Approximation non linéaire multiéchelle. Appplication à la compression d'images.

Karine Dadourian

LATP, Ecole Centrale Marseille

En collaboration avec : Jacques Liandrat et Sergio Amat, Université polytechnique de Cartegene

INTRODUCTION

<u>Problème:</u> palier aux problèmes de "flous" dans la compression d'images

reconstruction d'une image à partir de sa forme compressée avec une méthode <u>linéaire</u>

$\Longrightarrow$ définir, utiliser et étudier des méthodes non-linéaires

APPROXIMATION MULTIECHELLE

Pour $f^J \in l^\infty(\mathbb{Z})$ données disrètes définies sur une grille X^J de pas 2^{-J}

- **Schéma de subdivision** *application à la construction de courbe et de surface* à partir d'une échelle large $J0$, **construire $\mathbf{f^J}$ par itération**

$$f^{J_0} \quad \xrightarrow{S} \quad S(f^{J0}) \quad \xrightarrow{S} \quad \ldots \quad \xrightarrow{S} \quad S^{J-J_0}(f^{J_0})$$

Approximation Multiechelle

Pour $f^J \in l^\infty(\mathbb{Z})$ données disrètes définies sur une grille X^J de pas 2^{-J}

- **Schéma de subdivision** *application à la construction de courbe et de surface*
  à partir d'une échelle large $J0$, **construire $\mathbf{f^J}$ par itération**

$$f^{J_0} \quad \xrightarrow{S} \quad S(f^{J0}) \quad \xrightarrow{S} \quad \ldots \quad \xrightarrow{S} \quad S^{J-J_0}(f^{J_0})$$

- **Analyse Multirésolution** (AMR) *application en compression d'images*

  pour f^J défini sur une échelle fine J, **approximer $\mathbf{f^J}$ par $\mathbf{\tilde{f}^J}$** avec

$$\mathbf{\tilde{f}^J} = \mathbf{T}_{\mathrm{AMR}}^{\mathbf{-1}} \mathbf{T}_\epsilon \mathbf{T}_{\mathrm{AMR}} \mathbf{f^J}$$

$$f^J \quad \leftrightarrow \quad (f^{J-1}, d^J) \leftrightarrow \quad \cdots \leftrightarrow \quad T_{\mathrm{AMR}} f^J = (f^{J_0}, d^{J_0+1}, \ldots, d^J)$$

en notant $d^j = f^j - S(f^{j-1})$

Plan de la présentation

- **Schémas de subdivision**
  - Généralitées
  - Méthodes d'études de schémas linéaires
  - Exemples de schémas linéaires
- **Une classe de schémas non-linéaires**
  - Propriétés
  - Exemples d'études
  - Extension 2d
- **Analyse Multirésolution non-linéaire associée**
  - Etude de la stabilité
  - Exemple d'application
  - Tests numériques

Schémas de subdivision

Schémas de Subdivision: Définition

Définition

On appelle schéma de subdivision S un opérateur sur $l^{\infty}(\mathbb{Z})$ défini par

$$\forall f \in l^{\infty}(\mathbb{Z}),\, \forall n \in \mathbb{Z} \quad (Sf)_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{n,n-2m}(f) f_m$$

que l'on peut décomposer

$$(Sf)_{2n} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{n,2k}(f) f_{n-k} \quad \text{et} \quad (Sf)_{2n+1} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{n,2k+1}(f) f_{n-k}$$

Schémas de Subdivision: Définition

Définition

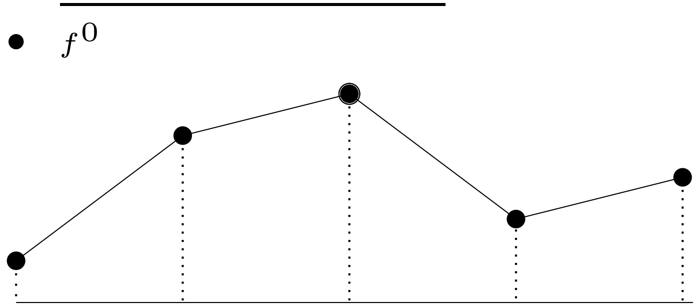
On appelle schéma de subdivision S un opérateur sur $l^\infty(\mathbb{Z})$ défini par

$$\forall f \in l^\infty(\mathbb{Z}),\ \forall n \in \mathbb{Z} \quad (Sf)_n = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{n,n-2m}(f) f_m$$

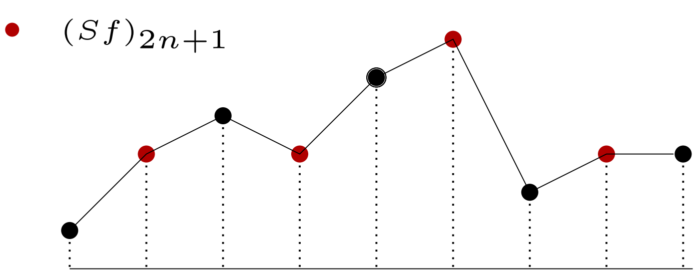
que l'on peut décomposer

$$(Sf)_{2n} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{n,2k}(f) f_{n-k} \quad \text{et} \quad (Sf)_{2n+1} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{n,2k+1}(f) f_{n-k}$$

- **schéma linéaire,** $(Sf)_n = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{n-2m} f_m$
- **schéma interpolant,** $(Sf)_{2n} = f_n$



Points initiaux



Échelle 1

Schémas de Subdivision: Propriétés

Convergence

Pour la convergence du schéma, sont équivalents

1. $\forall f \in l^\infty$, $\exists \mathbf{S^\infty f}$ **continue** tel que $\lim_{j\to+\infty} \sup_n |(S^j f)_n - S^\infty(f)(2^{-j}n)| = 0$

2. pour $\phi_0 \in C_c^0$ vérifiant $\sum_n \phi_0(x-n) = 1$ et la condition de stabilité L^∞

$A||f|| \leq ||\sum_n f_n\phi_0(.-n)|| \leq B||f||$

la suite de fonction $\boxed{\mathbf{f^j(x) = \sum_n S^j(f)_n \phi_0(2^j x - n)}}$ converge uniformement

3. Dans le **cas linéaire,** existence d'une fonction d'échelle $\phi \in C_c^0(\mathbb{R})$ (vérifiant la condition de stabilité)

On a $\phi = \lim_{j\to+\infty} S^j(\delta_{n,0})$ et $S^\infty f(x) = \sum_n f_n \phi(x-n)$

N.Dyn 91, A.Cavaretta, W.Dahmen et C.A.Micchelli 91

Schémas de Subdivision: Propriétés

Régularité

On note $d^k f$ l'opérateur aux différences d'ordre k:

$$d^k f = d(d^{k-1} f) \quad \text{avec} \quad df_n = f_{n+1} - f_n.$$

et S_k le schéma aux différences d'ordre k tel que $d^k(Sf) = S_k(d^k f)$.

Dans le **cas linéaire**: pour tout f, $S^\infty f \in C^k(\mathbb{R})$ **ssi**

(i) S_{k+1} existe

(ii) il existe $L \in \mathbb{N}$ et $\mathbf{0} < \rho < \mathbf{2^{-k}}$ tel que $\forall f \in l^\infty$ $||\mathbf{S^L_{k+1} f}||_\infty \leq \rho^\mathbf{L} ||\mathbf{f}||_\infty$

De plus, $S^\infty f \in C^{\alpha -}$ avec $\alpha = -log_2(\rho)$

Schémas de Subdivision: Propriétés

- **Régularité**

. . .

- **Stabilité de l'opérateur S^∞**

On dit qu'un schéma convergeant est stable si

$$\forall f, g \in l^\infty(\mathbb{Z}^s) \quad \text{on a} \quad ||S^\infty f - S^\infty g||_{L^\infty} \leq C||f - g||_{l^\infty}$$

Dans le **cas linéaire**: convergence $\Rightarrow$ stabilité

Schémas de Subdivision: Propriétés

- **Régularité**

. . .

- **Stabilité de l'opérateur $\mathbf{S}^{\infty}$**

. . .

- **Ordre d'approximation de l'opérateur $\mathbf{S}^{\infty}$**

On définit $\mathbf{ordre}(\mathbf{S}^{\infty}) = \mathbf{r}$ si

pour $g \in C^{\infty}(\mathbb{R}),\ f^0 = g(nh)_n \quad ||S^{\infty}(f^0) - g||_{L^{\infty}} \leq Ch^r$

Lien entre ordre de S et S^{∞}: $\mathbf{ordre}(\mathbf{S}) = \mathbf{r}$ et S stable $\Rightarrow \mathbf{ordre}(\mathbf{S}^{\infty}) = \mathbf{r}$

Schémas de Subdivision: Propriétés

- **Régularité**

...

- **Stabilité de l'opérateur S^∞**

...

- **Ordre d'approximation de l'opérateur S^∞**

...

