

Rapport de Stage ACI ObsCerv

Problème inverse en Electroencéphalographie

Christelle Aziadjonou - Jonathan Chetboun

Juillet - Août 2004

Encadrement :

Jacques Blum - UNSA Laboratoire J. A. Dieudonné

Juliette Leblond - INRIA Sophia-Antipolis Projet APICS

Théodore Papadopoulo - INRIA Sophia-Antipolis Projet ODYSSEE

Maureen Clerc - INRIA Sophia-Antipolis Projet ODYSSEE

Jean-Paul Marmorat - CMA Sophia-Antipolis Projet AUTOM



Institut National de la Recherche en Informatique et Automatique

Table des matières

1	Introduction	3
2	Unicité des conductivités	4
2.1	Outils	4
2.2	Problème 1: domaine sphérique à une couche	4
2.3	Problème 2: domaine sphérique à deux couches	6
2.4	Problème 3: domaine sphérique à trois couches	7
3	Identification de sources par approximation méromorphe	9
3.1	Description de la méthode	9
3.2	Généralisation à un problème à trois couches	10
3.3	Modification du code existant et résultats numériques	12
3.4	Analyse de sensibilité	15
4	Identification de sources par approche de l'état adjoint	17
4.1	Description de la méthode	17
4.2	Nouvelle formulation	18
4.3	Régularisation par changement de norme	20
4.4	Analyse de sensibilité	21

1 Introduction

L'objet de ce rapport est l'étude du problème inverse de l'électroencéphalographie (EEG) : il s'agit d'identifier la distribution de source de courant à l'intérieur du cerveau à partir de mesures de potentiel électrique prises à la surface du cerveau. Nous allons dans ce rapport étudier le problème de l'unicité des conductivités pour différents modèles de têtes. Dans un second temps, nous avons généralisé un code de résolution du problème inverse par approximation méromorphe pour l'appliquer à un problème multicouches. Enfin, nous avons étudié la méthode de résolution du problème inverse par approche de l'état adjoint, et, en particulier, la possibilité de régulariser le problème par changement de norme, ainsi que l'analyse de sensibilité.

L'approximation quasi-statique des équations de Maxwell conduit à l'équation de l'EEG reliant la conductivité σ , le potentiel électrique V et la distribution de courant primaire J_p :

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla V) = \nabla \cdot J_p \quad (1)$$

Le problème inverse consiste à déterminer J_p connaissant des mesures de potentiel électrique en quelques points de la surface du crâne. Ce problème peut être résolu de deux manières différentes : par approximation des conditions au bord (approximation méromorphe) ou par minimisation de l'écart entre potentiel mesuré et potentiel calculé (approche plus traditionnelle).

2 Unicité des conductivités

2.1 Outils

Théorème de Holmgren : Soit Ω un domaine de classe C^1 , K un ouvert de $\partial\Omega$ de mesure strictement positive et u une fonction vérifiant :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } K \\ \partial_n u = 0 & \text{sur } K \end{cases}$$

Alors $u \equiv 0$ dans Ω

Seconde identité de Green : Soient u et v deux fonctions de $C^2(\bar{\Omega})$. On a :

$$\int_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v) dx = \int_{\partial\Omega} (v\partial_n u - u\partial_n v) ds$$

2.2 Problème 1 : domaine sphérique à une couche

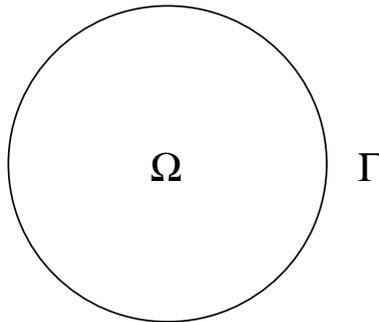


FIG. 1 – *Domaine sphérique à une couche*

On montre l'unicité de la conductivité sur un domaine à une couche. On considère que la conductivité a est une constante non nulle. On a :

$$\begin{cases} a \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \\ a \partial_n u = \phi & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Supposons qu'il existe un autre couple solution (a', u') vérifiant les mêmes conditions sur le bord $\partial\Omega$:

$$\begin{cases} a' \Delta u' = 0 & \text{dans } \Omega \\ u' = g & \text{sur } \partial\Omega \\ a' \partial_n u' = \phi & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Nous devons montrer $a = a'$ dans Ω .

Premier cas : Hypothèse supplémentaire \otimes : Il existe un ouvert K de mesure strictement positive où $\phi|_K = 0$. Cette hypothèse est en particulier vérifiée lorsque le flux ϕ est :

$$\begin{cases} \phi(x_i) &= j \\ \phi(x_e) &= -j \\ \phi(x) &= 0 \quad \text{si } x \neq x_i \text{ et } x \neq x_e \end{cases}$$

a est une constante non nulle donc $\Delta u = \Delta u' = 0$ dans Ω . On a en particulier $\Delta(u - u') = 0$ dans Ω . $u = u' = g$ sur $\partial\Omega$ donc $u - u' = 0$ sur $\partial\Omega$. Enfin, $a \partial_n u = a' \partial_n u' = \phi|_K = 0$ sur K donc $\partial_n(u - u') = 0$ sur K . Par le théorème de Holmgren, on obtient $u = u'$ dans Ω . Donc $u = u'$ sur $\partial\Omega$ et $\partial_n u = \partial_n u'$ sur $\partial\Omega$. Comme $a \partial_n u = a' \partial_n u'$ sur $\partial\Omega$, $a = a'$ sur $\{\partial_n u \neq 0\}$. Enfin, comme a est constante, $a = a'$ dans Ω .

Second cas : On suppose $\phi \in L^2(\partial\Omega)$ quelconque. D'après la seconde identité de Green, on a $\forall v \in C^2(\bar{\Omega})$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v) dx &= \int_{\partial\Omega} (v\partial_n u - u\partial_n v) ds \\ \int_{\Omega} (v\Delta u' - u'\Delta v) dx &= \int_{\partial\Omega} (v\partial_n u' - u'\partial_n v) ds \end{aligned}$$

avec $\Delta u = \Delta u' = 0$.

