p_{v^{(\ell-1)}} + v^{(\ell+1)}p_{v^{(\ell)}} \quad (\text{A.56})$$

and that (A.52) yields $p_{xx} = g(x, p, p_x, \lambda)$, or, with γ defined by (A.4),

$$\lambda = \gamma(x, p, p_x, p_{xx}). \quad (\text{A.57})$$

Since neither p nor Fp nor r depend on $v^{(\ell+1)}$, these two equations yield $p_{v^{(\ell)}} = 0$, i.e. p is a function of $u, \dots, u^{(k-1)}, x, v, \dots, v^{(\ell-1)}$ only. Then (A.56) and (A.57) imply (A.112) with $f = \gamma$. Furthermore, $r_{v^{(\ell)}} \neq 0$ because, from (A.49), $r_{v^{(\ell)}} = 0$ would imply $\varphi_{v^{(\ell)}} = 0$ and hence contradict point (iii) of Definition A.1.2. We may then apply lemma A.8.1 (see appendix). If p was a function of x only, then all solutions of (A.60) should satisfy a relation $y(t) = p(x(t))$, which is absurd from Lemma A.1.1; hence the (A.113) holds, this proves (A.16-c,d).

From (A.57), the left-hand side of (A.56) does not depend on $v^{(\ell)}$; hence, differentiating both sides twice with respect to $v^{(\ell)}$ yields $r_{v^{(\ell)}v^{(\ell)}}p_{u^{(k-1)}} = 0$; since $p_{u^{(k-1)}} \neq 0$, r must be affine with respect to $v^{(\ell)}$. Let us call σ and τ the functions of $u, \dots, u^{(k-1)}, x, v, \dots, v^{(\ell-1)}$ such that

$$r = \tau + \sigma v^{(\ell)}. \quad (\text{A.58})$$

Since $p, q = p_x, \lambda$ and $q_x = p_{xx}$ do not depend on $v^{(\ell)}$, (A.51) implies that $\mathcal{Q}$ does not depend on $v^{(\ell)}$ either; with $p_x = q$, and r given by (A.58), the expression of $\mathcal{Q}_{v^{(\ell)}}$ is $\sigma p_{xu^{(k-1)}} + p_{xv^{(\ell-1)}}$ while, from (A.56), the expression of $\mathcal{P}_{v^{(\ell)}}$. Collecting this, one gets

$$\sigma p_{xu^{(k-1)}} + p_{xv^{(\ell-1)}} = \sigma p_{xu^{(k-1)}} + p_{xv^{(\ell-1)}} = 0. \quad (\text{A.59})$$

Then, the expressions defining $\mathcal{P}$ and $\mathcal{Q}$ before (A.51) yield, with r given by (A.58), $\mathcal{P} = \lambda = Fp + \tau p_{u^{(k-1)}}$ and $\mathcal{Q} = Fp_x + \tau p_{xu^{(k-1)}}$. Both sides of (A.51) are affine with respect to $\dot{x}$, hence it yields two relations : the coefficient of $\dot{x}$ yields (A.57) and the constant term yields $\mathcal{Q} = h(x, p, p_x, \lambda)$. Collecting this, we get

$$Fp - \gamma(x, p, p_x, p_{xx}) + p_{u^{(k-1)}}\tau = 0, \quad Fp_x - \delta(x, p, p_x, p_{xx}) + p_{xu^{(k-1)}}\tau = 0,$$

with δ defined by (A.5); eliminating τ , one gets (A.16-a), while (A.16-b) is obtained by eliminating σ in (A.59).

Now, to prove by contradiction K -regularity for some $K \leq k + \ell + 1$, assume that $ED^i p = 0$ for $0 \leq i \leq k + \ell$. Then $p_x, p, \dots, D^{(k+\ell-1)}p, x, \dots, x^{(k+\ell-1)}$ are $2k + 2\ell + 1$ functions in the $2k + 2\ell$ variables $u, \dots, u^{(k-1)}, v, \dots, v^{(\ell-1)}, x, \dots, x^{(k+\ell-1)}$. At points where the Jacobian matrix has constant rank, there is at least one nontrivial relation between them. From point (ii) of Definition A.1.2, this would imply that all solutions of system (A.1) satisfy this relation, say $R(z(t), y(t), \dots, y^{(k+\ell-1)}(t), x(t), \dots, x^{(k+\ell-1)}(t)) = 0$, which is absurd from Lemma A.1.1. ■

A.5.2 The case where S and T are zero

Again, we establish that, if J is not zero, any parameterization “derives from” a solution of the system of PDEs (A.16). However, the situation is slightly more complicated : there are two distinct (non equivalent) choices for γ and δ .

If $J \neq 0$, we saw, in section A.3, that possibly after a change of coordinates, system (A.1) can be written as (A.44), then we re-write here without the tildes :

$$\dot{z} = \kappa(\dot{y} - \alpha\dot{x})(\dot{y} - \beta\dot{x}) + a\dot{x} + b\dot{y} + c, \quad \kappa \neq 0, \alpha - \beta \neq 0, \frac{\partial \alpha}{\partial z} \neq 0, \frac{\partial \beta}{\partial z} \neq 0 \quad (\text{A.60})$$

and where $\kappa, \alpha, \beta, a, b, c$ are real analytic functions of three variables. We state the theorem for this class of systems, because it is simpler to describe the two choices for γ and δ .

Lemma A.5.3 *If system (A.60) admits a parameterization (φ, ψ, χ) of order (k, ℓ) at a point, then $\varphi_{u^{(k)}}$ is a nonzero real analytic function.*

Proof : After a change of coordinates (A.46), use Lemma A.5.1. ■

Theorem A.5.4 *Let (x_0, y_0, z_0) be a point where $\kappa, \alpha - \beta, \alpha_3$ and β_3 are nonzero, and k, ℓ, L three integers. If system (A.60) has a parameterization of order (k, ℓ) at $\mathcal{X} = (x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dots, x_0^{(L)}, y_0^{(L)})$ with φ, ψ, χ defined on $U \subset \mathbb{R}^{k+\ell+2}$, then $k \geq 1, \ell \geq 1$ and, for any point $(u_0, \dots, u_0^{(k)}, v_0, \dots, v_0^{(\ell)}) \in U$ (not necessarily sent to $\mathcal{X}$ by the parameterization) such that*

$$\varphi_{u^{(k)}}(u_0, \dots, u_0^{(k)}, v_0, \dots, v_0^{(\ell)}) \neq 0,$$

there exists a neighborhood O of $(u_0, \dots, u_0^{(k-1)}, \varphi(u_0 \cdots v_0^{(\ell)}), v_0, \dots, v_0^{(\ell-1)})$ in $\mathbb{R}^{k+\ell+1}$ and a regular solution $p : O \rightarrow \mathbb{R}$ of one of the two systems $(\mathcal{E}_{k,\ell}^{\gamma^1, \delta^1})$ or $(\mathcal{E}_{k,\ell}^{\gamma^2, \delta^2})$ with γ^i, δ^i given by (A.47)-(A.48), such that p, φ, ψ, χ are related by (A.24), (A.25) and (A.26).

Remark 5 applies to this theorem in the same way as theorem A.5.2.

Proof : Like in the beginning of the proof of Theorem A.5.2, a parameterization (φ, ψ, χ) of order (k, ℓ) with $\varphi_{u^{(k)}} \neq 0$ yields an implicit form (A.50). Substituting in (A.60), one obtains an identity between two polynomials in $v^{(\ell+1)}$ and $\dot{x}$. The coefficient of $(v^{(\ell+1)})^2$ in the right-hand side must be zero and this yields that p cannot depend on $v^{(\ell)}$; the linear term in $v^{(\ell+1)}$ then implies that q does not depend on $v^{(\ell)}$ either. To go further, let us define, as in the proof of Theorem A.5.2,

$$\mathcal{P} = Fp + rp_{u^{(k-1)}} + v^{(\ell)}p_{v^{(\ell-1)}} , \quad \mathcal{Q} = Fq + rq_{u^{(k-1)}} + v^{(\ell)}q_{v^{(\ell-1)}} , \quad (\text{A.61})$$

with F is defined in (A.14). The terms of degree 0, 1 and 2 with respect to $\dot{x}$ then yield

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= \kappa(x, p, q)\mathcal{P}^2 + b(x, p, q)\mathcal{P} + c(x, p, q) \\ q_x &= \kappa(x, p, q)(2p_x - \alpha(x, p, q) - \beta(x, p, q))\mathcal{P} + a(x, p, q) + b(x, p, q)p_x \\ 0 &= (p_x - \alpha(x, p, q))(p_x - \beta(x, p, q)) \end{aligned}$$

From (A.60), the factors in the third equation cannot both be zero. Let us assume

$$p_x - \alpha(x, p, q) = 0 , \quad p_x - \beta(x, p, q) \neq 0 ; \quad (\text{A.62})$$

for the other alternative, just interchange the roles of α and β in the sequel. The first and second equations then yield

$$\mathcal{P} = \frac{q_x - a(x, p, q) - b(x, p, q)p_x}{\kappa(x, p, q)(p_x - \beta(x, p, q))} , \quad \mathcal{Q} = \kappa(x, p, q)\mathcal{P}^2 + b(x, p, q)\mathcal{P} + c(x, p, q) . \quad (\text{A.63})$$

Since $\alpha_3 \neq 0$, one can obtain from (A.62), by the inverse function theorem, an expression of q as a function of x, p and p_x and hence of q_x as a function of x, p, p_x and p_{xx} . Substituting in (A.63) yields $\mathcal{P} = f(x, p, p_x, p_{xx})$ for some smooth function f . Since $\mathcal{P}$ is given by (A.61), one may apply Lemma A.8.1. Like in the proof of Theorem A.5.2 we note that $r_{v^{(\ell)}} = 0$ would imply $\varphi_{v^{(\ell)}} = 0$ and contradict point (iii) of Definition A.1.2, and also that it would be absurd that p depend on x only because all solutions of (A.60) would satisfy a relation $y(t) = p(x(t))$ (see Lemma A.1.1); hence (A.113) holds.

From (A.63), $\mathcal{P}$ does not depend on $v^{(\ell)}$. Since $p_{u^{(k-1)}} \neq 0$, (A.61) then implies that r assumes the form (A.58) with σ and τ some functions of the $k + \ell + 1$ variables $u, \dot{u}, \dots, u^{(k-1)}, x, v, \dot{v}, \dots, v^{(\ell-1)}$ only. Since $\mathcal{P}$ and $\mathcal{Q}$ do not depend on $v^{(\ell)}$, we must have (we added a third equation is a consequence of (A.62) and the other two) :

$$\sigma p_{u^{(k-1)}} + p_{v^{(\ell-1)}} = 0 , \quad \sigma q_{u^{(k-1)}} + q_{v^{(\ell-1)}} = 0 , \quad \sigma p_{xu^{(k-1)}} + p_{xv^{(\ell-1)}} = 0 , \quad (\text{A.64})$$

and then $\mathcal{P} = Fp + \tau p_{u^{(k-1)}}$ and $\mathcal{Q} = Fq + \tau q_{u^{(k-1)}}$. Differentiating (A.62), we get

$$p_{xx} = \alpha_1 + \alpha_2 p_x + \alpha_3 q_x , \quad Fp_x + \tau p_{xu^{(k-1)}} = \alpha_2 \mathcal{P} + \alpha_3 \mathcal{Q} .$$

Substituting this in (A.63) yields, with γ and δ given by (A.47),

$$Fp + \tau p_{u^{(k-1)}} = \gamma(x, p, p_x, p_{xx}) , \quad Fp_x + \tau p_{xu^{(k-1)}} = \delta(x, p, p_x, p_{xx}) . \quad (\text{A.65})$$

Eliminating τ between these two equations and then σ between the first and last equations in (A.64) yields the two relations (A.16-a,b).

For the proof of K -regularity with $K \leq k + \ell + 1$ and $K \leq L + 1$, see the end of the proof of Theorem A.5.2 above. ■

A.6 On the solutions of system $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\gamma,\delta})$

Conjecture A.6.1 For any real analytic functions γ and δ (with $\gamma_4 \neq 0$), and any integers k, ℓ , the partial differential system $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\gamma,\delta})$ (see (A.16)) does not admit any regular solution p .

System $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\gamma,\delta})$ is written in (A.16); for regular solutions, see Definitions A.2.1 and A.2.2. We were not able to prove this for general integers k and ℓ , but only if one of them is smaller than 3 or if $k = \ell = 3$. Since u and v play a symmetric role, there is no loss of generality in assuming $k \leq \ell$ (i.e. naming u the variable that appears with the lesser maximum superscript). The statement then takes the following form.