- **Reproduction des polynômes**

S reproduit **exactement** les polynômes d'ordre k si pour tout $l \leq k$

$$p = (n^l)_n \quad \Rightarrow \quad (Sp)_n = (2^{-1}n)^l.$$

CS à l'ordre: S *reproduit* **exactement** *les polynômes de degré* $r - 1 \Rightarrow$
$\mathbf{o(S) = r}$

Schémas Linéaires: Méthodes

- **avec des polynômes trigonométriques**
  $\longrightarrow$ *CS de convergence et estimation de la régularité*

- **avec des valeurs propres (traduction matricielle)**
  $\longrightarrow$ *CN de convergence et de régularité*

Schémas Linéaires: Méthodes

- **avec des polynômes trigonométriques**
  $\longrightarrow$ *CS de convergence et estimation de la régularité*

- **avec des valeurs propres (traduction matricielle)**
  $\longrightarrow$ *CN de convergence et de régularité*

- **en comparant avec un schéma convergeant**

Convergence: S converge si

(i) $\exists S_0$ convergeant avec ϕ_0 vérifiant la condition de stabilité

(ii) $\exists M > 0,\ \forall f \in l^\infty \quad ||\mathbf{Sf} - \mathbf{S_0 f}||_\infty \leq \mathbf{MD}(\mathbf{f})$

(iii) $\exists L \in \mathbb{N}, \exists \mathbf{c} < \mathbf{1}, \forall f \in l^\infty, \quad \mathbf{D}(\mathbf{S^L f}) \leq \mathbf{cD}(\mathbf{f})$

avec D un opérateur $l^\infty \mapsto \mathbb{R}^+$

(A.Cavaretta, W.Dahmen et C.A.Micchelli 91)

Régularité: de plus si $S_0^\infty f \in C^{\alpha-}$, $S^\infty f \in C^{\beta-}$ avec $\beta = \min\left\{-\frac{log_2(c)}{L}, \alpha\right\}$

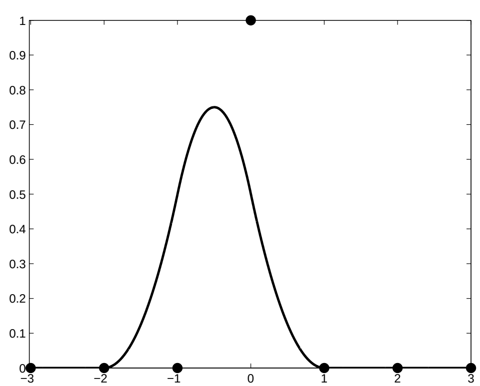
(K.D, J.L 07)

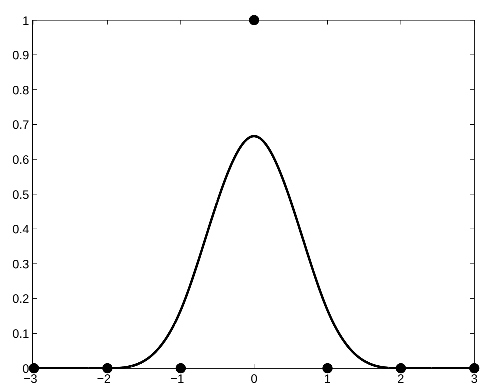
Intérêt: extension au cas non-linéaire, au cas multidimensionel

Schémas Linéaires: Exemples *(schémas splines)*

Les schémas approximants splines

- la fonction d'échelle ϕ est la fonction spline de degré m
- **régularité optimale** C^{m-} pour la taille du support de a
- pas de reproduction exacte de polynômes (*const et degré 1 seulement*)
- ordre d'approximation égal à 2





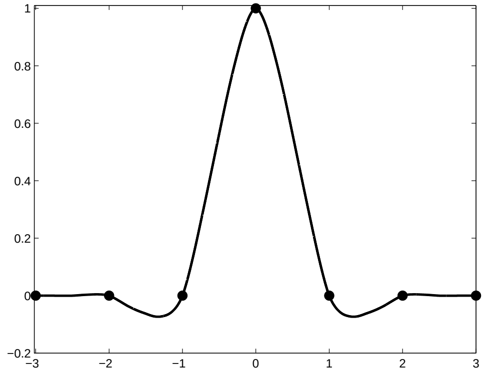
pour $f^0 = (\delta_{n,0})_n$*:* $S^8(f)$ *avec* S_{spline_2} $S^8(f)$ *avec* S_{spline_3}

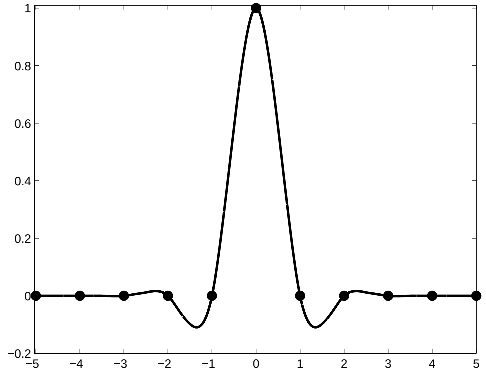
Schémas Linéaires: Exemples *(schémas de Lagrange)*

Les schémas interpolants de Lagrange $S_{l,r}$

- S définie par la valeur du polynôme de Lagrange $p_{n,l,r}$ construit avec $\{(n+j, f_{n+j})_{j=-l+1\dots r}\}$
- $(Sf)_{2n} = f_n$ et $(Sf)_{2n+1} = p_{n,l,r}(n+\frac{1}{2})$
- **reproduction exacte de polynômes optimale** pour le nombre de points utilisé
- convergence et régularité difficiles à montrer

avec des schémas centrés





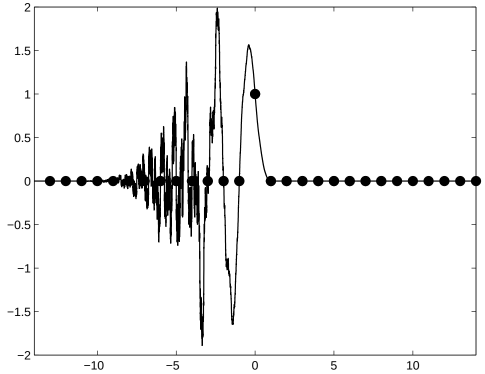
pour $f^0 = (\delta_{n,0})_n$*:* $S^8(f)$ *avec* $S_{\mathbf{2,2}}$ $S^8(f)$ *avec* $S_{\mathbf{3,3}}$

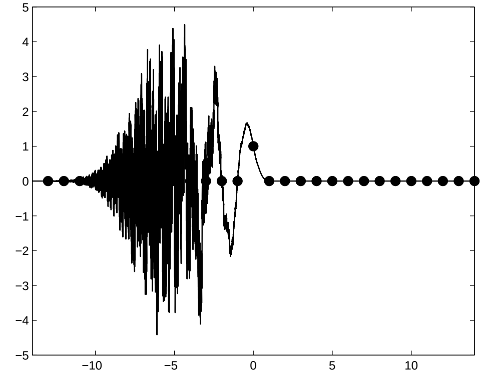
Schémas Linéaires: Exemples *(schémas de Lagrange)*

Les schémas interpolants de Lagrange $S_{l,r}$

- S définie par la valeur du polynôme de Lagrange $p_{n,l,r}$ construit avec $\{(n+j, f_{n+j})_{j=-l+1\dots r}\}$
- $(Sf)_{2n} = f_n$ et $(Sf)_{2n+1} = p_{n,l,r}(n+\frac{1}{2})$
- **reproduction exacte de polynômes optimale** pour le nombre de points utilisé
- convergence et régularité difficiles à montrer

avec des schémas décentrés





pour $f^0 = (\delta_{n,0})_n$: $S^8(f)$ *avec* $S_{\mathbf{1},\mathbf{8}}$ $S^8(f)$ *avec* $S_{\mathbf{1},\mathbf{9}}$

Schémas Linéaires: Exemples *(schémas de Lagrange)*

Les schémas interpolants de Lagrange $S_{l,r}$

- S définie par la valeur du polynôme de Lagrange $p_{n,l,r}$ construit avec $\{(n+j, f_{n+j})_{j=-l+1\ldots r}\}$
- $(Sf)_{2n} = f_n$ et $(Sf)_{2n+1} = p_{n,l,r}(n+\frac{1}{2})$
- **reproduction exacte de polynômes optimale** pour le nombre de points utilisé
- convergence et régularité difficiles à montrer

centré $l = n$ *(G. Deslaurier et S. Dubuc 89, I. Daubechies 92)*:

$$\text{pour tout } f,\ S^\infty f \in C^{0.4l}$$

décentré $l < r$ *(K. D et J. L 07)*:

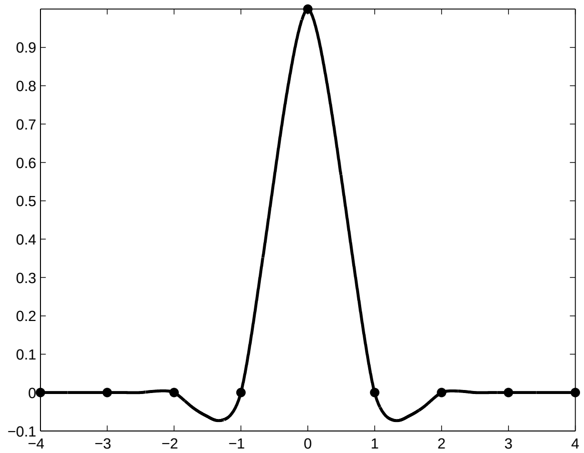
$\forall l,\ \exists r_l$ tel que $S_{l,r}$ diverge pour $r \geq r_l$ (estimation théorique de r_l)

