Comportement asymptotique des pôles dans l'approximation méromorphe des fonctions analytiques en dehors d'un compact du disque

J.M.Guieu

18 juin 2004

Le document qui suit est le compte-rendu d'un travail de recherche effectué au cours d'un stage à l'I.N.R.I.A. de Sophia-Antipolis, au sein du projet APICS piloté par M. Laurent Baratchart.

La théorie de Adamjam-Arov-Krein – dite de AAK, est un puissant outil d'approximation méromorphe, intervenant dans la détection des fissures d'un matériau conducteur, ou dans la recherche d'anomalies localisées à l'intérieur du cerveau. Le sujet consiste à étudier le comportement asymptotique des pôles de ces meilleurs approximants lorsque l'ordre croît. On se base essentiellement sur l'article [1] de L. Baratchart et F. Seyfert, et plus particulièrement sur sa dernière partie révélant la convergence des pôles quand on approche des fonctions algébriques à deux points de branchement.

Notre objectif est de proposer des pistes concrètes en vue de généraliser ce résultat aux fonctions analytiques en dehors d'un compact du disque. La voie qui se présente est un pont entre la symétrie hyperbolique et la symétrie circulaire.

Le papier s'organise comme suit. On citera dans la première section les principaux résultats relatifs aux espaces H^p de Hardy, $1 \leq p \leq +\infty$, puis on introduira quelques outils qui apparaîtront naturellement au cours de l'étude. La deuxième section sera consacrée à la théorie de Adamjam-Arov-Krein pour les fonctions analytiques en dehors d'un compact du disque, puis à la formule d'orthogonalité non-hermitienne, permettant de relier la convergence des mesures de comptage de zéros à un problème de normalité. On pourra alors, dans la troisième section, donner le théorème de convergence dans le cas où le compact est une géodésique hyperbolique, et décrire la mesure limite comme une distribution d'équilibre. La quatrième section présente un projet de recherche analysant la structure du problème dans le cas où la géodésique est remplacée par un compact du disque.

1 Introduction et préliminaires

1.1 Motivations

Comme annoncé, l'approximation méromorphe, dans le cadre de ses applications biomédicales, est dévolue à la recherche de sources électriques dans le cortex cérébral. Certaines anomalies neuronales peuvent occasionner des crises épileptiques issues de décharges synaptiques synchrones. La seule base expérimentale pour localiser ces sources est la mesure du potentiel à la surface du cerveau au moyen d'électrodes ; le potentiel est une fonction analytique sauf à l'emplacement des charges. Si on modélise le crâne humain à une sphère, une méthode permettant de se ramener au problème 2D consiste, comme le ferait un I.R.M, à travailler sur un nombre restreint de tranches horizontales, assimilées à des disques, puis de localiser les singularités sur chacun de ces disques. On ne détaille pas ici la théorie légitimant ce genre de modélisation, et le lien précis entre le problème harmonique sur la sphère et sa projection par tranche. Néanmoins, ce cadre applicatif justifie l'utilisation de l'approximation AAK dans H^∞ pour approcher des potentiels anti-analytiques.
Si l'on considère les sources comme ponctuelles, le potentiel possède alors des singularités branchées ou logarithmiques. Toutefois, les décharges donnent souvent lieu à des défauts d'analyticité non ponctuels, ce qui nous amène à considérer des potentiels analytiques en dehors d'un compact du disque. Dans ce cas, on ne dispose pas à ce jour de théorèmes précis sur la convergence des pôles. Notre démarche s'inscrit dans cette perspective de recherche.

1.2 Notations

- Si $r > 0$, $\mathbb{D}_r$ désigne le disque ouvert du plan complexe $\mathbb{C}$ de centre 0 et de rayon r, et $\mathbb{T}_r = \partial\mathbb{D}_r$. On pose $\mathbb{D}_1 = \mathbb{D}$ et $\mathbb{T}_1 = \mathbb{T}$. Parallèlement, $L^p(r)$ désigne l'espace des fonctions mesurables $f : \mathbb{T}_r \to \mathbb{C}$ telles que :

$$\|f\|_{L^p(r)} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta\right)^{1/p} < \infty \quad \text{si } 1 \leq p < +\infty,$$

ou

$$\|f\|_{L^\infty(r)} = \sup_{\theta\in[0,2\pi]} \mathrm{ess}\, |f(re^{i\theta})| < \infty \qquad \text{si } p = +\infty.$$

Lorsque $r = 1$, on écrira simplement L^p et $\|f\|_p$.

- Pour $0 < r < R$, $C(r, R)$ désigne la couronne ouverte, centrée en 0 et délimitée par $\mathbb{T}_r$ et $\mathbb{T}_R$.

- On note $C(K)$, pour K compact, l'ensemble des fonctions complexes continues sur K.

- On note $\mathbf{P}_m$ l'espace des polynomes de degré au plus m, B_m l'ensemble des produits de Blaschke de degré au plus m.

- Si g est une fonction analytique dans un voisinage V de $\omega_0 \in \mathbb{C}$, et si $g(\omega) = \sum_0^{+\infty} a_k \omega^k$ pour $\omega \in V$, alors on définit la fonction $\bar{g}$ sur V par : $\bar{g}(\omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} \bar{a}_k \omega^k$, où l'on conjugue simplement les coefficients de Fourier. Elle possède le même domaine d'analyticité que g et vérifie : $\bar{g}(\bar{z}) = \overline{g(z)}$. *Cette convention n'est pas usuelle* mais nous sera très utile. Afin d'éviter toute confusion, on précisera systématiquement les variables.

- Avec la précédente convention, on définit la fonction $\check{f}(z) = \frac{1}{z}\bar{f}\left(\frac{1}{z}\right)$.

- On écrira $\mathbf{P}_+$ et $\mathbf{P}_-$ respectivement pour les projections analytique et anti-analytique, qui vérifient les relations :

$$\mathbf{P}_+ + \mathbf{P}_- = \mathrm{Id}, \quad \mathbf{P}_+\mathbf{P}_- = 0, \quad \mathbf{P}_+(e^{-i\theta}\bar{h}) = e^{-i\theta}\overline{\mathbf{P}-(h)}. \tag{1}$$

La dernière formule montre que $\mathbf{P}_+ \circ \check{h} = \{\mathbf{P}_- \check{\circ}\, h\}$.

1.3 Classes de Hardy

Pour $1 \leq p \leq +\infty$, une fonction f est dite de la classe H^p si elle est analytique sur $\mathbb{D}$ et si la norme

$$\|f\|_{H^p} = \sup_{0 \leq r < 1} \|f\|_{L^p(r)}$$

est finie. Une telle fonction admet toujours une limite non-tangentielle f^* dans $L^p(\mathbb{T})$, et, en outre, $\|f^*\|_p = \|f\|_{H^p}$. Ainsi, on peut décrire aussi H^p comme l'ensemble des fonctions de $L^p(\mathbb{T})$ dont les coefficients de Fourier d'indice strictement négatif sont nuls. On notera indifféremment la fonction sur le disque et sa limite non-tangentielle au bord. f est aussi l'intégrale de Poisson de f^*, ainsi que son intégrale de Cauchy.
Dans le cas $1 < p < +\infty$, f^* est en fait la limite dans L^p de $f(r.)$ quand r tend vers 1.
Si f est analytique sur $\mathbb{D}$, et si $1 \leq p < +\infty$ la fonction $r \in [\,0, 1) \mapsto \|f\|_{L^p(r)}$ est croissante – en fait convexe de $\log r$. Ce fait est un conséquence de la théorie des fonctions sous-harmoniques.

On définit en outre l'espace $\bar{H}_0^p$ des fonctions de $L^p(\mathbb{T})$ anti-analytiques, c'est-à-dire dont les coefficients de Fourier d'indice positif s'annulent. Dans le cas $p = 2$, on a clairement $\bar{H}_0^2 = \mathbf{P}_-(L^2)$, et si $f \in H^2$, alors $\check{f} \in \bar{H}_0^2$.

Enfin, pour $1 \leq p \leq +\infty$, et $m \geq 0$, l'espace H_m^p décrit les fonctions de la forme g/q_m, avec $g \in H^p$ et $q_m \in P_m$. Ces fonctions sont dites *méromorphes d'ordre* m dans $\mathbb{D}$, c'est-à-dire qu'elles ont au plus m pôles dans $\mathbb{D}$. Notons que $H_m^p = B_m^{-1} H^p$.

Une fonction analytique sur $\mathbb{D}$ est dite *intérieure* si elle est de module inférieur à 1 sur $\mathbb{D}$, et de module 1 p.p. sur $\mathbb{T}$. Elle est dite *extérieure* si elle est de la forme :

$$E_F(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} F(e^{i\theta})d\theta\right\},$$

où $F \in L^1(\mathbb{T})$ est à valeurs réelles. Notons que si E_F est extérieure et dans H^p, alors $F = \log|E_F|$ p.p. sur $\mathbb{T}$.
Une fonction est dite *singulière* si elle s'écrit :

$$S_\mu(z) = \exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} d\mu(\theta)\right\},$$

où μ est une mesure positive sur $[0, 2\pi]$, singulière par rapport à la mesure de Lebesgue. En fait, toute fonction intérieure, sans zéro et positive en 0 s'écrit de manière unique comme une fonction singulière – cas particulier du théorème 1.1 .

Ces classes de fonction permettent de décrire entièrement la classe H^p, grâce au théorème suivant :

Théorème 1.1 (factorisation intérieure / extérieure) *Si $f \in H^p \backslash \{0\}$, avec $1 \leq p \leq \infty$, il existe une unique décomposition $f = cBES$, où $c \in \mathbb{T}$, B est le produit de Blaschke normalisé constitué des zéros de f, E est une fonction extérieure et S est une fonction singulière.*
Plus précisément, $E = E_{\log(|f|)} \in H^p$.

