Opérateur de Hankel et équation de Schrödinger non linéaire dans le disque

Sandrine Grellier

Université d'Orléans

en collaboration avec P. Gérard (Université Paris sud)

Motivation

Contexte : influence de la géométrie sur le problème de Cauchy associé à NLS

$$i\partial_t u + \Delta u = |u|^2 u \ , (t,x) \in \mathbb{R} \times M \ .$$

• Résolution locale dans l'espace d'énergie $H^1 \cap L^4$ argument de point fixe.

• Lois de conservation pour globaliser en temps.

Résultat général (indépendant de la géométrie) :

Si le flot est régulier sur $H^r(M)$, alors

$$\|e^{it\Delta} f\|_{L^4([0,1]\times M)} \lesssim \|f\|_{H^{r/2}(M)} .$$

OK si $M = \mathbb{R}^d, d = 1, 2, 3, 4, \Delta =$ laplacien euclidien.

Motivation

Contexte : influence de la géométrie sur le problème de Cauchy associé à NLS

$$i\partial_t u + \Delta u = |u|^2 u \ , (t,x) \in \mathbb{R} \times M \ .$$

• Résolution locale dans l'espace d'énergie $H^1 \cap L^4$ argument de point fixe.

• Lois de conservation pour globaliser en temps.

Résultat général (indépendant de la géométrie) :

Si le flot est régulier sur $H^r(M)$, alors

$$\|e^{it\Delta} f\|_{L^4([0,1]\times M)} \lesssim \|f\|_{H^{r/2}(M)} .$$

OK si $M = \mathbb{R}^d, d = 1, 2, 3, 4, \Delta =$ laplacien euclidien.

Motivation

Contexte : influence de la géométrie sur le problème de Cauchy associé à NLS

$$i\partial_t u + \Delta u = |u|^2 u \; , (t,x) \in \mathbb{R} \times M \; .$$

• Résolution locale dans l'espace d'énergie $H^1 \cap L^4$ argument de point fixe.
• Lois de conservation pour globaliser en temps.
Résultat général (indépendant de la géométrie) :
Si le flot est régulier sur $H^r(M)$, alors

$$\|e^{it\Delta} f\|_{L^4([0,1]\times M)} \lesssim \|f\|_{H^{r/2}(M)} .$$

OK si $M = \mathbb{R}^d, d = 1, 2, 3, 4, \Delta =$ laplacien euclidien.

Motivation

Contexte : influence de la géométrie sur le problème de Cauchy associé à NLS

$$i\partial_t u + \Delta u = |u|^2 u \ , (t,x) \in \mathbb{R} \times M \ .$$

• Résolution locale dans l'espace d'énergie $H^1 \cap L^4$ argument de point fixe.

• Lois de conservation pour globaliser en temps.

Résultat général (indépendant de la géométrie) :

Si le flot est régulier sur $H^r(M)$, alors

$$\|e^{it\Delta} f\|_{L^4([0,1]\times M)} \lesssim \|f\|_{H^{r/2}(M)}.$$

OK si $M = \mathbb{R}^d, d = 1, 2, 3, 4, \Delta =$ laplacien euclidien.

Motivation

Contexte : influence de la géométrie sur le problème de Cauchy associé à NLS

$$i\partial_t u + \Delta u = |u|^2 u \ , (t,x) \in \mathbb{R} \times M \ .$$

• Résolution locale dans l'espace d'énergie $H^1 \cap L^4$ argument de point fixe.
• Lois de conservation pour globaliser en temps.
Résultat général (indépendant de la géométrie) :
Si le flot est régulier sur $H^r(M)$, alors

$$\|e^{it\Delta} f\|_{L^4([0,1]\times M)} \lesssim \|f\|_{H^{r/2}(M)}.$$

OK si $M = \mathbb{R}^d, d = 1, 2, 3, 4, \Delta =$ laplacien euclidien.

Sur le groupe de Heisenberg

Δ le sous-laplacien sur $\mathcal{H}^1 = \mathbb{C}_z \times \mathbb{R}_s$. Pour les fonctions "radiales" ne dépendant que de $(|z|, s)$,

$$L^2(\mathcal{H}^1) = \oplus_\pm \oplus_{m=0}^\infty V_m^\pm\ ,\ \Delta_{|V_m^\pm} = \pm i(2m+1)\frac{\partial}{\partial s}\ .$$

Si $f \in V_m^\pm$, $e^{it\Delta} f(z,s) = f(z, s \mp (2m+1)t)$, donc

$$\|e^{it\Delta} f\|_{L^4([0,1]\times\mathcal{H}^1)} = \|f\|_{L^4(\mathcal{H}^1)}$$

Injection de Sobolev sur le groupe de Heisenberg,

$$\|e^{it\Delta} f\|_{L^4([0,1]\times\mathcal{H}^1)} \lesssim \|f\|_{H^{r/2}(\mathcal{H}^1)} \Rightarrow r \geq 2\ \ !$$

Pas de flot régulier sur l'espace d'énergie !

Sur le groupe de Heisenberg

Δ le sous-laplacien sur $\mathcal{H}^1 = \mathbb{C}_z \times \mathbb{R}_s$. Pour les fonctions "radiales" ne dépendant que de $(|z|, s)$,

$$L^2(\mathcal{H}^1) = \oplus_{\pm} \oplus_{m=0}^{\infty} V_m^{\pm} \ , \ \Delta_{|V_m^{\pm}} = \pm i(2m+1)\frac{\partial}{\partial s} \ .$$

Si $f \in V_m^{\pm}$, $e^{it\Delta} f(z,s) = f(z, s \mp (2m+1)t)$, donc

$$\|e^{it\Delta} f\|_{L^4([0,1]\times\mathcal{H}^1)} = \|f\|_{L^4(\mathcal{H}^1)}$$

Injection de Sobolev sur le groupe de Heisenberg,

$$\|e^{it\Delta} f\|_{L^4([0,1]\times\mathcal{H}^1)} \lesssim \|f\|_{H^{r/2}(\mathcal{H}^1)} \Rightarrow r \geq 2 \ !$$

Pas de flot régulier sur l'espace d'énergie !