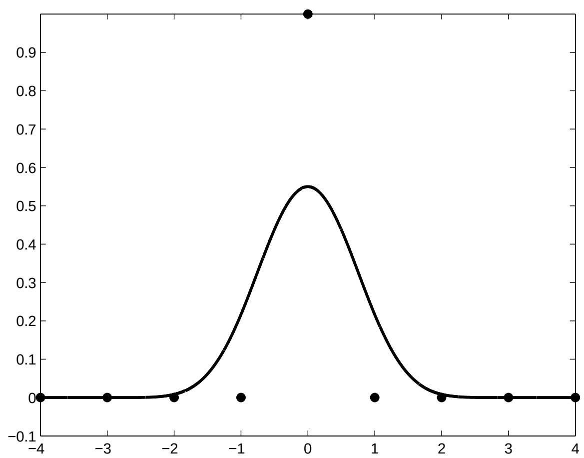
Une classe de schémas non-linéaires

Schémas non-linéaires: Motivation et Cadre

- **Répondre**
  - aux problèmes d'adaptivité:

    grille non-uniforme (*I.Daubechies, I.Gustov et W.Sweldens 99, V.Maxim et M-L.Mazure 04*)
    propriétés géométriques (*F.Kuijt et R.Van Damme 98, M.S.Floater et C.A.Michelli 98, M.Marinov, N.Dyn et D.Levin 05*)
    reproduction de fonctions (*G.Morin, J.Warren et H.Weimer 01, C.Beccari, G.Casciola et L.Romani 07*)
  - aux problèmes d'oscillations:





pour $f^0 = (\delta_{n,0})_n$: $S^8(f)$ *avec* $S_{2,2}$ $S^8(f)$ *avec* S_{spline_5}

Etude de schémas non-linéaires

Notre cadre

On étudie pour $f \in l^\infty(\mathbb{Z})$

$$\mathbf{S_{NL}(f) = S(f) + F(\delta f)} \qquad \text{avec}$$

S un schéma linéaire **convergeant**, de régularité $C^{\alpha-}$

F un opérateur **non-linéaire**,

δ un opérateur linéaire (opérateur aux différences d^k)

Convergence et Régularité (théorème)

S_{NL} **converge** si

$$\textbf{(i)} \quad \exists M > 0,\ \forall f \in l^\infty \quad ||\mathbf{F(f)}||_\infty \leq \mathbf{M}||\mathbf{f}||_\infty$$

$$\textbf{(ii)} \quad \exists L \in \mathbb{N}, \exists c < 1, \forall f \in l^\infty, \quad ||\delta(\mathbf{S_{NL}^L f})||_\infty \leq \mathbf{c}||\delta \mathbf{f}||_\infty$$

De plus,

$$S_{NL}^\infty f \in C^{\beta-} \text{ avec } \beta = \min\left\{-\frac{log_2(c)}{L}, \alpha\right\}$$

Etude de schémas non-linéaires

Stabilité (théorème)

S_{NL} est **stable** si

(i) S_{NL} converge ou reproduit exactement les constantes,

(ii) $\exists M > 0,\ \forall f, g \in l^\infty \quad ||\mathbf{F}(\mathbf{f}) - \mathbf{F}(\mathbf{g})||_\infty \leq \mathbf{M}||\mathbf{f} - \mathbf{g}||_\infty$,

(iii) $\exists L \in \mathbb{N}, \exists c < 1, \forall f, g \in l^\infty, \quad ||\delta(\mathbf{S_{NL}^L f}) - \delta(\mathbf{S_{NL}^L g})||_\infty \leq \mathbf{c}||\delta\mathbf{f}||_\infty$

Etude de schémas non-linéaires

Stabilité (théorème)

S_{NL} est **stable** si

(i) S_{NL} converge ou reproduit exactement les constantes,

(ii) $\exists M > 0, \ \forall f, g \in l^\infty \quad ||\mathbf{F}(\mathbf{f}) - \mathbf{F}(\mathbf{g})||_\infty \leq \mathbf{M}||\mathbf{f} - \mathbf{g}||_\infty$,

(iii) $\exists L \in \mathbb{N}, \exists c < 1, \forall f, g \in l^\infty, \quad ||\delta(\mathbf{S}^{\mathbf{L}}_{\mathbf{NL}}\mathbf{f}) - \delta(\mathbf{S}^{\mathbf{L}}_{\mathbf{NL}}\mathbf{g})||_\infty \leq \mathbf{c}||\delta\mathbf{f}||_\infty$

Ordre (théorème)

Si

(i) S_{NL} converge

(ii) il existe S un schéma linéaire, convergeant tel que $||S_{NL} - S||_\infty = O(h^p)$

alors $\mathbf{o}(\mathbf{S}^\infty_{\mathbf{NL}}) = \min(\mathbf{p}, \mathbf{o}(\mathbf{S}))$

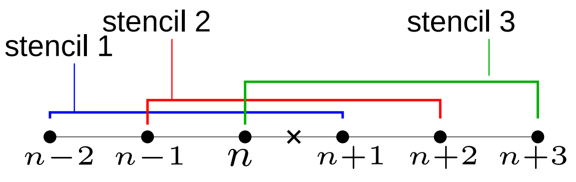
(K.D, S.Amat, J.Liandrat 05-07)

Ex1 schéma NL: le schéma WENO à 6 points

Construction *(schéma interpolant)*

S_{WENO} est une combinaison convexe de 3 schémas linéaires

$$\boxed{S_{\text{WENO}} = \alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \alpha_3 S_3}$$



avec

- S_1 le schéma de Lagrange complétement décentré $S_{3,1}$
  S_2 le schéma de Lagrange centré $S_{2,2}$
  S_3 le schéma de Lagrange complétement décentré $S_{1,3}$

- α_i poids dépendant de la "régularité" de f
  a_i "mesure" la régulartité avec $d^2 f$

$$\alpha_i = \frac{a_i}{a_1 + a_2 + a_3} \quad \text{avec} \quad a_i = \frac{const_i}{(\epsilon + b_i)^2} \quad \text{et} \quad b_i = b_i(d^2 f)$$

(T.Chan, X-D.Liu et S.Osher 94, G.Jiang et C-W.Shu 96 pour EDP, A.Cohen, N.Dyn et B.Matei 03 résultats pour la compression d'images)

Ex1 schéma NL: le schéma WENO à 6 points

Convergence et régularité

on peut écrire

$$(S_{\text{WENO}} f)_{2n+1} = \frac{f_n + f_{n+1}}{2} + F_{\text{WENO}}(d^2 f)_{2n+1}$$

avec

- le schéma de Lagrange $(S_{1,1} f)_{2n+1} = \frac{f_n + f_{n+1}}{2}$ converge
- $\forall f, \quad ||F_{\text{WENO}}(f)||_\infty \leq \dfrac{1}{2}||f||_\infty$
- $|d^2(S_{\text{WENO}} f)_{2n}| \leq ||d^2 f||_\infty$ et $|d^2(S_{\text{WENO}} f)_{2n+1}| \leq \frac{1}{2}||d^2 f||_\infty$

on itère pour avoir

$$||d^2(S^2_{\text{WENO}} f)||_\infty \leq \tfrac{13}{16}||d^2 f||_\infty$$

Avec le théorème de convergence et de régularité **linéaire + perturbation,**

$$\boxed{S_{\text{WENO}} \text{ converge et } S^\infty_{\text{WENO}} f \in C^{0.215-}}$$

(K. D, J. L et S. A 06)

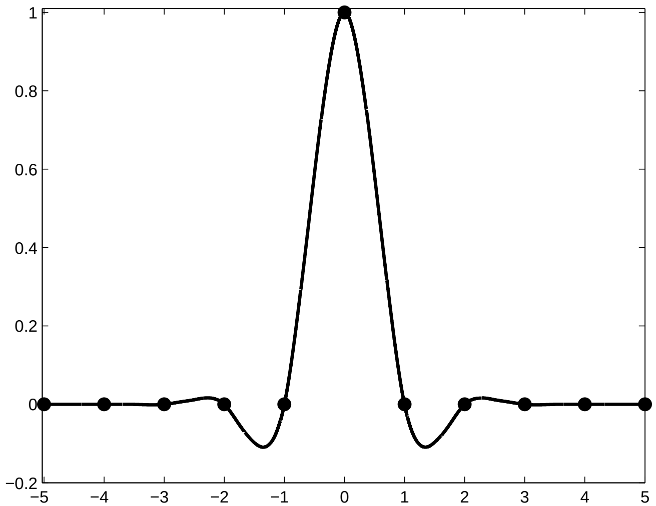
Ex1 schéma NL: le schéma WENO à 6 points

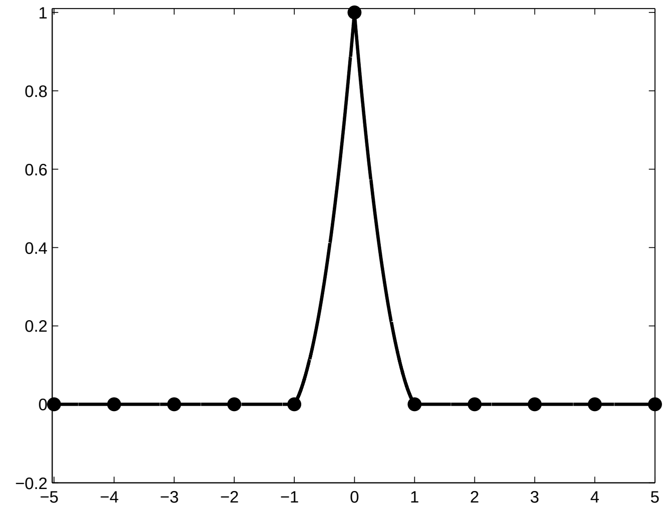
Régularité Numérique

avec $-log_2\left(\frac{||f^{j+1}_{n+1}-f^{j+1}_n||_\infty}{||f^j_{n+1}-f^j_n||_\infty}\right)$, on obtient $S^\infty_{\text{WENO}}f \in C^{\mathbf{1}-}$