La convergence du produit

$$B(z) = z^k \prod_{\substack{z_j \neq 0 \\ f(z_j)=0}} \frac{-\overline{z_j}}{|z_j|} \frac{z - z_j}{1 - \overline{z_j} z}$$

où k est la multiplicité de 0 et où z_j est répété autant de fois que sa multiplicité, est assurée par la condition $\sum_j (1 - |z_j|) < \infty$ qui a lieu dès que $f \in H^p$. Cette factorisation montre en particulier qu'une fonction de H^p ne peut valoir 0 sur un sous-ensemble de $\mathbb{T}$ de mesure strictement positive, à moins d'être nulle.
On cite enfin un théorème de régularité des fonctions singulières, et un corolaire immédiat :

Théorème 1.2 *Si S_μ est une fonction singulière, alors elle est analytique presque partout sur $\mathbb{C}$, excepté en les points du support fermé de μ. En particulier, une fonction singulière n'est pas prolongeable analytiquement à travers $\mathbb{D}$.*

Corollaire 1.1 *Toute fonction intérieure analytique à travers $\mathbb{D}$ est un produit de Blaschke fini.*

1.4 Intégrales singulières

Soient L une courbe lisse orientée du plan complexe, et f une fonction définie sur L. *A priori*, la fonction de Cauchy $\Phi : t \mapsto \int_L f(z)/(z-t)dz$ n'est pas bien définie à travers L. L'ambiguité provient de la manière dont t approche L. On se place donc en un point $t \in L$ qui n'est pas une extrémité de L. Dénotons par $+$ la région située à gauche de la direction positive de L, et par $-$ celle située à droite. Alors, $\Phi(\xi)$ a une limite bien définie $\Phi^+(t)$, lorsque ξ tend vers t le long d'une courbe incluse dans la région $+$. On définit $\Phi^+(t)$ similairement.
Pour décrire ces limites, un autre point de vue consiste à "éviter" la singularité t en modifiant infinitésimalement L au voisinage de t. Ceci nous conduit à la notion d'intégrale singulière :

Définition 1.1 *Si f est une fonction définie sur une courbe lisse L orientée du plan complexe, et $t \in L$, on appelle intégrale de Cauchy singulière de f sur L en t :*

$$\fint_L \frac{f(z)dz}{z-t} := \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \int_{L \setminus L_\epsilon} \frac{f(z)dz}{z-t},$$

où $L_\epsilon = B(t, \epsilon) \cap L$.

On peut alors énoncer les formules dites de Plemelj :

Lemme 1.1 *Avec les notations ci-dessus, si f est höldérienne sur L, alors :*

$$\Phi^\pm(t) = \pm f(t) + \frac{1}{2i\pi} \fint_L \frac{f(z)dz}{z-t}. \tag{2}$$

La preuve est immédiate dans le cas où f est analytique au voisinage de t, ce qui est le seul cas qui nous occupera dans la dernière section. L'idée est d'introduire l'arc de cercle C_ϵ^+ (resp. $-$), situé dans la région $+$ (resp. $-$), de même orientation que L, de centre t et de rayon ϵ, tel que $L_\epsilon \cup C_\epsilon^+$(resp. C_ϵ^-) soit une courbe fermée. La formule (2) n'est alors rien d'autre que la formule de Cauchy, lorsque ϵ est suffisamment petit.
Notons que la formule (2) sera utilisée sous une forme un peu différente, mais de preuve tout à fait analogue : il revient au même de *fixer* le point t et de faire tendre le contour $\{L \setminus L_\epsilon\} \cup C_\epsilon^\pm$ vers L.

1.5 Fonctions conjuguées

Dans la dernière section, on utilisera les rudiments de la théorie des fonctions conjuguées, dont on cite les principales propriétés.

Définition 1.2 *Soit $u \in L^2(\mathbb{T})$ une fonction à valeurs réelles. On appelle fonction conjuguée à u, et on note $\tilde{u}$, l'unique fonction réelle de $L^2(\mathbb{T})$ telle que*

$$\begin{cases} u + i\tilde{u} \in H^2 \\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{u}(e^{i\theta})\ d\theta = 0 \end{cases}$$

Si u s'écrit $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_k e^{ik\theta}$, il suffit de prendre $\tilde{u}(e^{i\theta}) = \sum_{+\infty}^{+\infty} b_k e^{ik\theta}$, avec

$$b_k = -ia_k \text{ si } k > 0, b_k = ia_k \text{ si } k < 0, \text{ et } b_0 = 0.$$

Si u est complexe, on définit $\tilde{u}$ par linéarité : $\widetilde{\Re\mathrm{e}\ u} + i\widetilde{\Im\mathrm{m}\ u}$.
Si u est défini sur $\mathbb{D}$ ou $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ et admet une limite non-tangentielle u^* sur $\mathbb{T}$, on définit $\tilde{u}$ comme $\widetilde{u^*}$.
On donne quelques propriétés classiques des fonctions conjuguées *complexes* :

$$\text{i) Si } u \in L^2, \text{ alors } \langle u, \tilde{u}\rangle = 0. \tag{3}$$
$$\text{ii) Si } u \in H^2, \text{ alors } \tilde{u} \in H^2, \text{ et } \tilde{u} = -iu + i\hat{u}(0) \tag{4}$$
$$\text{iii) Si } u \in \bar{H}_0^2, \text{ alors } \tilde{u} \in \bar{H}_0^2, \text{ et } \tilde{u} = iu \tag{5}$$
$$\text{iv) Si } u \in H^2, \text{ et } v \in \bar{H}_0^2, \text{ alors } \langle u, \tilde{v}\rangle = \langle \tilde{u}, v\rangle = 0. \tag{6}$$

On conclut la section par le théorème suivant, tissant un lien entre les intégrales singulières et les fonctions conjuguées. On utilisera l'abus de notation consistant à écrire $⨍_{[0,2\pi]} u(\varphi)\ d\varphi$ au lieu de $\lim_{\epsilon\to 0} ⨍_{\{\theta-\varphi>\epsilon\}} u(e^{i\theta})\ d\theta$.

Théorème 1.3 *Si $u \in L^2$,*

$$\tilde{u}(\theta) = \frac{1}{2\pi} ⨍_{[0,2\pi]} \cot\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right) u(\varphi)\ d\varphi. \tag{7}$$

2 Approximation méromorphe et orthogonalité non-hermitienne

2.1 Théorie AAK dans $C(\mathbb{T})$

Considérons une fonction f dans $C(\mathbb{T})$. On définit l'opérateur de Hankel associé à f par :

$$\begin{array}{rccc} A_f : & H^2 & \to & \bar{H}_0^2 \\ & u & \mapsto & P_-(fu). \end{array}$$

C'est un opérateur continu de norme au plus $\|f\|_\infty$. Il est même compact d'après le théorème de Kronecker, et la condition $f \in H^\infty + C(\mathbb{T})$ est nécessaire et suffisante d'après le théorème de Hartman. On notera alors $(\sigma_m)_{m\in\mathbb{N}}$ la suite des valeurs singulières de A_f, et v_m le vecteur singulier "associé" à σ_m tel que $\|v_m\|_2 = 1$. On entend par "associé" le fait que v_m est le premier élément d'une paire de Schmidt associée à σ_m, et qu'ainsi, $A_f^* A_f(v_m) = \sigma_m^2 v_m$. On convient de répéter une valeur singulière autant de fois que sa multiplicité le requiert.
On voit aisément que $A_f^*(u) = P_+(\bar{f}u)$.

Une question standard dans la théorie des espaces de Hardy est le problème d'approximation méromorphe suivant, dit de de AAK :

Etant donnés $f \in C(\mathbb{T})$ et $m \geq 0$, trouver $g_m \in H_m^\infty$ tel que :

$$\|f - g_m\|_\infty = \inf_{g \in H_m^\infty} \|f - g\|_\infty. \tag{8}$$

L'existence et l'unicité de (8) sont données par le théorème fondamental suivant, rappelé sans démonstration :

Théorème 2.1 (Approximation AAK)

1. *Le problème de AAK a une unique solution :* $g_m = \frac{P_+(fv_m)}{v_m}$ *;*
2. $|f - g_m| = \sigma_m$ *p.p. sur* $\mathbb{T}$ *;*
3. $\|f - g_m\|_\infty = \sigma_m$.

De façon équivalente, on a : $f - g_m = \frac{A_f(v_m)}{v_m}$.

g_m est appelé *meilleur approximant méromorphe de f d'ordre m*. En toute rigueur, g_m est un approximant optimal dans H_m^∞ de l'intégrale de Poisson de f.
Le cas $m = 0$ est appelé problème de Nehari, et on remarque alors que la solution g_0 est un symbole minimisant de la norme de l'opérateur A_f.

En fait, g_m a au plus m pôles dans $\mathbb{D}$, qui sont aussi des zéros de v_m. On factorise $v_m \in H^2$ en $v_m = b_m w_m$, où $b_m \in B_m$. Il est clair que $\|w_m\|_2 = 1$, ce qui va s'avérer essentiel par la suite. De plus, w_m est sans zéro sur $\mathbb{D}$. On décompose alors b_m en $b_{m_1} b_{m_2}$, $m_1 + m_2 = m$, où $b_{m_1} \in B_{m_1}$ a des zéros communs avec $P_+(fv_m)$, tandis que $b_{m_2} \in B_{m_2}$ n'en a pas. Les pôles de g_m sont donc ceux de b_{m_2}, si bien que $g_m \in H_{m_2}^\infty$. Cette nuance peut être écartée en imposant, quitte à extraire, que la suite $(\sigma_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est *strictement* décroissante. En effet, dans ce cas, g_m a exactement m pôles dans $\mathbb{D}$, et donc $m_2 = m$, $b_m = b_{m_2}$. On fera systématiquement cette hypothèse – en particulier dans le théorème 2.2, motivée par le suivi des pôles effectifs de g_m , c'est-à-dire des zéros de b_{m_2}.

Voici un théorème qui donne une formule fondamentale, *linéaire* en w_m, et semblable à une relation spectrale – d'où sa dénomination :

Théorème 2.2 (Formule spectrale) *Avec les notations ci-dessus,*

$$A_f(v_m)(e^{i\theta}) = \sigma_m e^{-i\theta}\ \overline{b_m \jmath_m w_m(e^{i\theta})},$$

où j_m est une fonction intérieure.

Autrement dit, $A_f(v_m) = \sigma_m \{b_m \check{\jmath}_m w_m\}$.

