Sujet de thèse,
à l'INRIA Sophia-Antipolis Méditerranée, équipe APICS, L. Baratchart et J. Leblond,
en lien avec le CEA, Cadarache.

Problèmes inverses pour l'équation de Beltrami et extrapolation de quantités magnétiques dans un tokamak.

Lors de la fusion thermonucléaire, la modélisation de l'équilibre du plasma dans un tokamak s'effectue à partir des équations de la magnétohydrodynamique, dans un contexte axisymétrique, puisque le dispositif s'idéalise comme un volume toroïdal dans lequel est confiné le plasma.
Dans une section méridienne du tokamak, modélisée par un disque ne contenant pas l'origine, le flux magnétique poloïdal u(x, y) satisfait, dans le domaine annulaire compris entre la surface du plasma et le bord extérieur de la chambre, l'équation [Bl] :
(1) $\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} u) = 0$ avec $\sigma(x, y) = 1/x$.

Deux problèmes inverses frontière posés par les physiciens de l'institut de recherche sur la fusion par confinement magnétique (CEA Cadarache), dont la résolution est nécessaire en vue du développement d'ITER, sont alors les suivants :

- (i) Étant données les valeurs de u et de sa dérivée normale $\partial u/\partial n$ sur la frontière du plasma supposée connue, extrapoler ces quantités sur une courbe donnée dans le domaine annulaire. Il s'agit donc d'un problème de Cauchy.
- (ii) Étant données les valeurs de u et de $\partial u/\partial n$ sur le bord extérieur de l'anneau, retrouver la frontière du plasma définie par l´équipotentielle passant par un point connu (diaphragme). Une formulation affaiblie de cette question consiste à supposer que la solution cherchée vérifie l'équation (1) jusqu'à une surface « fictive » située dans le plasma, et à déterminer alors (une approximation de) la frontière cherchée à nouveau comme une équipotentielle. La version affaiblie est donc, mathématiquement, un problème du même type que (i). La version forte s'apparente, elle, à un problème de Bernouilli.

Ces deux problèmes sont mal posés, en ce sens que des erreurs de mesure – même petites – sur les données de Neumann (correspondant au champ magnétique), provoquent une incompatibilité des données frontière avec l'équation. De plus, une solution de l'équation qui serait proche de ces données au bord peut donner lieu à une équipotentielle très différente de celle que l'on cherche.
Les techniques actuelles, qui s'appuient par exemple sur des approximations de Taylor, ne répondent pas à ces questions avec la précision requise par les concepteurs et ingénieurs du CEA pour la nouvelle génération de tokamaks (ITER). Un fort besoin de méthodes mathématiques fiables se fait sentir pour ces problèmes, qui sont particulièrement d'actualité pour déterminer et contrôler la surface d'équilibre du plasma confiné [BBJ].

L'approche proposée ici prolonge celle adoptée pour des problèmes du même type concernant les fonctions harmoniques ($\sigma = 1$) par l'équipe APICS (INRIA Sophia-Antipolis Méditerranée), qui consiste à formuler et résoudre ces questions en termes de problèmes d'approximation sous contrainte (problèmes extrémaux bornés) dans des espaces de fonctions analytiques (classes de Hardy) [BL, BLP1, LMP].
La première étape est de considérer l'équation (1) comme la condition de compatibilité de l'équation de Beltrami conjuguée suivante, en la variable complexe $z = x + i y$ [AP, BN] :
(2) $\partial f / \partial \overline{z} = \nu \, \partial \overline{f} / \partial \overline{z}$ où $\operatorname{Re} f = u$ et $\nu = (1-\sigma)/(1+\sigma)$.