Ordre

avec le théorème sur l'ordre, $o(S^\infty_{\text{WENO}}) = 5$





pour $f^0 = (\delta_{n,0})_n$*:* $S^8(f^0)$ *avec* $S_{3,3}$ $S^8(f^0)$ *avec* S_{WENO}

Ex2 schéma NL: les schémas POWERP

■ **Construction** ***(schéma interpolant)***

On part de

$$(S_{\mathbf{2},\mathbf{2}}f)_{2n+1} = \frac{f_n + f_{n+1}}{2} \boxed{-\frac{1}{8}\frac{d^2 f_n + d^2 f_{n+1}}{2}}$$

vérifiant

$$\left|\frac{x+y}{2}\right| \leq max(|x|, |y|)$$

Ex2 schéma NL: les schémas POWERP

■ **Construction** ***(schéma interpolant)***

On part de

$$
\begin{aligned}
(S_{\mathbf{2},\mathbf{2}}f)_{2n+1} &= \frac{f_n + f_{n+1}}{2} - \frac{1}{8}\frac{d^2 f_n + d^2 f_{n+1}}{2} \\
(S_{\mathrm{PPH}}f)_{2n+1} &= \frac{f_n + f_{n+1}}{2} - \boxed{\frac{1}{8}H_2(d^2 f_n, d^2 f_{n+1})}
\end{aligned}
$$

avec

$$H_2(x,y) = \frac{sign(x) + sign(y)}{2}\left|\frac{xy}{x+y}\right|$$

vérifiant

$$|H_2(x,y)| \leq 2min(|x|,|y|)$$

(S.Amat, R.Donat, J.Liandrat, JC.Trillo 03)

Ex2 schéma NL: les schémas POWERP

■ **Construction** ***(schéma interpolant)***

On part de

$$\begin{aligned}(S_{\mathbf{2},\mathbf{2}}f)_{2n+1} &= \frac{f_n + f_{n+1}}{2} - \frac{1}{8}\frac{d^2 f_n + d^2 f_{n+1}}{2}\\ (S_{\text{PPH}}f)_{2n+1} &= \frac{f_n + f_{n+1}}{2} - \frac{1}{8}H_{\mathbf{2}}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1})\\ (S_{\text{POWERP}}f)_{2n+1} &= \frac{f_n + f_{n+1}}{2}\boxed{-\frac{1}{8}H_{\mathbf{p}}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1})}\end{aligned}$$

(K.D, S.A et J.L 05)

avec

$$H_p(x,y) = \frac{sign(x) + sign(y)}{2}\,\frac{|x+y|}{2}\left(1 - \left|\frac{x-y}{x+y}\right|^p\right)$$

(S.Serna and A.Marquina 04 dans les EDP)

Ex2 schéma NL: les schémas POWERP

- **Convergence**

$$\boxed{\text{Pour tout } p,\ S_{\mathrm{POWERP}} \text{ converge et } S^{\infty}_{\mathrm{POWERP}} f \in C^{1-}}$$

(K. D, S. A et J. L 05)

- **Stabilité: pour $p \leq 2$, $S_{\mathbf{POWERP}}$ stable**

(S.Amat et J.Liandrat 05)

- **Ordre: pour $p \leq 2$, $o(S^{\infty}_{\mathbf{POWERP}}) = 3$, sinon $o(S^{\infty}_{\mathbf{POWERP}}) = 2$**

Ex2 schéma NL: les schémas POWERP

Convergence

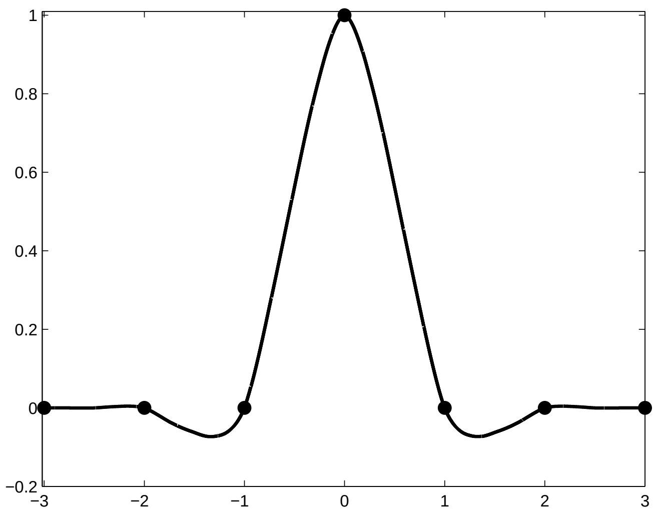
$\boxed{\text{Pour tout } p,\ S_{\text{POWERP}} \text{ converge et } S^{\infty}_{\text{POWERP}} f \in C^{1-}}$ $\Rightarrow$ estimation optimale

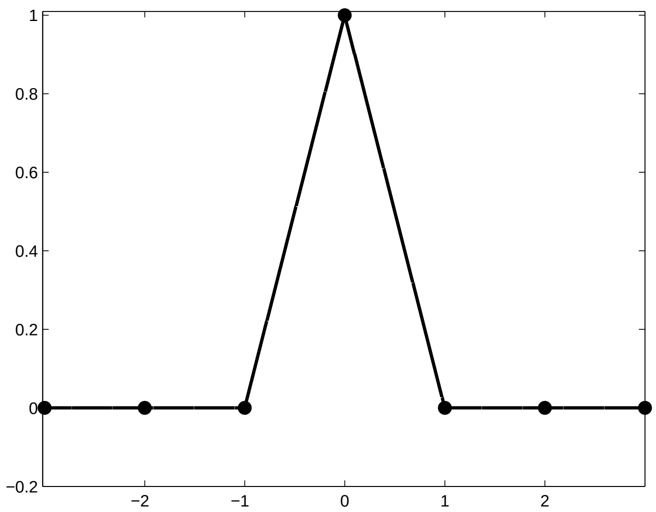
(K. D, S. A et J. L 05)

Stabilité: pour $p \le 2$, S_{POWERP} stable

(S.Amat et J.Liandrat 05)

Ordre: pour $p \le 2$, $o(S^{\infty}_{\text{POWERP}}) = 3$, sinon $o(S^{\infty}_{\text{POWERP}}) = 2$





pour $f^0 = (\delta_{n,0})_n$*:* $S^8(f^0)$ *avec* $S_{2,2}$ $S^8(f^0)$ *avec* S_{PPH}

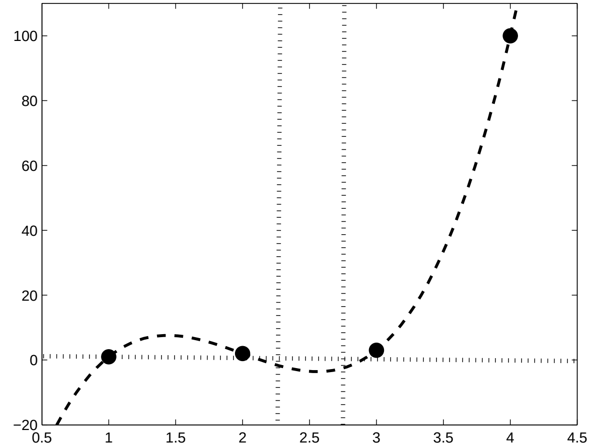
Ex3 schéma NL: un schéma approximant C^2

Construction

On part du schéma approximant

$$
\begin{aligned}
(Sf)_{2n} &= p_{n,2,2}(n+\mathbf{\tfrac{1}{4}}) = -\frac{7}{128}f_{n-1} + \frac{105}{128}f_n + \frac{35}{128}f_{n+1} - \frac{5}{128}f_{n+2}\\
(Sf)_{2n+1} &= p_{n,2,2}(n+\mathbf{\tfrac{3}{4}}) = -\frac{5}{128}f_{n-1} + \frac{35}{128}f_n + \frac{105}{128}f_{n+1} - \frac{7}{128}f_{n+2}
\end{aligned}
$$

(N.Dyn, M.S.Floater and K.Hormann 05)



Polynôme interpolateur $p_{n,2,2}$ des points ● (- -)

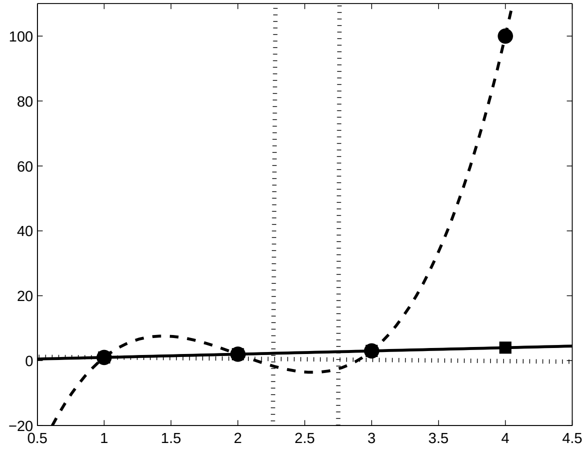
Ex3 schéma NL: un schéma approximant C^2