Preuve : (σ_m, v_m) étant un élément singulier de A_f, on a d'une part :

$$A_f^* A_f(v_m) = \sigma_m^2 v_m = \mathbf{P}_+ \left(\frac{|A_f(v_m)|^2}{\overline{v_m}} \right), \tag{9}$$

la dernière inégalité provenant du théorème 2.1.2). D'autre part,

$$\begin{aligned} A_f^* A_f v_m &= P_+(\overline{f} A_f(v_m)), \\ &= P_+(\overline{f - g_m} A_f(v_m)) + P_+(\overline{g_m} A_f(v_m)). \end{aligned} \tag{10}$$

D'après l'expression de g_m donnée par le théorème 2.1, il vient des deux écritures : $P_+(\overline{g_m} A_f(v_m)) = 0$.
On en déduit que $\overline{g_m} A_f(v_m) \in \overline{H}^1_0$, ou de façon équivalente :

$$\overline{P_+(f v_m)} A_f(v_m) \in \overline{b}_m \overline{w}_m \overline{H}^1_0.$$

Par unicité de la factorisation intérieure / extérieure, il vient $A_f(v_m) \in \overline{b}_m \overline{w}_m \overline{H}^2_0$, puis :

$$A_f(v_m) = e^{-i\theta} \overline{b_m j_m E},$$

où j_m est une fonction intérieure et E est extérieure. Par égalité des modules, on en déduit que $E = \sigma_m w_m$, puis le résultat. □

2.2 Formule d'orthogonalité non-hermitienne

Comme annoncé dans l'introduction, considérons f une fonction analytique en dehors d'un certain compact $L \subset \mathbb{D}$, et de limite nulle à l'infini – f correspond au potentiel mesuré projeté anti-analytiquement.

Quitte à extraire une sous-suite, on suppose que la suite $(\sigma_m)_m$ est *strictement* décroissante. On a vu que cette restriction ne supprime aucun des pôles effectifs de g_m. On suppose en outre que $f \notin H^\infty_m$, pour $m \geq 0$. D'après le théorème de représentation de Riesz dans $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, il existe un compact K de $\mathbb{D}$ et une mesure complexe ν sur K tels que :

$$f(z) = \int_K \frac{d\nu(t)}{z-t}\,, \quad \forall |z| \geq 1. \tag{11}$$

En fait, cette formule est vraie pour tout compact K contenant un voisinage de L : en effet, soit $K \subset \mathbb{D}$ un tel voisinage et B un autre voisinage de L inclus dans K. On définit $\varphi \in C(K)'$ par : $\varphi(g) = (2i\pi)^{-1} \int_{\partial B} g(\xi) f(\xi) d\xi$, pour $g \in C(K)$. D'après le théorème de Riesz, il existe une mesure complexe ν sur K représentant φ. Si $|z| \geq 1$, la formule de Cauchy implique d'autre part que $\varphi(t \mapsto 1/(z-t)) = f(z)$, d'où l'écriture attendue.

D'après la formule de Cauchy anti-analytique appliquée à la fonction $fv_m \in L^1(\mathbb{T})$:

$$A_f(v_m)(z) = \mathbf{P}_-(fv_m)(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{f(\xi) v_m(\xi)}{z-\xi} d\xi, \quad \forall |z| > 1. \tag{12}$$

Cette représentation se voit aisément sur les monômes, puis par densité sur $L^2(\mathbb{T})$, et enfin sur $L^1(\mathbb{T})$.

Par (11) et (12), le théorème de Fubini et la formule de Cauchy sur v_m,

$$A_f(v_m)(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{T}} \int_K \frac{v_m(\xi)}{(z-\xi)(\xi-t)} d\xi d\nu(t), \tag{13}$$

$$= \int_K \frac{v_m(t)}{z-t} d\nu(t), \quad \forall |z| > 1. \tag{14}$$

D'autre part, la formule spectrale (théorème 2.2) permet de prolonger $A_f(v_m)$ anti-analytiquement en

$$\sigma_m \; z^{-1} \overline{b}_m(1/z) \overline{j}_m(1/z) \overline{w}_m(1/z) \in \overline{H}^2_0.$$

D'où en changeant z en $1/z$:

$$\sigma_m \overline{b_m(\bar{z}) j_m(\bar{z}) w_m(\bar{z})} = \int_K \frac{v_m(t)}{1-zt} d\nu(t), \quad \forall |z| < 1. \tag{15}$$

Cette écriture s'étend analytiquement aux $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus K^{-1}$. Elle admet plusieurs variantes essentielles.

On peut multiplier la formule spectrale par $j_m b_m$, ou encore par b_m, et on applique $\mathbf{P}_-$, ce qui mène à

$$A_f(j_m b_m v_m) = \sigma_m e^{-i\theta} \bar{w}_m \quad \text{ou} \quad A_f(b_m v_m) = \sigma_m e^{-i\theta} \bar{\jmath}_m \bar{w}_m,$$

puis en raisonnant comme en (13), on a les deux formules :

$$\sigma_m w_m(z) = \int_K \frac{\overline{j_m(t) b_m^2(t) w_m(t)}}{1 - z\bar{t}} d\bar{\nu}(t), \quad \forall z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \bar{K}^{-1} \tag{16}$$

$$\sigma_m j_m(z) w_m(z) = \int_K \frac{\overline{b_m^2(t) w_m(t)}}{1 - z\bar{t}} d\bar{\nu}(t), \quad \forall z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \bar{K}^{-1} \tag{17}$$

puisque $v_m = b_m w_m$.
La formule (16) montre que la fonction w_m s'étend analytiquement sur $\overline{\mathbb{C}} \setminus \bar{K}^{-1}$, en particulier à travers $\mathbb{T}$.
La formule (17) montre de même que $j_m w_m$ s'étend analytiquement sur $\overline{\mathbb{C}} \setminus \bar{K}^{-1}$, mais surtout, elle va s'avérer cruciale dans les théorèmes décrivant le comportement asymptotique des pôles.

Conformément aux notations qui suivront, notons $\xi_1^{(m)}, \ldots, \xi_{n_m}^{(m)}$ les pôles de g_m comptés avec multiplicité. Ce sont exactement les zéros de b_m vu que $\sigma_m > \sigma_{m-1}$ par hypothèse. Pour simplifier les notations, on fixe m et on se dispense des exposants en (m). Soit alors d_j la multiplicité de ξ_j. Dans (15), l'évaluation de l'intégrale de droite en $\bar{\xi}_j$ donne 0, et il en est de même lorsque qu'on dérive l'expression au plus $d_j - 1$ fois. Ainsi,

$$\int_K \frac{v_m(t) t^{k_j}}{(1 - \bar{\xi}_j t)^{k_j+1}} d\nu(t) = 0, \quad k_j \in \{0, \ldots, d_j - 1\}, \quad j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Par combinaisons linéaires, on peut reconstituer de proche en proche au numérateur tous les monômes de degré strictement inférieur à k_j, si bien qu'au dernier rang :

$$\int_K \frac{v_m(t) t^{k_j}}{(1 - \bar{\xi}_j t)^{d_j}} d\nu(t) = 0, \quad k_j \in \{0, \ldots, d_j - 1\}, \quad j \in \{1, \ldots, n\}. \tag{18}$$

Si on note maintenant

$$q_m(z) = \prod_{j=1}^{n_m} (z - \xi_j)^{d_j}, \quad \tilde{q}_m(z) = \prod_{j=1}^{n_m} (z - \bar{\xi}_j)^{d_j},$$

alors $b_m = q_m / \tilde{q}_m$. Enfin, par de nouvelles combinaisons linéaires des équations (18), on obtient la *formule d'orthogonalité* :

$$\int_K \frac{q_m(t)}{\tilde{q}_m^2(t)} t^k w_m(t) d\nu(t) = 0, \quad k \in \{0, \ldots, m - 1\}. \tag{19}$$

Cette formule exprime que q_m est orthogonal aux polynômes de degré au plus $m-1$ pour le produit scalaire : $(u,v) \mapsto \int_K uv d\nu_m$, où $d\nu_m = w_m/\tilde{q}_m^2 d\nu$ est une mesure complexe dépendant de m.
q_m est appelé *polynôme orthogonal non-hermitien d'ordre m pour la mesure* $d\nu_m$.

2.3 Normalité et convergence asymptotique

Comme application directe de (19), le théorème suivant donne le lien fondamental entre la normalité de la famille (w_m) et la convergence des pôles. On utilise à volonté les notations qui précèdent :

Théorème 2.3 *Soit μ_m la mesure de probabilité de masse égale sur chaque $\xi_j^{(m)}$. Si la famille $(j_m w_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est normale sur $\overline{\mathbb{C}} \setminus \bar{K}^{-1}$, alors la famille $(w_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est normale sur $\overline{\mathbb{C}} \setminus \bar{K}^{-1}$, et tout point d'accumulation de $(\mu_m)_{m\in\mathbb{N}}$ pour la topologie *-faible a un support inclus dans K.*

Preuve : Étudions les points d'accumulation de $\left(\xi_j^{(m)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ qui ne sont pas dans K. Il suffit de montrer qu'ils sont en nombre fini.
Soit $\xi \notin K$ un tel point. Quitte à extraire, il existe donc un rang m_0 à partir duquel $\xi_j^{(m)} \notin K$. On peut donc écrire (17) pour $z = 1/\bar{\xi}_j^{(m)}$, $m > m_0$:

$$\begin{aligned}\overline{j_m w_m\left(\frac{1}{\bar{\xi}_j^{(m)}})\right)} &= \frac{\xi_j^{(m)}}{\sigma_m}\int_K \frac{b_m^2(t)w_m(t)}{\xi_j^{(m)}-t}d\nu(t)\\ &= \frac{\xi_j^{(m)}}{\sigma_m}\int_K q_m(t)\frac{q_m(t)}{\xi_j^{(m)}-t}d\nu_m(t)\end{aligned}$$

et comme $q_m(t)/(\xi_j^{(m)}-t)$ est un polynôme de degré strictement inférieur à m, d'après (19),

$$j_m w_m\left(\frac{1}{\bar{\xi}_j^{(m)}}\right) = 0, \quad m > m_0.$$

Mais d'après le corollaire 1.1, j_m est un produit de Blaschke fini, et par normalité de $(j_m w_m)$ sur $\mathbb{D}$, le degré de la famille (j_m) est même borné.
De plus, comme $|j_m(z)| \geq 1$ si $|z| \geq 1$, alors l'hypothèse de normalité montre que $(w_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est localement uniformément bornée sur $\overline{\mathbb{C}} \setminus \bar{K}^{-1} \cap \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}$ indépendamment de m. Cette majoration s'étend sur tout $\overline{\mathbb{C}} \setminus \bar{K}^{-1}$ d'après le principe du maximum. Donc $(w_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est normale sur $\overline{\mathbb{C}} \setminus \bar{K}^{-1}$.
D'après le théorème de Montel, la famille $(w_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est relativement compacte

sur $\overline{\mathbb{C}} \setminus \bar{K}^{-1}$. Or, pour tout m, w_m est sans zéro sur $\mathbb{D}$, donc d'après le théorème d'Hürwitz, toute fonction limite w n'admet aucun zéro sur $\mathbb{D}$, puisque $\|w_m\|_2 = 1$ entraîne $w \not\equiv 0$ – cette dernière assertion nécessite la normalité sur un voisinage de $\mathbb{D}$. Ainsi, w a un nombre fini de zéros en dehors du réfléchi de K.