Sur le groupe de Heisenberg

Δ le sous-laplacien sur $\mathcal{H}^1 = \mathbb{C}_z \times \mathbb{R}_s$. Pour les fonctions "radiales" ne dépendant que de $(|z|, s)$,

$$L^2(\mathcal{H}^1) = \oplus_\pm \oplus_{m=0}^\infty V_m^\pm \ , \ \Delta_{|V_m^\pm} = \pm i(2m+1)\frac{\partial}{\partial s} \ .$$

Si $f \in V_m^\pm$, $e^{it\Delta} f(z,s) = f(z, s \mp (2m+1)t)$, donc

$$\|e^{it\Delta} f\|_{L^4([0,1]\times\mathcal{H}^1)} = \|f\|_{L^4(\mathcal{H}^1)}$$

Injection de Sobolev sur le groupe de Heisenberg,

$$\|e^{it\Delta} f\|_{L^4([0,1]\times\mathcal{H}^1)} \lesssim \|f\|_{H^{r/2}(\mathcal{H}^1)} \Rightarrow r \geq 2 \ !$$

Pas de flot régulier sur l'espace d'énergie !

Sur le groupe de Heisenberg

Δ le sous-laplacien sur $\mathcal{H}^1 = \mathbb{C}_z \times \mathbb{R}_s$. Pour les fonctions "radiales" ne dépendant que de $(|z|, s)$,

$$L^2(\mathcal{H}^1) = \oplus_{\pm} \oplus_{m=0}^{\infty} V_m^{\pm} \ , \ \Delta_{|V_m^{\pm}} = \pm i(2m+1)\frac{\partial}{\partial s} \ .$$

Si $f \in V_m^{\pm}$, $e^{it\Delta} f(z,s) = f(z, s \mp (2m+1)t)$, donc

$$\|e^{it\Delta} f\|_{L^4([0,1]\times\mathcal{H}^1)} = \|f\|_{L^4(\mathcal{H}^1)}$$

Injection de Sobolev sur le groupe de Heisenberg,

$$\|e^{it\Delta} f\|_{L^4([0,1]\times\mathcal{H}^1)} \lesssim \|f\|_{H^{r/2}(\mathcal{H}^1)} \Rightarrow r \geq 2 \ \ !$$

Pas de flot régulier sur l'espace d'énergie !

Sur le groupe de Heisenberg

Δ le sous-laplacien sur $\mathcal{H}^1 = \mathbb{C}_z \times \mathbb{R}_s$. Pour les fonctions "radiales" ne dépendant que de $(|z|, s)$,

$$L^2(\mathcal{H}^1) = \oplus_{\pm} \oplus_{m=0}^{\infty} V_m^{\pm} \;,\; \Delta_{|V_m^{\pm}} = \pm i(2m+1)\frac{\partial}{\partial s} \;.$$

Si $f \in V_m^{\pm}$, $e^{it\Delta} f(z, s) = f(z, s \mp (2m+1)t)$, donc

$$\|e^{it\Delta} f\|_{L^4([0,1]\times\mathcal{H}^1)} = \|f\|_{L^4(\mathcal{H}^1)}$$

Injection de Sobolev sur le groupe de Heisenberg,

$$\|e^{it\Delta} f\|_{L^4([0,1]\times\mathcal{H}^1)} \lesssim \|f\|_{H^{r/2}(\mathcal{H}^1)} \Rightarrow r \geq 2 \;\; !$$

Pas de flot régulier sur l'espace d'énergie !

Structure du problème d'évolution

Soit $\Pi_m^{\pm} : L^2(\mathcal{H}^1) \to V_m^{\pm}$.

$$u = \sum_{\pm} \sum_{m=0}^{\infty} u_m^{\pm} \, , \; u_m^{\pm} = \Pi_m^{\pm} u \; .$$

L'equation est un système d'équations de transport couplées,

$$i(\partial_t \pm (2m+1)\partial_s) u_m = \Pi_m^{\pm}(|u|^2 u) \; .$$

Problème : étudier l'interaction de la non-linéarité $|u|^2 u$ et des projections $\Pi_m^{\pm}$ (opérateurs de Calderon-Zygmund).

Structure du problème d'évolution

Soit $\Pi_m^\pm : L^2(\mathcal{H}^1) \to V_m^\pm$.

$$u = \sum_\pm \sum_{m=0}^\infty u_m^\pm \ , \ u_m^\pm = \Pi_m^\pm u \ .$$

L'equation est un système d'équations de transport couplées,

$$i(\partial_t \pm (2m+1)\partial_s) u_m = \Pi_m^\pm(|u|^2 u) \ .$$

Problème : étudier l'interaction de la non-linéarité $|u|^2 u$ et des projections $\Pi_m^\pm$ (opérateurs de Calderon-Zygmund).