Construction

On part du schéma approximant

$$
\begin{aligned}
(Sf)_{2n} &= p_{n,2,2}(n+\mathbf{\frac{1}{4}}) = -\frac{7}{128}f_{n-1} + \frac{105}{128}f_n + \frac{35}{128}f_{n+1} - \frac{5}{128}f_{n+2} \\
(Sf)_{2n+1} &= p_{n,2,2}(n+\mathbf{\frac{3}{4}}) = -\frac{5}{128}f_{n-1} + \frac{35}{128}f_n + \frac{105}{128}f_{n+1} - \frac{7}{128}f_{n+2}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{perturber } f_{n-1} \text{ ou } f_{n+2} \text{ selon } sign(|d^2 f_n| - |d^2 f_{n+1}|)}$



Polynôme interpolateur $p_{n,2,2}$ des points ● (- -) et aux points modifiées ■ (–)

Ex3 schéma NL: un schéma approximant C^2

Construction

On part du schéma approximant

$$\begin{aligned}(Sf)_{2n} &= p_{n,2,2}(n+\mathbf{\tfrac{1}{4}}) = -\frac{7}{128}f_{n-1}+\frac{105}{128}f_n+\frac{35}{128}f_{n+1}-\frac{5}{128}f_{n+2}\\ (Sf)_{2n+1} &= p_{n,2,2}(n+\mathbf{\tfrac{3}{4}}) = -\frac{5}{128}f_{n-1}+\frac{35}{128}f_n+\frac{105}{128}f_{n+1}-\frac{7}{128}f_{n+2}\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{perturber } f_{n-1} \text{ ou } f_{n+2} \text{ selon } sign(|d^2 f_n| - |d^2 f_{n+1}|)}$

On obtient

$$\begin{aligned}(S_{\text{PPHA}}f)_{2n} &= (S_{\mathbf{spline_2}}f)_{2n} + F(d^2 f)_{2n}\\ (S_{\text{PPHA}}f)_{2n+1} &= (S_{\mathbf{spline_2}}f)_{2n+1} + F(d^2 f)_{2n+1}\end{aligned}$$

(K.D, J.L et S.A 07)

Ex3 schéma NL: un schéma approximant C^2

- **Convergence et Stabilité**

$$\boxed{S_{\text{PPHA}} \text{ converge, } S^{\infty}_{\text{PPHA}} f \in C^{\mathbf{1}.19} \text{ et est } \textbf{stable}}$$

(K.D, J.L et S.A 07)

- **Régularité Numérique:** $S^{\infty}_{\mathbf{PPHA}} f \in C^{2.438-}$

Ex3 schéma NL: un schéma approximant C^2

Convergence et Stabilité

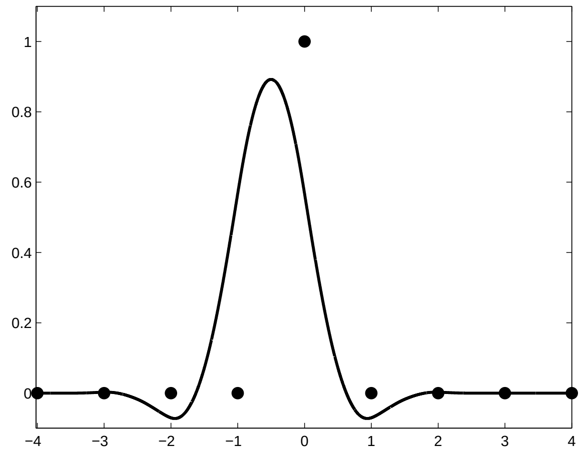
S_{PPHA} converge, $S^{\infty}_{\mathsf{PPHA}} f \in C^{\mathbf{1}.19}$ et est **stable**

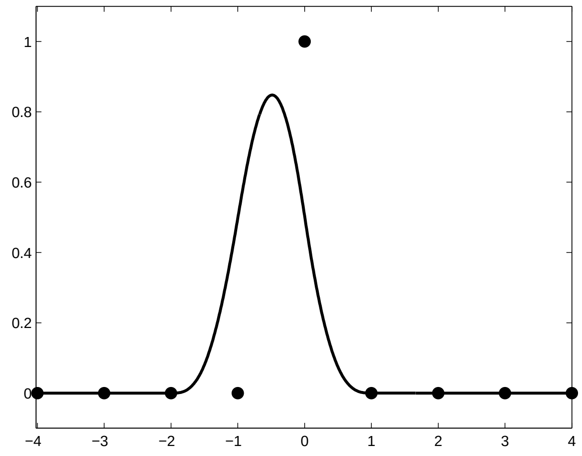
(K.D, J.L et S.A 07)

Régularité Numérique: $S^{\infty}_{\mathbf{PPHA}} f \in C^{2.438-}$

Ordre:

pour $g \in C^{\infty}([0,1])$ et $f = (g((n - \frac{1}{2})h))_n$, $||S^{\infty}_{\mathsf{PPHA}} f - g||_{\infty} = O(h^{\mathbf{3}})$

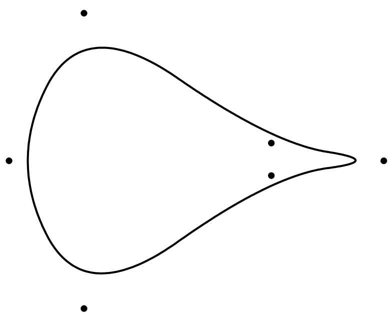




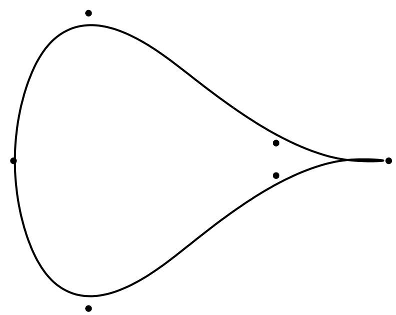
pour $f^0 = (\delta_{n,0})_n$*:* $S^8(f^0)$ *avec* $\mathbf{S}_{[\mathbf{DFH05}]}$ $S^8(f^0)$ *avec* S_{PPHA}

Ex3 schéma NL: un schéma approximant C^2

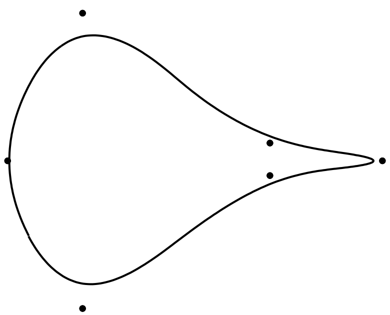
- **Construction de courbes**
  - avec des schémas approximants



$S^8(f^0)$ *avec* $\mathbf{S}_{\mathbf{spline_2}}$

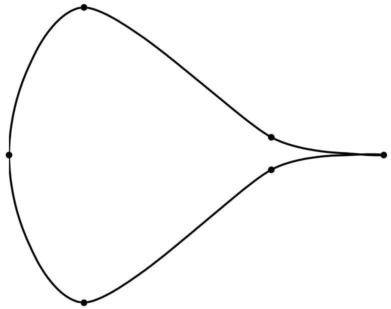


$S^8(f^0)$ *avec* $\mathbf{S}_{[\mathbf{DFH05}]}$

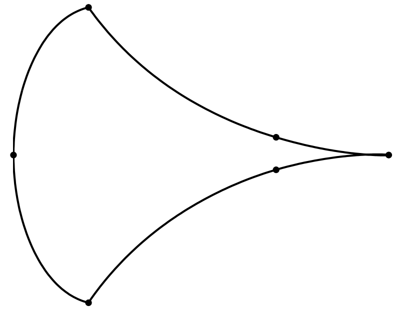


$S^8(f^0)$ *avec* $\mathbf{S}_{\text{PPHA}}$

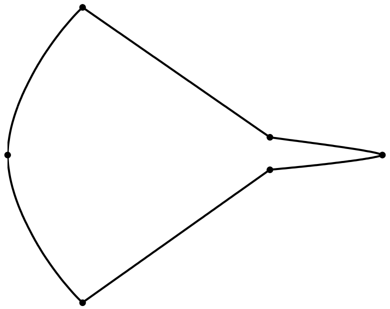
  - avec des schémas interpolants



$S^8(f^0)$ *avec* $\mathbf{S}_{\mathbf{2,2}}$



$S^8(f^0)$ *avec* $\mathbf{S}_{\text{WENO}}$



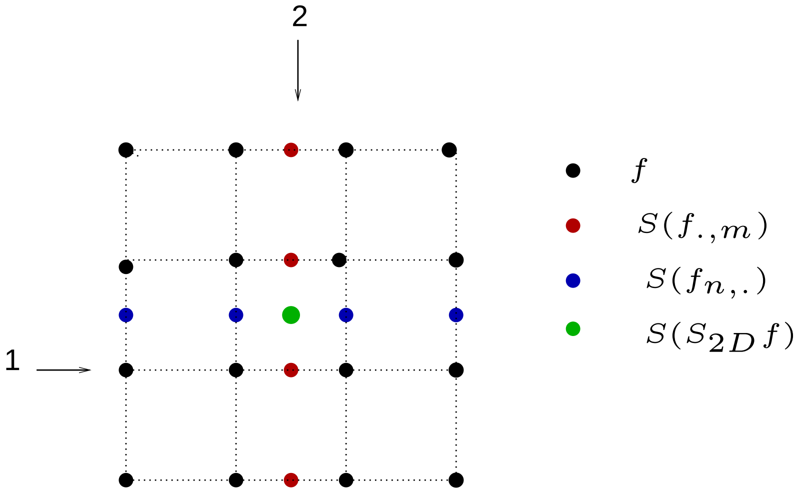
$S^8(f^0)$ *avec* $\mathbf{S}_{\text{PPH}}$

Schéma 2d: des constructions possibles

Pour S, un schéma 1d,
on étend S à deux variables en utilisant des directions alternées (*ligne puis colonnes*)