D'autre part, par convergence uniforme sur les compacts de $\overline{\mathbb{C}} \setminus \bar{K}^{-1}$, et par les propriétés de j_m, on a $w(1/\bar{\xi}) = 0$. Les points d'accumulation de $(\xi_j^{(m)})_m$ qui ne sont pas dans K sont donc en nombre fini, ce qu'il fallait démontrer. $\square$

À nouveau, grâce à la formule d'orthogonalité (19), on dispose d'un théorème beaucoup plus fort permettant de décrire la limite de mesures comme une distribution de Green à l'équilibre. On renvoie à [2] pour une démonstration de ce fait. Avec les notations de (19), il s'énonce de la façon suivante :

Théorème 2.4 *Soit μ_m la mesure de probabilité de masse égale sur chaque $\xi_j^{(m)}$. Si la famille (q_m) vérifie une relation d'orthogonalité du type (19), et si la suite $(w_m^{1/m})_{m\in\mathbb{N}}$ converge uniformément dans un voisinage de K vers une constante non nulle, alors $(\mu_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge *-faiblement quand $m \to +\infty$ vers la mesure d'équilibre de K pour le potentiel de Green.*

3 Comportement asymtotique des pôles dans le cas d'une coupure

L'objet du chapitre est l'étude du comportement asymptotique des pôles des meilleurs approximants méromorphes de fonctions algébriques à deux points de branchement d'ordre prescrit. On va voir que les pôles de g_m s'accumulent "en majorité" sur la géodésique hyperbolique reliant ces singularités. Précisément,

Théorème 3.1 *Soit f une fonction analytique sur $\mathbb{C}$ sauf en deux singularités algébriques $z_1,\ z_2 \in \mathbb{D}$, d'ordre strictement supérieur à -1. On note $\boldsymbol{G}$ la géodésique hyperbolique orientée joignant z_1 et z_2 dans $\mathbb{D}$. Si g_m est un meilleur approximant méromorphe de f d'ordre m, on note $\xi_1^{(m)}, \ldots,\ \xi_{n_m}^{(m)}$ les pôles comptés avec multiplicité.*
*Si μ_m est la mesure de probabilité de masse égale sur chaque $\xi_j^{(m)}$, alors μ_m converge *-faiblement quand $m \to +\infty$ vers la mesure d'équilibre de Green de $\boldsymbol{G}$.*

Preuve : D'après la formule de Cauchy,

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(t)}{z-t} dt, \quad \forall |z| \geq 1,$$

pour toute courbe fermée γ orientée encerclant z_1 et z_2. Etant donné que les singularités algébriques sont d'ordre strictement supérieur à -1 :

$$\left| \frac{f(t)}{z-t}\ \mathbf{1}_\gamma(t) \right| \leq \frac{|g(t)|}{|z-t||t-z_1|^{m_1}|t-z_2|^{m_2}}\ ,$$

où $m_1, m_2 < 1$ et g est analytique sur $\mathbb{D}$.
Ce dernier terme étant intégrable au voisinage de $\mathbf{G}$, on déduit par convergence dominée :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbf{G}} \frac{\delta_f(t)}{z-t} dt, \quad \forall |z| \geq 1,$$

où $\delta_f(t) = f^+(t) - f^-(t)$ est la différence entre les deux déterminations de f le long du côté "supérieur" et "inférieur" de la géodésique orientée $\mathbf{G}$.
On pose $d\nu(t) = 1/2i\pi\ \delta_f(t)dt$.
Pour montrer le théorème, il suffit, invoquant le théorème 2.4, de prouver que $(w_m^{1/m})_{m\in\mathbb{N}})$, ou une sous-suite, *converge uniformément dans un voisinage de $\boldsymbol{G}$ vers une constante non nulle*. Pour cela, on va montrer que $j_m w_m,\ m \in \mathbb{N}$ est une famille normale sur un voisinage de $\mathbb{D}$, et pas seulement à l'intérieur de $\mathbb{D}$, de façon à exploiter le fait $\|w_m\|_2 = 1$, ce qui donnera la non-nullité des points d'accumulation.

Commençons par donner une propriété spécifique des arcs géodésiques :

Lemme 3.1 *Si* $\mathbf{G}$ *est une géodésique de* $\mathbb{D}$ *et* $u \in H^2$*, alors il existe une autre fonction* $v \in H^2$ *qui coïncide avec* $\overline{u}$ *sur* $\mathbf{G}$ *et vérifie* $C_1\|u\|_2 \leq \|v\|_2 \leq C_2\|u\|_2$*, où* C_1 *et* C_2 *sont des constantes indépendantes de* u*.*

La preuve se fait en deux temps :
- Si $\mathbf{G} = \gamma \subset \mathbb{R}$, il suffit d'écrire $u(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$, et de poser $v(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \overline{a}_k z^k$. v convient et $\|v\|_2 = \|u\|_2$.

- Si $\mathbf{G}$ est une géodésique quelconque, elle s'écrit comme l'image d'un segment réel γ par une application conforme du type :

$$B_a(z) = e^{i\alpha}\frac{a-z}{1-\overline{a}z},\ a \in \mathbf{G},\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Montrons que $u \circ B_a \in H^2$:

$$\|u \circ B_a\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |u \circ B_a(e^{i\theta})|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mid u(e^{i\theta})^2 \frac{1- \mid a \mid^2}{\mid a - e^{i\theta} \mid^2} d\theta,$$

par le changement de variables $e^{i\tau} = B_a(e^{i\theta})$. Ainsi,

$$K_1\|u\|_2 \leq \|u \circ B_a\|_2 \leq K_2\|u\|_2,$$

avec $K_1 = ((1-|a|^2)/(|a|+1)^2)^{1/2}$ et $K_2 = ((1-|a|^2)/(|a|-1)^2)^{1/2}$. Comme $u \circ B_a$ est analytique dans $\mathbb{D}$, elle est donc dans H^2. On applique alors le premier cas à $u \circ B_a$:

$$\exists w \in H^2 / w = \overline{u \circ B_a} \text{ sur } \gamma \text{ et } \|w\|_2 = \|u \circ B_a\|_2\ .$$

On pose $v = w \circ B_a^{-1}$, et, par le même calcul, $v \in H^2$. v convient avec $C_i = K_i^2$, ce qui prouve le lemme. □

Supposons en premier lieu que δ_f n'a pas de zéro sur $\mathbf{G}$, sauf éventuellement en z_1 et z_2.
On peut prolonger δ_f sur $\mathbf{G} \setminus \{z_1,\ z_2\}$ analytiquement. Par hypothèse, son argument est bien défini au choix près d'une détermination, et il est continu sur $\mathbf{G} \setminus \{z_1, z_2\}$ d'après le théorème du relèvement. Etudions la continuité aux points $z_1,\ z_2$. Raisonnons, par exemple, dans un voisinage V_1 de z_1 : le développement de Puiseux dans V_1 s'écrit

$$\delta_f = \sum_{k=-N}^{+\infty} a_k(z-z_1)^{k/d_1} = (z-z_1)^{-N/d_1} g(z),\ \text{où } g \text{ est analytique sur } V_1.$$

Ainsi, $\arg(\delta_f(z)) = -Nd_1^{-1}\arg(z-z_1) + \arg(g(z)),\quad$ pour $z \in V_1 \cap \mathbf{G}$.
Or, $z \mapsto \arg(z-z_1)$ est continue sur $V_1 \cap \mathbf{G}$ puisque le graphe de la géodésique

$\mathbf{G}$ a une tangente en z_1 – on utilise fortement, à ce stade, la régularité de $\mathbf{G}$. Donc $\arg(\delta_f)$ est continu en z_1. Le résultat est vrai en z_2 de la même façon, si bien que *l'argument de δ_f est continu sur $\mathbf{G}$.*
D'autre part, dt a aussi un argument continu sur $\mathbf{G}$ car la mesure $dt/|dt|$ est continue de module 1 sur $\mathbf{G}$, donc d'argument continu sur $\mathbf{G}$ d'après le théorème du relèvement.
Par suite, il existe, d'après le théorème de Stone-Weierstrass, une fonction rationnelle $P \in H^\infty$ à valeurs réelles telle que $|P + \arg dt/|dt|| < \pi/3$ sur $\mathbf{G}$, ce qui implique :

$$\Re\mathrm{e}\ \{e^{iP(t)}\delta_f(t)dt/|dt|\} > |\delta_f(t)|/2, \quad \forall t \in \mathbf{G}.$$

Moyennant ces résultats de régularité, la formule (17) avec $\mathbf{G} = K$ donne la majoration, valable pour tout $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbf{G}}^{-1}$:

$$|\sigma_m j_m(z) w_m(z)| \leq \frac{1}{\inf_{t\in\mathbf{G}} |1 - z\bar{t}|} \left| \int_{\mathbf{G}} b_m^2(t) w_m(t) d\nu(t) \right|. \tag{20}$$

Or, par définition de P :

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbf{G}} |b_m^2(t) w_m(t)| d|\nu|(t) \leq \left| \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbf{G}} |b_m^2(t) w_m(t)| e^{iP(t)} \delta_f(t) dt \right|, \tag{21}$$

en majorant la partie réelle de l'intégrale par son module.
Pour prouver la normalité de $(j_m w_m)$, il faudrait majorer cette dernière intégrale par un multiple de σ_m. La seule façon de faire réapparaître σ_m est d'utiliser à nouveau une écriture dérivée de (13), c'est-à-dire une transformée de Cauchy pour la mesure $d\nu$. Or, l'intégrale de droite de (21) s'écrit aussi :

$$\int_{\mathbf{G}} G_m(t) e^{iP(t)} v_m(t) w_m^{-1/2}(t) d\nu(t), \tag{22}$$

où, grâce au lemme 3.1, on a pu trouver $G_m \in H^2$ qui vaille $\overline{b_m w_m^{1/2}}$ sur $\mathbf{G}$. Rappelons que $w_m^{1/2}$ est bien définie, analytique sur $\mathbb{D}$ et sans zéro puisque w_m a les mêmes propriétés.
On modifie à nouveau (22) : son intégrande est analytique sur $\mathbb{D}$, donc on peut appliquer la formule de Cauchy sur $\mathbb{T}_r$, $r < 1$. Ainsi, (22) peut s'écrire :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\mathbb{D}(0,r)} \int_{\mathbf{G}} \frac{G_m(\xi) e^{iP(\xi)} v_m(t)}{w_m^{1/2}(\xi)} \frac{d\nu(t) d\xi}{\xi - t},$$

l'utilisation du théorème de Fubini étant justifiée par la continuité de l'intégrande sur le compact $\mathbb{T}_r \times \mathbf{G}$. On va voir qu'on peut ramener l'intégrale par rapport à ξ sur $\mathbb{T}$. Remarquons d'abord que :

$$\frac{\sigma_m}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{iP(e^{i\theta})}\frac{G_m\overline{j_m b_m w_m}}{w_m^{1/2}}(e^{i\theta})d\theta = \frac{\sigma_m}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} G_m(\xi)e^{iP(\xi)}j_m(\xi)b_m(\xi)\frac{\overline{w_m(\xi)}}{w_m^{1/2}(\xi)}\frac{d\xi}{\xi}.$$