Proposition A.6.2 If system $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\gamma,\delta})$, with $k \leq \ell$, admits a regular solution, then necessarily $k \geq 3$, $\ell \geq 4$ and the determinant

$$\begin{vmatrix} p_{u^{(k-1)}} & p_{u^{(k-2)}} & p_{u^{(k-3)}} \\ p_{xu^{(k-1)}} & p_{xu^{(k-2)}} & p_{xu^{(k-3)}} \\ p_{xxu^{(k-1)}} & p_{xxu^{(k-2)}} & p_{xxu^{(k-3)}} \end{vmatrix} \quad (\text{A.66})$$

is a nonzero real analytic function.

Proof : This is an straightforward consequence of the four following lemmas. ■

Lemma A.6.3 If p is a solution of system $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\gamma,\delta})$ and

- (i). either it satisfies a relation of the type $p_x = \alpha(x, p)$ with α a function of two variables,
- (ii). or it satisfies a relation of the type $p_{xx} = \alpha(x, p, p_x)$ with α a function of three variables,
- (iii). or it satisfies two relations of the type $p_{xxx} = \alpha(x, p, p_x, p_{xx})$ and $Fp_{xx} + \tau p_{xxu^{(k-1)}} = \psi(x, p, p_x, p_{xx})$, with ψ and α two functions of four variables,

then it is such that $ED^i p = 0$ for all $i \geq 0$ and hence it cannot be a regular solution of $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\gamma,\delta})$.

Proof : Point (1) implies point (2) because differentiating the relation $p_x = \alpha(x, p)$ with respect to x yields $p_{xx} = \alpha_x(x, p) + p_x \alpha_p(x, p)$. Likewise, point (2) implies point (3) : differentiating the relation $p_{xx} = \alpha(x, p, p_x)$ with respect to x yields $p_{xxx} = \alpha_x(x, p, p_x) + p_x \alpha_p(x, p, p_x) + p_{xx} \alpha_{p_x}(x, p, p_x)$ while differentiating it along the vector field $F + \tau \partial / \partial u^{(k-1)}$ and using (A.20) yields $Fp_{xx} + \tau p_{xxu^{(k-1)}} = \gamma(x, p, p_x, p_{xx}) \alpha_p(x, p, p_x) + \delta(x, p, p_x, p_{xx}) \alpha_{p_x}(x, p, p_x)$.

Let us prove that point (3) does imply the conclusion of the lemma. One has, from the two relations in point (3), and (A.18) and (A.20),

$$\begin{aligned} Dp &= \gamma(x, p, p_x, p_{xx}) + \dot{x} p_x, & Dp_x &= \delta(x, p, p_x, p_{xx}) + \dot{x} p_{xx}, \\ Dp_{xx} &= \psi(x, p, p_x, p_{xx}) + \dot{x} \alpha(x, p, p_x, p_{xx}). \end{aligned}$$

This implies that $ED^i p = ED^i p_x = ED^i p_{xx} = 0$ for all $i \geq 0$; indeed it is true for $i = 0$ and the three formulas above allow one to go from i to $i + 1$ ($ED^i x = Ex^{(i)} = 0$ and $ED^i \dot{x} = Ex^{(i+1)} = 0$ from the very definition of D and E). ■

Lemma A.6.4 *If p is a solution of system $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\gamma,\delta})$ and either $k = 1$ or $\begin{vmatrix} p_{u^{(k-1)}} & p_{u^{(k-2)}} \\ p_{xu^{(k-1)}} & p_{xu^{(k-2)}} \end{vmatrix} = 0$, then around each point such that $p_{u^{(k-1)}} \neq 0$, there exists a function α of two variables such that a relation $p_x = \alpha(x, p)$ holds identically on a neighborhood of that point.*

Lemma A.6.5 *Suppose that p is a solution of $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\gamma,\delta})$ with*

$$\ell \geq k \geq 2, \quad p_{u^{(k-1)}} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} p_{u^{(k-1)}} & p_{u^{(k-2)}} \\ p_{xu^{(k-1)}} & p_{xu^{(k-2)}} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (\text{A.67})$$

If either $k = 2$ or the determinant (A.66) is identically zero, then, around any point where the two quantities in (A.67) are nonzero, there exists a function α of three variables such that a relation $p_{x,x} = \alpha(x, p, p_x)$ holds identically on a neighborhood of that point.

Lemma A.6.6 *Let $k = \ell = 3$. For any solution p of $(\mathcal{E}_{3,3}^{\gamma,\delta})$, in a neighborhood of any point where the determinant (A.66) is nonzero, there exists two functions α and ψ of four variables such that $p_{xxx} = \alpha(x, p, p_x, p_{xx})$ and $Fp_{xx} + \tau p_{xxu^{(k-1)}} = \psi(x, p, p_x, p_{xx})$ identically on a neighborhood of that point.*

In order to prove these three lemmas, let us introduce some notations and preliminaries. First, with F and E and τ defined in (A.14) and (A.17), define the vector fields

$$X = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y = F + \tau \frac{\partial}{\partial u^{(k-1)}} \quad (\text{A.68})$$

$$X_1 = [X, Y], \quad X_2 = [X_1, Y], \quad E_2 = [E, Y], \quad E_3 = [E_2, Y]. \quad (\text{A.69})$$

Then (A.20) obviously implies

$$Yp = \gamma(x, p, p_x, p_{x,x}), \quad Yp_x = \delta(x, p, p_x, p_{x,x}). \quad (\text{A.70})$$

Also, since (A.20) implies $\tau_x \neq 0$ and a simple computation yields

$$X_1 = \tau_x \frac{\partial}{\partial u^{(k-1)}}, \quad X_2 = \tau_x \frac{\partial}{\partial u^{(k-2)}} + (\cdots) \frac{\partial}{\partial u^{(k-1)}}, \quad (\text{A.71})$$

these two vector fields are linearly independent. Then, since $[X, E]$ is zero, $[X, X_1]$ and $[X, E_2]$ are collinear to $\partial/\partial u^{(k-1)}$ and $[X_1, X_2]$, $[E_2, X_2]$, $[X, E_3]$ are linear combinations of $\partial/\partial u^{(k-1)}$ and

$\partial/\partial u^{(k-2)}$ (for $[X, E]$, $[X, E_2]$ and $[X, E_3]$, we have used the fact that $X\sigma = 0$, see (A.20)), one has

$$[X, X_1] = \lambda X_1, \quad [X_1, X_2] = \lambda' X_1 + \lambda'' X_2, \quad (\text{A.72})$$

$$[X, E] = 0, \quad [X, E_2] = \mu X_1, \quad [X, E_3] = \mu' X_1 + \mu'' X_2, \quad [E_2, X_2] = \nu' X_1 + \nu'' X_2. \quad (\text{A.73})$$

for some functions $\lambda, \lambda', \lambda'', \mu, \mu', \mu'', \nu', \nu''$.

Proof :Proof of Lemma A.6.4 From (A.16-c), $y = p(u, \dots, u^{(k-1)}, x, v, \dots, v^{(\ell-1)})$ defines local coordinates $u, \dots, u^{(k-2)}, y, x, v, \dots, v^{(\ell-1)}$. Composing p_x by the inverse of this change of coordinates, there is a function α of $k + \ell + 1$ variables such that $p_x = \alpha(u, \dots, u^{(k-2)}, p, x, \dots, v^{(\ell-1)})$ identically. If $k \geq 2$, differentiating with respect to both sides of this identity with respect to $u^{(k-1)}$ and $u^{(k-2)}$ and using the determinant in the lemma implies that α does not depend on its argument $u^{(k-2)}$. To sum up, p and p_x satisfy an identity

$$p_x = \alpha(u, \dots, u^{(k-3)}, p, x, v, \dots, v^{(\ell-1)}),$$

where the first list is empty if $k = 1$ or $k = 2$. Now define two integers $m \leq k - 3$ and $n \leq \ell - 2$ as the smallest such that α depends on $u, \dots, u^{(m)}, x, y, v, \dots, v^{(n)}$, with the convention that $m < 0$ if $k = 1$, $k = 2$, or α depends on none of the variables $u, \dots, u^{(k-3)}$ and $n < 0$ if α depends on none of the variables $v, \dots, v^{(\ell-2)}$. The lemma states that m and n are both negative. This is indeed true because, if one of them is non-negative, applying Y to both sides of the above identity yields,

$$Y p_x = \alpha_y Y p + \sum_{i=0}^m u^{(i+1)} \alpha_{u^{(i)}} + \sum_{i=0}^n v^{(i+1)} \alpha_{v^{(i)}}$$

where at least one of the sums is nonempty. Using (A.70), since $p_{xx} = \alpha_x + \alpha \alpha_y$, one can replace $Y p$ with $\gamma(x, y, \alpha, \alpha_x + \alpha \alpha_y)$ and $Y p_x$ with $\delta(x, y, \alpha, \alpha_x + \alpha \alpha_y)$. Then, all terms of the above equation depend on $u, \dots, u^{(m)}, x, y, v, \dots, v^{(n)}$ only except the last term of (at least) one of the sums, that depends either on $u^{(m+1)}$ or $v^{(n+1)}$ so that the identity cannot hold identically (by definition of these integers, $\alpha_{u^{(m)}} \neq 0$ (resp. $\alpha_{v^{(n)}} \neq 0$) if $m \geq 0$ (resp. $n \geq 0$)). ■

Proof :Proof of Lemma A.6.5 From (A.67), one local coordinates $(u, \dots, u^{(k-3)}, x, y, z, v, \dots, v^{(\ell-1)})$ by

$$y = p(u, \dots, u^{(k-1)}, x, v, \dots, v^{(\ell-1)}), \quad z = p_x(u, \dots, u^{(k-1)}, x, v, \dots, v^{(\ell-1)}). \quad (\text{A.74})$$

In these coordinates, X and Y , defined in (A.68) have the following expressions, with χ and α some functions to be studied further :

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + z \frac{\partial}{\partial y} + \alpha \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{A.75})$$

$$Y = \gamma \frac{\partial}{\partial y} + \delta \frac{\partial}{\partial z} + \chi \frac{\partial}{\partial u^{(k-3)}} + \sum_{i=0}^{k-4} u^{(i+1)} \frac{\partial}{\partial u^{(i)}} + \sum_{i=0}^{\ell-1} v^{(i+1)} \frac{\partial}{\partial v^{(i)}} \quad (\text{A.76})$$

where, in the expression of Y , the third term is zero if $k = 2$, the fourth term $(\sum_{i=0}^{k-4} \dots)$ is zero if $k = 2$ or $k = 3$, and the notations γ and δ are slightly abusive : γ stands for the function

$(u, \dots, u^{(k-3)}, x, y, z, v, \dots, v^{(\ell-1)}) \mapsto \gamma(x, y, z, \alpha(u, \dots, u^{(k-3)}, x, y, z, v, \dots, v^{(\ell-1)}))$, and the same for δ . With the same abuse of notations, (A.16-e) reads

$$X\gamma - \delta \neq 0. \quad (\text{A.77})$$

Since the inverse of the change of coordinates (A.74) is given by

$$u^{(k-2)} = \chi(u, \dots, u^{(k-3)}, x, y, z, v, \dots, v^{(\ell-1)}), \quad u^{(k-1)} = Y\chi(u, \dots, u^{(k-3)}, x, y, z, v, \dots, v^{(\ell-1)}),$$

and, in the original coordinates, $(\sigma \frac{\partial}{\partial u^{(k-1)}} + \frac{\partial}{\partial v^{(\ell-1)}})u^{(k-2)} = \frac{\partial}{\partial x}u^{(k-2)} = \frac{\partial}{\partial u^{(k-1)}}u^{(k-2)} = 0$, see (A.71), one has

$$E\chi = X\chi = X_1\chi = 0. \quad (\text{A.78})$$

Then, from (A.75)-(A.76),

$$X_1 = (X\gamma - \delta) \frac{\partial}{\partial y} + (X\delta - Y\alpha) \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{A.79})$$

$$[X, X_1] = (X^2\gamma - 2X\delta - Y\alpha) \frac{\partial}{\partial y} + (X^2\delta - XY\alpha - X_1\alpha) \frac{\partial}{\partial z}. \quad (\text{A.80})$$

From these expressions and (A.72), one has

$$\begin{vmatrix} X\gamma - \delta & X^2\gamma - 2X\delta + Y\alpha \\ X\delta - Y\alpha & X^2\delta - XY\alpha - X_1\alpha \end{vmatrix} = 0. \quad (\text{A.81})$$

By definition of α , $Xz = \alpha$. in the original coordinates, this translates into the identity $p_{xx} = \alpha(u, \dots, u^{(k-3)}, x, p, p_x, v, \dots, v^{(\ell-1)})$. If $k \geq 3$, differentiating both sides with respect to $u^{(k-1)}$, $u^{(k-2)}$ and $u^{(k-3)}$, we obtain that the determinant (A.66) is zero is and only if α does not depend on its argument $u^{(k-3)}$. To sum up, under the assumptions of the lemma,

$$\alpha \text{ depends on } u, \dots, u^{(k-4)}, x, y, z, v, \dots, v^{(\ell-1)} \text{ only} \quad (\text{A.82})$$

with the convention that the first list is empty if $k = 2$ or $k = 3$.