Notons $H(\Omega) = \{v \in C^2(\bar{\Omega}) \mid \Delta v = 0\}$.

Si $v \in H(\Omega)$ alors :

$$\int_{\partial\Omega} (v\partial_n u - u\partial_n v) ds = \int_{\partial\Omega} (v\partial_n u' - u'\partial_n v) ds = 0$$

De plus, $u = u' = g$ sur $\partial\Omega$ donc :

$$\int_{\partial\Omega} v(\partial_n u - \partial_n u') ds = 0 \quad \forall v \in H(\Omega)$$

On obtient :

$$\int_{\partial\Omega} v \left(\frac{\phi}{a} - \frac{\phi}{a'} \right) ds = 0 \quad \forall v \in H(\Omega)$$

D'où :

$$\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a'} \right) \int_{\partial\Omega} \phi v ds = 0 \quad \forall v \in H(\Omega)$$

Puisque, quel que soit $h \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, il existe $v \in H(\Omega)$ tel que $v = h$ sur $\partial\Omega$, et comme $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ est dense dans $L^2(\partial\Omega)$ (voir [9]), nous pouvons conclure que :

$$\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a'}\right)\phi = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

D'où, $a = a'$ sur $\{\phi \neq 0\}$. Or a et a' sont constantes, donc $a = a'$ sur Ω .

2.3 Problème 2 : domaine sphérique à deux couches

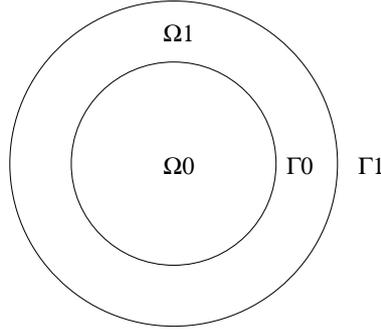


FIG. 2 – *Domaine sphérique à deux couches*

Montrons l'unicité des conductivités sur un domaine sphérique à deux couches. Nous supposons toujours que les conductivités sont des constantes non nulles. On a :

$$\begin{cases} a_1 \Delta u_1 = 0 & \text{dans } \Omega_1 \\ u_1 = g & \text{sur } \Gamma_1 \\ a_1 \partial_n u_1 = \phi & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases}$$

De même :

$$\begin{cases} a_0 \Delta u_0 = 0 & \text{dans } \Omega_0 \\ u_0 = u_1 & \text{sur } \Gamma_0 \\ a_0 \partial_n u_0 = a_1 \partial_n u_1 & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases}$$

Première démonstration : On suppose que ϕ vérifie l'hypothèse \otimes . On a unicité de a_1 et de u_1 , sous l'hypothèse \otimes , en faisant la même démonstration que dans le paragraphe précédent, premier cas. On est donc ramené à montrer l'unicité de la conductivité a_0 dans le domaine Ω_0 pour un flux $a_1 \partial_n u_1 \in L^2(\Gamma_0)$ connu. Ceci est équivalent au problème 1, second cas. En conclusion, on a unicité des conductivités a_1 et a_0 dans le cas où ϕ vérifie l'hypothèse \otimes .

Remarque : Pour un domaine à N couches, on a unicité de la conductivité "extérieure" sous l'hypothèse \otimes .

Seconde démonstration : On suppose que ϕ est telle que

$$\begin{cases} \phi(x_i) = j \\ \phi(x_e) = -j \\ \phi(x) = 0 \quad \text{si } x \neq x_i \text{ et } x \neq x_e \end{cases}$$

En particulier, ϕ est discontinue en au moins un point de Γ_1 . On utilise alors le Corrolaire 3.2 de [1] :

Soit Ω un domaine de \mathbb{R}^3 simplement connexe de bord lipschitzien. Soit D un sous-domaine compact contenu dans Ω . Soit k une constante strictement positive, $k \neq 1$. On considère le problème de Neumann suivant :

$$\begin{cases} \nabla \cdot ((1 + (k - 1)\chi(D))\nabla u) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \partial_n u = \phi \in L^2(\partial\Omega) & \text{sur } \partial\Omega \\ \int_{\partial\Omega} u \, ds = 0 \end{cases}$$

On définit :

$$\Lambda_{k,D}(g) = u|_{\partial\Omega} \text{ sur } \partial\Omega$$

On a alors le résultat suivant : si $\phi \in L^2(\partial\Omega)$ est discontinue en un point $p \in \partial\Omega$ où $\partial\Omega$ est continûment différentiable, alors $\Lambda_{k_1,D_1}(g) = \Lambda_{k_2,D_2}(g)$ implique $k_1 = k_2$ et $D_1 = D_2$.

On utilise ce corollaire dans notre situation avec $\Omega = \Omega_1$, $D = D_1 = D_2$ et $k = \frac{a_0}{a_1}$.

2.4 Problème 3 : domaine sphérique à trois couches

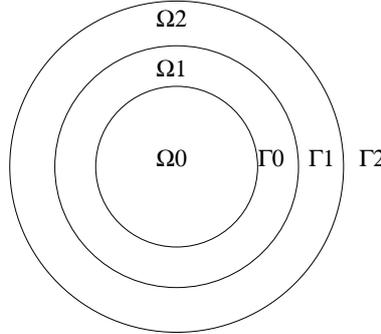


FIG. 3 – *Domaine sphérique à trois couches*

On considère le problème :

$$\begin{cases} \Delta u_2 = 0 & \text{dans } \Omega_2 \\ a_2 \partial_n u_2 = \phi & \text{sur } \Gamma_2 \\ u_2 = g & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0 & \text{dans } \Omega_1 \\ a_1 \partial_n u_1 = a_2 \partial_n u_2 & \text{sur } \Gamma_1 \\ u_1 = u_2 & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta u_0 = 0 & \text{dans } \Omega_0 \\ a_0 \partial_n u_0 = a_1 \partial_n u_1 & \text{sur } \Gamma_0 \\ u_0 = u_1 & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases}$$

Comme nous l'avons expliqué précédemment, on a unicité de la conductivité extérieure a_2 sous l'hypothèse \otimes . Montrer l'unicité des conductivités a_0 et a_1 revient à montrer l'unicité de toutes les conductivités sur un problème à deux couches dans le cas d'un flux $L^2(\partial\Omega)$.