On peut alors remplacer l'expression $\sigma_m j_m b_m$ dans l'intégrale de droite par (17), valable dans un voisinage de $\mathbb{T}$, et on obtient exactement :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbf{G}}\frac{G_m(\xi)e^{iP(\xi)}v_m(t)}{w_m^{1/2}(\xi)}\frac{d\nu(t)d\xi}{\xi - t}.$$

Cette intégrale vaut (22) à condition que l'on puisse sommer en ξ sur $\mathbb{T}_r$ sans la modifier. Montrons pour cela que la fonction $G_m e^{iP} j_m b_m \bar{w}_m / w_m^{1/2}$ est analytique bornée sur les couronnes ouvertes $C(r, 1)$, pour r plus grand qu'un certain R.

On a déjà vu que w_m est analytique sans zéro sur $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{G}^{-1}$, donc il en est de même pour $w_m^{1/2}$. En particulier, la fonction $\varphi_m : z \mapsto \overline{w_m(1/\bar{z})}/w_m^{1/2}(z)$ est analytique sur $\mathbb{D} \setminus \mathbf{G}$. Qu'en est-il sur $\mathbb{T}$? Si $z_0 \in \mathbb{T}$ est un zéro de $w_m^{1/2}$ d'ordre n, alors c'est un zéro de $z \mapsto \bar{w}_m(1/\bar{z})$ d'ordre $2n > n$; ainsi, φ_m n'admet aucun pôle sur $\mathbb{T}$, elle est donc analytique bornée sur $C(r, 1)$, pour $\max\{|z_1|, |z_2|\} < r < 1$.

D'autre part, $j_m b_m$ est un produit de Blaschke d'ordre fini, et comme les pôles de $\overline{j_m b_m}(1/z)$ sont les zéros de $j_m b_m$, alors $z \mapsto \overline{j_m b_m}(1/z)$ est analytique bornée sur $C(r, 1)$ pour r plus grand qu'un certain ρ. Enfin, $G_m \in H^2$, donc $R = \max\{|z_1|, |z_2|,\ \rho\}$ convient.

D'après la formule de Cauchy, on peut donc indifféremment sommer (22) sur $\mathbb{T}$ ou sur $\mathbb{T}_r$. Il suit donc de (21) la majoration fondamentale :

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbf{G}} |b_m^2(t)w_m(t)|d|\nu|(t) \le \left\| \frac{\sigma_m}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{iP(e^{i\theta})}\frac{G_m\overline{j_m b_m w_m}}{w_m^{1/2}}(e^{i\theta})d\theta \right\|.$$

D'où, par unimodularité de j_m et b_m sur le cercle, puis par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbf{G}} |b_m^2(t)w_m(t)|d|\nu|(t) \le 2\sigma_m\|e^{iP}\|_\infty\|G_m\|_2\|w_m^{1/2}\|_2.$$

De plus, $\|w_m^{1/2}\|_2 = \|w_m\|_1^{1/2} \le \|w_m\|_1 = 1$ par Cauchy-Schwarz à nouveau, et d'après le lemme 3.1, il existe un réel $C_2 > 0$ tel que

$$\|G_m\|_2 \le C_2\|b_m w_m\|_2 = C_2\|w_m\|_1^{1/2} \le 1.$$

On en déduit :

$$\int_{\mathbf{G}} |b_m^2(t) w_m(t)| d|\nu|(t) \leq 2C_2\ \sigma_m \|e^{iP}\|_\infty, \tag{23}$$

puis en injectant dans (20) :

$$|j_m(z) w_m(z)| \leq \frac{2C_2 \|e^{iP}\|_\infty}{\inf_{t\in\mathbf{G}} |1 - z\bar{t}|}, \quad \forall z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \bar{\mathbf{G}}^{-1}. \tag{24}$$

Concluons sur la normalité de la famille $w_m^{1/m},\ m \in \mathbb{N}^*$ sur un voisinage de $\mathbb{D}$.
On a déjà réglé la question de la normalité de $w_m,\ m \in \mathbb{N}^*$ dans le lemme 2.3, ainsi que le fait que tout point d'accumulation w est non identiquement nul. De la même manière,

$$|w_m^{1/m}(z)| \leq \max\{1,\ 2C_2 \frac{\|e^{iP}\|_\infty}{\inf_{t\in\mathbf{G}} |1 - z\bar{t}|\}} \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \bar{\mathbf{G}}^{-1},$$

donc la famille $w_m^{1/m},\ m \in \mathbb{N}^*$ y est relativement compacte. Quitte à extraire, supposons que $w_m \xrightarrow[m\to+\infty]{} w$ et $w_m^{1/m} \xrightarrow[m\to+\infty]{} W$. Or, w et W sont sans zéro, donc leur logarithme principal est bien défini, et de plus $\log(w_m^{1/m}) \to 0$. Ainsi, $\log(W) = 0$, *i.e.* $W = 1$. Donc la fonction constante égale à 1 est la seule valeur d'adhérence de $w_m^{1/m},\ m \in \mathbb{N}^*$.
Ceci conclut le théorème dans le cas où δ_f n'a pas de zéro sur $\mathbf{G}$, sauf éventuellement en z_1 et z_2.

Il reste à envisager le cas technique où δ_f possède des zéros sur $\mathbf{G}$ distincts de z_1 et z_2. Il suffit de montrer à nouveau que la famille $j_m w_m,\ m \in \mathbb{N}^*$ est localement uniformément bornée sur $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbf{G}}^{-1}$ par une fonction indépendante de m. D'abord, notons que les zéros de δ_f sont isolés sur $\mathbf{G}$: c'est vrai sur $\mathbf{G} \setminus \{z_1, z_2\}$ par analyticité ; de plus, ces zéros ne peuvent s'accumuler aux extrémités de par la nature des singularités z_1 et z_2. Dénombrons par $\zeta_1, \ldots,\ \zeta_n$ ces zéros comptés avec multiplicité. Ecrivons $\delta_f = b\delta_f'$, où b est le produit de Blaschke de zéros $\zeta_1, \ldots,\ \zeta_n$, et où δ_f' est d'argument continu sur $\mathbf{G}$. On peut toujours supposer que b prend des valeurs réelles sur $\mathbf{G}$, quitte à le multiplier par une constante de module 1 : c'est clair si $\mathbf{G}$ est un segment réel, et sinon, $\mathbf{G}$ est l'image d'un segment réel par un produit de Blaschke B ayant un seul zéro, ce qui nous ramène au premier cas, par involution de B, mais à une constante de module 1 près. On raisonne alors comme dans la première partie de la démonstration. On définit P comme approximant cette fois l'argument de $\delta_f' dt/|dt|$. On obtient alors l'inégalité analogue :

$$\int_{\mathbf{G}} |b b_m^2(t) w_m(t)| d|\nu|(t) \leq 2C_2 \sigma_m \|e^{iP}\|_\infty. \tag{25}$$

D'autre part, on a par (1) et le théorème 2.2 :

$$A_f(bb_m v_m) = \sigma_m \mathbf{P}_-(be^{-i\theta}\overline{j_m w_m}) = \sigma_m e^{-i\theta}\overline{\mathbf{P}_+(\bar{b} j_m w_m)}.$$

En appliquant cette expression en $e^{-i\theta}$ et en raisonnant comme en (13) , il vient :

$$\sigma_m \mathbf{P}_+(b(e^{-i\theta})\overline{j_m(e^{-i\theta})w_m(e^{-i\theta})}) = \int_{\mathbf{G}} \frac{b(t)b_m^2(t)w_m(t)}{1-e^{i\theta}t} d\nu(t).$$

Ainsi, $\mathbf{P}_+(b(e^{-i\theta})\overline{j_m(e^{-i\theta})w_m(e^{-i\theta})})$ est une fonction de H^2 qui s'étend analytiquement sur $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbf{G}^{-1}$, et de plus, par (25), elle y est localement uniformément bornée indépendamment de m. D'autre part, comme projection anti-analytique d'une fonction de L^2 de norme 1, $\mathbf{P}_-(b(e^{-i\theta})\overline{j_m(e^{-i\theta})w_m(e^{-i\theta})})$ s'étend en une fonction analytique sur $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{\mathbb{D}\}$, et elle y est aussi localement uniformément bornée indépendamment de m.
Ainsi, $b(e^{-i\theta})\overline{j_m(e^{-i\theta})w_m(e^{-i\theta})}$ s'étend analytiquement sur $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{\mathbb{D}\} \cup \mathbf{G}^{-1}\}$ en une fonction localement uniformément bornée indépendemment de m. Par prolongement analytique, cette fonction s'identifie alors à $b(1/z)\overline{j_m(\overline{z})w_m(\overline{z})}$ sur $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{\mathbb{D}\} \cup \mathbf{G}^{-1}\}$. Or, la fonction $z \mapsto b(1/z)$ y est localement uniformément bornée indépendemment de m, donc il en est de même de $z \mapsto \overline{j_m(\overline{z})w_m(\overline{z})}$. S'étant affranchi du terme en $b(1/z)$, on sait que cette dernière fonction est analytique sur $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbf{G}^{-1}$, et que sa restriction au disque unité atteint sa borne supérieure sur $\mathbb{T}$, par le principe du maximum.

Il s'ensuit finalement que $z \mapsto \overline{j_m(\overline{z})w_m(\overline{z})}$ est localement uniformément bornée indépendemment de m sur $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbf{G}^{-1}$, ou de façon équivalente, que $z \mapsto j_m(z)w_m(z)$ est localement uniformément bornée indépendemment de m sur $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbf{G}}^{-1}$, ce qui fournit la conclusion requise.