Define two integers m, n as the smallest such that α depends on $u, \dots, u^{(m)}, x, y, z, v, \dots, v^{(n)}$, with the convention that $m < 0$ if $m = 2$ or α depends on none of the variables $u, \dots, u^{(k-3)}$ and $n < 0$ if α depends on none of the variables $v, \dots, v^{(\ell-1)}$. We have

$$m \geq 0 \Rightarrow \alpha_{u^{(m)}} \neq 0, \quad n \geq 0 \Rightarrow \alpha_{v^{(n)}} \neq 0. \quad (\text{A.83})$$

From (A.82) m is no larger than $k - 4$; hence χ does not appear in the expression of $Y\alpha$:

$$Y\alpha = \gamma\alpha_y + \delta\alpha_z + \sum_{i=0}^m u^{(i+1)}\alpha_{u^{(i)}} + \sum_{i=0}^n v^{(i+1)}\alpha_{v^{(i)}} \quad (\text{A.84})$$

where the first (second) sum is empty if m (n) is negative. In (A.81), all the terms depend only on $u, \dots, u^{(m)}, x, y, z, v, \dots, v^{(n)}$ except $Y\alpha$, $XY\alpha$ and $X_1\alpha$ that may depend on $u^{(m+1)}$ if $m \geq 0$ or on

$v^{(n+1)}$ if $n \geq 0$. According to the above formula, these three expressions are, if they depend on these variables, affine functions of $u^{(m+1)}$ and $v^{(n+1)}$ with coefficients depending on $u, \dots, u^{(m)}, x, y, z, v, \dots, v^{(n)}$ only, and the determinant in (A.81) is then quadratic with respect to $u^{(m+1)}$ and $v^{(n+1)}$; the term of degree two comes from $(Y\alpha)^2$; it is :

$$\left(\alpha_{u^{(m)}} u^{(m+1)} + \alpha_{v^{(n)}} v^{(n+1)} \right)^2.$$

Then (A.81) implies that $\alpha_{u^{(m)}}$ and $\alpha_{v^{(n)}}$ are identically zero. From (A.83), this implies that m and n are negative, and by definition of these integers, this implies that α depends on (x, y, z) only, yielding, in the original coordinates, an identity $p_{xx} = \alpha(x, p, p_x)$. ■

Before proving Lemma A.6.6, we need to extract more information from the previous proof :

Lemma A.6.7 Assume, as in Lemma A.6.5, that p is a solution of $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\gamma,\delta})$ satisfying (A.67), but assume also that $\ell \geq k \geq 3$ and the determinant (A.66) is nonzero. Then $[X, E_2] = [X, E_3] = 0$.

Proof : Starting as in the proof of Lemma A.6.5, one does not obtain (A.82) but, on the contrary, since $k \geq 3$ and the determinant (A.66) is nonzero, α is a function of $u, \dots, u^{(k-3)}, x, y, z, v, \dots, v^{(\ell-1)}$ such that

$$\alpha_{u^{(k-3)}} \neq 0. \quad (\text{A.85})$$

Since $Ep = Ep_x = 0$, one has, in these coordinates, $E = \partial/\partial v^{(\ell-1)}$, and the first equations in (A.73) and (A.78) imply $\alpha_{v^{(\ell-1)}} = \chi_{v^{(\ell-1)}} = 0$. (A.69) and (A.76) then yield $E_2 = \partial/\partial v^{(\ell-2)}$, and

$$[X, E_2] = -\alpha_{v^{(\ell-2)}} \frac{\partial}{\partial z}$$

which implies, from the second relation in (A.73), the expression (A.79) of X_1 and the inequation (A.77), that $\alpha_{v^{(\ell-2)}}$, and μ , and the bracket $[X, E_2]$ are zero. This proves the first part of the lemma; let us turn to $[X, E_3]$.

Computing E_3 from (A.69) and (A.76) yields, since E_2 and X commute, and $X\chi = 0$,

$$E_3 = \chi_{v^{(\ell-2)}} \frac{\partial}{\partial u^{(k-3)}} + \frac{\partial}{\partial v^{(\ell-3)}}, \quad [X, E_3] = -(E_3\alpha) \frac{\partial}{\partial z}. \quad (\text{A.86})$$

Let us examine equation (A.81). The only terms that depend on $v^{(\ell-2)}$ are $Y\alpha$, $XY\alpha$ and $X_1\alpha$. Since $X\chi = 0$, we have

$$\begin{aligned} Y\alpha &= \chi \alpha_{u^{(k-3)}} + v^{(\ell-2)} \alpha_{v^{(\ell-3)}} + \mathcal{O}, \\ XY\alpha &= \chi X\alpha_{u^{(k-3)}} + v^{(\ell-2)} X\alpha_{v^{(\ell-3)}} + \mathcal{O}, \\ X_1\alpha &= -\alpha_z \left(\chi \alpha_{u^{(k-3)}} + v^{(\ell-2)} \alpha_{v^{(\ell-3)}} \right) + \mathcal{O}, \end{aligned}$$

where $\mathcal{O}$ denotes any function that depends on $u, \dots, u^{(k-3)}, x, y, z, v, \dots, v^{(\ell-3)}$ only. Then, with $\zeta = \chi \alpha_{u^{(k-3)}} + v^{(\ell-2)} \alpha_{v^{(\ell-3)}}$, one has

$$X\zeta = \frac{X\alpha_{u^{(k-3)}}}{\alpha_{u^{(k-3)}}} \zeta + \mathbf{b} v^{(\ell-2)} \quad \text{with} \quad \mathbf{b} = X\alpha_{v^{(\ell-3)}} - \alpha_{v^{(\ell-3)}} \frac{X\alpha_{u^{(k-3)}}}{\alpha_{u^{(k-3)}}}, \quad (\text{A.87})$$

and equation (A.81) reads

$$\zeta^2 + \mathcal{O} \zeta - (X\gamma - \delta) \mathbf{b} v^{(\ell-2)} + \mathcal{O} = 0. \quad (\text{A.88})$$

Differentiating with respect to X and using (A.87) yields

$$2 \frac{X\alpha_{u(k-3)}}{\alpha_{u(k-3)}} \zeta^2 + \left(2\mathbf{b} v^{(\ell-2)} + \mathcal{O} \right) \zeta + \mathcal{O} v^{(\ell-2)} + \mathcal{O} = 0.$$

Then, eliminating ζ between these two polynomials yields

$$\begin{vmatrix} 1 & \mathcal{O} & -(X\gamma - \delta)\mathbf{b} v^{(\ell-2)} + \mathcal{O} & 0 \\ 0 & 1 & \mathcal{O} & -(X\gamma - \delta)\mathbf{b} v^{(\ell-2)} + \mathcal{O} \\ 2 \frac{X\alpha_{u(k-3)}}{\alpha_{u(k-3)}} & 2\mathbf{b} v^{(\ell-2)} + \mathcal{O} & \mathcal{O} v^{(\ell-2)} + \mathcal{O} & 0 \\ 0 & 2 \frac{X\alpha_{u(k-3)}}{\alpha_{u(k-3)}} & 2\mathbf{b} v^{(\ell-2)} + \mathcal{O} & \mathcal{O} v^{(\ell-2)} + \mathcal{O} \end{vmatrix} = 0$$

This resultant is a polynomial of degree at most three with respect to $v^{(\ell-2)}$; it must be identically zero and its degree three coefficient is $-4\mathbf{b}^3(X\gamma - \delta)$; hence $\mathbf{b} = 0$. This implies, from (A.88), that ζ does not depend on $v^{(\ell-2)}$; but, considering (A.86), one has $\zeta_{v^{(\ell-2)}} = \chi_{v^{(\ell-2)}} \alpha_{u(k-3)} + \alpha_{v^{(\ell-3)}} = E_3 \alpha$. Hence $E_3 \alpha = 0$, and this implies $[X, E_3] = 0$. ■

Proof : Proof of Lemma A.6.6 The independent variables in $(\mathcal{E}_{3,3}^{\gamma,\delta})$ are $u, \dot{u}, \ddot{u}, x, v, \dot{v}, \ddot{v}$. Since the determinant (A.66) is nonzero, one defines local coordinates $(x, y, z, w, v, \dot{v}, \ddot{v})$ by

$$y = p(u, \dot{u}, \ddot{u}, x, v, \dot{v}, \ddot{v}), \quad z = p_x(u, \dot{u}, \ddot{u}, x, v, \dot{v}, \ddot{v}), \quad w = p_{xx}(u, \dot{u}, \ddot{u}, x, v, \dot{v}, \ddot{v}). \quad (\text{A.89})$$

In these coordinates, X and Y , defined in (A.68), have the following expressions, with ψ and α some functions to be studied further :

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + z \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} + \alpha \frac{\partial}{\partial w}, \quad (\text{A.90})$$

$$Y = \gamma \frac{\partial}{\partial y} + \delta \frac{\partial}{\partial z} + \psi \frac{\partial}{\partial w} + \dot{v} \frac{\partial}{\partial v} + \ddot{v} \frac{\partial}{\partial \dot{v}}. \quad (\text{A.91})$$

Then, using, for short, the following notation Γ :

$$\Gamma = X\gamma - \delta \neq 0, \quad (\text{A.92})$$

one has

$$X_1 = \Gamma \frac{\partial}{\partial y} + (X\delta - \psi) \frac{\partial}{\partial z} + (X\psi - Y\alpha) \frac{\partial}{\partial w}, \quad (\text{A.93})$$

$$[X, X_1] = (X\Gamma - X\delta + \psi) \frac{\partial}{\partial y} + (X^2\delta - 2X\psi + Y\alpha) \frac{\partial}{\partial z} + (X^2\psi - XY\alpha - X_1\alpha) \frac{\partial}{\partial w} \quad (\text{A.94})$$

Also,

$$E = \frac{\partial}{\partial \ddot{v}}, \quad E_2 = [E_1, Y] = \psi \ddot{v} \frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial}{\partial \dot{v}}, \quad [X, E_2] = \psi \ddot{v} \frac{\partial}{\partial z} + (X\psi_{u(k-1)} - E_2\alpha) \frac{\partial}{\partial w}$$

but, from Lemma A.6.7, one has $[X, E_2] = 0$, hence $\psi_{\ddot{v}} = 0$, $E_2 = \partial/\partial \dot{v}$ and $\alpha_{\dot{v}} = 0$. Then

$$E_3 = [\frac{\partial}{\partial \dot{v}}, Y] = \psi_{\dot{v}} \frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial}{\partial v}, \quad [X, E_3] = \psi_{\dot{v}} \frac{\partial}{\partial z} + (X\psi_{\dot{v}} - E_3\alpha) \frac{\partial}{\partial w},$$

but, from Lemma A.6.7, one has $[X, E_3] = 0$, hence $\psi_{\dot{v}} = 0$, $E_3 = \partial/\partial v$ and $\alpha_v = 0$. To sum up,

$$E = \frac{\partial}{\partial \ddot{v}}, \quad E_2 = \frac{\partial}{\partial \dot{v}}, \quad E_3 = \frac{\partial}{\partial v}, \quad (\text{A.95})$$

α depends at most on (x, y, z, w) only and ψ on (x, y, z, w, v) .

Notation : until the end of this proof, $\mathcal{O}$ stands for *any* function of x, y, z, w only.

For instance, $\alpha = \mathcal{O}$.