Structure du problème d'évolution

Soit $\Pi_m^{\pm} : L^2(\mathcal{H}^1) \to V_m^{\pm}$.

$$u = \sum_{\pm} \sum_{m=0}^{\infty} u_m^{\pm} \ , \ u_m^{\pm} = \Pi_m^{\pm} u \ .$$

L'equation est un système d'équations de transport couplées,

$$i(\partial_t \pm (2m+1)\partial_s)u_m = \Pi_m^{\pm}(|u|^2 u) \ .$$

Problème : étudier l'interaction de la non-linéarité $|u|^2 u$ et des projections $\Pi_m^{\pm}$ (opérateurs de Calderon-Zygmund).

Un cas modèle : l'équation de Szegö cubique

Soit $S^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$.
Notation : Pour tout sous-espace E of $\mathcal{D}'(S^1)$,on pose

$$E_+ = \{u \in E,\ u = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{u}(k)e^{ik\theta}\ \forall k < 0, \hat{u}(k) = 0\}.$$

Soit $\Pi : L^2(S^1) \to L^2_+(S^1)$ la projection de Szegö.
Equation d'évolution sur S^1,

$$i\partial_t u = \Pi(|u|^2 u)\ . \quad (S)$$

Un cas modèle : l'équation de Szegö cubique

Soit $S^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$.
Notation : Pour tout sous-espace E of $\mathcal{D}'(S^1)$,on pose

$$E_+ = \{u \in E,\ u = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{u}(k)e^{ik\theta}\ \forall k < 0, \hat{u}(k) = 0\}.$$

Soit $\Pi : L^2(S^1) \to L^2_+(S^1)$ la projection de Szegö.
Equation d'évolution sur S^1,

$$i\partial_t u = \Pi(|u|^2 u)\ .\quad (S)$$

Un cas modèle : l'équation de Szegö cubique

Soit $S^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$.
Notation : Pour tout sous-espace E of $\mathcal{D}'(S^1)$,on pose

$$E_+ = \{u \in E,\ u = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}(k) e^{ik\theta}\ \forall k < 0, \hat{u}(k) = 0\}.$$

Soit $\Pi : L^2(S^1) \to L^2_+(S^1)$ la projection de Szegö.
Equation d'évolution sur S^1,

$$i\partial_t u = \Pi(|u|^2 u)\ . \quad (S)$$

Système hamiltonien

Forme symplectique sur $L^2_+(S^1)$

$$\omega(u,v) = \mathrm{Im}\int_{S^1} u\overline{v}\,\frac{d\theta}{2\pi}$$

Equation de Szegö cubique=système hamiltonien associé à

$$H(u) = \frac{1}{4}\int_{S^1} |u|^4\,\frac{d\theta}{2\pi}$$

Lois de conservation :

$$Q(u) = \int_{S^1} |u|^2\,\frac{d\theta}{2\pi} = \|u\|^2_{L^2}\,,\ M(u) = \int_{S^1} -i\partial_\theta u\,\overline{u}\,\frac{d\theta}{2\pi} = \|u\|^2_{\dot{H}^{1/2}}\,.$$

On a $\{Q, M\} = 0$.

Système hamiltonien

Forme symplectique sur $L^2_+(S^1)$

$$\omega(u,v) = \mathrm{Im} \int_{S^1} u\bar{v}\, \frac{d\theta}{2\pi}$$

Equation de Szegö cubique=système hamiltonien associé à

$$H(u) = \frac{1}{4}\int_{S^1} |u|^4 \frac{d\theta}{2\pi}$$

Lois de conservation :

$$Q(u) = \int_{S^1} |u|^2 \frac{d\theta}{2\pi} = \|u\|^2_{L^2}\ ,\ M(u) = \int_{S^1} -i\partial_\theta u\, \bar{u}\, \frac{d\theta}{2\pi} = \|u\|^2_{\dot{H}^{1/2}}\ .$$

On a $\{Q, M\} = 0$.

Système hamiltonien

Forme symplectique sur $L^2_+(S^1)$

$$\omega(u,v) = \operatorname{Im} \int_{S^1} u\bar{v}\, \frac{d\theta}{2\pi}$$

Equation de Szegö cubique=système hamiltonien associé à

$$H(u) = \frac{1}{4} \int_{S^1} |u|^4 \frac{d\theta}{2\pi}$$

Lois de conservation :

$$Q(u) = \int_{S^1} |u|^2 \frac{d\theta}{2\pi} = \|u\|^2_{L^2} \,,\; M(u) = \int_{S^1} -i\partial_\theta u\, \bar{u}\, \frac{d\theta}{2\pi} = \|u\|^2_{\dot{H}^{1/2}} \,.$$

On a $\{Q, M\} = 0$.

Le problème de Cauchy

Théorème (P. Gérard, SG, 2008)

Soit $u_0 \in H^{1/2}_+(S^1)$, il existe une unique solution $u \in C(\mathbb{R}, H^{1/2}_+(S^1))$ de (S) telle que $u(0) = u_0$. De plus, si $u_0 \in H^s_+(S^1)$ pour un $s > \frac{1}{2}$, alors $u \in C(\mathbb{R}, H^s_+(S^1))$.

Idée : Pour $s > 1/2$ on résoud localement (facile car $H^s \subset L^\infty$). On globalise en temps par les lois de conservation et l'estimation de type Brezis-Gallouët

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C_s \|u\|_{H^{1/2}} \left[\log\left(2 + \frac{\|u\|_{H^s}}{\|u\|_{H^{1/2}}}\right)\right]^{\frac{1}{2}} .$$

Si $s = 1/2$, existence globale de solutions faibles. Unicité (idée Yudovich equation Euler $2D$)

$$\forall p < \infty\,,\ \|u\|_{L^p} \leq C\sqrt{p}\,\|u\|_{H^{1/2}} .$$

Le problème de Cauchy

Théorème (P. Gérard, SG, 2008)

Soit $u_0 \in H^{1/2}_+(S^1)$, il existe une unique solution $u \in C(\mathbb{R}, H^{1/2}_+(S^1))$ de (S) telle que $u(0) = u_0$. De plus, si $u_0 \in H^s_+(S^1)$ pour un $s > \frac{1}{2}$, alors $u \in C(\mathbb{R}, H^s_+(S^1))$.