Le théorème est donc entièrement démontré. $\square$

4 Comportement asymtotique des pôles dans le cas général

Lorsque le compact K n'est plus une coupure, on s'attend à démontrer un résultat analogue au théorème 3.1, mais on ne peut espérer décrire la mesure limite comme la distribution d'équilibre de K. En effet, ? .

Conjecture

Soit f une fonction analytique sur $\bar{\mathbb{C}}$ en dehors d'un compact K de $\mathbb{D}$, et soit Δ le plus petit disque fermé centré en 0 contenant K. On note g_m un meilleur approximant méromorphe de f d'ordre m, et $\xi_1^m, \ldots, \xi_{n_m}^{(m)}$ ses pôles comptés avec multiplicité.

Si μ_m est la mesure de probabilité de masse égale sur chaque $\xi_j^{(m)}$, alors tout point d'accumulation de $(\mu_m)_{m\in\mathbb{N}}$ pour la topologie *-faible a un support inclus dans Δ.

Plus précisément, pour tout voisinage ouvert V de K, il existe un entier N et un rang m_0 tels que :

$$m \geq m_0 \Rightarrow \#\{\xi_k^m \ / \ \xi_k^m \notin V,\ 1 \leq k \leq n_m\} \leq N.$$

[Si cette assertion – non encore démontrée – s'applique à des fonctions bien plus générales que dans le théorème 3.1, on ne décrit pas ici la nature des points d'accumulation de la suite des mesures (μ_m) vis-à-vis de la mesure d'équilibre de Δ, mais on donnera en dernière section une caractérisation analogue, mais vis-à-vis de la mesure de balayage].

4.1 Preuve partielle pour les fonctions de partie réelle positive minorée

$$\text{Posons } I = \int_{\mathbb{T}} \bar{\jmath}_m\left(\frac{1}{z}\right) \bar{v}_m\left(\frac{1}{z}\right) \bar{h}_m\left(\frac{1}{z}\right) \bar{v}_m\left(\frac{\mathrm{R}}{z}\right) \bar{h}_m\left(\frac{\mathrm{R}}{z}\right) \frac{\mathrm{R}}{z}\frac{dz}{z} \qquad (26)$$

Cette intégrale peut s'estimer de deux façons "symétriques".

D'une part,

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{\mathbb{T}} \mathbf{P}_+ \left\{ \bar{j}_m \left(\frac{1}{z}\right) \bar{v}_m \left(\frac{1}{z}\right) \bar{h} \left(\frac{1}{z}\right) \frac{1}{z} \right\} \bar{v}_m \left(\frac{\mathrm{R}}{z}\right) \bar{h} \left(\frac{\mathrm{R}}{z}\right) \mathrm{R} \frac{dz}{z} \\
&= \int_{\mathbb{T}} \mathbf{P}_+ \left\{ \bar{j}_m \left(\frac{1}{z}\right) \mathbf{P}_+\{v_m h\}\check{}(z) \right\} \bar{v}_m \left(\frac{\mathrm{R}}{z}\right) \bar{h} \left(\frac{\mathrm{R}}{z}\right) \mathrm{R} \frac{dz}{z} \\
&= \int_{\mathbb{T}} \mathbf{P}_+ \left\{ \bar{j}_m \left(\frac{1}{z}\right) \{\mathbf{P}_-(v_m h)\}\check{}(z) \right\} \bar{v}_m \left(\frac{\mathrm{R}}{z}\right) \bar{h} \left(\frac{\mathrm{R}}{z}\right) \mathrm{R} \frac{dz}{z} \quad \text{par (1)} \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{T}} \mathbf{P}_+ \left\{ \bar{j}_m \left(\frac{1}{z}\right) \sigma_m \check{v}_m(z) \right\} \bar{v}_m \left(\frac{\mathrm{R}}{z}\right) \bar{h} \left(\frac{\mathrm{R}}{z}\right) \mathrm{R} \frac{dz}{z} \quad \text{par (2.2)} \\
&= \frac{\sigma_m}{2i\pi} \int_{\mathbb{T}} j_m(z) v_m(z) \bar{v}_m \left(\frac{\mathrm{R}}{z}\right) \bar{h} \left(\frac{\mathrm{R}}{z}\right) \mathrm{R} \frac{dz}{z} \quad \text{en ôtant de nouveau le } \mathbf{P}_+.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Il vient la majoration suivante :

$$
\begin{aligned}
I &\leq \sigma_m \mathrm{R} \int_0^{2\pi} |j_m(e^{i\theta})| v_m(e^{i\theta})||v_m(\mathrm{R}e^{i\theta})||h(\mathrm{R}e^{i\theta})| d\theta \\
&\leq \frac{\sigma_m \mathrm{R}}{2\pi} \sup_{\mathbb{T}_\mathrm{R}} |h| \int_0^{2\pi} |w_m(e^{i\theta})||w_m(\mathrm{R}e^{i\theta})| d\theta \quad \text{car } |j_m| \leq 1 \text{ sur } \mathbb{D}. \\
&\leq \sigma_m \mathrm{R} \sup_{\mathbb{T}_\mathrm{R}} |h| \|v_m\|_2 \|v_m\|_{L^2(\mathrm{R})} \quad \text{par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.}
\end{aligned}
$$

Enfin, d'après la croissance de $r \mapsto \|g\|_{L^2(r)}$ lorsque g est une fonction de H^2, et par le fait crucial que $\|w_m\|_{H^2} = 1$, on en déduit :

$$
I \leq \sigma_m \mathrm{R} \sup_{\mathbb{T}_\mathrm{R}} |h|. \tag{28}
$$

D'autre part,

4.2 Une formule à exploiter

La trame de la démonstration est inspirée du théorème 3.1, mais les ressorts sont substanciellement différents. D'après le lemme 2.3, le résultat sera acquis lorsqu'on aura montré la normalité de la suite des $(j_m w_m)$ en dehors de $\bar{K}^{-1}$. La principale différence réside dans l'absence du lemme 3.1 qui est une propriété spécifique aux géodésiques. Ici, l'énoncé suggère que l'on tire partie de la symétrie circulaire du problème.

On fixe alors $0 < \mathrm{R} < 1$ tel que $K \subset \Delta \subset \mathbb{D}_\mathrm{R}$. $\mathbb{D}_\mathrm{R}$ est un voisinage ouvert du disque fermé Δ. D'après le formule de Cauchy, la fonction f se représente à nouveau par :

$$
f(z) = \int_{\mathbb{T}_\mathrm{R}} \frac{h(t)dt}{z - t}, \quad \forall |z| \geq \mathrm{R},
$$

où $h = 1/(2i\pi)f$ et où dt est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}_{\mathrm{R}}$.
On note $H_m(t) = b_m^2(t)w_m(t)h(t)$. Cette fonction est clairement définie sur la couronne $C(0,\mathrm{R},1)$, et elle est analytique sur un voisinage de cette dernière. Comme le faisait G_m précédemment, $\bar{H}_m(\mathrm{R}^2/\bar{z})$ a vocation à prendre les valeurs conjuguées de H_m sur $\mathbb{T}_{\mathrm{R}}$, mais on se heurte ici à un problème de définition lorsque z s'approche du cercle unité. Or, on voudrait justement apprécier le comportement de w_m au-delà du cercle. La première étape de la preuve consiste donc à montrer la normalité de (w_m) sur un disque intermédiaire, de rayon $\rho_0 > \mathrm{R}$ pour lequel on puisse trouver une fonction analytique au voisinage de $\mathbb{T}$ qui prenne sur $\mathbb{T}_{\rho_0}$ les valeurs conjuguées de H_m.

Posons donc $\rho_0 = \sqrt{\mathrm{R}}$. Notons que $\bar{H}_m(\rho_0^2/z)$ est bien définie et analytique sur la couronne $C(\mathrm{R},1)$ et bornée sur l'adhérence. Avec ces notations, la formule (17), réécrite sous la forme :

$$\sigma_m \frac{1}{z}\bar{\jmath}_m\left(\frac{1}{z}\right)\bar{w}_m\left(\frac{1}{z}\right) = \int_{\mathbb{T}_{\rho_0}} \frac{H_m(t)}{z-t}dt \tag{29}$$

est encore valable pour tout $z \in \bar{\mathbb{C}} \setminus (\overline{\mathbb{D}}_{\rho_0})$, c'est-à-dire pour $|z| > \rho_0$.
On multiplie alors (29) par $1/(2i\pi)$ $(\mathrm{R}/z)\bar{H}_m(\mathrm{R}/z)$ et on intègre par rapport à dz sur $\mathbb{T}$. D'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{T}} \sigma_m \frac{1}{z}\,\bar{\jmath}_m\left(\frac{1}{z}\right)\bar{w}_m\left(\frac{1}{z}\right)\bar{H}_m\left(\frac{\mathrm{R}}{z}\right)\frac{\mathrm{R}}{z}dz \\ = \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{T}}\frac{\mathrm{R}}{z}\frac{\bar{H}_m(\frac{\mathrm{R}}{z})}{z-t}dz\right]H_m(t)it\;d\theta_t,\end{aligned} \tag{30}$$

avec $t = \sqrt{\mathrm{R}}e^{i\theta_t}$. On évalue successivement les deux membres de l'inégalité, et à cet effet, notons (A) le membre de gauche, et (B) celui de droite.