The functions γ and δ also depend on x, y, z, w (they were functions of four variables to begin with), and, since the vector field X involves only these variables, $\Gamma, X\Gamma, X\delta, X^2\delta$ as well. From (A.72), (A.93)

and (A.94), one has $\begin{vmatrix} \Gamma & X\delta - \psi \\ X\Gamma - X\delta + \psi & X^2\delta - 2X\psi + Y\alpha \end{vmatrix} = 0$. Hence

$$X\psi = \frac{1}{2\Gamma}\psi^2 + \mathcal{O}\psi + \mathcal{O} \quad (\text{A.96})$$

Then (A.93) yields

$$X_1 = X_1^0 + \psi X_1^1 + \psi^2 X_1^2 \quad (\text{A.97})$$

where X_1^0, X_1^1 and X_1^2 are vector fields in the variables x, y, z, w only :

$$X_1^0 = \Gamma \frac{\partial}{\partial y} + \mathcal{O} \frac{\partial}{\partial z} + \mathcal{O} \frac{\partial}{\partial w}, \quad X_1^1 = -\frac{\partial}{\partial z} + \mathcal{O} \frac{\partial}{\partial w}, \quad X_1^2 = \frac{1}{2\Gamma} \frac{\partial}{\partial w}. \quad (\text{A.98})$$

Now define :

$$U = -X_1^1 - \frac{\psi}{\Gamma} \frac{\partial}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial z} + \left(\mathcal{O} - \frac{\psi}{\Gamma}\right) \frac{\partial}{\partial w}, \quad (\text{A.99})$$

$$V = X_1^0 - \psi^2 X_1^2 = \Gamma \frac{\partial}{\partial y} + \mathcal{O} \frac{\partial}{\partial z} + \left(\mathcal{O} - \frac{\psi^2}{2\Gamma}\right) \frac{\partial}{\partial w}, \quad (\text{A.100})$$

so that

$$X_1 = V - \psi U \quad (\text{A.101})$$

and, from (A.91) and (A.97) one deduces the following expression of $X_2 = [X_1, Y]$:

$$X_2 = (Y\psi)U + (X_1\psi) \frac{\partial}{\partial w} + \psi^3 \frac{\Gamma_w}{2\Gamma^2} \frac{\partial}{\partial w} + \psi^2 \left(\frac{\gamma_w}{2\Gamma} \frac{\partial}{\partial y} + \mathcal{O} \frac{\partial}{\partial z} + \mathcal{O} \frac{\partial}{\partial w} \right) + \psi X_2^1 + X_2^0 \quad (\text{A.102})$$

where X_2^1 and X_2^0 are two vector fields in the variables x, y, z, w only.

From this formula and (A.95), one has $[E_2, X_2] = (Y\psi)_{\dot{v}} U = \psi_v U$; hence, from the last relation in (A.73), either ψ_v is identically zero or U is a linear combination of X_1 and X_2 . Let us prove that, anyway, if U is a linear combination of X_1 and X_2 , then ψ does not depend on v . From (A.99), (A.100) and (A.101), U and V are linearly independent and X_1 is a linear combination of U and V ; hence, if we

assume, as we do now until the end of the proof, that U is a linear combination of X_1 and X_2 , then U, V is another basis for X_1, X_2 . Then, X_2 and (from the second relation in (A.72)) $[U, V]$ must be linear combinations of U and V . From (A.99) and (A.100),

$$[U, V] = \frac{X_1 \psi}{\Gamma} \frac{\partial}{\partial w} - \psi^2 \mathcal{O} \frac{\partial}{\partial w} + \psi W^1 + W^0$$

where W^1 and W^0 are two vector fields in the variables x, y, z, w only, and, finally, with Z^1 and Z^0 two other vector fields in the variables x, y, z, w only, one has, from (A.102)

$$X_2 - (Y\psi)U - \Gamma[U, V] = \psi^3 \frac{\Gamma_w}{2\Gamma^2} \frac{\partial}{\partial w} + \psi^2 \left(\frac{\gamma_w}{2\Gamma} \frac{\partial}{\partial y} + \mathcal{O} \frac{\partial}{\partial z} + \mathcal{O} \frac{\partial}{\partial w} \right) + \psi Z^1 + Z^0.$$

This vector field, that does not involve any derivatives of ψ , must also be a linear combination of U and V . Now, computing the determinant with respect to $\partial/\partial y, \partial/\partial z, \partial/\partial w$, one has, from (A.99), (A.100) and the above expression of $X_2 - (Y\psi)U - \Gamma[U, V]$,

$$\det(U, V, X_2 - (Y\psi)U - \Gamma[U, V]) = \frac{\gamma_w}{\Gamma^3} \psi^4 + \mathcal{O} \psi^3 + \mathcal{O} \psi^2 + \mathcal{O} \psi + \mathcal{O} = 0.$$

This polynomial of degree 4 with respect to ψ is nontrivial because, from (A.15), $\gamma_w \neq 0$; its coefficients depend on x, y, z, w only, hence ψ cannot depend on v . We have proved that both α and ψ depend on x, y, z, w only; this yields the identities in the lemma. ■

A.7 On flat outputs and differential flatness

Definition A.7.1 Let J be a non-negative integer. A pair $A = (a, b)$ of real analytic functions defined on a connected open subset $\widehat{U}$ of $\widehat{\Omega} \times \mathbb{R}^{2J-2} \subset \mathbb{R}^{2J+3}$ is a flat output of order J for system (A.1) at point $\mathcal{X} = (x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dots, x_0^{(L)}, y_0^{(L)})$, with $L \geq J$ if and only if there exists a Monge parameterization of order (k, ℓ) for some k and ℓ at this point $\mathcal{X}$ and, for U and V possibly smaller than these given in Definition A.1.2, one has the following property : a germ $(x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot), u(\cdot), v(\cdot)) \in \mathcal{V} \times \mathcal{U}$ satisfies (A.103) if and only if it satisfies (A.104) :

$$\left. \begin{aligned} \varphi(u(t), \dot{u}(t), \dots, u^{(k)}(t), v(t), \dot{v}(t), \dots, v^{(\ell)}(t)) &= x(t) \\ \psi(u(t), \dot{u}(t), \dots, u^{(k)}(t), v(t), \dot{v}(t), \dots, v^{(\ell)}(t)) &= y(t) \\ \chi(u(t), \dot{u}(t), \dots, u^{(k)}(t), v(t), \dot{v}(t), \dots, v^{(\ell)}(t)) &= z(t) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.103})$$

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= a^1(x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \dots, x^{(J)}(t), y^{(J)}(t)) \\ v(t) &= a^2(x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \dots, x^{(J)}(t), y^{(J)}(t)) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.104})$$

System (A.1) is called flat if and only if it admits a flat output of order J for some $J \in \mathbb{N}$. We call a Monge parameterization endogenous⁴ if and only if there exists a flat output associated to this parameterization as above.

⁴ This terminology (endogenous vs. exogenous) is borrowed from the authors of [11, 42]; it usually qualifies feedbacks rather than parameterization, but the notion is exactly the same.

The focus in this paper is on existence of a Monge parameterization, but flatness is just slightly more restrictive : it means existence of a Monge parameterization of a special type, that one could call, following th

In order to compare the results in the present paper with the results from [50] on flatness, or dynamic linearizability, of (A.6), we shall need the following result, where the functions γ and δ in (A.6) are supposed to be related to the functions g and h in (A.1) according to (A.4) and (A.5).

Proposition A.7.2 *If system (A.6) is “ (x, u) -dynamic linearizable” in the sense of [50], then (A.1) admits a parameterization of order (k, ℓ) with $k \leq 3$ and $\ell \leq 3$.*

Proof : If system (A.6) is “ (x, u) -dynamic linearizable” in the sense of [50], then it admits a flat output whose components are functions of $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4, w^1, w^2$. In the coordinates of (A.1), this means existence of a flat output depending on $x, y, z, \lambda, \dot{x}, \dot{\lambda}$, i.e. a flat output of order 2, but of a special kind : $A(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \ddot{x}, \ddot{y}) = \mathbf{a}(x, y, z, \lambda, \dot{x}, \dot{\lambda})$. Consider the map

$$(x, y, z, \lambda, \dot{x}, \dot{\lambda}, \dots, x^{(4)}, \lambda^{(4)}) \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{a}(x, y, z, \lambda, \dot{x}, \dot{\lambda}) \\ \dot{\mathbf{a}}(x, y, z, \lambda, \dot{x}, \dot{\lambda}, \ddot{x}, \ddot{\lambda}) \\ \ddot{\mathbf{a}}(x, y, z, \lambda, \dot{x}, \dot{\lambda}, \dots, x^{(3)}, \lambda^{(3)}) \\ \mathbf{a}^{(3)}(x, y, z, \lambda, \dot{x}, \dot{\lambda}, \dots, x^{(4)}, \lambda^{(4)}) \end{pmatrix}$$

Its Jacobian is 8×12 , and has rank 8, but the 8×8 sub-matrix corresponding to derivatives with respect to $\dot{x}, \dot{\lambda}, \dots, x^{(4)}, \lambda^{(4)}$ has rank 4 only. Hence x, y, z , and λ can be expressed as functions of the components of $\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ddot{\mathbf{a}}, \mathbf{a}^{(3)}$, yielding a Monge parameterization of order at most $(3, 3)$. ■

A.8 Proofs and lemma

This section is devoted to the following proof, and to stating and proving one lemma.

Proof :Proof of Lemma A.2.3 For this proof only, the notation $\mathcal{F}_{i,j}$ ($0 \leq i \leq k, 0 \leq j \leq \ell$) stands either for the following family of $i + j$ vectors in $\mathbb{R}^{K+2}$ or for the corresponding $(K + 2) \times (i + j)$ matrix :

$$\mathcal{F}_{i,j} = \left(\frac{\partial \pi}{\partial u^{(k-i)}}, \dots, \frac{\partial \pi}{\partial u^{(k-1)}}, \frac{\partial \pi}{\partial v^{(\ell-j)}}, \dots, \frac{\partial \pi}{\partial v^{(\ell-1)}} \right) \quad (\text{A.105})$$

with the convention that if i or j is zero the corresponding list is empty ; $\mathcal{F}_{i,j}$ depends on $u, \dots, u^{(k-1)}, v, \dots, v^{(\ell-1)}, x, \dots, x^{(K)}$. Let W_s ($1 \leq s \leq K + 2$) be the set of pairs (i, j) such that $i + j = s$ and the rank of $\mathcal{F}_{i,j}$ is s at least at one point in $O \times \mathbb{R}^K$, i.e. one of the $s \times s$ minors of $\mathcal{F}_{i,j}$ is a nonzero real analytic function on $O \times \mathbb{R}^K$. The lemma states that W_{K+2} is nonempty ; in order to prove it by contradiction, suppose that $W_{K+2} = \emptyset$ and let s be the smallest positive integer such that $W_s = \emptyset$.

From (A.16-c), W_1 contains $(1, 0)$, hence $2 \leq s \leq K + 2 < k + \ell + 1$. Take (i', j') in W_{s-1} ; $\mathcal{F}_{i',j'}$ has rank $i' + j'$ (i.e. is made of $i' + j'$ linearly independent vectors) on an open dense set $A \subset O \times \mathbb{R}^K$. Let the $i_1 \leq k$ and $j_1 \leq \ell$ be the largest such that $\mathcal{F}_{i_1,j_1}$ and $\mathcal{F}_{i',j_1}$ have rank $s - 1$ on A . On the one

hand, since $i' + j' = s - 1 < k + \ell$, one has either $i' < k$ or $j' < \ell$. On the other hand since W_s is empty, it contains neither $(i' + 1, j')$ nor $(i', j' + 1)$; hence the rank of $\mathcal{F}_{i'+1, j'}$ is less than $i' + j' + 1$ if $i' < k$, and so is the rank of $\mathcal{F}_{i', j'+1}$ if $j' \leq \ell$. To sum up,

$$i' < k \Rightarrow i_1 \geq i' + 1, \quad j' < \ell \Rightarrow j_1 \geq j' + 1.$$

Now assume that $(i_1, j_1) \neq (k, \ell)$ (the other case is treated later); possibly exchanging u and v , assume $i_1 < k$; all the vectors $\frac{\partial \pi}{\partial u^{(k-i_1)}}, \dots, \frac{\partial \pi}{\partial u^{(k-i'+1)}}, \frac{\partial \pi}{\partial u^{(\ell-j_1)}}, \dots, \frac{\partial \pi}{\partial u^{(\ell-j'+1)}}$ are then linear combinations of the vectors in $\mathcal{F}_{i', j'}$, while $\frac{\partial \pi}{\partial u^{(k-i_1-1)}}$ is not :

$$\text{Rank } \mathcal{F}_{i', j'} = i' + j', \quad (\text{A.106})$$

$$\text{Rank } \mathcal{F}_{i_1, j_1} = i' + j', \quad (\text{A.107})$$

$$\text{Rank} \left(\frac{\partial \pi}{\partial u^{(k-i_1-1)}}, \mathcal{F}_{i', j'} \right) = i' + j' + 1 \quad (\text{A.108})$$

on an open dense subset of $O \times \mathbb{R}^K$, that we still call A although it could be smaller. In a neighborhood of any point in this set, one can, from (A.108), apply the inverse function theorem and obtain, for an open $\Omega \subset \mathbb{R}^{k+\ell+K+1}$, a map $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^{i'+j'+1}$ that expresses $u^{(k-i')}, \dots, u^{(k-1)}, v^{(\ell-j')}, \dots, v^{(\ell-1)}$ and $u^{(k-i_1-1)}$ as functions of $u, \dots, u^{(k-i_1-2)}, u^{(k-i_1)}, \dots, u^{(k-i'-1)}, v, \dots, v^{(\ell-j'-1)}, x, \dots, x^{(K)}$ and $i' + j' + 1$ functions chosen among $p_x, p, Dp, \dots, D^K p$ ($i' + j' + 1$ columns defining an invertible minor in $(\partial \pi / \partial u^{(k-i_1-1)}, \mathcal{F}_{i', j'})$). Focusing on $u^{(k-i_1-1)}$, one has

$$u^{(k-i_1-1)} = B \left(u, \dots, u^{(k-i_1-2)}, u^{(k-i_1)}, \dots, u^{(k-i'-1)}, \right. \\ \left. v, \dots, v^{(\ell-j'-1)}, x, \dots, x^{(K)}, p_x, p, \dots, D^K p \right) \quad (\text{A.109})$$

where B is some smooth function of $k + \ell + 2K + 2 - i' - j'$ variables and we have written all the functions $p_x, p, Dp, \dots, D^{K-1}p$ although B really depends only on $i' + j' + 1$ of them.