Idée : Pour $s > 1/2$ on résoud localement (facile car $H^s \subset L^\infty$).
On globalise en temps par les lois de conservation et l'estimation de type Brezis-Gallouët

$$\|u\|_{L^\infty} \le C_s \|u\|_{H^{1/2}} \left[\log\left(2 + \frac{\|u\|_{H^s}}{\|u\|_{H^{1/2}}}\right)\right]^{\frac{1}{2}} .$$

Si $s = 1/2$, existence globale de solutions faibles. Unicité (idée Yudovich equation Euler $2D$)

$$\forall p < \infty\,,\ \|u\|_{L^p} \le C\sqrt{p}\,\|u\|_{H^{1/2}} .$$

Le problème de Cauchy

Théorème (P. Gérard, SG, 2008)

Soit $u_0 \in H^{1/2}_+(S^1)$, il existe une unique solution $u \in C(\mathbb{R}, H^{1/2}_+(S^1))$ de (S) telle que $u(0) = u_0$. De plus, si $u_0 \in H^s_+(S^1)$ pour un $s > \frac{1}{2}$, alors $u \in C(\mathbb{R}, H^s_+(S^1))$.

Idée : Pour $s > 1/2$ on résoud localement (facile car $H^s \subset L^\infty$). On globalise en temps par les lois de conservation et l'estimation de type Brezis-Gallouët

$$\|u\|_{L^\infty} \le C_s \|u\|_{H^{1/2}} \left[\log\left(2 + \frac{\|u\|_{H^s}}{\|u\|_{H^{1/2}}}\right)\right]^{\frac{1}{2}} .$$

Si $s = 1/2$, existence globale de solutions faibles. Unicité (idée Yudovich equation Euler $2D$)

$$\forall p < \infty\,,\ \|u\|_{L^p} \le C\sqrt{p}\,\|u\|_{H^{1/2}} .$$

Le problème de Cauchy

Théorème (P. Gérard, SG, 2008)

Soit $u_0 \in H^{1/2}_+(S^1)$, *il existe une unique solution* $u \in C(\mathbb{R}, H^{1/2}_+(S^1))$ *de* (S) *telle que* $u(0) = u_0$. *De plus, si* $u_0 \in H^s_+(S^1)$ *pour un* $s > \frac{1}{2}$, *alors* $u \in C(\mathbb{R}, H^s_+(S^1))$.

Idée : Pour $s > 1/2$ on résoud localement (facile car $H^s \subset L^\infty$). On globalise en temps par les lois de conservation et l'estimation de type Brezis-Gallouët

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C_s \|u\|_{H^{1/2}} \left[\log\left(2 + \frac{\|u\|_{H^s}}{\|u\|_{H^{1/2}}}\right)\right]^{\frac{1}{2}} .$$

Si $s = 1/2$, existence globale de solutions faibles. Unicité (idée Yudovich equation Euler $2D$)

$$\forall p < \infty\,,\ \|u\|_{L^p} \leq C\,\sqrt{p}\,\|u\|_{H^{1/2}}\ .$$

Propriétés du flot

• Si $s > \frac{1}{2}$, le flot est régulier sur H^s_+, et est Lipschitz sur les bornés.

• Le flot est aussi continu sur $H^{1/2}_+$ (unicité et lois de conservation).

Problème : Peut-on construire un flot par exemple sur l'espace d'énergie L^4_+ ?

•Comportement en temps long ?

Propriétés du flot

• Si $s > \frac{1}{2}$, le flot est régulier sur H^s_+, et est Lipschitz sur les bornés.

• Le flot est aussi continu sur $H^{1/2}_+$ (unicité et lois de conservation).

Problème : Peut-on construire un flot par exemple sur l'espace d'énergie L^4_+ ?

•Comportement en temps long ?

Propriétés du flot

• Si $s > \frac{1}{2}$, le flot est régulier sur H^s_+, et est Lipschitz sur les bornés.

• Le flot est aussi continu sur $H^{1/2}_+$ (unicité et lois de conservation).

Problème : Peut-on construire un flot par exemple sur l'espace d'énergie L^4_+ ?

•Comportement en temps long ?

Propriétés du flot

• Si $s > \frac{1}{2}$, le flot est régulier sur H^s_+, et est Lipschitz sur les bornés.

• Le flot est aussi continu sur $H^{1/2}_+$ (unicité et lois de conservation).

Problème : Peut-on construire un flot par exemple sur l'espace d'énergie L^4_+ ?

•Comportement en temps long ?

Les ondes stationnaires : un cas particulier

Proposition

Soit $u_0 \in H_+^{\frac{1}{2}} \setminus \{0\}$. Alors $u(t) = e^{-i\omega t} u_0$ est solution de (S) si et seulement si

$$|u_0|^2 = \omega \text{ a.e.} \quad \text{on } S^1 \ ,$$

i.e. $\omega^{-1/2} u_0$ est une fonction intérieure au sens de Beurling.

$\Pi(|u_0|^2 u_0) = \omega u_0$ si et si $|u_0|^2 u_0 - \omega u_0 \perp L^2_+$ et donc $|u_0|^4 - \omega |u_0|^2 = 0$.