Le cas où on considère $a_2 = a_0$ peut également être étudié. En effet, en pratique, on peut considérer que le scalp et le cortex possèdent des conductivités similaires (voir [8]).

3 Identification de sources par approximation méromorphe

3.1 Description de la méthode

Pour plus de détails, voir [3], [4] et [5].

Pour $n = 2, 3$, soient B_n la boule unité de $(\mathbb{R})^n$ et ∂B_n sa frontière. Nous voulons résoudre dans B_n le problème inverse consistant à déterminer un terme source supposé être une distribution de la forme :

$$F = \sum_{j=1}^{m_1} \lambda_j \delta_{S_j} + \sum_{k=1}^{m_2} p_k \cdot \nabla \delta_{C_k}$$

avec $S_j, C_k \in B_n$, $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $p_k \in \mathbb{R}^n$, à partir des données sur le bord :

$$u|_{\partial B_n} = g \text{ et } \frac{\partial u}{\partial \nu} = \phi$$

avec ν le vecteur normal unitaire extérieur à ∂B_n , u étant solution faible de :

$$-\Delta u = F \text{ dans } B_n$$

D'après la formule de Green, la condition de compatibilité :

$$\int_{\partial B_n} \phi ds = - \int_{B_n} F(Z) dZ = - \sum_{j=1}^{m_1} \lambda_j$$

est requise pour avoir existence d'une solution au problème direct de Neumann, qui est alors unique à une constante additive près.

Pour une fonction f analytique dans $B_2 \setminus \{S_j, C_k\}$ nous pouvons écrire :

$$f = u + iv$$

Les équations de Cauchy-Riemann impliquent :

$$\partial_\tau v = \partial_\nu u \text{ où } \tau \text{ est le vecteur unitaire tangentiel.}$$

De cette équation, nous obtenons :

$$v = \int_{\xi_0}^{\xi} \partial_\nu u d\tau(\xi) = \int_{\xi_0}^{\xi} \phi d\tau(\xi)$$

pour tout $\xi \in \partial B_2$ et pour $\xi_0 \in \partial B_2$ fixé.

On a donc :

$$f(\xi) = g(\xi) + i \int_{\xi_0}^{\xi} \phi d\tau(\xi)$$

Les défauts d'harmonicité de u sont donc les défauts d'analyticité de f . Le problème inverse dans B_2 de localisation des sources est équivalent à la détermination des singularités de la fonction f , connaissant les conditions sur le bord ∂B_2 .

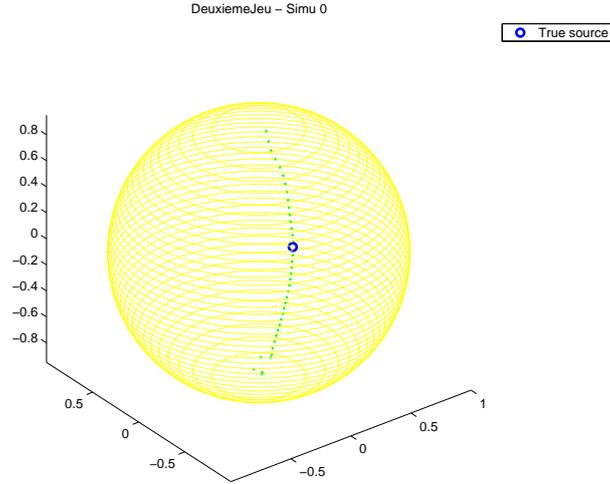


FIG. 4 – Identification d'une source dans un domaine 3D

Dans le cas à deux dimensions f vaut à une fonction harmonique près :

$$f(\xi) = - \sum_{j=1}^{m_1} \frac{\lambda_j}{2\pi} \log \frac{1}{\xi - S_j} + \sum_{k=1}^{m_2} \frac{p_k}{2\pi(\xi - C_k)}$$

Pour déterminer les singularités de f , on utilise un algorithme d'approximation méromorphe : on cherche à minimiser $\|f - \frac{P}{Q}\|_{L^2(\partial B_2)}$ où P et Q sont des polynômes et où Q a ses racines dans B_2 .

Pour résoudre le problème dans le cas à trois dimensions, on effectue des coupes de la boule B_3 et on se ramène à un problème à deux dimensions sur chaque coupe (figure ??). On détermine ainsi les pôles sur chaque coupe par approximation méromorphe. La source cherchée correspond au pôle de rayon vecteur maximum (figure ??).

3.2 Généralisation à un problème à trois couches

On considère le problème d'identification des sources F :

$$\begin{cases} \Delta u_2 = 0 & \text{dans } \Omega_2 \\ a_2 \partial_n u_2 = \phi & \text{sur } \Gamma_2 \\ u_2 = g & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0 & \text{dans } \Omega_1 \\ a_1 \partial_n u_1 = a_2 \partial_n u_2 & \text{sur } \Gamma_1 \\ u_1 = u_2 & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta u_0 = F & \text{dans } \Omega_0 \\ a_0 \partial_n u_0 = a_1 \partial_n u_1 & \text{sur } \Gamma_0 \\ u_0 = u_1 & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases}$$

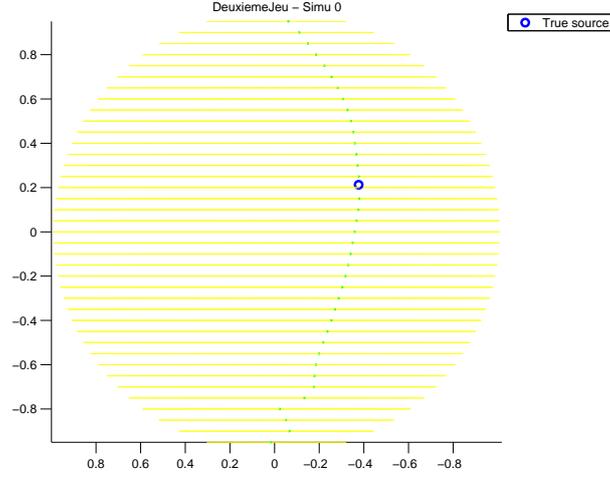


FIG. 5 – Identification d'une source dans un domaine 3D

On sait résoudre le problème dans le cas d'une seule sphère en connaissant les conditions au bord (voir le paragraphe précédent). Nous devons maintenant nous ramener à ce problème en propageant les données ϕ et g connues sur Γ_2 jusqu'au bord Γ_0 . On utilise pour cela une décomposition en harmoniques sphériques.