Differentiating (A.109) with respect to $u^{(k-i')}, \dots, u^{(k-1)}, v^{(\ell-j')}, \dots, v^{(\ell-1)}$, one has, with obvious matrix notation, $\left(\frac{\partial B}{\partial p_x} \frac{\partial B}{\partial p} \dots \frac{\partial B}{\partial D^{K-1}p} \right) \mathcal{F}_{i', j'} = 0$, where the right-hand side is a line-vector of dimension $i' + j'$; from (A.106) and (A.107), this implies that one also has

$$\left(\frac{\partial B}{\partial p_x} \frac{\partial B}{\partial p} \dots \frac{\partial B}{\partial D^{K-1}p} \right) \mathcal{F}_{i_1, j_1} = 0, \quad (\text{A.110})$$

where the right-hand side is a now a bigger line-vector of dimension $i_1 + j_1$. Differentiating (A.109) with respect to $u^{(k-i_1)}, \dots, u^{(k-i'-1)}, v^{(\ell-j_1)}, \dots, v^{(\ell-j'-1)}$ and using (A.110) yields that B does not depend on its arguments $u^{(k-i_1)}, \dots, u^{(k-i'-1)}$ and $v^{(\ell-j_1)}, \dots, v^{(\ell-j'-1)}$. B cannot depend on $D^K p$ either because $ED^K p \neq 0$ and all the other functions vanish on E , then it cannot depend on $x^{(K)}$ either because $x^{(K)}$ appears in no other argument, and (A.109) becomes

$$u^{(k-i_1-1)} = B \left(u, \dots, u^{(k-i_1-2)}, v, \dots, v^{(\ell-j_1-1)}, x, \dots, x^{(K-1)}, p_x, p, \dots, D^{K-1}p \right).$$

Applying D , using (A.21) and substituting $u^{(k-i_1-1)}$ from above, one gets, from some smooth C ,

$$u^{(k-i_1)} = C \left(\underbrace{u, \dots, u^{(k-i_1-2)}}_{\text{empty if } i_1=k-2}, \underbrace{v, \dots, v^{(\ell-j_1)}}_{\text{empty if } j_1=\ell}, x, \dots, x^{(K)}, p_x, p, \dots, D^K p \right). \quad (\text{A.111})$$

Differentiating with respect to $u^{(k-i')}, \dots, u^{(k-1)}, v^{(\ell-j')}, \dots, v^{(\ell-1)}$ yields

$\left(\frac{\partial C}{\partial p_x} \frac{\partial C}{\partial p} \dots \frac{\partial C}{\partial D^{K-1}p} \right) \mathcal{F}_{i',j'} = 0$, the right-hand side being a line-vector of dimension $i' + j'$. From (A.106) and (A.107), $\partial\pi/\partial u^{(k-i_1-1)}$ is a linear combination of the columns of $\mathcal{F}_{i',j'}$, hence one also has

$$\left(\frac{\partial C}{\partial p_x} \frac{\partial C}{\partial p} \dots \frac{\partial C}{\partial D^{K-1}p} \right) \frac{\partial\pi}{\partial u^{(k-i_1-1)}} = 0;$$

this means that the derivative of the right-hand side of (A.111) with respect to $u^{(k-i_1-1)}$ is zero, but the derivative of the left-hand side is 1; hence $(i_1, j_1) \neq (k, \ell)$ is absurd.

Let us now examine the case where $(i_1, j_1) = (k, \ell)$. Then the rank of $\mathcal{F}_{k,\ell}$ is strictly smaller than $K + 2$ at all points of $O \times \mathbb{R}^K$ (and equal to $s - 1 < K + 2$ on some open dense subset of it). Around a point in this set, there is at least one function R (in fact $K + 2 - s$ independent such functions) such that a non-trivial relation $R(p_x, p, \dots, D^K p, x, \dots, x^{(K)}) = 0$ holds and the partial derivative of R with respect to at least one of its $K + 2$ first arguments is nonzero. Applying E to this relation, since p is K -regular, and, from (A.21), Dp_x is a function of $p_x, p, Dp, x, \dot{x}$, we get that R does not depend on $D^K p$, and hence does not depend on $x^{(K)}$ either... applying ED, ED^2 and so on, we get finally a relation $R(p_x, p, x) = 0$ with $(R_{p_x}, R_p) \neq (0, 0)$. Differentiating with respect to $u^{(k-1)}$, one obtains $R_{p_x} p_{xu^{(k-1)}} + R_p p_{u^{(k-1)}} = 0$; hence, from the first relation in (A.16-c), $R_{p_x} \neq 0$, and the relation $R(p_x, p, x) = 0$ implies, in a neighborhood of almost any point, $p_x = f(p, x)$ for some smooth function f . From Lemma A.6.3, this would contradict the fact that the solution p is K -regular. ■

Lemma A.8.1 *Let p be a smooth function of $u, \dots, u^{(k-1)}, x, v, \dots, v^{(\ell-1)}$, r a smooth function of $u, \dots, u^{(k-1)}, x, v, \dots, v^{(\ell)}$, with $r_{v^{(\ell)}} \neq 0$, and f a smooth function of four variables such that*

$$\sum_{i=0}^{k-2} u^{(i+1)} p_{u^{(i)}} + r p_{u^{(k-1)}} + \sum_{i=0}^{\ell-1} v^{(i+1)} p_{v^{(i)}} = f(x, p, p_x, p_{xx}) \quad (\text{A.112})$$

where, by convention, $r p_{u^{(k-1)}}$ is zero if $k = 0$ and the first (resp. last) sum is zero if $k \leq 1$ (resp. $\ell = 0$). Then either p depends on x only or

$$k \geq 1, \quad \ell \geq 1, \quad p_{u^{(k-1)}} \neq 0, \quad p_{v^{(\ell-1)}} \neq 0. \quad (\text{A.113})$$

Proof: Let $m \leq k-1$ and $n \leq \ell-1$ be the smallest integers such that p depends on $u, \dots, u^{(m)}, x, v, \dots, v^{(n)}$; if p depends on none of the variables $u, \dots, u^{(k-1)}$ (or $v, \dots, v^{(\ell-1)}$), take $m < 0$ (or $n < 0$). Then $p_{u^{(m)}} \neq 0$ if $m \geq 0$ and $p_{v^{(n)}} \neq 0$ if $n \geq 0$.

The lemma states that either m and n are both negative or $k \geq 1, \ell \geq 1$ and $(m, n) = (k-1, \ell-1)$.

This is indeed true :

- if $m = k-1$ and $k \geq 1$ then $n = \ell-1$ and $\ell \geq 1$ because if not, differentiating both sides in (A.112) with respect to $v^{(\ell)}$ would yield $r_{v^{(\ell)}} p_{u^{(k-1)}} = 0$, but the lemma assumes that $r_{v^{(\ell)}} \neq 0$,

- if $m < k-1$ or $m = 0$, (A.112) becomes : $\sum_{i=0}^m u^{(i+1)} p_{u^{(i)}} + \sum_{i=0}^n v^{(i+1)} p_{v^{(i)}} = f(x, p, p_x, p_{xx})$; if $m \geq 0$, differentiating with respect to $u^{(m+1)}$ yields $p_{u^{(m)}} = 0$ and if $n \geq 0$, differentiating with respect to $u^{(m+1)}$ yields $p_{v^{(n)}} = 0$; hence m and n must both be negative. ■

Annexe B

A point of view on a class of differential equations

A translation of the David Hilbert's article *Über den Begriff der Klasse von Differentialgleichungen* made by Aleš Janka and David Avanesoff and Daniel Robertz (2004).

We are going to concentrate our research on a differential equation of two functions y and z of one variable x . The differential equation has the form

$$F\left(\frac{d^n y}{dx^n}, \dots, \frac{dy}{dx}, y, \frac{d^m z}{dx^m}, \dots, \frac{dz}{dx}, z; x\right) = 0; \quad (\text{B.1})$$

and we suppose that this differential equation was neither obtained by one (or multiple) differentiation of an equation of the same form and of lower order, nor by their linear combination.

Now, we set

$$\begin{cases} \xi &= \varphi(x; y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2 z}{dx^2}, \dots), \\ \eta &= \psi(x; y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2 z}{dx^2}, \dots), \\ \zeta &= \chi(x; y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2 z}{dx^2}, \dots), \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

where the variable x and the functions y and z appear as arguments together with their derivatives up to certain order, and express

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{d\xi} &= \frac{\frac{d\psi}{dx}}{\frac{d\varphi}{dx}}, & \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} &= \frac{\frac{d\varphi}{dx} \frac{d^2 \psi}{dx^2} - \frac{d\psi}{dx} \frac{d^2 \varphi}{dx^2}}{(\frac{d\varphi}{dx})^2}, & \dots \\ \frac{d\zeta}{d\xi} &= \frac{\frac{d\chi}{dx}}{\frac{d\varphi}{dx}}, & \frac{d^2 \zeta}{d\xi^2} &= \frac{\frac{d\varphi}{dx} \frac{d^2 \chi}{dx^2} - \frac{d\chi}{dx} \frac{d^2 \varphi}{dx^2}}{(\frac{d\varphi}{dx})^2}, & \dots \end{aligned}$$

as functions of x and y and z and their respective derivatives. Then in general (when the functions ϕ, ψ, χ do not satisfy any particular constraint), one can obtain from (B.2), by using (B.1), expressions for the parameters x, y, z as functions of ξ and η and ζ as well as their derivatives w.r.t. ξ as follows :

$$\begin{cases} x = g(\xi; \eta, \frac{d\eta}{d\xi}, \frac{d^2 \eta}{d\xi^2}, \dots, \zeta, \frac{d\zeta}{d\xi}, \frac{d^2 \zeta}{d\xi^2}, \dots), \\ y = h(\xi; \eta, \frac{d\eta}{d\xi}, \frac{d^2 \eta}{d\xi^2}, \dots, \zeta, \frac{d\zeta}{d\xi}, \frac{d^2 \zeta}{d\xi^2}, \dots), \\ z = k(\xi; \eta, \frac{d\eta}{d\xi}, \frac{d^2 \eta}{d\xi^2}, \dots, \zeta, \frac{d\zeta}{d\xi}, \frac{d^2 \zeta}{d\xi^2}, \dots); \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

thereby (B.1) is transformed into a differential equation for the functions η, ζ of ξ of the form :

$$\Phi\left(\frac{d^\nu \eta}{d\xi^\nu}, \dots, \frac{d\eta}{d\xi}, \eta, \frac{d^\mu \zeta}{d\xi^\mu}, \dots, \frac{d\zeta}{d\xi}, \zeta; \xi\right) = 0. \quad (\text{B.4})$$

About this transformation (B.2), resp. (B.3), we say that it transforms the differential equations (B.1) to (B.4) and back in an *invertible integral-less* way ; all differential equations which can be transformed from (B.4) in an invertible and integral-less way to (B.1) are comprised into one *class of differential equations*.

The introduced notion of “invertible and integral-less transformation” and the notion of the “class” is an analogue, in the theory of differential relations of two functions $y(x)$ and $z(x)$, to the notions of the Riemann one-to-one (birational) transformation and the Riemann notion of a class of algebraic equations within the theory of algebraic functions of one variable.