Exemples avec $\omega = 1$.

$$u_0(z) = \prod_j \frac{z - \overline{p_j}}{1 - p_j z} \ , \ |p_j| < 1 \ ,$$ produits de Blaschke

$$u_0(z) = \exp\left(-\frac{1+z}{1-z}\right)$$ solution singulière !

Les ondes stationnaires : un cas particulier

Proposition

Soit $u_0 \in H^{\frac{1}{2}}_{+} \setminus \{0\}$. Alors $u(t) = e^{-i\omega t} u_0$ est solution de (S) si et seulement si

$$|u_0|^2 = \omega \text{ a.e. } \quad \text{on } S^1 \ ,$$

i.e. $\omega^{-1/2} u_0$ est une fonction intérieure au sens de Beurling.

$\Pi(|u_0|^2 u_0) = \omega u_0$ si et si $|u_0|^2 u_0 - \omega u_0 \ \perp \ L^2_+$ et donc $|u_0|^4 - \omega |u_0|^2 = 0$.

Exemples avec $\omega = 1$.

$$u_0(z) = \prod_j \frac{z - \overline{p_j}}{1 - p_j z} \ , \ |p_j| < 1 \ , \text{ produits de Blaschke}$$

$$u_0(z) = \exp\left(-\frac{1+z}{1-z}\right) \text{solution singulière !}$$

Les ondes stationnaires : un cas particulier

Proposition

Soit $u_0 \in H^{\frac{1}{2}}_{+} \setminus \{0\}$. Alors $u(t) = e^{-i\omega t} u_0$ est solution de (S) si et seulement si

$$|u_0|^2 = \omega \text{ a.e. } \quad \text{on } S^1 \ ,$$

i.e. $\omega^{-1/2} u_0$ est une fonction intérieure au sens de Beurling.

$\Pi(|u_0|^2 u_0) = \omega u_0$ si et si $|u_0|^2 u_0 - \omega u_0 \perp L^2_+$ et donc $|u_0|^4 - \omega |u_0|^2 = 0$.

Exemples avec $\omega = 1$.

$$u_0(z) = \prod_j \frac{z - \overline{p_j}}{1 - p_j z} \ , \ |p_j| < 1 \ ,$$ produits de Blaschke

$$u_0(z) = \exp\left(-\frac{1+z}{1-z}\right)$$ solution singulière !

Paire de Lax

Théorème

$i\partial_t u = \Pi(|u|^2 u)$ *est équivalent à* $\frac{d}{dt}H_u = [B_u, H_u]$.

1. H_u *Hankel ,*
2. $B_u = -\frac{i}{2}(T_{|u|^2} + K_u)$, *(anti-adjoint et antisymétrique pour produit scalaire réel)*
3. T *Toeplitz*,
4. $K_u(h) = \overline{u(1-\Pi)(u\overline{h})}$ *($\mathbb{C}$-linéaire, auto-adjoint).*

On dit que (H_u, B_u) *est une paire de Lax pour* (S).

$$H_{|u|^2u} = T_{|u|^2}H_u + H_uK_u = H_uT_{|u|^2} + K_uH_u \ .$$

$$[B_u, H_u] = -\frac{i}{2}[(T_{|u|^2}+K_u)H_u + H_u(T_{|u|^2}+K_u)] = H_{-i|u|^2u} = H_{-i\Pi(|u|^2u)} \ ,$$

Paire de Lax

Théorème

$i\partial_t u = \Pi(|u|^2 u)$ *est équivalent à* $\frac{d}{dt}H_u = [B_u, H_u]$.

1. H_u *Hankel ,*
2. $B_u = -\frac{i}{2}(T_{|u|^2} + K_u)$, *(anti-adjoint et antisymétrique pour produit scalaire réel)*
3. T *Toeplitz,*
4. $K_u(h) = u\overline{(1-\Pi)(u\overline{h})}$ *($\mathbb{C}$-linéaire, auto-adjoint).*

On dit que (H_u, B_u) *est une paire de Lax pour* (S).

$$H_{|u|^2 u} = T_{|u|^2}H_u + H_u K_u = H_u T_{|u|^2} + K_u H_u \ .$$

$$[B_u, H_u] = -\frac{i}{2}[(T_{|u|^2}+K_u)H_u + H_u(T_{|u|^2}+K_u)] = H_{-i|u|^2u} = H_{-i\Pi(|u|^2u)} \ ,$$

Paire de Lax

Théorème

$i\partial_t u = \Pi(|u|^2 u)$ est équivalent à $\frac{d}{dt}H_u = [B_u, H_u]$.

1. H_u Hankel ,
2. $B_u = -\frac{i}{2}(T_{|u|^2} + K_u)$, (anti-adjoint et antisymétrique pour produit scalaire réel)
3. T Toeplitz,
4. $K_u(h) = \overline{u(1-\Pi)(u\overline{h})}$ ($\mathbb{C}$-linéaire, auto-adjoint).

On dit que (H_u, B_u) est une paire de Lax pour (S).

$$H_{|u|^2 u} = T_{|u|^2}H_u + H_u K_u = H_u T_{|u|^2} + K_u H_u \ .$$

$$[B_u, H_u] = -\frac{i}{2}[(T_{|u|^2}+K_u)H_u + H_u(T_{|u|^2}+K_u)] = H_{-i|u|^2 u} = H_{-i\Pi(|u|^2 u)} \ ,$$

Paire de Lax

Théorème

$i\partial_t u = \Pi(|u|^2 u)$ *est équivalent à* $\frac{d}{dt}H_u = [B_u, H_u]$.