Soit S la sphère unité de \mathbb{R}^3 .

Toute fonction harmonique localement L^2 dans un voisinage de S s'écrit de manière unique (voir [2] pages 625-626) :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(r^k \sum_{i=-k}^k \alpha_k^i Y_k^i(\sigma) + r^{-(k+1)} \sum_{i=-k}^k \beta_k^i Y_k^i(\sigma) \right) \quad (2)$$

Décomposition de g et de ϕ sur les harmoniques sphériques :

$$g(\sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=-k}^k g_{k,i} Y_k^i(\sigma)$$

$$\phi(\sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=-k}^k \phi_{k,i} Y_k^i(\sigma)$$

Les conditions sur le bord Γ_2 impliquent :

$$\alpha_{k,i}^{(2)} r_2^k + \beta_{k,i}^{(2)} r_2^{-(k+1)} = g_{k,i}$$

$$a_2 \left(k \alpha_{k,i}^{(2)} r_2^{k-1} - (k+1) \beta_{k,i}^{(2)} r_2^{-(k+2)} \right) = \phi_{k,i}$$

On obtient la valeur des coefficients $\alpha_{k,i}^{(2)}$ et $\beta_{k,i}^{(2)}$:

$$\begin{aligned}
\alpha_{k,i}^{(2)} &= \frac{k+1}{(2k+1)r_2^k} g_{k,i} + \frac{1}{a_2(2k+1)r_2^{k-1}} \phi_{k,i} \\
\beta_{k,i}^{(2)} &= \frac{k}{(2k+1)r_2^{-(k+1)}} g_{k,i} - \frac{1}{a_2(2k+1)r_2^{-(k+2)}} \phi_{k,i}
\end{aligned} \tag{3}$$

Les conditions de transmission sur le bord Γ_1 impliquent :

$$\begin{aligned}
\alpha_{k,i}^{(1)} r_1^k + \beta_{k,i}^{(1)} r_1^{-(k+1)} &= \alpha_{k,i}^{(2)} r_1^k + \beta_{k,i}^{(2)} r_1^{-(k+1)} \\
a_1 \left(k \alpha_{k,i}^{(1)} r_1^{k-1} - (k+1) \beta_{k,i}^{(1)} r_1^{-(k+2)} \right) &= a_2 \left(k \alpha_{k,i}^{(2)} r_1^{k-1} - (k+1) \beta_{k,i}^{(2)} r_1^{-(k+2)} \right)
\end{aligned}$$

Ce qui donne les relations de transfert intercouches :

$$\begin{pmatrix} \alpha^{(1)} \\ \beta^{(1)} \end{pmatrix}_{k,i} = \begin{pmatrix} \alpha^{(2)} \\ \beta^{(2)} \end{pmatrix}_{k,i} + \left(1 - \frac{a_2}{a_1} \right) \begin{pmatrix} -\frac{k}{2k+1} & \frac{k+1}{2k+1} r_1^{-(2k+1)} \\ \frac{k}{2k+1} r_1^{(2k+1)} & -\frac{k+1}{2k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^{(2)} \\ \beta^{(2)} \end{pmatrix}_{k,i} \tag{4}$$

Les conditions de transmission sur le bord Γ_0 impliquent :

$$\begin{aligned}
\alpha_{k,i}^{(0)} r_0^k + \beta_{k,i}^{(0)} r_0^{-(k+1)} &= \alpha_{k,i}^{(1)} r_0^k + \beta_{k,i}^{(1)} r_0^{-(k+1)} \\
a_0 \left(k \alpha_{k,i}^{(0)} r_0^{k-1} - (k+1) \beta_{k,i}^{(0)} r_0^{-(k+2)} \right) &= a_1 \left(k \alpha_{k,i}^{(1)} r_0^{k-1} - (k+1) \beta_{k,i}^{(1)} r_0^{-(k+2)} \right)
\end{aligned}$$

Ce qui donne les relations de transfert intercouches :

$$\begin{pmatrix} \alpha^{(0)} \\ \beta^{(0)} \end{pmatrix}_{k,i} = \begin{pmatrix} \alpha^{(1)} \\ \beta^{(1)} \end{pmatrix}_{k,i} + \left(1 - \frac{a_1}{a_0} \right) \begin{pmatrix} -\frac{k}{2k+1} & \frac{k+1}{2k+1} r_0^{-(2k+1)} \\ \frac{k}{2k+1} r_0^{(2k+1)} & -\frac{k+1}{2k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^{(1)} \\ \beta^{(1)} \end{pmatrix}_{k,i} \tag{5}$$

3.3 Modification du code existant et résultats numériques

Nous avons modifié le code existant écrit en Matlab de résolution du problème sur une sphère (**fs3D**) pour prendre en compte un modèle à plusieurs sphères emboîtées. Nous avons ainsi écrit les fonctions **SplitCoeff**, **CrossBoundary** et **FindSources** qui suivent permettant de résoudre le problème multicouches.

```

%===== SplitCoeff =====
function [alpha, beta] = SplitCoeff(coeffu, coeffdu, r, c, kmax)
%===== Multi - CMA/EMP & MIAOU/INRIA 2004 =====
%===== Split for alpha/beta parts (flux=0)=====
for k=0:kmax
    a1 = (k+1)/((2*k+1)*r^k);