1. *Evaluation de* (A) : Deux estimations s'offrent à nous.
La première sera qualifiée de “lapidaire”; on passe simplement en polaires en posant $z = re^{i\theta}$:

$$\begin{aligned}|(\mathrm{A})| &\leq \frac{\sigma_m\mathrm{R}}{2\pi}\int_0^{2\pi}|w_m(e^{i\theta})||H_m(\mathrm{R}e^{i\theta})|d\theta \quad ;\text{ or, } |b_m|\leq 1,\ |j_m|\leq 1 \text{ sur } \mathbb{T}_{\mathrm{R}} : \\ &\leq \frac{\sigma_m\mathrm{R}}{2\pi}\sup_{\mathbb{T}_{\mathrm{R}}}|h|\int_0^{2\pi}|w_m(e^{i\theta})||w_m(\mathrm{R}e^{i\theta})|d\theta \\ &\leq \sigma_m\mathrm{R}\ \sup_{\mathbb{T}_{\mathrm{R}}}|h|\|w_m\|_2\|w_m\|_{L^2(\mathrm{R})} \quad \text{par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.}\end{aligned}$$

Enfin, d'après la croissance de $r \mapsto \|g\|_{L^2(r)}$ lorsque g est une fonction de H^2, et par le fait crucial que $\|w_m\|_{H^2} = 1$, on en déduit :

$$|(\mathrm{A})| \leq \sigma_m\mathrm{R}\ \sup_{\mathbb{T}_{\mathrm{R}}}|h| \tag{31}$$

On verra que cette majoration brutale est insuffisante.
Il est cependant possible de donner une deuxième expression utilisant avec force le théorème AAK (2.1). En effet, remarquons que

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_+\left(\check{H}_m\Big(\frac{z}{\mathrm{R}}\Big)\right) &= \mathbf{P}_+\left(\bar{b}_m\left(\frac{z}{\mathrm{R}}\right)\mathbf{P}_+\{\check{v_m h}\}\Big(\frac{z}{\mathrm{R}}\Big)\right) \quad \text{car } \bar{b}_m \text{ est analytique}\,;\\
&= \frac{1}{2i\pi}\mathbf{P}_+\left(\bar{b}_m\left(\frac{\mathrm{R}}{z}\right)\{\mathbf{P}_-\check{(}fv_m)\}\Big(\frac{z}{\mathrm{R}}\Big)\right) \quad \text{d'après (1)}\,;\\
&= \frac{\sigma_m}{2i\pi}\mathbf{P}_+\left(\bar{b}_m\left(\frac{\mathrm{R}}{z}\right)\{j_m v_m\}\Big(\frac{\mathrm{R}}{z}\Big)\right) \quad \text{d'après la formule 2.2.}
\end{aligned}$$

Comme on a aussi $\bar{b}_m(z) = 1/\bar{b}_m(1/\bar{z})$, ce qui donne, quand on déforme l'intégrale de (31) sur $T_{\sqrt{\mathrm{R}}}$ – la formule de Cauchy étant licite d'après (17) :

$$\begin{aligned}
|(\mathrm{A})| &= -\frac{\sigma_m^2}{4\pi^2}\int_{T_{\sqrt{\mathrm{R}}}} \overline{j_m\left(\frac{z}{\mathrm{R}}\right)w_m\left(\frac{z}{\mathrm{R}}\right)}\,\overline{b_m(z)}\,j_m\left(\frac{z}{\mathrm{R}}\right)w_m\left(\frac{z}{\mathrm{R}}\right)\frac{dz}{z}\ ,\\
&= -\frac{i\sigma_m^2}{4\pi^2}\int_0^{2\pi} \overline{j_m\left(\frac{e^{i\theta}}{\sqrt{\mathrm{R}}}\right)w_m\left(\frac{e^{i\theta}}{\sqrt{\mathrm{R}}}\right)}\,\overline{b_m(\sqrt{\mathrm{R}}e^{i\theta})}\,j_m\left(\frac{z}{\mathrm{R}}\right)w_m\left(\frac{e^{i\theta}}{\sqrt{\mathrm{R}}}\right)\frac{dz}{z}\ ,\\
&= -\frac{i\sigma_m^2}{2\pi}\|j_m w_m\|^2_{L^2(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{R}}})}. \qquad (32)
\end{aligned}$$

2. *Evaluation de* (B) : On cherche à évaluer en premier lieu l'intégrale

$$I(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{\mathrm{R}}{z}\frac{\bar{H}_m(\frac{\mathrm{R}}{z})}{z-t}dz$$

pour $|t| = \sqrt{\mathrm{R}}$. Or, $\bar{H}_m$ est analytique sur $C(\mathrm{R},1)$ bornée sur l'adhérence, donc la formule de Cauchy permet de déformer I sur le contour $\mathbb{T}_{\sqrt{\mathrm{R}}}$. On est ramené à une fonction de Cauchy définie sur $\mathbb{T}_{\sqrt{\mathrm{R}}}$, limite de la suite des intégrales prises sur des cercles concentriques décroissant vers $\mathbb{T}_{\sqrt{\mathrm{R}}}$. A t fixé, la formule de Plemelj assure :

$$I(t) = \frac{1}{2}\overline{tH_m(t)} + \frac{1}{2i\pi}\fint_{T_{\sqrt{\mathrm{R}}}} \frac{\overline{zH_m(z)}}{z-t}dz. \qquad (33)$$

Une idée pour estimer l'intégrale de Cauchy singulière de $\overline{zH_m(z)}$ est de faire apparaître le noyau en $\cot(\theta/2)$ qui redonne, d'après le théorème 1.3, sa fonction conjuguée. En effet, cette dernière ne perturbe pas le calcul de (B) car on l'intègrera ensuite dans (30) contre la fonction $zH_m(z)$ qui lui est

orthogonale pour le produit scalaire de $L^2(\sqrt{\mathrm{R}})$, d'après (6).
On décompose ainsi l'intégrale singulière de (33) en :

$$-\frac{1}{2}\fint_{[0,2\pi]} \cot\left(\frac{\theta_t-\theta_z}{2}\right)\overline{zH_m(z)}d\theta_z + i\fint_{[0,2\pi]} M_t(z)\overline{zH_m(z)}d\theta_z,$$

avec $z = \sqrt{R}e^{i\theta_z}$ et :

$$M_t(z) = \frac{\sqrt{\mathrm{R}}e^{i\theta_z}}{\sqrt{\mathrm{R}}(e^{i\theta_z}-e^{i\theta_t})} + \frac{1}{2i}\cot\left(\frac{\theta_t-\theta_z}{2}\right).$$

L'écriture est licite grace à la bornitude de $zH_m(z)$ sur $\mathbb{T}_{\sqrt{\mathrm{R}}}$. Le choix des coefficients vise à rendre $M_t(z)$ indépendant de t et de z, ce qui est facilité en remarquant que $M_t(z)$ est une fonction de $\theta_t-\theta_z$. Plus précisément,

$$M_t(z) = \frac{1}{1-e^{i(\theta_t-\theta_z)}} + \frac{1}{2}\,\frac{e^{i(\theta_t-\theta_z)}+1}{e^{i(\theta_t-\theta_z)}-1} = \frac{1}{2}.$$

Considérons les fonctions en présence comme des fonctions de θ. Alors, en appliquant le théorème 1.3 à la fonction $G_m(\theta) = \sqrt{\mathrm{R}}e^{i\theta_t}H_m(\sqrt{\mathrm{R}}e^{i\theta_t})$, on déduit finalement de (33) :

$$I(t) = \frac{1}{2}\overline{G_m(\theta_t)} - \frac{1}{2i}\widetilde{\overline{G_m(\theta_t)}} + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\overline{G_m(\theta_t)}d\theta_t.$$

En intégrant contre $G_m(\theta_t)$, en rappelant $\tilde{\bar{G}} = \bar{\tilde{G}}$, et en utilisant l'orthogonalité de G_m et de sa conjuguée, on obtient l'égalité fondamentale :

$$(\mathrm{B}) = \frac{i}{2}\|G_m\|^2_{L^2(\theta)} + \frac{i}{4\pi}\left|\int_0^{2\pi}G_m(\theta)d\theta\right|^2 - \frac{1}{2}\left\langle G_m, \tilde{G}_m\right\rangle_{L^2(\theta)}. \qquad (34)$$

Il reste à évaluer le produit scalaire. On utilise à cet effet les formules (3),(4),(5) concernant les fonctions conjuguées, qui donnent :

$$\begin{aligned}\left\langle G_m, \tilde{G}_m\right\rangle &= \left\langle \mathbf{P}_+G_m + \mathbf{P}_-G_m, \widetilde{\mathbf{P}_+G_m} + \widetilde{\mathbf{P}_-G_m}\right\rangle_{L^2(\theta)} \\ &= i\|\mathbf{P}_+G_m\|_2^2 - i\ \|\hat{\mathbf{P}}_{+,0}\ G_m\|_2^2 - i\ \|\mathbf{P}_-G_m\|_2^2,\end{aligned}$$

où $\mathbf{P}_{+,0}\ G_m$ est le coefficient de Fourier de $\mathbf{P}_+G_m$ d'ordre 0, c'est-à-dire la moyenne de G_m, qui vaut $1/(2\pi)\int_0^{2\pi}G_m(\theta)d\theta$.
Si on écrit alors $\|G_m\|_2^2 = \|\mathbf{P}_+G_m\|_2^2 + \|\mathbf{P}_-G_m\|_2^2$, il s'ensuit :

$$(\mathrm{B}) = 2i\pi\|\mathbf{P}_-G_m\|_2^2 + \frac{i}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}G_m(\theta)d\theta\right|^2.$$

Mais comme G_m et $\sqrt{\mathrm{R}}\ H_m$ diffèrent par application du *shift*, il vient

$$\|\mathbf{P}_- G_m\|_2^2 = \mathrm{R}\ \|\mathbf{P}_-(H_m)(\sqrt{\mathrm{R}}e^{i\theta})\|^2_{L^2(\sqrt{\mathrm{R}})} - \frac{i}{4\pi^2}\left|\int_0^{2\pi} G_m(\theta)d\theta\right|^2,$$

ce qui mène à l'identité :

$$(\mathrm{B}) = 2i\pi\mathrm{R}\|\mathbf{P}_-(H_m)\|^2_{L^2(\sqrt{\mathrm{R}})} \tag{35}$$

Il convient de faire la remarque suivante : $\|G_m\|_2^2$ ne joue pas un rôle direct dans l'appréciation de (B), seule intervient la norme de la projection anti-analytique. Ceci est en accord avec la représentation intégrale (17) de $1/z\ \bar{w}_m(1/z)$, dans laquelle le terme analytique disparaît, lorsque $|z| > \sqrt{\mathrm{R}}$.

3. *Conclusion* :

Les formules (31) et (35) donnent : $2\pi\|\mathbf{P}_- H_m(\sqrt{\mathrm{R}}e^{i\theta})\|_2^2 \leq \sigma_m \sup_{\mathbb{T}_\mathrm{R}} |h|$,

ce qui devient, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}_{\sqrt{\mathrm{R}}}} |\mathbf{P}_-(j_m b_m^2 w_m h)(t)|dt &\leq \sqrt{2\pi}\|\mathbf{P}_-(j_m b_m^2 w_m h(\sqrt{\mathrm{R}}e^{i\theta}))\|_{L^2(\theta)} \\ &\leq \sqrt{\sigma_m \sup_{\mathbb{T}_\mathrm{R}} |h|}.\end{aligned} \tag{36}$$

Cette inégalité n'est pas, dans sa forme, strictement analogue à (23) : le majorant est le produit de $\sqrt{\sigma_m}$ par un terme indépendant de m, ce qui n'est pas suffisant pour notre problème.