1. H_u *Hankel ,*
2. $B_u = -\frac{i}{2}(T_{|u|^2} + K_u)$, *(anti-adjoint et antisymétrique pour produit scalaire réel)*
3. T *Toeplitz,*
4. $K_u(h) = \overline{u(1-\Pi)(u\overline{h})}$ *($\mathbb{C}$-linéaire, auto-adjoint).*

On dit que (H_u, B_u) *est une paire de Lax pour* (S).

$$H_{|u|^2 u} = T_{|u|^2} H_u + H_u K_u = H_u T_{|u|^2} + K_u H_u \ .$$

$$[B_u, H_u] = -\frac{i}{2}[(T_{|u|^2} + K_u)H_u + H_u(T_{|u|^2} + K_u)] = H_{-i|u|^2 u} = H_{-i\Pi(|u|^2 u)} \ ,$$

Conséquences

La famille $U(t)$ d'opérateurs unitaires solution de $\frac{d}{dt}U = B_u U \ , \ U(0) = I \ ,$ est telle que pour tout t

$$U(t)^* H_{u(t)} U(t) = H_{u(0)}$$

Donc, le spectre de $H_{u(t)}$ est indépendant de t.
Les système est complètement intégrable : infinité de lois de conservation.

Conséquences

La famille $U(t)$ d'opérateurs unitaires solution de $\frac{d}{dt}U = B_u U$, $U(0) = I$, est telle que pour tout t

$$U(t)^* H_{u(t)} U(t) = H_{u(0)}$$

Donc, le spectre de $H_{u(t)}$ est indépendant de t.
Les système est complètement intégrable : infinité de lois de conservation.

Evolution de $\mathbb{1}$ sous H_u

Théorème

Soit f bornée sur le spectre de H_{u_0}.

$$\langle f(H_{u(t)}^2)(1), 1\rangle = \langle f(H_{u_0}^2)(1), 1\rangle$$

Cas particuliers : $J_{2n} := \langle H_{u(t)}^{2n}(1), 1\rangle$ alors
$J_2 = Q(u)$, $J_4 = H(u)$,
$S := d(1, Im(H_u))^2$ $(f = 1_0)$
et si $S = 0$, $\tilde{S} = \frac{1}{\|w\|^2}$ où $1 = H_u(w)$ $(f(\lambda) = 1_{]0,\infty[}/\lambda)$
Clé : $B_u(1) = -i/2H_u^2(1)$.

Evolution de $\mathbb{1}$ sous H_u

Théorème

Soit f bornée sur le spectre de H_{u_0}.

$$\langle f(H^2_{u(t)})(1), 1\rangle = \langle f(H^2_{u_0})(1), 1\rangle$$

Cas particuliers : $J_{2n} := \langle H^{2n}_{u(t)}(1), 1\rangle$ alors
$J_2 = Q(u)$, $J_4 = H(u)$,
$S := d(1, Im(H_u))^2$ $(f = 1_0)$
et si $S = 0$, $\tilde{S} = \frac{1}{\|w\|^2}$ où $1 = H_u(w)$ $(f(\lambda) = 1_{]0,\infty[}/\lambda)$
Clé : $B_u(1) = -i/2H_u^2(1)$.

Evolution de $\mathbb{1}$ sous H_u

Théorème

Soit f bornée sur le spectre de H_{u_0}.

$$\langle f(H^2_{u(t)})(1), 1\rangle = \langle f(H^2_{u_0})(1), 1\rangle$$

Cas particuliers : $J_{2n} := \langle H^{2n}_{u(t)}(1), 1\rangle$ alors

$J_2 = Q(u)$, $J_4 = H(u)$,

$S := d(1, Im(H_u))^2$ $(f = 1_0)$

et si $S = 0$, $\tilde{S} = \frac{1}{\|w\|^2}$ où $1 = H_u(w)$ $(f(\lambda) = 1_{]0,\infty[}/\lambda)$

Clé : $B_u(1) = -i/2H^2_u(1)$.

Evolution de $\mathbb{1}$ sous H_u

Théorème

Soit f bornée sur le spectre de H_{u_0}.

$$\langle f(H_{u(t)}^2)(1), 1\rangle = \langle f(H_{u_0}^2)(1), 1\rangle$$

Cas particuliers : $J_{2n} := \langle H_{u(t)}^{2n}(1), 1\rangle$ alors
$J_2 = Q(u)$, $J_4 = H(u)$,
$S := d(1, Im(H_u))^2$ ($f = 1_0$)
et si $S = 0$, $\tilde{S} = \frac{1}{\|w\|^2}$ où $1 = H_u(w)$ ($f(\lambda) = 1_{]0,\infty[}/\lambda$)
Clé : $B_u(1) = -i/2H_u^2(1)$.

Evolution de $\mathbb{1}$ sous H_u

Théorème

Soit f bornée sur le spectre de H_{u_0}.

$$\langle f(H_{u(t)}^2)(1), 1\rangle = \langle f(H_{u_0}^2)(1), 1\rangle$$

Cas particuliers : $J_{2n} := \langle H_{u(t)}^{2n}(1), 1\rangle$ alors

$J_2 = Q(u)$, $J_4 = H(u)$,

$S := d(1, Im(H_u))^2$ ($f = 1_0$)

et si $S = 0$, $\tilde{S} = \frac{1}{\|w\|^2}$ où $1 = H_u(w)$ ($f(\lambda) = 1_{]0,\infty[}/\lambda$)

Clé : $B_u(1) = -i/2H_u^2(1)$.