Now, on the other hand, we set

$$\begin{cases} x = \varphi(t, w, w_1, \dots, w_r), \\ y = \psi(t, w, w_1, \dots, w_r), \\ z = \chi(t, w, w_1, \dots, w_r), \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

where the functions ϕ , ψ and χ are not of that special kind, where they depend only on *one* connection of their arguments $t, w_1, \dots, w_r$. Here by w we mean some arbitrary function of a variable t and denote by

$$w_1 = \frac{dw}{dt}, \quad \dots, \quad w_r = \frac{d^r w}{dt^r}$$

its derivatives w.r.t. t . We set

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'}{\varphi'}, & \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\varphi' \psi'' - \psi' \varphi''}{\varphi'^2}, & \dots, \\ \frac{dz}{dx} = \frac{\chi'}{\varphi'}, & \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{\varphi' \chi'' - \chi' \varphi''}{\varphi'^2}, & \dots, \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

where

$$\begin{aligned} \varphi' &= \frac{d\varphi}{dt} = \varphi_t + w_1 \varphi_w + w_2 \varphi_{w_1} + \dots + w_{r+1} \varphi_{w_r}, \\ \psi' &= \frac{d\psi}{dt} = \psi_t + w_1 \psi_w + w_2 \psi_{w_1} + \dots + w_{r+1} \psi_{w_r}, \\ &\dots \end{aligned}$$

and where by the quantities with indices w_k we mean their derivatives w.r.t. w_k . If, after the substitution from (B.5) and (B.6), the differential equation (B.1) holds for any function $w(t)$, i.e. identically in $t, w, w_1, \dots, w_r$, then we say that the differential equation (B.1) has an *integral-less resolution* (B.5). It shows up, that the following Proposition holds : “All integral-lessly soluable differential equations build one and only one class of differential equations”.

By Monge, the differential equations of first order in the form (B.1) (i.e. $n = 1, m = 1$) are integral-lessly soluable ; then by our general assumption, all differential equations of first order must be invertibly integral-lessly transformable into each other.

Actually, by Monge, one can find for any arbitrary differential equation of first order

$$F(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}) = 0 \quad (\text{B.7})$$

a function $J(x, y, z, \xi)$ of the variables x, y, z and of one parameter ξ , such that the differential equation (B.7) can be obtained by eliminating the parameter ξ from the equations

$$\frac{\partial J}{\partial x} + \frac{\partial J}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial J}{\partial z} \frac{dz}{dx} = 0, \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial x \partial \xi} + \frac{\partial^2 J}{\partial y \partial \xi} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 J}{\partial z \partial \xi} \frac{dz}{dx} = 0. \quad (\text{B.9})$$

Now, let us set

$$J(x, y, z, \xi) = \eta, \quad (\text{B.10})$$

$$\frac{\partial J(x, y, z, \xi)}{\partial \xi} = \zeta, \quad (\text{B.11})$$

and let us calculate from (B.8), (B.10), and (B.11) the quantities ξ , η , ζ as functions of x , y , z , $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$. Then

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{dJ}{d\xi} = \left(\frac{\partial J}{\partial x} + \frac{\partial J}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial J}{\partial z} \frac{dz}{dx} \right) \frac{dx}{d\xi} + \frac{\partial J}{\partial \xi} = \frac{\partial J}{\partial \xi} = \zeta.$$

By this means we have thus obtained a transformation of the differential equation (B.7) to the special form

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \zeta.$$

Moreover, this transformation is invertibly integral-less, because by differentiation of (B.11) and by taking into account (B.9), it follows that

$$\frac{\partial^2 J(x, y, z, \xi)}{\partial \xi^2} = \frac{d\zeta}{d\xi}, \quad (\text{B.12})$$

and from (B.10), (B.11), (B.12) one can thereupon express x , y and z as functions of ξ , η , ζ and $\frac{d\zeta}{d\xi}$.

As an example one can consider the differential equation

$$\frac{dz}{dx} = \left(\frac{dy}{dx} \right)^2,$$

for which

$$J = \xi^2 x + 2\xi y + z,$$

and thus one obtains, by the definition of the integral-less transformation and its inverse, the equations :

$$\begin{aligned} \eta &= \xi^2 x + 2\xi y + z, \\ \zeta &= 2\xi x + 2y, \\ \frac{d\zeta}{d\xi} &= 2x, \\ \xi^2 + 2\xi \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} &= 0, \\ \xi + \frac{dy}{dx} &= 0. \end{aligned}$$

The integral-lessly soluable differential equations correspond to the class of rationally soluable equations of two variables in the theory of algebraic equations, i.e. to the algebraic formation of genus zero.

In the sequel, I would like to prove that, in any case, among the equations of second order there are some which do *not* belong to the class of integral-lessly soluable differential equations.

For this purpose we first examine a special differential equation

$$\frac{dz}{dx} = \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 \quad (\text{B.13})$$

and we suppose, in contrast to our assumption, that this equation has an integral-less resolution

$$\begin{cases} x = \varphi(t, w, w_1, \dots, w_r), \\ y = \psi(t, w, w_1, \dots, w_r), \\ z = \chi(t, w, w_1, \dots, w_r), \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

where, like in (B.5), w is an arbitrary function of t and where one sets

$$w_1 = \frac{dw}{dt}, \quad \dots, \quad w_r = \frac{d^r w}{dt^r}.$$

Further we denote, like before, the partial derivatives by their indices $t, w, w_1, w_2, \dots$ and define for any function κ of $t, w, w_1, w_2, \dots$ the abbreviation

$$\kappa' = \frac{d\kappa}{dt} = \kappa_t + w_1 \kappa_w + w_2 \kappa_{w_1} + \dots.$$

Except in the case when one of the functions φ, ψ or χ is constant, neither of the expressions φ', ψ' and χ' is identically zero in all its arguments.

From now on, let w_r be the highest derivative of the arbitrary function w which actually appears in the right hand side of the integral-less resolution (B.14), and accordingly let the expressions $\varphi_{w_r}, \psi_{w_r}, \chi_{w_r}$ not be all identically zero in all their arguments.

From (B.14) we find that

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\chi'}{\varphi'} = \frac{\chi_t + w_1 \chi_w + w_2 \chi_{w_1} + \dots + w_{r+1} \chi_{w_r}}{\varphi_t + w_1 \varphi_w + w_2 \varphi_{w_1} + \dots + w_{r+1} \varphi_{w_r}}, \quad (\text{B.15})$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'}{\varphi'} = \frac{\psi_t + w_1 \psi_w + w_2 \psi_{w_1} + \dots + w_{r+1} \psi_{w_r}}{\varphi_t + w_1 \varphi_w + w_2 \varphi_{w_1} + \dots + w_{r+1} \varphi_{w_r}}, \quad (\text{B.16})$$

and if we set for short

$$\mu = \frac{\psi'}{\varphi'},$$

we have :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mu'}{\varphi'} = \frac{\mu_t + w_1\mu_w + w_2\mu_{w_1} + \cdots + w_{r+1}\mu_{w_r} + w_{r+2}\mu_{w_{r+1}}}{\varphi_t + w_1\varphi_w + w_2\varphi_{w_1} + \cdots + w_{r+1}\varphi_{w_r}}, \quad (\text{B.17})$$

Using (B.15) and (B.17), the equation (B.13) must be identically satisfied in the parameters $t, w, w_1, \dots, w_{r+2}$. However, as the left hand side in $\frac{\chi'}{\varphi'}$ does not contain the parameter w_{r+2} , the right hand side must not contain it either, i.e. the term $\frac{\mu'}{\varphi'}$ must not contain w_{r+2} , herewith, it follows identically

$$\mu_{w_{r+1}} = 0,$$

i.e. μ is independent of w_{r+1} . From this fact it follows, due to (B.17), that the parameter $\frac{\mu'}{\varphi'}$ is a fully linear or linear rational function of w_{r+1} and by our substitution, the right hand side of (B.13) is a quadratic rational function of w_{r+1} , by which the left hand side of (B.15) becomes a linear function in w_{r+1} . Thus both sides can only be identically equal, when each of the two expressions

$$\frac{\chi'}{\varphi'} \quad \text{and} \quad \frac{\mu'}{\varphi'}$$

is independent of w_{r+1} . From (B.15), (B.17) we clearly have

$$\begin{aligned} \varphi_{w_r} \frac{\chi'}{\varphi'} &= \chi_{w_r}, \\ \varphi_{w_r} \frac{\mu'}{\varphi'} &= \mu_{w_r}, \end{aligned}$$

and as μ is also independent of w_{r+1} by the previous argument, we also have, due to (B.16),

$$\varphi_{w_r} \mu = \psi_{w_r}.$$

If one of the parameters $\varphi_{w_r}, \psi_{w_r}, \chi_{w_r}$ was identically zero, due to that relation every one of them would have to disappear identically, i.e. φ, ψ , and χ would be independent of w_r , which would contradict our original assumption.

The relations we have developed above are expressed in the form

$$\mu = \frac{\psi'}{\varphi'} = \frac{\psi_{w_r}}{\varphi_{w_r}}, \quad (\text{B.18})$$

$$\frac{\mu'}{\varphi'} = \frac{\mu_{w_r}}{\varphi_{w_r}}, \quad (\text{B.19})$$

$$\frac{\chi'}{\varphi'} = \frac{\chi_{w_r}}{\varphi_{w_r}}. \quad (\text{B.20})$$

If the functions φ, ψ, χ contained only the arguments t, w , then (B.18), (B.20) would imply the equations

$$\begin{aligned} \psi_t \varphi_w - \psi_w \varphi_t &= 0, \\ \chi_t \varphi_w - \chi_w \varphi_t &= 0, \end{aligned}$$

and because $\varphi_w \neq 0$, the functions φ, ψ, χ would be of the special kind, where they depend just on *one* connection of the arguments t, w – a case which has been excluded right at the beginning.

Due to these considerations we may suppose in (B.14) that the order of the highest differential quotient is $r \geq 1$.

Using

$$x = \varphi(t, w, w_1, \dots, w_r),$$

we calculate the parameter w_r as a function of $t, w, w_1, \dots, w_{r-1}, x$ and substitute the resulting expression for w_r in ψ and χ . The functions obtained by this operation are denoted by

$$f(t, w, w_1, \dots, w_{r-1}, x) \quad \text{and} \quad g(t, w, w_1, \dots, w_{r-1}, x).$$

Let us in the sequel always denote by $\equiv$ that both sides of an equation are identically equal in $t, w, w_1, \dots, w_r$, as soon as one substitutes $x = \varphi$. Thus, we surely have

$$\psi \equiv f \tag{B.21}$$

and

$$\chi \equiv g. \tag{B.22}$$

Finally, let us abbreviate for any function¹ k of $t, w, w_1, \dots, w_{r-1}, x$

$$k' = k_t + w_1 k_w + w_2 k_{w_1} + \dots + w_r k_{w_{r-1}}.$$

By differentiating (B.21) w.r.t. t we get

$$\psi' \equiv f' + f_x \varphi'$$

and by differentiation w.r.t. w_r we have

$$\psi_{w_r} \equiv f_x \varphi_{w_r}.$$

By means of (B.18) it follows that

$$\mu \equiv f_x \tag{B.23}$$

and

$$f' \equiv 0. \tag{B.24}$$

¹NdT : The ' sign is not $\frac{d}{dt}$ in case of functions of $t, w, w_1, \dots, w_{r-1}, x$ but remains the $\frac{d}{dt}$ -derivation in case of functions of $t, w, w_1, \dots, w_r$.

Also, it follows from (B.23) by using (B.19) that

$$\frac{\mu'}{\varphi'} = f_{xx} \quad (\text{B.25})$$

and

$$(f_x)' \equiv 0 \quad (\text{B.26})$$

and finally, by (B.20), from (B.22) we obtain

$$\frac{\chi'}{\varphi'} = g_x \quad (\text{B.27})$$

and

$$g' \equiv 0. \quad (\text{B.28})$$

Now, we differentiate (B.24) w.r.t. w_r to obtain

$$(f_x)' \varphi_{w_r} + f_{w_{r-1}} \equiv 0,$$

from which, due to (B.26), it follows that

$$f_{w_{r-1}} \equiv 0.$$

However, as f and thus also $f_{w_{r-1}}$ do not explicitly contain the parameter w_r , it follows also that

$$f_{w_{r-1}} = 0$$

identically in $t, w, w_1, \dots, w_{r-1}, x$, i.e. f does not contain the parameter w_{r-1} explicitly either. Because of the last argument, f' does not contain the parameter w_r explicitly, and thus it follows from (B.24) necessarily that

$$f' = 0$$

identically in $t, w, w_1, \dots, w_{r-1}, x$, i.e.

$$f_t + w_1 f_w + w_2 f_{w_1} + \dots + w_{r-1} f_{w_{r-2}} = 0.$$

From these equations, it follows in turn that

$$f_{w_{r-2}} = 0, \quad f_{w_{r-3}} = 0, \quad \dots, \quad f_w = 0, \quad f_t = 0$$

by which we see that f cannot explicitly contain any parameter $t, w, w_1, \dots, w_{r-1}$, but it depends only on x .