```

```

b1 = 1/(c*(2*k+1)*r^(k-1));
a2 = k/((2*k+1)*r^(-(k+1)));
b2 = 1/(c*(2*k+1)*r^(-(k+2)));
alpha(k^2+1 : (k+1)^2) = a1*coeffu(k^2+1 : (k+1)^2) + b1*
    coeffdu(k^2+1 : (k+1)^2);
beta(k^2+1 : (k+1)^2) = a2*coeffu(k^2+1 : (k+1)^2) - b2*
    coeffdu(k^2+1 : (k+1)^2);
end

```

Cette fonction prend en argument les coefficients dans la décomposition en harmoniques sphériques de g et ϕ et retourne les coefficients de u_2 en utilisant les équations (3).

```

%===== CrossBoundary =====
function [alpha, beta] = CrossBoundary(alpha, beta, ri, gamma, kmax)
%===== Multi - CMA/EMP & MIAOU/INRIA 2004 =====
%===== Propagate through a boundary =====
for k=0:kmax
    a1 = -k/(2*k+1);
    b1 = (k+1)*ri^(-(2*k+1))/(2*k+1);
    a2 = k*ri^(2*k+1)/(2*k+1);
    b2 = -(k+1)/(2*k+1);
    alpha2(k^2+1 : (k+1)^2) = (1 + (1 - gamma)*a1)*alpha(k^2+1 : (k+1)^2)
        + (1 - gamma)*b1*beta(k^2+1 : (k+1)^2);
    beta2(k^2+1 : (k+1)^2) = (1 - gamma)*a2*alpha(k^2+1 : (k+1)^2)
        + (1 + (1 - gamma)*b2)*beta(k^2+1 : (k+1)^2);
end
alpha = alpha2;
beta = beta2;

```

Cette fonction permet de réaliser le passage entre deux couches à l'aide des équations de transfert (4) et (5).

```

%===== FindSources =====
function FindSources(alpha, beta, kmax)
%===== Prefixe des fichiers a creer =====
FilePrefix = 'thetau';
%===== Les altitudes des plans de coupe =====
zmin = -0.95;
zmax = 0.95;
dz = 0.05;
LocalPath = '/auto/charrette/u/charrette/0/user/jchetbou/FindSources/
    Data/PremierJeu';
simNo = 0;
phi = [];

```

```

z = [];
u = [];
pas = 50;
Nbtot = 1;

for Z = zmin : dz : zmax
    RZ = sqrt(1-Z^2);
    Nbpts = floor(pas*RZ);
    phi(Nbtot : Nbtot + Nbpts - 1) = 2*pi*[0 : 1/Nbpts : (Nbpts - 1)/Nbpts];
    z(Nbtot : Nbtot + Nbpts - 1) = Z*ones(1, Nbpts);
    Nbtot = Nbtot + Nbpts;
end

if length(z) ~= length(phi)
    fprintf('Erreur !!!');
    break;
end

fprintf('Assemble %d x %d linear system\n', length(z), (kmax+1)^2);
A = [];
for k = 0:kmax
    L = ((-k):k)';
    P = legendre(k, z, 'norm');
    P = [P(end:-1:2, :); P];
    A = [ A ; exp(i*L*phi) .* P ];
end
A = transpose(A);
beta = transpose(beta);
u = real(A*beta);
u = transpose(u);
result = [phi; u];
Nbtot = 1;

for Z = zmin : dz : zmax
    % Rayon R a l'altitude Z
    RZ = sqrt(1-Z^2);
    Nbpts = floor(pas*RZ);
    DataFileName = sprintf('%s/%s_%1d_%.2f', LocalPath, FilePrefix, simNo, Z);
    if DataFileName(end)=='0', DataFileName = DataFileName(1:end-1); end
    if DataFileName(end)=='0', DataFileName = DataFileName(1:end-2); end
    fid = fopen(DataFileName, 'w');
    fprintf(fid, '%d\n', Nbpts);
    partial = result(:, Nbtot : Nbtot + Nbpts - 1);
    fprintf(fid, '%\f %f\n', partial);

```

```
Nbtot = Nbtot + Nbpts;  
end
```

Cette dernière fonction permet de reconstituer la valeur des données au bord sur chaque plan de coupe. Ces valeurs sont enregistrées dans une famille de fichiers utilisable par le programme de résolution **Fs3D**.

Nous avons testé ce nouveau programme de résolution sur trois sphères emboîtées de rayons 0.87, 0.92 et 1 et de conductivités 1, 0.0125 et 1. Nous avons à disposition un jeu de mesures sur la sphère extérieure correspondant à deux dipôles source. Nous avons effectué plusieurs expériences avec un nombre différent de pôles à identifier sur chaque couche. Les résultats de ces expériences sont visibles sur les figures 6, 7 et 8.

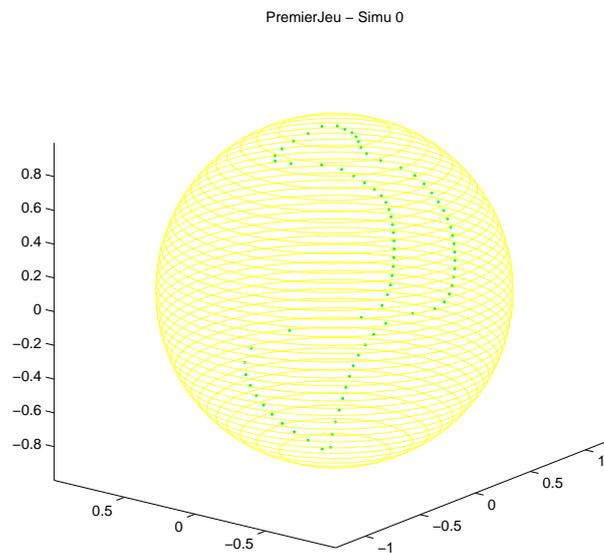


FIG. 6 – *Identification de deux sources avec deux pôles par couche*

3.4 Analyse de sensibilité

Afin d'étudier la sensibilité de cette méthode de résolution par rapport à la conductivité, nous avons effectué les mêmes expériences que précédemment en augmentant la conductivité de chaque couche de 10%.