Construction classique par "produit tensoriel"

$$(S_{2d}f)_{2n,m} = (Sf_{n,.})_m$$
$$(S_{2d}f)_{n,m} = S((\mathbf{S_{2d}f})_{\mathbf{2.,m}})_n$$



dans le cas interpolant

Schéma 2d: des constructions possibles

Pour S, un schéma 1d,
on étend S à deux variables en utilisant des directions alternées (*ligne puis colonnes*)

- **Construction classique par "produit tensoriel"**

$$\begin{aligned} (S_{2d}f)_{2n,m} &= \qquad (Sf_{n,.})_m \\ (S_{2d}f)_{n,m} &= \quad S((\mathbf{S_{2d}f})_{\mathbf{2.,m}})_n \end{aligned}$$

- **Question: Est ce que la convergence de S_{1d} implique la convergence du schéma S_{2d} associé?**

Dans le **cas linéaire**: S_{1d} converge $\Longrightarrow$ le schéma S_{2d} associé converge

(*N.Dyn 91*)

Schémas 2d non-linéaires: résultats généraux

- **Résultat généraux: Pour un schéma 2d s'écrivant:** $\mathbf{S_{NL2d}f = S_{2d}f + F_{2d}(\Delta_{2d}f)}$

  les théorèmes **lin+pertur** de convergence, régularité et stabilité restent vrais

- **Problème**

Pour un schéma 1d non-linéaire $S_{NL}f = Sf + F(\delta f)$ **vérifiant les hypothèses du théorème 1d**:

$$\begin{array}{lrcl} \forall f \in l^\infty(\mathbb{Z}) & ||\mathbf{F(f)}|| & \leq & \mathbf{M}||\delta \mathbf{f}|| \\ & ||\delta(\mathbf{S_{NL}f})|| & \leq & \mathbf{c}||\delta \mathbf{f}||, \end{array}$$

le schéma S_{NL2d} **associé converge**?

Schémas 2d non-linéaires: résultats généraux

- **Résultat généraux: Pour un schéma 2d s'écrivant:** $\mathbf{S_{NL2d}f = S_{2d}f + F_{2d}(\Delta_{2d}f)}$

les théorèmes **lin+pertur** de convergence, régularité et stabilité restent vrais

- **Problème**

Pour un schéma 1d non-linéaire $S_{NL}f = Sf + F(\delta f)$ **vérifiant les hypothèses du théorème 1d**:

$$\forall f \in l^{\infty}(\mathbb{Z}) \quad \begin{array}{lcl} ||\mathbf{F(f)}|| & \leq & \mathbf{M}||\delta \mathbf{f}|| \\ ||\delta(\mathbf{S_{NL}f})|| & \leq & \mathbf{c}||\delta \mathbf{f}||, \end{array}$$

le schéma S_{NL2d} **associé converge**?

1. on peut écrire $S_{NL2d}f = S_{2d}f + F_{2d}(\Delta_{2d}f)$ avec

$$\Delta_{2d}f_{n,m} = (\delta(f_{.,m})_n, \delta(f_{n,.})_m) = (\delta_{ligne}f_{n,m}, \delta_{colonne}f_{n,m})$$

2. Contraction 2d à montrer...

Schémas 2d non-linéaires: étude du problème

On suppose que le schéma linéaire S vérifie $||S||_\infty = 1$ et δ un opérateur aux différences.

- On définit pour une échelle j

$$L_j = \sup_{n\ ,m} |(\delta_{ligne} f^j_{n,.})_m| \quad \text{et} \quad V_j = \sup_{n,m} |(\delta_{colonne} f^j_{.,m+1})_n|$$

- On obtient

$$\begin{pmatrix} L_{j+1} \\ V_{j+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} L_j \\ V_j \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } A = \begin{pmatrix} c + 1/2(M||\delta||_1)^2 & M||\delta||_1 \\ cM||\delta||_1 & c \end{pmatrix} \textit{pour la construction "produit tensoriel"}$$

Schémas 2d non-linéaires: étude du problème

On suppose que le schéma linéaire S vérifie $||S||_\infty = 1$ et δ un opérateur aux différences.

- On obtient

$$\begin{pmatrix} L_{j+1} \\ V_{j+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} L_j \\ V_j \end{pmatrix}$$

avec $A = \begin{pmatrix} c + 1/2(M||\delta||_1)^2 & M||\delta||_1 \\ cM||\delta||_1 & c \end{pmatrix}$ *pour la construction "produit tensoriel"*

Convergence (théorème)

Si $\rho(A) < 1$ alors le schéma S_{NL2d} converge

Régularité (théorème)

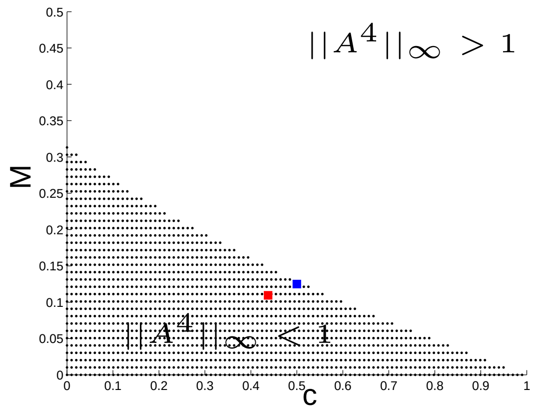
Si $\rho(A) < 1$ alors $S^\infty_{NL2d} \in C^{\beta -}$ avec $\beta = \sup_k \frac{-log_2(||\mathbf{A^k}||_\infty)}{k}$

Schémas 2d non-linéaires: Exemples

Ici $\delta = d^2$ avec $||\delta||_1 = 4$. Pour la **construction "produit tensoriel"**

- **Ex1: le schéma POWERP** $(c = \frac{1}{2}$, $M = \frac{1}{8}$ **et** $\rho(A) = 0.922)$

$$L = 1 \quad ||A||_\infty = 1.125$$
$$L = 3 \quad ||A^3||_\infty = 1.002$$
$$\mathbf{L = 4} \quad ||A^4||_\infty = 0.925$$



$\Rightarrow S_{\text{POWERP}2d}$ converge vers une fonction limite $C^{\beta-}$ avec $\beta \approx 0.14$

- **Ex2: le schéma PPHA scheme** $(c = \frac{7}{16}$, $M = \frac{7}{64}$ **et** $\rho(A) = 0.7787)$

$$L = 1 \quad ||A||_\infty = 0.9707$$

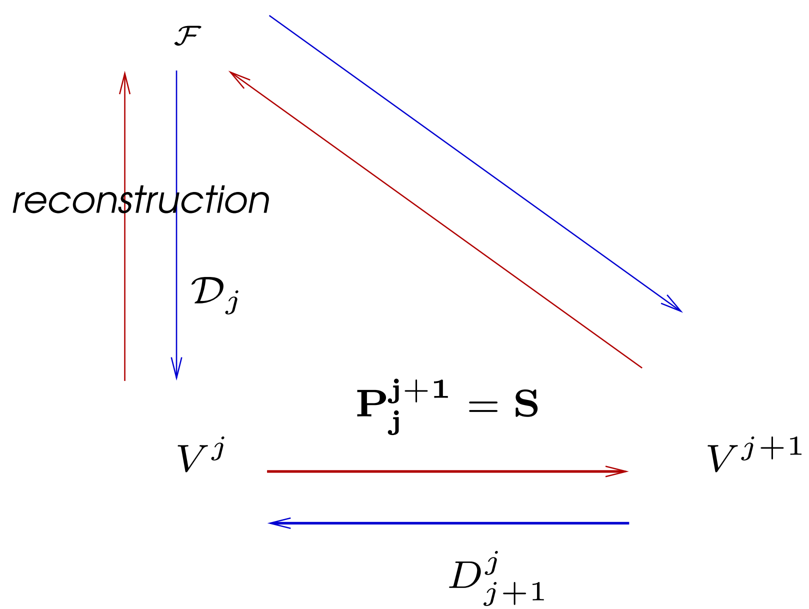
$\Rightarrow S_{\text{PPHA}2d}$ converge vers une fonction limite $C^{\beta-}$ avec $\beta \approx 0.36$

Applications aux analyses multirésolutions

AMR généralisée: construction *A. Harten 93*

AMR généralisée

- $\mathcal{F}$ *espaces de fonctions*
- $(V^j)_j$ espaces discrets *(construits par discrétisation $\mathcal{D}_j$ de $\mathcal{F}$)*
- Opérateur de décimation $D^j_{j+1} : V^{j+1} \longrightarrow V^j$ tel que $V^{j-1} = D^{j-1}_j(V^j)$,
- Opérateur de prédiction $P^{j+1}_j : V^j \longrightarrow V^{j+1}$ défini par un schéma S



AMR généralisée: construction *A. Harten 93*

Intérêt

définir une transformée AMR

$$\mathbf{v^J} \Leftrightarrow \{v^{J-1}, d^J\} \Leftrightarrow \{v^{J-2}, d^{J-1}, d^J\} \Leftrightarrow T_{\text{AMR}} v^J = \{\mathbf{v^0}, \mathbf{d^1}, .., \mathbf{d^J}\}$$

avec d^j les détails défini par $\mathbf{d^{j+1}} = \mathbf{v^{j+1}} - (\mathbf{S v^j})$

$\Rightarrow$ compresser v^J en seuillant $(d^j)_{j=1\ldots J}$

Problème

D^j_{j+1} et P^{j+1}_j doivent vérifiés $\mathbf{D^j_{j+1} P^{j+1}_j} = \mathbf{Id_{V^j}}$