From (B.17) and (B.25) we see that

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f_{xx}$$

and from (B.15) and (B.27)

$$\frac{dz}{dx} = g_x;$$

Thus the studied differential equation (B.13) is transformed into

$$g_x = f_{xx}^2;$$

this shows that also g_x is merely a function of x alone and hence, it follows that

$$g = X + W,$$

where X depends only on x and W depends only on $t, w, w_1, \dots, w_{r-1}$. From (B.28), it follows that

$$W' = 0,$$

i.e. W is constant; then also g depends only on x .

Thereby we conclude that in any case φ, ψ, χ depend only on *one* connection of the parameters $t, w, w_1, \dots, w_r$ – a result which has been excluded right from the beginning. Our original assumption cannot therefore be satisfied and thus the Proposition is proved :

The differential equation of a second order

$$\frac{dz}{dx} = \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2$$

has no integral-less resolution.

This conclusion, used for a special differential equation (B.13), is valid also for more general differential equations

$$\frac{dz}{dx} = F \left(\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}, y, z, x \right), \quad (\text{B.29})$$

if F is not a linear or linear rational function of $\frac{d^2y}{dx^2}$.

If F is a linear rational function of $\frac{d^2y}{dx^2}$, it can be rewritten in the form

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\alpha \frac{d^2y}{dx^2} + \beta}{\frac{d^2y}{dx^2} + \gamma}, \quad (\text{B.30})$$

where α, β, γ are some functions of $x, y, z, \frac{dy}{dx}$ and β must not be identically equal to $\alpha\gamma$. Moreover, one may also suppose that β is not identically zero, because in the case $\beta = 0$ we should have $\alpha \neq 0$; and if we replace in

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\alpha \frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2} + \gamma}$$

the function y by $y + x^2$, we get a differential equation of the same form (B.30) with the term β being non-zero.

Now, let us perform on (B.30) a special transformation (of Legendre)

$$\begin{array}{lcl} \xi & = & \frac{dy}{dx} \\ \eta & = & x \frac{dy}{dx} - y \\ \zeta & = & z \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{lcl} x & = & \frac{d\eta}{d\xi} \\ y & = & \xi \frac{d\eta}{d\xi} - \eta \\ z & = & \zeta \end{array} \right. \quad (\text{B.31})$$

we then obtain a differential equation of the form

$$\frac{d\zeta}{d\xi} = \frac{d^2\eta}{d\xi^2} \frac{\alpha + \beta \frac{d^2\eta}{d\xi^2}}{1 + \gamma \frac{d^2\eta}{d\xi^2}},$$

where now α, β, γ became functions of $\xi, \eta, \zeta, \frac{d\eta}{d\xi}$. Since $\beta \neq 0$, the numerator of the right hand side is surely quadratic in $\frac{d^2\eta}{d\xi^2}$, and thus we conclude with respect to our previous considerations that the differential equation (B.30) has no integral-less resolution. *Herewith, the differential equation (B.29) can have an integral-less resolution only if F is a fully linear function of $\frac{d^2y}{dx^2}$.*

The formulae (B.31) propose an example of a transformation which permits an integral-less inversion without any consideration of the underlying differential equation. Contrary to the invertible integral-less transformations treated up to now, such invertible integral-less transformations, which can be used as in (B.31) for all functions $y(x), z(x)$, or $\eta(\xi), \zeta(\xi)$, respectively, may be called the “unlimited invertible integral-less transformations”; they are the analogue of the fully invertible rational transformations (of Cremona) of two variables in algebra.

By the fact that we have proved the existence of differential equations which do not have an integral-less resolution, we have shown that there exists, besides the class of the integral-lessly solvable differential equations, at least one different class of differential equations. By an argument analogous to the one used in the existence proof of the non integral-lessly solvable differential equations, one can prove that *there is an infinite number of mutually different classes of differential equations*. Let us briefly sketch this.

We consider the two special differential equations

$$\frac{d\zeta}{d\xi} = \left(\frac{d^2\eta}{d\xi^2} \right)^2 \quad (\text{B.32})$$

and

$$\frac{dz}{dx} = \left(\frac{d^3 y}{dx^3} \right)^2. \quad (\text{B.33})$$

The first one of them, as it has been shown before, is not integral-lessly soluable, and if we consider in the other equation $\frac{dy}{dx}$ as the unknown, it follows that it is also an equation with no integral-less resolution. Then, we have still to prove that there is no transformation of the type

$$\begin{aligned} x &= \varphi(\xi, \eta, \eta_1, \dots, \eta_r, \zeta), \\ y &= \psi(\xi, \eta, \eta_1, \dots, \eta_r, \zeta), \\ z &= \chi(\xi, \eta, \eta_1, \dots, \eta_r, \zeta) \end{aligned}$$

by which one could transform (B.32) to (B.33). Here, we abbreviate

$$\eta_1 = \frac{d\eta}{d\xi}, \quad \dots, \quad \eta_r = \frac{d^r \eta}{d\xi^r}.$$

Now, let us denote in general

$$\kappa' = \frac{d\kappa}{d\xi} = \kappa_\xi + \eta_1 \kappa_\eta + \eta_2 \kappa_{\eta_1} + \dots + \eta_{r+1} \kappa_{\eta_r} + \eta_2^2 \kappa_\zeta;$$

then we get

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\chi'}{\varphi'}, \quad (\text{B.34})$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'}{\varphi'} = \mu,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\mu'}{\varphi'} = \nu,$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{\nu'}{\varphi'}. \quad (\text{B.35})$$

If there exists any transformation which transforms (B.32) to (B.33), then by (B.34) and (B.35) the equality (B.33) must be identically satisfied in

$$\xi, \eta, \eta_1, \dots, \eta_{r+3}, \zeta;$$

from here, we easily conclude for $r \geq 3$ that the expressions

$$\frac{\chi'}{\varphi'}, \mu, \nu, \frac{\nu'}{\varphi'}$$

must be independent of $\eta_{r+1}, \eta_{r+2}, \eta_{r+3}$ and therefore the identities

$$\varphi_{\eta_r} \frac{\chi'}{\varphi'} = \chi_{\eta_r},$$

$$\varphi_{\eta_r} \mu = \psi_{\eta_r},$$

$$\varphi_{\eta_r} \nu = \mu_{\eta_r},$$

$$\varphi_{\eta_r} \frac{\nu'}{\varphi'} = \nu_{\eta_r}$$

hold. From these identities we conclude in a completely analogous way as before the impossibility of our assumptions. In the cases $r = 1$, $r = 2$ we need, in order to achieve the same, one special trivial consideration. Hereby, the existence of at least three different classes has been ensured. It is obvious how this method can be used to give an existence proof of arbitrary many classes of differential equations.

For a deeper and a more systematic study of differential equations of the form (B.1) and the notion of classes, methods from variational calculus are required. The following Definitions and notations seem to be particularly needed :

Any pair of functions $y(x)$, $z(x)$ satisfying the differential equation (B.1) identically in x , is called a solution of (B.1). If now the differential equation (B.1) can be transformed by a invertible integral-less transformation into the differential equation (B.4), then in general, the solution of the transformed equation (B.4) corresponds via (B.3) to a solution of the original equation (B.1). However, there may be some solutions of (B.1) which cannot be represented using (B.3), i.e., as we say, which are “omitted”. On the other hand, let us call “discriminating solutions” such solutions of (B.1) for which the first variation vanishes. By an invertible integral-less transformation, discriminating solutions are mapped (at least partially) again to discriminating solutions. We discover the fundamental meaning of these general notions first in an example of a first order differential equation (of Monge). It shows up, that all discriminating solutions of Monge’s differential equation, and essentially only these, are the omitted solutions.

We want to prove this statement for the discriminating solutions of Monge’s differential equation, more specifically we take an example of the special differential equation of Monge

$$\frac{dz}{dx} = \left(\frac{dy}{dx} \right)^2. \quad (\text{B.36})$$

By setting to zero the first variation of the integral

$$z = \int \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx,$$

we get a differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

and thus (accordingly) the discriminating solutions of (B.36) are as follows :

$$\begin{cases} y = ax + b, \\ z = a^2x + c, \end{cases} \quad (\text{B.37})$$

where a, b, c are constants.

The integral-less resolution of (B.36) is as follows :

$$\begin{cases} x = t^2 w_{tt} - 2tw_t + 2w, \\ y = tw_{tt} - w_t, \\ z = w_{tt}. \end{cases} \quad (\text{B.38})$$

Let

$$y = f(x), \quad z = g(x)$$

be a system of solutions of the differential equation (B.36). In order to express this system by the formulae (B.38), it is necessary and sufficient to find one function $w(t)$ which satisfies the two differential equations

$$tw_{tt} - w_t = f(t^2 w_{tt} - 2tw_t + 2w), \quad (\text{B.39})$$

$$w_{tt} = g(t^2 w_{tt} - 2tw_t + 2w) \quad (\text{B.40})$$

and for which the expression

$$x = t^2 w_{tt} - 2tw_t + 2w$$

is not constant, which means

$$\frac{dx}{dt} = t^2 w_{ttt} \neq 0,$$

i.e.

$$w_{ttt} \neq 0. \quad (\text{B.41})$$

By differentiation of (B.39), (B.40) w.r.t. t , we obtain

$$tw_{ttt} = t^2 w_{ttt} f', \quad (\text{B.42})$$

$$w_{ttt} = t^2 w_{ttt} g', \quad (\text{B.43})$$

or by (B.41) there is

$$1 = t f', \quad (\text{B.44})$$

$$1 = t^2 g'. \quad (\text{B.45})$$

Now if f, g is not one of the discriminating solutions (B.37), then f' is not constant and thus we can transform (B.44) by an inversion into

$$t^2 w_{tt} - 2tw_t + 2w = h\left(\frac{1}{t}\right), \quad (\text{B.46})$$

where h is a function of $\frac{1}{t}$ which is not constant. This differential equation for w is surely always soluable. Let w^0 be one of its particular solutions.

From (B.44) it follows by

$$g' = (f')^2,$$

that also (B.45) is fulfilled, if we substitute w^0 for w therein. Herewith (B.42), (B.43) will also be satisfied for $w = w^0$ and as these equations have arisen through differentiation of (B.39), (B.40), we retain from there the existence of two constants A and B such that

$$tw_{tt}^0 - w_t^0 + A = f(t^2w_{tt}^0 - 2tw_t^0 + 2w^0), \quad (\text{B.47})$$

$$w_t^0 + B = g(t^2w_{tt}^0 - 2tw_t^0 + 2w^0). \quad (\text{B.48})$$

Now, let us set

$$w = w^0 + \frac{1}{2}Bt^2 - At,$$

so that these functions satisfy by (B.47), (B.48) the differential equations (B.39), (B.40). Moreover, by (B.46) we get an expression

$$t^2w_{tt} - 2tw_t + 2w = t^2w_{tt}^0 - 2tw_t^0 + 2w^0$$

which is not equal to a constant. Thus we have shown that our solution can be indeed expressed by (B.38).

On the other hand, let f, g be a discriminating solution, as it was given by (B.37). Then (B.39) is transformed into

$$tw_{tt} - w_t = a(t^2w_{tt} - 2tw_t + 2w) + b.$$

By differentiating w.r.t. t we obtain

$$(t - at^2)w_{ttt} = 0$$

and so

$$w_{ttt} = 0,$$

i.e. our solution cannot be represented by (B.38). Hence the Proposition about the fact that the discriminating solutions and only these are the omitted solutions is completely proved.

To conclude with, we should note that Monge's differential equation gives at the same time an example which shows that the discriminating solutions do not possess an invariant

character for the integral-less transformation. We have seen before that all differential equations of Monge (B.7) can be transformed invertibly integral-lessly into a special form

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \zeta,$$

and the latter equation obviously does not possess any discriminating solution at all. The presented case is completely coherent with the previous statement, that for Monge's differential equations all discriminating solutions are at the same time omitted solutions.