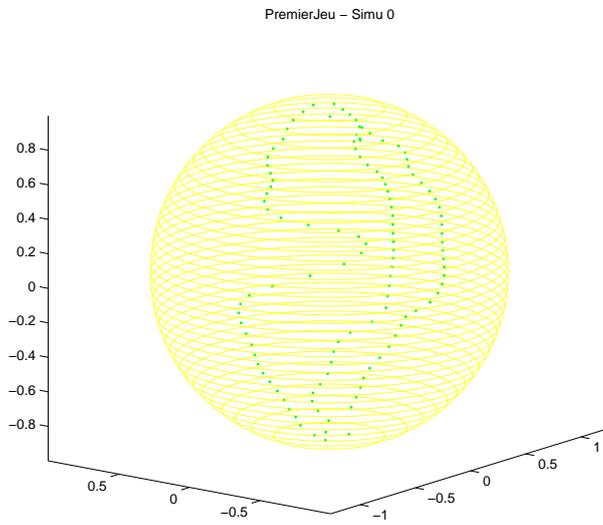


FIG. 7 – *Identification de deux sources avec trois pôles par couche*

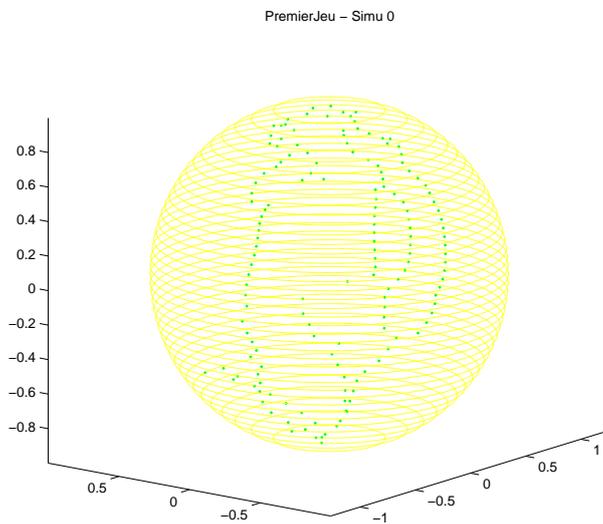


FIG. 8 – *Identification de deux sources avec quatre pôles par couche*

4 Identification de sources par approche de l'état adjoint

4.1 Description de la méthode

Le problème inverse de l'EEG est formulé ici sous la forme d'un problème de minimisation. Nous mesurons des différences de potentiel électrique en quelques points x_1, \dots, x_n du crâne et ce par rapport à une référence x_0 . Notons v_1, \dots, v_n ces mesures. Le but est alors de trouver la fonction $V(x)$, solution de l'équation

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\sigma \nabla V) = \nabla \cdot J_p & \text{sur } \Omega \\ \nabla V \cdot n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (6)$$

qui "explique" au mieux ces mesures. Ceci veut dire que si nous calculons le potentiel $V(x)$ par l'équation précédente, nous voulons que la quantité :

$$\mathcal{C}(J_p) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (V(x_i) - V(x_0) - v_i)^2$$

soit la plus petite possible.

Ainsi résoudre le problème inverse revient à minimiser le critère \mathcal{C} sous la contrainte (6)

Ce problème est un problème de contrôle optimal. Le contrôle que nous cherchons à identifier est la source de courant primaire J_p . V est le potentiel électrique et σ est la conductivité. Ω est le domaine, de frontière $\partial\Omega$, dans lequel nous voulons résoudre le problème inverse (en pratique, Ω représente la tête).

Pour résoudre ce problème de minimisation, nous utilisons un algorithme de descente, nécessitant le calcul du gradient du critère \mathcal{C} à minimiser. Ce calcul de gradient est facilité par l'introduction d'un état adjoint w solution de :

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\sigma \nabla w) + s_{EEG} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \nabla w \cdot n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (7)$$

avec

$$s_{EEG} = \sum_{i=1}^n (V(x_i) - V(x_0) - v_i)(\delta(x - x_i) - \delta(x - x_0)) \quad (8)$$

δ étant la mesure usuelle de Dirac.

Le gradient du critère \mathcal{C} devient alors simplement :

$$\nabla \mathcal{C} = \nabla w \quad (9)$$

Voir [6] pour plus de détails quant à l'obtention de ces équations.

Algorithme de descente :

- On part d'une estimation $J_{p,0}$.
- A la k -ème itération, on résout l'équation d'état (6) à l'aide de la valeur $J_{p,k}$. On obtient V_k .
- On résout l'équation de l'état adjoint (7) à l'aide de la valeur V_k . On obtient w_k .
- Cette valeur de w_k permet de calculer le gradient du critère \mathcal{C} d'après l'équation (9).
- On détermine une nouvelle valeur $J_{p,k+1}$ en posant $J_{p,k+1} = J_{p,k} - \rho_k \nabla w_k$
- Si $J_{p,k+1}$ est significativement différent de $J_{p,k}$ on retourne à la deuxième étape. Sinon, on stoppe l'algorithme.

4.2 Nouvelle formulation

Nous pouvons remarquer qu'à la fin de l'algorithme du paragraphe précédent, la solution J_p est une combinaison linéaire de gradients de l'adjoint w . Ceci nous amène à une nouvelle formulation du problème où J_p est remplacé par ∇W . On cherche à résoudre le nouveau problème de minimisation :

Trouver le contrôle optimal \bar{W} tel que :

$\mathcal{C}(\bar{W}) = \inf_W \mathcal{C}(W)$ avec :

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\sigma \nabla V) = \Delta W & \text{sur } \Omega \\ \nabla V \cdot n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (10)$$

et :

$$\mathcal{C}(W) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (V(x_i) - V(x_0) - v_i)^2$$

Ecrivons le Lagrangien du problème qui est la somme de la fonctionnelle à minimiser et de la forme variationnelle de la contrainte EDP (produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ de la contrainte avec une fonction "test") :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(V, P; \sigma, W) = \mathcal{C}(W) + \int_{\Omega} (\nabla \cdot (\sigma \nabla V) - \Delta W) P \, dx$$

où $P(x)$ est l'état adjoint.