$\Longrightarrow$ on choisit une **discrétisation par valeurs ponctuelles**

$$(\mathcal{D}_j f)_n = f(2^{-j} n)$$
$$(D^j_{j+1} v^{j+1})_n = v^{j+1}_{2n}$$

S est un **schéma interpolant**

AMR non-linéaire: résultats de stabilité

- **Définition de la Stabilité pour une AMR**
  - $$||f^j - \tilde{f}^j||_\infty \leq C \left(||f^0 - \tilde{f}^0||_\infty + \sum_{l=1}^{j} ||d^l - \tilde{d}^l||_\infty \right)$$
  - $$\begin{cases} \|f^0 - \tilde{f}^0\|_\infty & \leq & C\|f^j - \tilde{f}^j\|_\infty \\ \|d^l - \tilde{d}^l\|_\infty & \leq & C\|f^j - \tilde{f}^j\|_\infty \quad \forall l \in 1 \ldots j-1 \end{cases}$$

AMR non-linéaire: résultats de stabilité

- **Définition de la Stabilité pour une AMR**

  $\dots$

- **Résultat de Stabilité pour une AMR associée à des schémas linéaires**

$$S \text{ converge} \Longrightarrow \text{AMR associée est stable}$$

AMR non-linéaire: résultats de stabilité

- **Définition de la Stabilité pour une AMR**

  . . .

- **Résultat de Stabilité pour une AMR associée à des schémas <u>linéaires</u>**

  . . .

- **Résultat de Stabilité pour une AMR associée à** $\boxed{\mathbf{S_{NL}f = Sf + F(\delta f)}}$

L'AMR associée est **stable** si

(i) $\exists M > 0$ tel que $\forall d, d' \in l^\infty$ $\quad ||\mathbf{F(d) - F(d')}||_\infty \leq \mathbf{M}||\mathbf{d - d'}||_\infty$

(ii) $\exists c < 1$ tel que $\forall f, g \in l^\infty$ $\quad ||\delta(\mathbf{S_{NL}f - S_{NL}g})||_\infty \leq \mathbf{c}||\delta(\mathbf{f - g})||_\infty$

$\longrightarrow$ existence d'hypothèses sur S^L_{NL} ou sur l'AMR associée

$\longrightarrow$ extension au 2d possible, existence d'un résultat liant les constantes 1d et la stabilité 2d

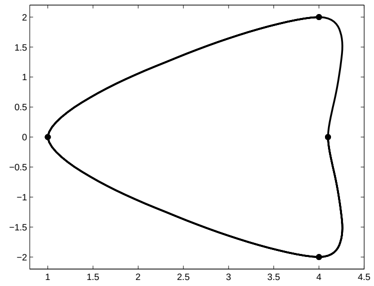
$\longrightarrow$ concernant la stablité de S_{WENO} *(difficile à établir)* et de S_{POWERP} *(établi pour $p = 2$ S.A et J.L 05)*

Ex 1 AMR NL: le schéma GC(géométriquement controlé)

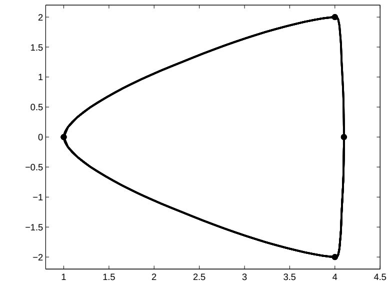
Définition *(schéma interpolant)*

$$\boxed{(S_{gc}f)_{2n+1} = (f_n + f_{n+1})(w(f)_n + \tfrac{1}{2}) - w(f)_n(f_{n+1} + f_{n+2})}$$

avec $w(f)$ défini par $w(f) = h(df, c, w)$



$S^5(f^0)$ *avec* $S_{2,2}$



$S^5(f^0)$ *avec* S_{GC}

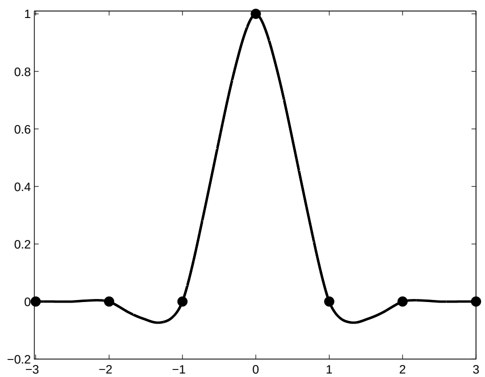
Convergence et Régularité

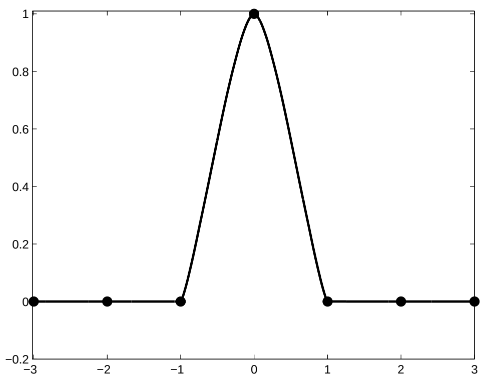
S_{GC} converge et $S_{\mathsf{GC}}^{\infty} f \in C^1$

(M.Marinov, N.Dyn et D.Levin 05)

Ex 1 AMR NL: le schéma GC(géométriquement controlé)

Intérêt pour des AMR

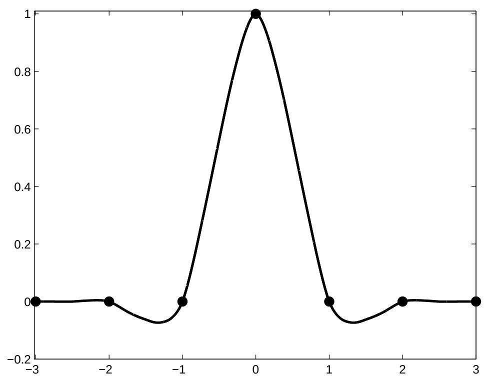


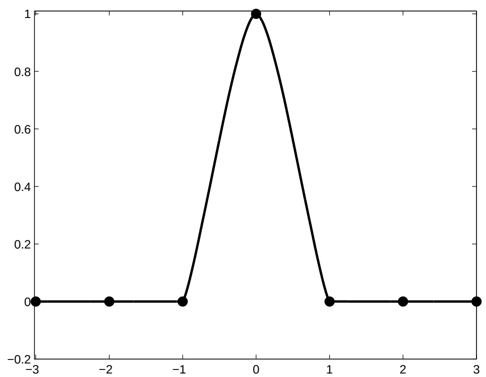


pour $f^0 = (\delta_{n,0})_n$: $S^8(f^0)$ *avec* $S_{2,2}$ $S^8(f^0)$ *avec* S_{GC}

Ex 1 AMR NL: le schéma GC(géométriquement controlé)

Intérêt pour des AMR





pour $f^0 = (\delta_{n,0})_n$*:* $S^8(f^0)$ *avec* $S_{2,2}$ $S^8(f^0)$ *avec* S_{GC}

Stabilité de l'AMR associée

On écrit

$$(S_{\text{GC}}f)_{2n+1} = \frac{f_n + f_{n+1}}{2} + F_{\text{GC}}(\mathbf{df})_{2n+1}$$

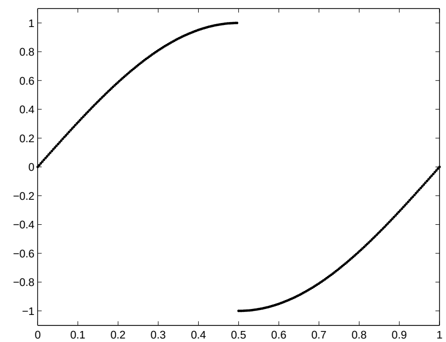
Avec le théorème de stabilité **linéaire + perturbation**,

$$\boxed{\text{L'AMR associée et le schéma } S_{\text{GC}} \text{ sont stables}}$$

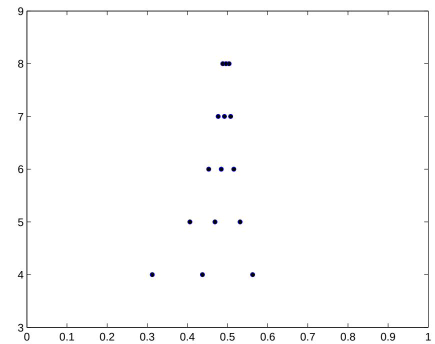
(K.D, S.A et J.L 08)

AMR COMPARAISON: test numérique 1d

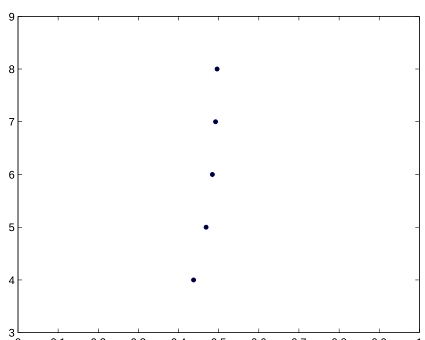
- **Localisation des détails $|d_n^j| > \epsilon$ à chaque échelle**
  On considère $T_{\text{AMR}} f^J = (f^{J_0}, d^{J_0+1}, \ldots, d^J)$ avec les grilles dyadiques X^{J_0} ($J_0 = 3$) et X^J ($J = 8$). Seuil $\epsilon = 10^{-3}$.