Les problèmes inverses de type Cauchy mixtes pour (1) se ramènent alors à des problèmes inverses de Dirichlet (extrapolation) pour (2), puisque les valeurs de u et de $\partial u/\partial n$ sur la partie du bord où elles sont disponibles y déterminent f.
La deuxième étape consiste à régulariser ces problèmes, connus pour être mal posés. Une approche adaptée est ici de contraindre $u = \operatorname{Re} f$ sur la partie du bord où ses valeurs ne sont pas fournies, et d'identifier f comme étant – sous cette contrainte – aussi proche que possible des

données sur l'autre partie de la frontière. Ceci est un problème extrémal borné dont la solution dans le cadre analytique où $\nu = 0$ a été étudié dans [BL, BLP1, BLP2].
Le sujet de la thèse consiste en l'étude et la résolution constructive de ce problème extrémal borné pour une conductivité σ non constante, comme celle qui intervient ci-dessus dans le cas d'un tokamak. L'existence et l'unicité d'une solution dans certaines classes de Hardy généralisées sont établies dans [BLRR], pour le cas d'un disque. Il s'agira dans la thèse de généraliser ces propriétés au cas d'un anneau et d'y caractériser la solution. Ceci fournira un outil quantitatif pour l'évaluation des quantités magnétiques cherchées dans la question (i), le paramètre de régularisation étant la contrainte imposée à u sur le bord extérieur. Ceci permet également d'aborder la question (ii), dans sa version affaiblie.
Dans une troisième étape, on considèrera les problèmes " mixtes ", avec contrainte ponctuelle et critère intégral, qui semblent particulièrement adaptés à la question (ii), concernant la détermination de la frontière du plasma. La résolution de ces problèmes mixtes dans le cas σ = 1 repose sur la structure multiplicative des fonctions analytiques. Une étude analogue pour des conductivités σ variables reste à mener. L'enjeu ici est significatif dans la mesure où le problème géométrique global initial pourrait ainsi être localisé, grâce aux informations ponctuelles fournies par la contrainte, ce qui est de nature à améliorer grandement la précision d'un algorithme de descente.

Les développements algorithmiques et l'implémentation, en liaison avec l'institut de recherche sur la fusion par confinement magnétique, sont partie intégrante de la thèse et seront testés sur le tokamak Tore Supra, actuellement en service à Cadarache. Notons que les algorithmes de résolution de ces problèmes extrémaux sont relativement délicats, déjà dans la situation σ = 1, et leur extension au cas σ = 1/x nécessitera en premier lieu la détermination de bases adaptées au calcul des solutions de (1). Cette équation admet pour solutions particulières certaines fonctions de Bessel, qui pourraient permettre de construire une telle base [BLPQS]. Une alternative consisterait à utiliser le théorème de représentation établi dans [BN] afin de se ramener – de façon implicite – à une famille de problèmes extrémaux dans les espaces de Hardy de fonctions analytiques.

References

[AP] K. Astala, L. Paivarinta, Calderon's inverse conductivity problem in the plane, Annals of Maths, 163, pp. 265-299, 2006.

[BL] L. Baratchart, J. Leblond, Hardy approximation to L^p functions on subsets of the circle with $1 \le p < \infty$, Constructive Approx., 14, pp. 41-56, 1998.

[BLP1] L. Baratchart, J. Leblond, J.R. Partington, Hardy approximation to L^∞ functions on subsets of the circle, Constructive Approx., 12, pp. 423-436, 1996.

[BLP2] L. Baratchart, J. Leblond, J.R. Partington, Problems of Adamjan-Arov-Krein type on subsets of the circle and minimal norm extensions, Constructive Approximation, 16, pp. 333§-357, 2000.

[BLPQS] L. Baratchart, J. Leblond, J.R. Partington, A. Quadrat, E. Sincich, Beltrami equation and generalized analytic functions, in preparation.

[BLRR] L. Baratchart, J. Leblond, S. Rigat, E. Russ, Hardy spaces for the real Beltrami equation in the plane, in preparation.

[BN] L. Bers, L. Nirenberg, On a representation theorem for linear elliptic systems with discontinuous coefficients and its applications, Convegno Intern. Equazioni Lineari alle Derivate Parziali, Ed. Cremonese, Roma, pp. 111-140, 1955.

[Bl] J. Blum, Numerical simulation and optimal control in plasma physics, with applications to tokamaks, Wiley/Gauthier-Villars, 1989.

[BBJ] J. Blum, K. Bosak, E. Joffrin, New applications of Equinox code for real-time plasma equilibrium and profile reconstruction for tokamaks, 12th ICPP International Congress on plasma physics, Nice, 2004.

[LMP] J. Leblond, M. Mahjoub, J.R. Partington, Analytic extensions and Cauchy-type inverse problems on annular domains: stability results, J. Inverse and Ill-Posed Problems, 14, pp. 189-204, 2006.