Sous-variétes invariantes de dimension finie

Soit $\mathcal{M}(N)$ la $(2N+1)$-sous-variété complexe des fonctions rationnelles de la forme $u = \frac{A}{B}$, avec $A \in \mathbb{C}_{N-1}[X], B \in \mathbb{C}_N[X]\ , B(0) = 1,\ d(A) = N - 1$, ou $d(B) = N$, avec au moins une égalité, A et B sans zéro commun, et les zéros de B à l'extérieur du disque.

Théorème (P. Gérard-SG, 08)

Le flot de (S) laisse $\mathcal{M}(N)$ invariant.

Conséquence du théorème de Kronecker $u \in \mathcal{M}(N)$ si et si $\text{rang}(H_u) = N$.

Sous-variétes invariantes de dimension finie

Soit $\mathcal{M}(N)$ la $(2N+1)$-sous-variété complexe des fonctions rationnelles de la forme $u = \frac{A}{B}$, avec $A \in \mathbb{C}_{N-1}[X], B \in \mathbb{C}_N[X]$, $B(0) = 1$, $d(A) = N - 1$, ou $d(B) = N$, avec au moins une égalité, A et B sans zéro commun, et les zéros de B à l'extérieur du disque.

Théorème (P. Gérard-SG, 08)

Le flot de (S) laisse $\mathcal{M}(N)$ invariant.

Conséquence du théorème de Kronecker $u \in \mathcal{M}(N)$ si et si $\mathrm{rang}(H_u) = N$.

Sous-variétes invariantes de dimension finie

Soit $\mathcal{M}(N)$ la $(2N+1)$-sous-variété complexe des fonctions rationnelles de la forme $u = \dfrac{A}{B}$, avec $A \in \mathbb{C}_{N-1}[X], B \in \mathbb{C}_N[X]\ , B(0) = 1,\ d(A) = N-1$, ou $d(B) = N$, avec au moins une égalité, A et B sans zéro commun, et les zéros de B à l'extérieur du disque.

Théorème (P. Gérard-SG, 08)

Le flot de (S) laisse $\mathcal{M}(N)$ invariant.

Conséquence du théorème de Kronecker $u \in \mathcal{M}(N)$ si et si $\mathrm{rang}(H_u) = N$.

Système de point génériques de $\mathcal{M}(N)$

Les points génériques de $\mathcal{M}(N)$ sont

$$u = \sum_{j=1}^{N} \frac{\alpha_j}{1 - p_j z} \ ,$$

où les p_j sont distincts et $|p_j| < 1$. (S) se lit

$$i\dot{\alpha}_j = \sum_k \frac{\alpha_j^2 \overline{\alpha_k}}{(1 - p_j\overline{p_k})^2} + 2 \sum_k \sum_{\ell \neq j} \frac{\alpha_j \overline{\alpha_k} \alpha_\ell p_j}{(p_j - p_\ell)(1 - p_j \overline{p_k})} \ .$$

$$i\dot{p}_j = \sum_k \frac{\alpha_j \overline{\alpha_k}}{1 - p_j \overline{p_k}} p_j \ .$$

Nouvelles lois de conservation

Des lois de conservation en involution avec Q, M, H .

- Sur $\mathcal{M}(N)$,

$$S_N\left(\frac{A(z)}{\prod_{j=1}^N(1-p_jz)}\right) := \left|\prod_{j=1}^N p_j\right|^2 .$$

$S_N = S = d(1, \mathrm{Im} H_u)$

- Sur la sous variété invariante $\tilde{\mathcal{M}}(N-1) := \mathcal{M}(N)\cap\{S_N = 0\}$, formulation similaire du système générique avec $p_N = 0$.

$$\tilde{S}_{N-1}\left(\frac{\sum_{j=1}^{N-1} a_j z^j}{\prod_{j=1}^{N-1}(1-p_jz)}\right) = |a_{N-1}|^2 = \left|\alpha_{N-1}\prod_{j=1}^{N-1} p_j\right|^2 .$$

$\tilde{S}_{N-1} := \tilde{S} = \frac{1}{\|w\|^2}$ où $1 = H_u(w)$.

Instabilité orbitale des ondes stationnaires dans $\tilde{\mathcal{M}}(1)$.

Corollaire (P. Gérard-SG, 2008)

Pour toute onde stationnaire u_0 *de* $\tilde{\mathcal{M}}(1)$*, il existe une suite* u_0^ε *qui converge vers* u_0 *in* $H_+^{1/2}$ *telle que, pour tout* $r \in (0,1)$*, il existe* t^ε *tel que les points d'adhérence dans* $H_+^{1/2}$ *de* $u^\varepsilon(t^\varepsilon)$ *soient de la forme*

$$v = a\,\frac{z-\overline{p}}{1-pz}\ ,\ |a| = \|u_0\|_{L^2}\ ,\ |p| = r\ .$$

Evolution sur $\tilde{\mathcal{M}}(1)$

Si $u(t) := \dfrac{a(t)z + b(t)}{1 - p(t)z}$, alors $\rho = |p|^2$ satisfait

$$\dot{\rho}^2 = A(\rho - \rho_-)(\rho_+ - \rho) \ ,$$

$$A = (Q+M)^2 - 4M\tilde{S} \ ,$$

$$0 \le \rho_- = \frac{\tilde{S} + M - 2\sqrt{M\tilde{S}}}{Q + M - 2\sqrt{M\tilde{S}}} \le \rho_+ = \frac{\tilde{S} + M + 2\sqrt{M\tilde{S}}}{Q + M + 2\sqrt{M\tilde{S}}} \le 1 \ .$$