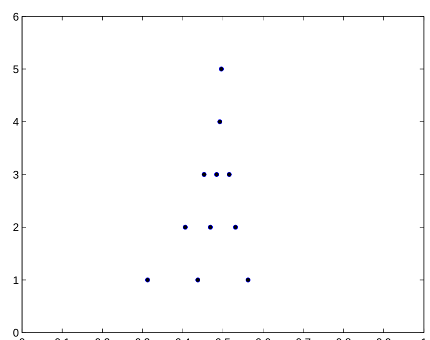
points initiaux f^J



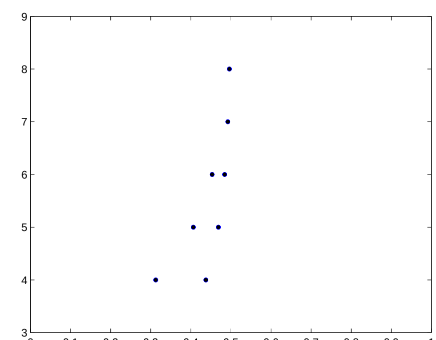
avec le schéma linéaire $S_{2,2}$



avec le schéma WENO



le schéma PPH



le schéma GC

AMR COMPARAISON: test numérique 2d

- **Compression et décompression** $\tilde{f}^J = T_{\mathbf{AMR}}^{-1} T_\epsilon T_{\mathbf{AMR}} f^J$ **avec** $J = 8$ **et** $J_0 = 4$

Seuil $\epsilon = 10$. nnz=nombre de détails non-nuls. $psnr = 10 log_{10}\left(\frac{255^2}{\sum\sum |f^J_{n,m} - \tilde{f}^J_{n,m}|^2}\right)$.

points initiaux f^J

avec le schéma linéaire $S_{2,2}$.*nnz=5710. psnr=35.41.*

avec le schéma WENO

nnz=5401. psnr=35.48.

le schéma PPH

nnz=5401. psnr=36.22.

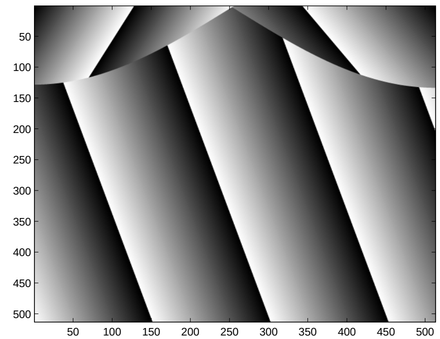
le schéma GC

nnz=5400. psnr=36.316.

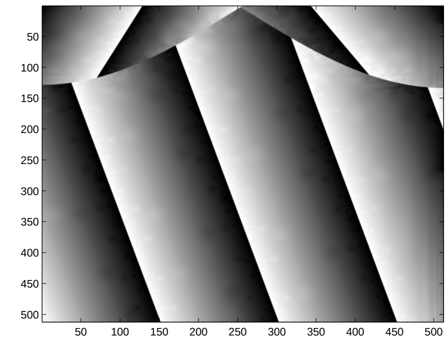
AMR COMPARAISON: test numérique 2d

- **Compression et décompression** $\tilde{f}^J = T_{\mathbf{AMR}}^{-1} T_\epsilon T_{\mathbf{AMR}} f^J$ **avec** $J = 9$ **et** $J_0 = 5$

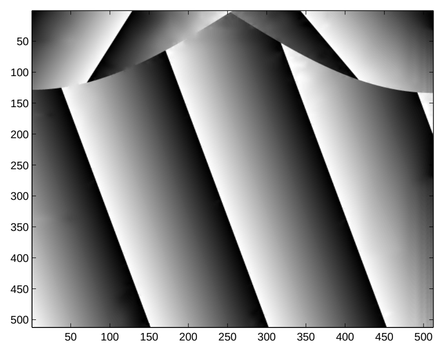
Seuil $\epsilon = 10$. nnz=nombre de détails non-nuls. $psnr = 10 log_{10} \left(\frac{255^2}{\sum \sum |f^J_{n,m} - \tilde{f}^J_{n,m}|^2} \right)$.



points initiaux f^J

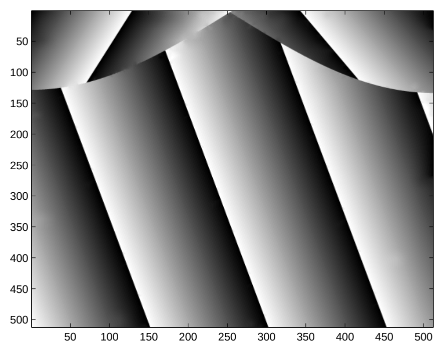


avec le schéma linéaire $S_{2,2}$.*nnz=5165. psnr=39.51.*



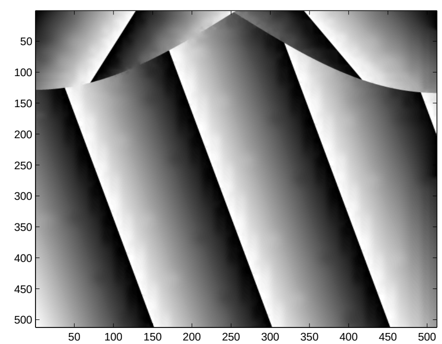
avec le schéma WENO

nnz=3235. psnr=42.38.



le schéma PPH

nnz=3195. psnr=44.86.



le schéma GC

nnz=3216. psnr= 38.63.

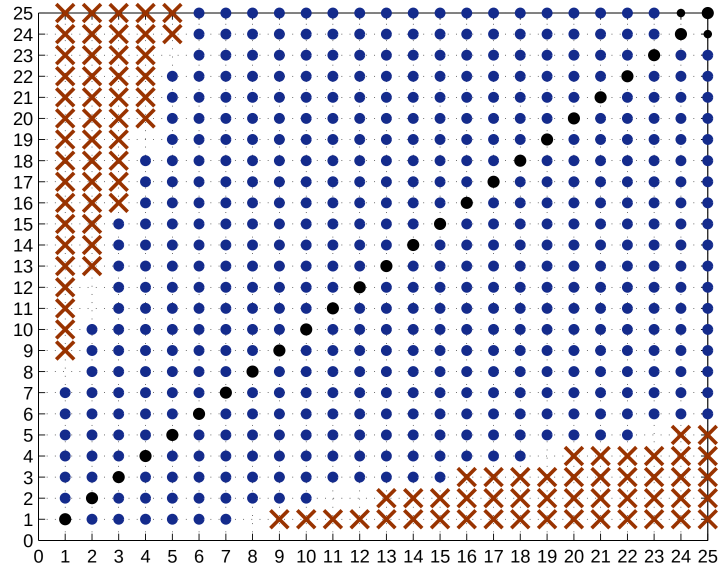
Conclusions

Schémas linéaires

résultats de convergence et de divergence des schémas de Lagrange quelconques

$\longrightarrow$ divergence des schémas de Lagrange pour un décentrage donné

récapitulatif des résultats obtenus



convergence (.) et divergence (x) des schémas de Lagrange à l points (en abcisse) et r points à droite (en ordonnée)

Conclusions

- **Schémas linéaires**

. . .

- **Schémas non-linéaires**
  - théorèmes complets d'études de schémas **Linéaire +Perturbation** en 1d et 2d
  - application à de nombreux exemples
  - construction de schémas non-linéaires C^1 (même $C^{2.8}$) et **stable**
  - étude de lien entre convergence $1d$ et $2d$

Conclusions

- **Schémas linéaires**

. . .

- **Schémas non-linéaires**

. . .

- **AMR non-linéaires**
  - théorème de stabilté d'AMR associée aux schémas **Linéaire+Perturbation** en 1d et 2d
  - application à 2 exemples: un schéma C^1, un schéma construit en base 3 (non exposé).

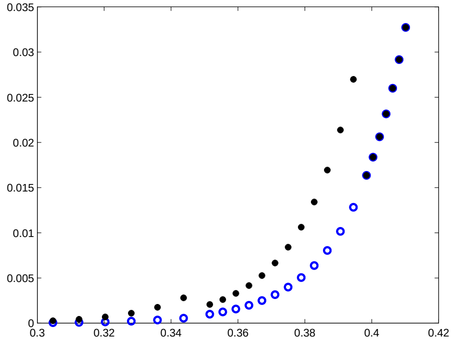
Conclusions

- **Schémas linéaires**

  . . .
- **Schémas non-linéaires**

  . . .
- **AMR non-linéaires**

  . . .
- **Travail en cours: Différences finies et schémas**
  à partir d'un opérateur donné, construction et étude théorique d'opérateurs ayant une erreur homogène sur une grille adaptée



Comparaison des erreurs des opérateurs adaptés $NFDA$ *(○) et* FDA *(+) pour* $f^{(1)}$ *et* $\mathbf{o_{fd} = 1}$*. Grille irrégulière. Zoom sur (0.3,0.45).*

Perspectives

- **Schémas linéaires**
  problème ouvert pour certains schémas de Lagrange

- **Schémas non-linéaires**
  stabilité de S_{WENO}, S_{POWERP} ($p \geq 3$), construction d'autres schémas

- **AMR non-linéaires**
  - extension à d'autres normes du théorèmes établis
  - définition d'une décimation pour des schémas approximants non-linéaires (S_{PPHA}?)

- **Applications**
  - détection des contours (segmentation d'images)
  - imagerie médicale, . . .

Merci de votre attentation

Pour plus d’information:

http://www.latp.univ-mrs.fr/ dadouria/