L'équation d'état peut être vue comme une contrainte reliant V à W et V est alors supposé indépendant de W dans l'expression de $\mathcal{C}(W)$. Pour calculer le Lagrangien, nous utilisons la formule :

$$\nabla \cdot (xY) = x \nabla \cdot Y + \nabla x \cdot Y \quad (11)$$

où x est une fonction à valeurs réelles et Y un champ de vecteurs.

En posant $Y = \sigma \nabla V$, $Y' = \nabla W$ et $x = P$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla \cdot (\sigma \nabla V) - \Delta W) P \, dx &= \int_{\Omega} \nabla \cdot (P \sigma \nabla V) \, dx - \int_{\Omega} \sigma \nabla V \cdot \nabla P \, dx \\ &+ \int_{\Omega} \nabla W \cdot \nabla P \, dx - \int_{\Omega} \nabla \cdot (P \nabla W) \, dx \end{aligned}$$

Puis on utilise la formule de Stokes: $\int_{\Omega} \nabla \cdot X \, dx = \int_{\partial\Omega} X \cdot n \, ds$ qui permet de transformer une intégrale sur un volume en une intégrale de surface. D'où :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \cdot (P \sigma \nabla V) \, dx &= \int_{\partial\Omega} P \sigma \nabla V \cdot n \, ds = 0 \\ \text{et } \int_{\Omega} \nabla \cdot (P \nabla W) \, dx &= \int_{\partial\Omega} P \nabla W \cdot n \, ds = 0 \end{aligned}$$

En ayant imposé $\nabla W \cdot n = 0$ sur $\partial\Omega$.

Cela nous conduit à :

$$\mathcal{L} = \mathcal{C}(W) - \int_{\Omega} \sigma \nabla V \cdot \nabla P \, dx + \int_{\Omega} \nabla W \cdot \nabla P \, dx \quad (12)$$

En prenant $Y = \sigma \nabla V$ et $x = \nabla P$ pour appliquer la formule de divergence (11), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{C}(W) + \int_{\Omega} \nabla \cdot (\sigma \nabla P) V \, dx - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\sigma V \nabla P) \, dx \\ &+ \int_{\Omega} \nabla \cdot (W \nabla P) \, dx - \int_{\Omega} W \Delta P \, dx \end{aligned}$$

Enfin on applique de nouveau la formule de Stokes :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{C}(W) + \int_{\Omega} \nabla \cdot (\sigma \nabla P) V \, dx - \int_{\partial\Omega} \sigma V (\nabla P \cdot n) \, ds \\ &- \int_{\Omega} W \Delta P \, dx + \int_{\partial\Omega} W (\nabla P \cdot n) \, ds \end{aligned} \quad (13)$$

On impose la condition au bord : $\nabla P \cdot n = 0$ sur $\partial\Omega$. On obtient :

$$\mathcal{L} = \mathcal{C}(W) + \int_{\Omega} \nabla \cdot (\sigma \nabla P) V \, dx - \int_{\Omega} W \Delta P \, dx \quad (14)$$

Ou encore :

$$\mathcal{L} = \mathcal{C}(W) + \langle \nabla \cdot (\sigma \nabla P), V \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \Delta P, W \rangle_{L^2(\Omega)}$$

On peut alors dériver par rapport à V :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V}(\delta V) = \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial V}(\delta V) + \langle \nabla \cdot (\sigma \nabla P), \delta V \rangle_{L^2(\Omega)}$$

or

$$\mathcal{C}(W) = \frac{1}{2} \|V(x_i) - V(x_0) - v_i\|_{\mathbb{R}^n}^2$$

d'où

$$\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial V}(\delta V) = \langle V(x_i) - V(x_0) - v_i, \delta V(x_i) - \delta V(x_0) \rangle_{\mathbb{R}^n}$$

donc finalement, on obtient :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V}(\delta V) = \langle V(x_i) - V(x_0) - v_i, \delta V(x_i) - \delta V(x_0) \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle \nabla \cdot (\sigma \nabla P), \delta V \rangle_{L^2(\Omega)}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V}(\delta V) = \sum_{i=1}^n (V(x_i) - V(x_0) - v_i) (\delta V(x_i) - \delta V(x_0)) + \int_{\Omega} \nabla \cdot (\sigma \nabla P) \delta V dx$$

Cette dérivée doit être nulle pour toute variation δV de V ce qui nous conduit à l'équation de l'état adjoint suivante :

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\sigma \nabla P) + s_{EEG} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \nabla P \cdot n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (15)$$

avec

$$s_{EEG} = \sum_{i=1}^n (V(x_i) - V(x_0) - v_i) (\delta(x - x_i) - \delta(x - x_0)) \quad (16)$$

δ étant la mesure usuelle de Dirac. L'équation que vérifie P est la même que l'équation (7). On peut donc poser $P = W$

La Gâteaux-dérivée du Lagrangien par rapport à W est obtenue en ayant considéré que V ne dépend pas de W :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial W} = \nabla \mathcal{C} = -\Delta P = -\Delta W \quad (17)$$

4.3 Régularisation par changement de norme

Dans le paragraphe précédent, nous avons cherché la solution du problème inverse dans l'espace $L^2(\Omega)$. Pour obtenir une solution plus régulière, on se propose de modifier la norme de l'espace des contrôles en utilisant une semi-norme $H^1(\Omega)$ (voir [7]).

Notons G le gradient de \mathcal{C} dans $L^2(\Omega)$ et \tilde{G} celui dans $H^1(\Omega)$. D'après le théorème de représentation de Riesz, on a d'une part :

$$(\mathcal{C}', u) = \langle G, u \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} Gu \, dx$$

Et d'autre part :

$$(\mathcal{C}', u) = \langle \tilde{G}, u \rangle_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla \tilde{G} \cdot \nabla u \, dx$$

En utilisant une formule de Green on obtient :

$$\langle \tilde{G}, u \rangle_{H^1} = \int_{\Omega} \nabla \tilde{G} \cdot \nabla u \, dx = - \int_{\Omega} \Delta \tilde{G} u \, dx + \int_{\partial\Omega} \partial_n \tilde{G} \cdot u \, ds$$

En identifiant, on trouve que \tilde{G} est solution du problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{G} = G & \text{dans } \Omega \\ \tilde{G} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (18)$$

Ainsi, à chaque itération de l'algorithme de minimisation, l'utilisation d'une semi-norme $H^1(\Omega)$ implique la résolution d'un problème elliptique additionnel pour déduire le gradient correspondant.