Bibliographie

- [1] E. ARANDA-BRICAIRE, C. H. MOOG, J.-B. POMET, “An Infinitesimal Brunovsky Form for Nonlinear Systems with Applications to Dynamic Linearization”, in : *Geometry in Nonlinear Control and Differential Inclusions (Warsaw, 1993)*, Banach Center Publications, 32, Polish Acad. Sci., Warsaw, 1995, p. 19–33.
- [2] D. AVANESSOFF, L. BARATCHART, J.-B. POMET, “Sur l’intégrabilité (très) formelle d’une partie des équations de la platitude des systèmes de contrôle”, *Rapport de recherche*, INRIA, December 2003, <http://www.inria.fr/rrrt>.
- [3] R. L. BRYANT, S. S. CHERN, R. B. GARDNER, H. L. GOLDSCHMITT, P. A. GRIFFITHS, *Exterior Differential Systems*, Mathematical Sciences Research Institute Publications, 18, Springer-Verlag, 1991.
- [4] R. L. BRYANT, P. A. GRIFFITHS, “Characteristic cohomology of differential systems. I. General theory”, *J. Amer. Math. Soc.* 8, 3, 1995, p. 507–596.
- [5] É. CARTAN, “Sur l’équivalence absolue de certains systèmes d’équations différentielles et sur certaines familles de courbes”, *Bulletin de la Société Mathématique de France* 42, 1914, p. 14–48.
- [6] É. CARTAN, “Sur l’intégration de certains systèmes indéterminés d’équations différentielles”, *J. für reine und angew. Math.* 145, 1915, p. 86–91.
- [7] B. CHARLET, J. LÉVINE, R. MARINO, “On dynamic feedback linearization”, *Syst. & Control Lett.* 13, 1989, p. 143–151.
- [8] V. N. CHETVERIKOV, “Flat control systems and deformations of structures on diffieties”, Preprint, January 2002.
- [9] J.-M. CORON, “Linearized Control and Smooth Stabilization”, *SIAM J. on Control and Optim.* 32, 2, 1994, p. 358–386.
- [10] M. FLIESS, S. T. GLAD, “An Algebraic Approach to Linear and Nonlinear Control”, in : *Essays on Control : Perspectives in the Theory and its Applications*, H. L. Trentelman, J. C. Willems (editors), PSCT, 14, Birkhäuser, p. 223–265, 1993.

- [11] M. FLIESS, J. LÉVINE, P. MARTIN, P. ROUCHON, “Sur les systèmes non linéaires différentiellement plats”, *C. R. Acad. Sci. Paris Série I*, 315, 1992, p. 619–624.
- [12] M. FLIESS, J. LÉVINE, P. MARTIN, P. ROUCHON, “Linéarisation par bouclage dynamique et transformations de Lie-Bäcklund”, *C. R. Acad. Sci. Paris Série I*, 317, 1993, p. 981–986.
- [13] M. FLIESS, J. LÉVINE, P. MARTIN, P. ROUCHON, “Flatness and Defect of Nonlinear Systems : Introductory Theory and Examples”, *Int. J. Control* 61, 6, 1995, p. 1327–1361.
- [14] M. FLIESS, “Automatique et corps différentiels”, *Forum Math.* 1, 1989, p. 229–238.
- [15] M. GOLUBITSKY, V. GUILLEMIN, *Stable mappings and their singularities*, Springer-Verlag, New York, 1973, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 14.
- [16] E. GOURSAT, “Sur le problème de Monge”, *Bulletin de la Société Mathématique de France* 33, 1905, p. 201–210.
- [17] E. GOURSAT, “Sur une généralisation du problème de Monge”, *Ann. Fac. des Sciences de Toulouse XXII*, 1930.
- [18] D. HILBERT, “Über den Begriff der Klasse von Differentialgleichungen”, *Math. Annalen* 73, 1912, p. 95–108.
- [19] L. R. HUNT, R. SU, G. MEYER, “Design for multi-input nonlinear systems”, in : *Differential Geometric Control Theory*, R. Brockett (editor), Birkhäuser, p. 258–298, 1983.
- [20] A. ISIDORI, C. H. MOOG, A. DE LUCA, “A sufficient condition for full linearization via dynamic state feedback”, in : *Proc. 25th IEEE Conf. on Decision & Control, Athens*, p. 203–207, 1986.
- [21] A. ISIDORI, *Nonlinear Control Systems, Communications and Control Engineering*, Springer, 1995.
- [22] B. JAKUBCZYK, W. RESPONDEK, “On linearization of control systems”, *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math.* 28, 9-10, 1980, p. 517–522.
- [23] B. JAKUBCZYK, “Equivalence of differential equations and differential algebras”, *Tatra Mt. Math. Publ.* 4, 1994, p. 125–130, Equadiff 8 (Bratislava, 1993).
- [24] M. JANET, “P. Zervos et le problème de Monge”, *Bull. Sci. Math. (2)* 95, 1971, p. 15–26.
- [25] J. JOHNSON, “Differential dimension polynomials and a fundamental theorem on differential modules”, *Amer. J. Math.* 91, 1969, p. 239–248.
- [26] J. JOHNSON, “Kähler differentials and differential algebra”, *Ann. of Math. (2)* 89, 1969, p. 92–98.
- [27] V. JURDJEVIC, H. J. SUSSMANN, “Controllability of Nonlinear systems”, *J. of Diff. Equations* 12, 1972, p. 95–116.
- [28] B. KISS, J. LÉVINE, B. LANTOS, “Trajectory planning for dextrous manipulation with rolling contacts”, in : *Proceedings 37th IEEE Conference Decision Control*, p. 2118–2119, Tampa, FL, 1999.

- [29] W. KLINGENBERG, *A course in differential geometry, Graduate Texts in Mathematics, 51*, Springer-Verlag, New York, 1978.
- [30] I. S. KRASIL'SHCHIK, V. V. Lychagin, A. M. VINOGRADOV, *Geometry of Jet Spaces and Nonlinear Partial Differential Equations, Adv. Stud. on Contemporary Math., 1*, Gordon & Breach Sci. Publ., 1986.
- [31] A. KUMPERA, "Flag systems and ordinary differential equations", *Ann. Mat. Pura Appl. (4)* 177, 1999, p. 315–329.
- [32] S. LANG, *Algebra*, edition third, *Graduate Texts in Mathematics, 211*, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [33] Y. LENOIR, P. MARTIN, P. ROUCHON, " $2k\pi$, the juggling robot", in : *Proc. 37th IEEE Conf. Decision Control*, p. 1995–2000, Tampa, FL, 1998.
- [34] C. LOBRY, "Contrôlabilité des systèmes non linéaires", *SIAM J. on Control* 8, 1970, p. 573–605.
- [35] B. MALGRANGE, "Equations de Lie, II", *J. Differential Geom.* 7, 1972, p. 117–141.
- [36] R. MARQUEZ, E. DELALEAU, "Une application de la commande prédictive linéaire basée sur la platitude", in : *Actes Journées Doctorales d'Automatique*, p. 148–152, Nancy, 1999.
- [37] P. MARTIN, S. DEVASIA, B. PADEN, "A different look at output feedback : control of a VTOL aircraft", *Automatica*, 1996, p. 101–108.
- [38] P. MARTIN, R. M. MURRAY, P. ROUCHON, "Flat systems, equivalence and feedback", in : *Advances in the control of nonlinear systems (Murcia, 2000), Lect. Notes in Contr. & Inform. Sci., 264*, Springer, London, 2001, p. 5–32.
- [39] P. MARTIN, P. ROUCHON, "Feedback Linearization and Driftless Systems", *Math. of Control, Signals & Systems* 7, 1994, p. 235–254.
- [40] P. MARTIN, P. ROUCHON, "Flatness and sampling control of induction motors", in : *Proc. IFAC World Congress*, p. 389–394, San Francisco, 1996.
- [41] P. MARTIN, P. ROUCHON, "Two remarks on induction motors", in : *Proc. CESA'96 IMACS Multiconf.*, p. 76–79, Lille, 1996.
- [42] P. MARTIN, *Contribution à l'étude des systèmes différentiellement plats*, PhD Thesis, L'École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1992.
- [43] P. MARTIN, "Aircraft control using flatness", in : *Proc. CESA'96 IMACS Multiconf.*, p. 194–199, Lille, 1996.
- [44] G. MONGE, "Supplément où l'on fait voir que les équations aux différences ordinaires pour lesquelles les conditions d'intégrabilité ne sont pas satisfaites sont susceptibles d'une véritable intégration", in : *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1784, p. 502–576.
- [45] H. NIJMEIJER, A. VAN DER SCHAFT, *Nonlinear dynamical control systems*, Springer-Verlag, New York, 1991.

- [46] K. NOMIZU, T. SASAKI, *Affine differential geometry*, *Cambridge Tracts in Mathematics*, 111, Cambridge University Press, Cambridge, 1994, Geometry of affine immersions.
- [47] P. PEREIRA DA SILVA, P. ROUCHON, "On time-invariant systems possessing time-dependent flat outputs", in : *actes de NOLCOS 2004*, Elsevier (editor), 2004.
- [48] N. PETIT, *Thèse*, PhD Thesis, Ecole des Mines, Paris, 2000.
- [49] J.-B. POMET, "A Differential Geometric Setting for Dynamic Equivalence and Dynamic Linearization", in : *Geometry in Nonlinear Control and Differential Inclusions (Warsaw, 1993)*, *Banach Center Publications*, 32, Polish Acad. Sci., Warsaw, 1995, p. 319–339.
- [50] J.-B. POMET, "On Dynamic Feedback Linearization of Four-dimensional Affine Control Systems with Two Inputs", *ESAIM : Control, Optim. & C. of Variations* 2, June 1997, p. 151–230, URL : <http://www.edpsciences.com/cocv/>.
- [51] J.-F. POMMARET, *Systems of partial differential equations and Lie pseudogroups*, *Mathematics and its Applications*, 14, Gordon & Breach Science Publishers, New York, 1978, With a preface by André Lichnerowicz.
- [52] J.-F. POMMARET, "Géométrie différentielle algébrique et théorie du contrôle", *C. R. Acad. Sci. Paris* 302, série I, 15, 1986, p. 547–550.
- [53] J.-F. POMMARET, *Partial Differential Equations and Group Theory*, *Mathematics and its Applications*, 293, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1994.
- [54] J. POMMARET, *Partial Differential Control Theory*, Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [55] R. ROTHFUSS, J. RUDOLPH, M. ZEITZ, "Flatness based control of a nonlinear chemical reactor model", *Automatica*, 1996, p. 1433–1439.
- [56] R. ROTHFUSS, "Anwendung der flachheitsbasierten Analyse und Regelung nichtlinearer Mehrgrößensysteme", in : *VDI*, Düsseldorf, 1997.
- [57] P. ROUCHON, J. RUDOLPH, *Automatique et procédés chimiques*, Hermès, Paris, 2000, ch. Réacteurs chimiques différentiellement plats : planification et suivi de trajectoires.
- [58] P. ROUCHON, "Necessary Condition and Genericity of Dynamic Feedback Linearization", *J. of Math. Systems, Estimation, and Control* 4, 1994, p. 1–14.
- [59] J. RUDOLPH, "Flatness-based control by quasi-static feedback illustrated on a cascade of two chemical reactors", *Internat. J. Control*, 2000, p. 115–131.
- [60] H. SIRA-RAMIREZ, "Passivity vs flatness in the regulation of an exothermic chemical reactor", *Europ. J. Control*, 2000.
- [61] H. SIRA-RAMIREZ, "A passivity plus flatness controller for the permanent magnet stepper motor", *Asian J. Control*, 2000, p. 1–9.
- [62] W. M. SLUIS, "A necessary condition for dynamic feedback linearization", *Syst. & Control Lett.* 21, 1993, p. 277–283.

- [63] E. D. SONTAG, “Finite-dimensional open-loop control generators for nonlinear systems”, *Int. J. Control* 47, 1988, p. 537–556.
- [64] E. SONTAG, *Mathematical control theory : deterministic finite dimensional systems*, *Texts in applied mathematics*, Springer, 1990.
- [65] D. C. SPENCER, “Overdetermined systems of linear partial differential equations”, *Bull. Amer. Math. Soc.* 75, 1969, p. 179–239.
- [66] M. SPIVAK, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, edition second, 1, Publish or Perish, Houston (U.S.A.), 1979.
- [67] M. VAN NIEUWSTADT, M. RATHINAM, R. MURRAY, “Differential flatness and absolute equivalence of nonlinear control systems”, *SIAM J. on Control and Optim.* 36, 4, 1998, p. 1225–1239, <http://epubs.siam.org:80/sam-bin/dbq/article/27402>.
- [68] M. VIDYASAGAR, *Nonlinear Systems Analysis, second edition*, Prentice Hall International, 1993.
- [69] O. ZARISKI, P. SAMUEL, *Commutative algebra. Vol. II*, edition 2, *Graduate Texts in Mathematics*, 29, Springer-Verlag, New York, 1975, Reprint of the 1960 edition.
- [70] P. ZERVOS, “Le problème de Monge”, *Mémoires des Sciences Mathématiques LIII*, 1932.
- [71] M. ZRIBI, H. SIRA-RAMIREZ, A. NGAI, “Static and dynamic sliding mode control schemes for a PM stepper motor”, *Internat. J. Control*.