Evolution sur $\tilde{\mathcal{M}}(1)$

Si $u(t) := \dfrac{a(t)z + b(t)}{1 - p(t)z}$, alors $\rho = |p|^2$ satisfait

$$\dot{\rho}^2 = A(\rho - \rho_-)(\rho_+ - \rho) \ ,$$
$$A = (Q + M)^2 - 4M\tilde{S} \ ,$$

$$0 \le \rho_- = \frac{\tilde{S} + M - 2\sqrt{M\tilde{S}}}{Q + M - 2\sqrt{M\tilde{S}}} \le \rho_+ = \frac{\tilde{S} + M + 2\sqrt{M\tilde{S}}}{Q + M + 2\sqrt{M\tilde{S}}} \le 1 \ .$$

Evolution sur $\tilde{\mathcal{M}}(1)$

Si $u(t) := \dfrac{a(t)z + b(t)}{1 - p(t)z}$, alors $\rho = |p|^2$ satisfait

$$\dot{\rho}^2 = A(\rho - \rho_-)(\rho_+ - \rho) \ ,$$

$$A = (Q + M)^2 - 4M\tilde{S} \ ,$$

$$0 \le \rho_- = \frac{\tilde{S} + M - 2\sqrt{M\tilde{S}}}{Q + M - 2\sqrt{M\tilde{S}}} \le \rho_+ = \frac{\tilde{S} + M + 2\sqrt{M\tilde{S}}}{Q + M + 2\sqrt{M\tilde{S}}} \le 1 \ .$$

Donc, $\rho = |p|^2$ est une fonction oscillant entre ρ_- et ρ_+ avec vitesse angulaire

$$\Omega = \sqrt{A} = ((Q+M)^2 - 4M\tilde{S})^{1/2} \, .$$

De plus $\Omega = 0$ si et si $Q = \tilde{S} = M$, si et si u est une onde stationnaire (colinéarité de $H_u(u)$ et de $1 = H_u(w)$ ou de u et w),

$$u = a\,\frac{z - \overline{p}}{1 - pz} \, .$$

On choisit par exemple

$$u_0^\varepsilon = z + \varepsilon \to z, \; \varepsilon \to 0.$$

Alors

$$\rho_- = 0 \, , \; \rho_+ = 4(4+\varepsilon^2)^{-1} \to 1 \, , \; \Omega = \varepsilon\sqrt{4+\varepsilon^2} \, .$$

Donc, $\rho = |p|^2$ est une fonction oscillant entre ρ_- et ρ_+ avec vitesse angulaire

$$\Omega = \sqrt{A} = ((Q+M)^2 - 4M\tilde{S})^{1/2} \ .$$

De plus $\Omega = 0$ si et si $Q = \tilde{S} = M$, si et si u est une onde stationnaire (colinéarité de $H_u(u)$ et de $1 = H_u(w)$ ou de u et w),

$$u = a\,\frac{z - \overline{p}}{1 - pz} \ .$$

On choisit par exemple

$$u_0^\varepsilon = z + \varepsilon \to z, \ \varepsilon \to 0.$$

Alors

$$\rho_- = 0 \ , \ \rho_+ = 4(4+\varepsilon^2)^{-1} \to 1 \ , \ \Omega = \varepsilon\sqrt{4+\varepsilon^2} \ .$$

Donc, $\rho = |p|^2$ est une fonction oscillant entre ρ_- et ρ_+ avec vitesse angulaire

$$\Omega = \sqrt{A} = ((Q+M)^2 - 4M\tilde{S})^{1/2} .$$

De plus $\Omega = 0$ si et si $Q = \tilde{S} = M$, si et si u est une onde stationnaire (colinéarité de $H_u(u)$ et de $1 = H_u(w)$ ou de u et w),

$$u = a\,\frac{z - \overline{p}}{1 - pz} .$$

On choisit par exemple

$$u_0^\varepsilon = z + \varepsilon \to z,\ \varepsilon \to 0.$$

Alors

$$\rho_- = 0\ ,\ \rho_+ = 4(4+\varepsilon^2)^{-1} \to 1\ ,\ \Omega = \varepsilon\sqrt{4+\varepsilon^2}\ .$$

Donc, $\rho = |p|^2$ est une fonction oscillant entre ρ_- et ρ_+ avec vitesse angulaire

$$\Omega = \sqrt{A} = ((Q+M)^2 - 4M\tilde{S})^{1/2} .$$

De plus $\Omega = 0$ si et si $Q = \tilde{S} = M$, si et si u est une onde stationnaire (colinéarité de $H_u(u)$ et de $1 = H_u(w)$ ou de u et w),

$$u = a\,\frac{z-\overline{p}}{1-pz} .$$

On choisit par exemple

$$u_0^\varepsilon = z + \varepsilon \to z,\ \varepsilon \to 0.$$

Alors

$$\rho_- = 0\ ,\ \rho_+ = 4(4+\varepsilon^2)^{-1} \to 1\ ,\ \Omega = \varepsilon\sqrt{4+\varepsilon^2}\ .$$

Théorème

Sur $\tilde{M}(1)$, les ondes stationnaires sont orbitalement instables, toute solution satisfait

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|u(t)\|_{H^s} < \infty$$

mais il existe une partie bornée $\mathcal{B}$ de $\mathcal{C}^\infty_+$ telle que, $\forall s > 1/2$,

$$\limsup_{t\to\infty} \sup_{u_0\in\mathcal{B}} \frac{\|u\|_{H^s}}{1+|t|^{2s-1}} > 0.$$

Weak turbulence ! !