Dans notre cas, nous avons montré que $G = -\Delta W$. Le problème (18) s'écrit donc :

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{G} = -\Delta W & \text{dans } \Omega \\ \tilde{G} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Et on obtient :

$$\tilde{G} = W$$

4.4 Analyse de sensibilité

Le problème inverse sans régularisation possède une infinité de solutions. Vu le grand nombre de degrés de liberté de la distribution $J_p = \nabla W$ à identifier (en pratique, nous identifions J_p uniquement dans le cortex, puisque la source de courant y est strictement localisée, ce qui fait tout de même un nombre important de points où nous devons déterminer J_p) et vu le faible nombre de mesures à notre disposition (une soixantaine, répartie sur un quart de la surface de la tête environ), la solution V calculée est exactement égale aux mesures v_i aux points x_i . A l'optimum, nous obtenons donc la relation suivante :

$$\mathcal{C}(W) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (V(x_i) - V(x_0) - v_i)^2 = 0$$

Le potentiel V est toujours solution de l'équation d'état :

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\sigma \nabla V) = \Delta W & \text{sur } \Omega \\ \nabla V \cdot n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Nous introduisons la perturbation $\sigma + \tilde{\sigma}$ induisant $V + \tilde{V}$ ainsi que $W + \tilde{W}$ dans les deux relations précédentes. Nous obtenons donc :

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (V(x_i) + \tilde{V}(x_i) - V(x_0) - \tilde{V}(x_0) - v_i)^2 = 0$$

Soit :

$$\sum_{i=1}^n (\tilde{V}(x_i) - \tilde{V}(x_0))^2 = 0$$

L'équation d'état perturbée devient :

$$\begin{cases} \nabla \cdot ((\sigma + \tilde{\sigma}) \nabla (V + \tilde{V})) = \Delta(W + \tilde{W}) & \text{dans } \Omega \\ \nabla(V + \tilde{V}) \cdot n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

On développe :

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\sigma \nabla V) + \nabla \cdot (\tilde{\sigma} \nabla V) + \nabla \cdot (\sigma \nabla \tilde{V}) + \nabla \cdot (\tilde{\sigma} \nabla \tilde{V}) = \Delta W + \Delta \tilde{W} & \text{dans } \Omega \\ \nabla V \cdot n + \nabla \tilde{V} \cdot n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

On néglige le terme de second degré et on utilise le fait que V est solution de (6) :

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\sigma \nabla \tilde{V}) = \Delta \tilde{W} - \nabla \cdot (\tilde{\sigma} \nabla V) & \text{dans } \Omega \\ \nabla \tilde{V} \cdot n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Nous sommes donc amenés à résoudre un nouveau problème inverse :

Trouver le contrôle optimal \bar{W} tel que :

$\tilde{\mathcal{C}}(\bar{W}) = \inf_{\tilde{W}} \tilde{\mathcal{C}}(\tilde{W})$ avec :

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\sigma \nabla \tilde{V}) = \Delta \tilde{W} - \nabla \cdot (\tilde{\sigma} \nabla V) & \text{sur } \Omega \\ \nabla \tilde{V} \cdot n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (19)$$

et :

$$\tilde{\mathcal{C}}(\tilde{J}_p) = \sum_{i=1}^n (\tilde{V}(x_i) - \tilde{V}(x_0))^2$$

Ce problème est en tous points similaire au problème inverse "classique" sans régularisation si nous posons $v_i = 0 \forall i = 1, \dots, n$ et si nous ajoutons au second membre de l'équation d'état le terme $\nabla \cdot (\tilde{\sigma} \nabla V)$ constant. Ce terme que nous avons rajouté au second membre peut être considéré comme un terme source, ce qui permet de traiter ce nouveau problème comme un problème inverse classique.

Références

- [1] H. Kang, J. K. Seo: *A note on uniqueness and stability for the inverse conductivity problem with one measurement*, J. Korean Math. Soc. 38 (2001), No. 4, pp. 781-791
- [2] R. Dautray, J.-L. Lions: *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques Volume 2*, Masson (1987)
- [3] J. Leblond, L. Baratchart, A. Ben Abda, F. Ben Hassen, J.-P. Marmorat: *Sources identification using meromorphic approximation*
- [4] L. Baratchart, A. Ben Abda, F. Ben Hassen, J. Leblond: *Recovery of pointwise sources or small inclusions in 2D domains and rational approximation*
- [5] L. Baratchart, F.-O. Helme, J.-P. Marmorat, J. Leblond: *Sources identification in 3D balls using meromorphic approximation in 2D disks*, en préparation.
- [6] O.Faugeras, F. Clément, R. Deriche, R. Keriven, T. Papadopoulo, J. Roberts, T. Viéville, F. Devernay, J. Gomes, G. Hermosillo, P. Kornprobst, D. Lingrand: *The inverse EEG and MEG problems: The adjoint state approach I: The continuous case*, Rapport de recherche N°3673 (Mai 1999)
- [7] B. Luong, J. Blum, J. Verron: *A variational method for the resolution of a data assimilation problem in oceanography*, Inverse Problem 14 (1998), pp. 979-997
- [8] S. I. Goncalves, J. C. de Munck, J. P. A. Verbunt, F. Bijma, R. M. Heethaar, F. Lopez da Silva: *In vivo Measurement of the Brain and Skull Resistivities using an EIT-Based Method and Realistic Models for the Head*, IEEE Transaction on Biomedical Engineering, Vol. 50, No. 6 (Juin 2003)
- [9] A. El Badia, T. Ha-Duong: *An inverse source problem in potential analysis* Inverse Problem 16 (2000), pp. 651-663