FAUX

La conclusion s'en déduit de la même manière : pour tout $z \in \bar{\mathbb{C}} \setminus \bar{\mathbb{D}}^{-1}_{\sqrt{\mathrm{R}}}$,

$$\begin{aligned}|\sigma_m j_m(z) w_m(z)| &\leq \frac{1}{\inf_{t\in\mathbb{T}_{\sqrt{\mathrm{R}}}} |1 - z\bar{t}|} \int_{\mathbb{T}_{\sqrt{\mathrm{R}}}} |\mathbf{P}_-(b_m^2 w_m h)(t)|dt \\ &\leq \frac{\sqrt{2\pi}}{\inf_{t\in\mathbb{T}_{\sqrt{\mathrm{R}}}} |1 - z\bar{t}|}\sigma_m \sup_{\mathbb{T}_\mathrm{R}} |h|,\end{aligned}$$

$$\text{D'où} \quad |j_m(z) w_m(z)| \leq \frac{\sqrt{2\pi}}{\inf_{t\in\mathbb{T}_{\sqrt{\mathrm{R}}}} |1 - z\bar{t}|} \sup_{\mathbb{T}_\mathrm{R}} |h|, \quad \forall z \in \bar{\mathbb{C}} \setminus \bar{\mathbb{D}}^{-1}_{\sqrt{\mathrm{R}}}. \tag{37}$$

La famille (w_m) est donc normale en dehors du réfléchi de $\bar{\mathbb{D}}_{\sqrt{\mathrm{R}}}$. Néanmoins, la conclusion n'est pas tout à fait acquise car le domaine de normalité est strictement inclus dans $\mathbb{D}_{1/R}$, R étant strictement positif. On va donc prouver, de proche en proche, la normalité de la famille sur des couronnes de rayons décroissants qui s'accumulent sur $\mathbb{T}_{\mathrm{R}}$.

Pour cela, on amorce une récurrence : en plus de $\rho_0 = \sqrt{\mathrm{R}}$, posons $r_0 = 1$ et $\epsilon_0 = 0$. On se restreint alors au disque centré en 0 de rayon $r_1 = \rho_0$. Plutôt que de travailler sur la couronne $C(\rho_0, r_0)$, on va se placer sur $C(\rho_1, r_1 + \epsilon_1)$, pour ρ_1 et ϵ_1 bien choisis.
A cet effet, on définit $\delta = d(K, \mathbb{T}_{\mathrm{R}}) > 0$, $\epsilon_1 = \delta\rho_0/(2\mathrm{R} - \delta)$, puis $\rho_1 = \sqrt{\mathrm{R}\rho_0}$. Avec ce choix, remarquons que $\mathrm{R} - \rho_1^2/(\sqrt{\mathrm{R}} - \epsilon_1) = \delta/2$, ce qui implique $\rho_1^2/(\sqrt{\mathrm{R}} - \epsilon_1) \notin K$. Ainsi, la couronne $C(\rho_1, r_1 + \epsilon_1)$ est incluse strictement dans le domaine d'analyticité de $\bar{H}_m(\rho_1^2/z)$, si bien qu'on peut remplacer ρ_0 par ρ_1 dans tout le raisonnement, et écrire au lieu de (.) :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{T}_{r_1+\epsilon_1}} & \sigma_m \frac{1}{z} \bar{w}_m \left(\frac{1}{z}\right) \bar{H}_m \left(\frac{\rho_1^2}{z}\right) dz \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{T}_{\rho_1}} \frac{\rho_1^2}{z} \frac{\bar{H}_m(\frac{\rho_1^2}{z})}{z - t} dz\right] H_m(t) it \ d\theta_t, \qquad (38)\end{aligned}$$

avec $t = \rho_1 e^{i\theta_t}$, après avoir déformé l'intégrale de gauche de $\mathbb{T}_{\rho_1}$ sur $\mathbb{T}_{r_1+\epsilon_1}$. On note à nouveau (A) le membre de gauche, et (B) celui de droite. Cette fois-ci,

$$\begin{aligned}|(\mathrm{A})| &\leq \frac{\sigma_m}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|w_m\left(\frac{1}{r_1 + \epsilon_1} e^{i\theta}\right)\right| \left|H_m\left(\frac{\rho_1^2}{r_1 + \epsilon_1} e^{i\theta}\right)\right| (r_1 + \epsilon_1) \ d\theta \\ &\leq \frac{\sigma_m}{2\pi} \sup_{\mathbb{T}_{\mathrm{R}-\delta/2}} |h| \, \|w_m\|_{L^\infty\left(\frac{1}{r_1+\epsilon_1}\right)} \|w_m\|_{L^2\left(\mathrm{R}-\frac{\delta}{2}\right)} \qquad (39)\end{aligned}$$

On a justement fait en sorte que $1/(r_1 + \epsilon_1) < 1/r_1$: on peut donc utiliser la normalité de (w_m) sur $\mathbb{D}_{1/r1}$. Précisément, d'après (.), on a :

$$\left\|w_m\left(\frac{1}{r_1 + \epsilon_1}\right) \cdot\right\|_\infty \leq \sqrt{2\pi} \left(1 + \frac{r_1}{\epsilon_1}\right) \sup_{\mathbb{T}_{\mathrm{R}}} |h|,$$

en écrivant que, si $|z| = r_1 + \epsilon_1$ et $|t| = r_1$, alors $|1 - \bar{z}t| \geq \epsilon_1/(r_1 + \epsilon_1)$. Enfin, comme $\|w_m((\mathrm{R} - \delta/2).)\|_2 \leq 1$, il suit de (.) :

$$|(\mathrm{A})| \leq \sigma_m C_1 \sup_{\mathbb{T}_{\mathrm{R}}} |h| \qquad (40)$$

où C_1 est une constante *indépendante de m.*
Quant à (B), le calcul est inchangé sur le nouveau rayon :

$$(\mathrm{B}) = i\|\mathbf{P}_-(j_m b_m^2 w_m h)(\sqrt{\rho_1} e^{i\theta})\|_2^2,$$

Ceci conduit à l'inégalité :

$$|j_m(z)w_m(z)| \leq \frac{C_1\sqrt{2\pi}}{\inf_{t\in\mathbb{T}_{\rho_1}} |1 - z\bar{t}|} \sup_{\mathbb{T}_\mathrm{R}} |h|, \quad \forall z \in \bar{\mathbb{C}} \setminus \bar{\mathbb{D}}_{\rho_1}^{-1}, \tag{41}$$

d'où la normalité de (w_m) sur $\bar{\mathbb{C}} \setminus \bar{\mathbb{D}}_{\rho_1}^{-1}$.

La récurrence au rang n est rigoureusement identique. On pose :

$$r_n = \rho_{n-1}, \quad \epsilon_n = \delta\rho_{n-1}/(2\mathrm{R} - \delta) \quad \text{et} \quad \rho_n = \sqrt{\mathrm{R}\rho_{n-1}},$$

et on aboutit à l'existence d'un scalaire C_n *indépendant de* m tel que :

$$|j_m(z)w_m(z)| \leq \frac{C_n\sqrt{2\pi}}{\inf_{t\in\mathbb{T}_{\sqrt{\rho_n}}} |1 - z\bar{t}|} \sup_{\mathbb{T}_\mathrm{R}} |h|, \quad \forall z \in \bar{\mathbb{C}} \setminus \bar{\mathbb{D}}_{\rho_n}^{-1}, \tag{42}$$

d'où la normalité de (w_m) sur $\bar{\mathbb{C}} \setminus \bar{\mathbb{D}}_{\rho_n}^{-1}$.
Il suffit maintenant de remarquer que la suite (ρ_n) définie par récurrence :

$$\rho_0 = \sqrt{\mathrm{R}}, \quad \rho_{n+1} = \sqrt{\mathrm{R}\rho_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

est décroissante minorée par R, a R pour seul point fixe, donc converge vers R. La suite (w_m) est donc normale sur $\bar{\mathbb{C}} \setminus \bar{\mathbb{D}}_{\rho_n}^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire sur $\bar{\mathbb{C}} \setminus \bar{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}}^{-1}$.
Enfin, le lemme (2.3) montre que le support d'un point d'accumulation de $(\mu_m)_{m\in\mathbb{N}}$ pour la topologie *-faible est inclus dans tout $\mathbb{D}_\mathrm{R}$ contenant Δ, donc dans Δ.

Il reste à montrer la dernière assertion du théorème. C'est une simple application de la normalité de $(j_m w_m)$. En effet, si γ est une simple courbe fermée ne contenant aucun zéro de $j_m w_m$, et si Γ est le domaine qu'elle enserre, l'intégrale

$$N_m^\gamma = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{j_m w_m(z)}{(j_m w_m)'(z)} dz$$

comptabilise le nombre de zéros de w_m dans Γ, avec leur multiplicité.
Fixons donc V un voisinage de K, et traçons un contour γ tel que $\gamma subset C(\partial K, \partial\bar{V}^{-1})$ ne rencontre aucun zéro des fonctions $j_m w_m$, pour tout $m \in \mathbb{N}$. Un tel γ existe toujours car chaque $j_m w_m$ a un nombre fini de zéros dans la couronne fermée, donc l'ensemble des zéros de la famille $(j_m w_m)$ est dénombrable. N_m^γ dénombre alors les zéros de $j_m w_m$ dans $\Gamma \supset \bar{\mathbb{C}} \setminus \bar{V}^{-1}$. Or, la formule d'orthogonalité montre que

$$\xi_j^{(m)} \notin V \Rightarrow (j_m w_m)\left(\frac{1}{\bar{\xi}_j^{(m)}}\right) = 0.$$

Donc, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\#\{\xi_k^m \ / \ \xi_k^m \notin V, \ 1 \leq k \leq n_m\} \leq N_m^\gamma.$$

Par normalité, quitte à extraire, on peut supposer que la suite w_m converge uniformément sur les compacts de $\bar{\mathbb{C}} \setminus \bar{K}^{-1}$, donc il existe une entier m_0 tel que :

$$m \geq m_0 \Rightarrow \#\{\xi_k^m \ / \ \xi_k^m \notin V, \ 1 \leq k \leq n_m\} \leq N,$$

avec $N = \limsup_{m \to +\infty} N_m^\gamma$.
□