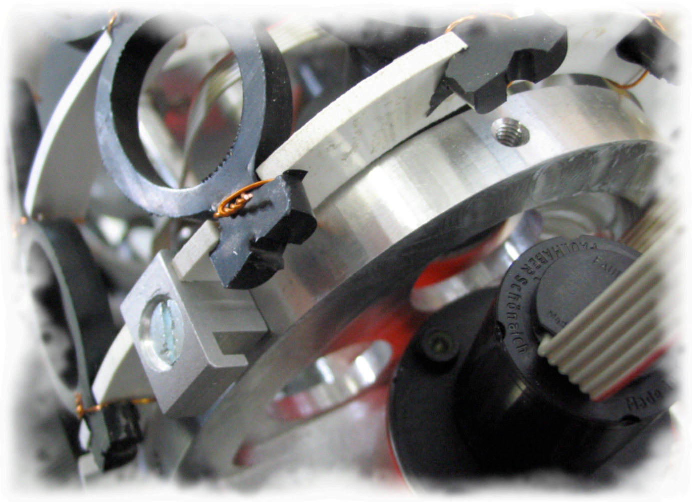
# De la dynamique de Lagrange à celle de Poincaré




**Auteur:** Frédéric BOYER

**Laboratoire:** IRCCyN

**Lieu:** …

**Date:** … 2008

# Plan

# Introduction: principe de l'approche lagrangienne

Qu'est-ce que le point de vue lagrangien de la dynamique?

Machine mathématique (aveugle) menant aux équations de la dynamique !

Machine ?

1°) On construit un lagrangien

2°) On invoque le Principe Variationnel d'Hamilton ou celui des Travaux Virtuels

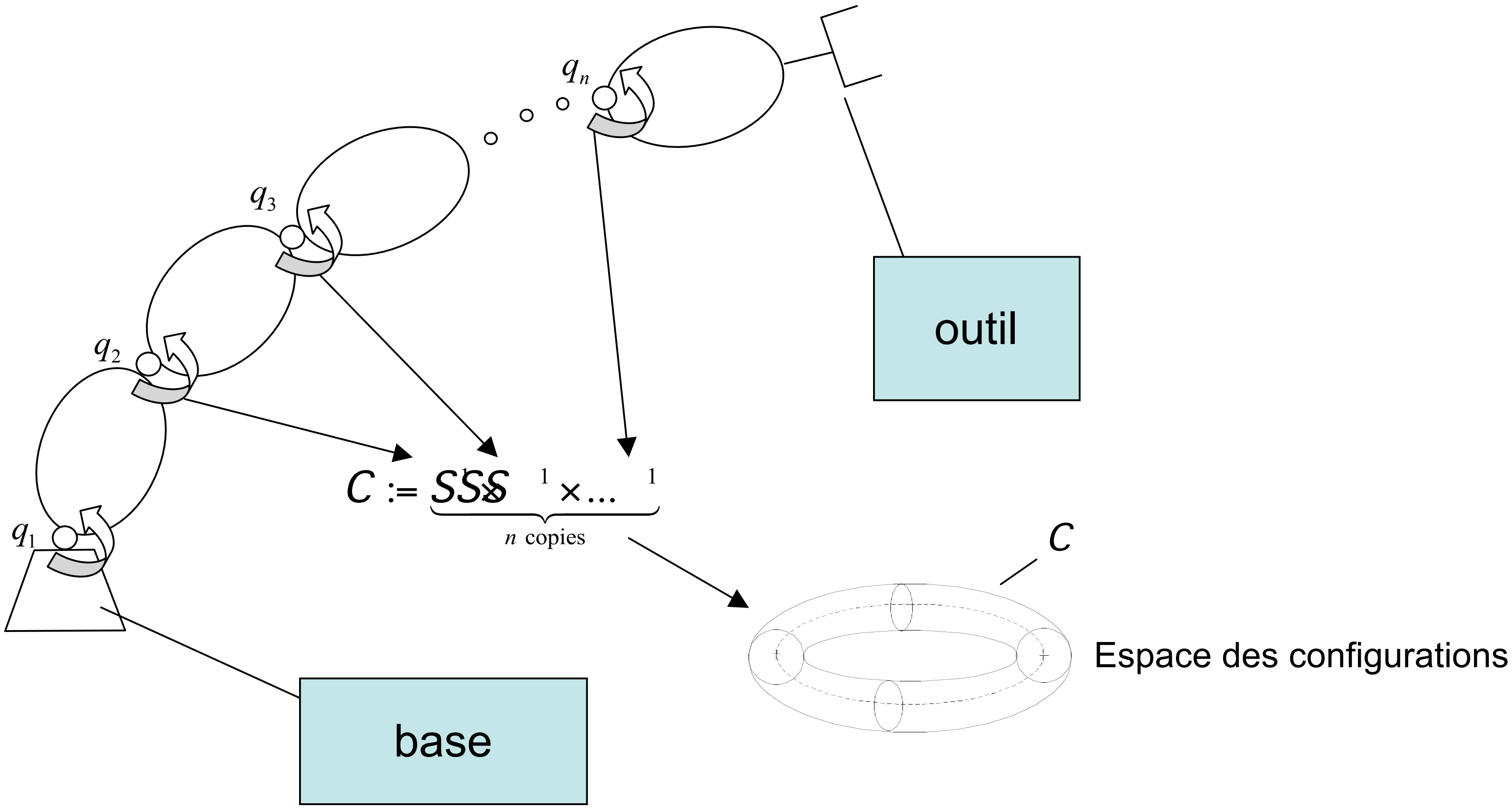
$\Longrightarrow$ Equations de la dynamique:

Elles régissent l'évolution d'un unique point dans un espace géométrique abstrait:

L' «*espace des configurations* »

$\Longrightarrow$ Equations de la dynamique $\Longleftrightarrow$ « $f = m\gamma$ » sur cet espace

Exemple d’espace des configurations: cas d’un robot manipulateur…



# Dynamique de Lagrange

Lagrangien:

$$L(q,\dot{q}) = T(q,\dot{q}) - U(q)$$

Energies: cinétique, potentielle

Fonctionnelle « Action »:

$$A(q(.)) = \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q})\, dt$$

Principe d'Hamilton:

$$\delta A(q(.)) = \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} A(q_\varepsilon(.)) = 0 \;,\; \forall \delta q(.) \qquad q_\varepsilon(.) = q(.) + \varepsilon\delta q(.)$$

- Définit la trajectoire variée et $\varepsilon$ est un paramètre réel.
- De +, la variation est faite à temps et extrémités fixes...

# Dynamique de Lagrange

La variation est faite à temps et extrémités fixés

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$$

le temps $t$ est indépendant de $\varepsilon$

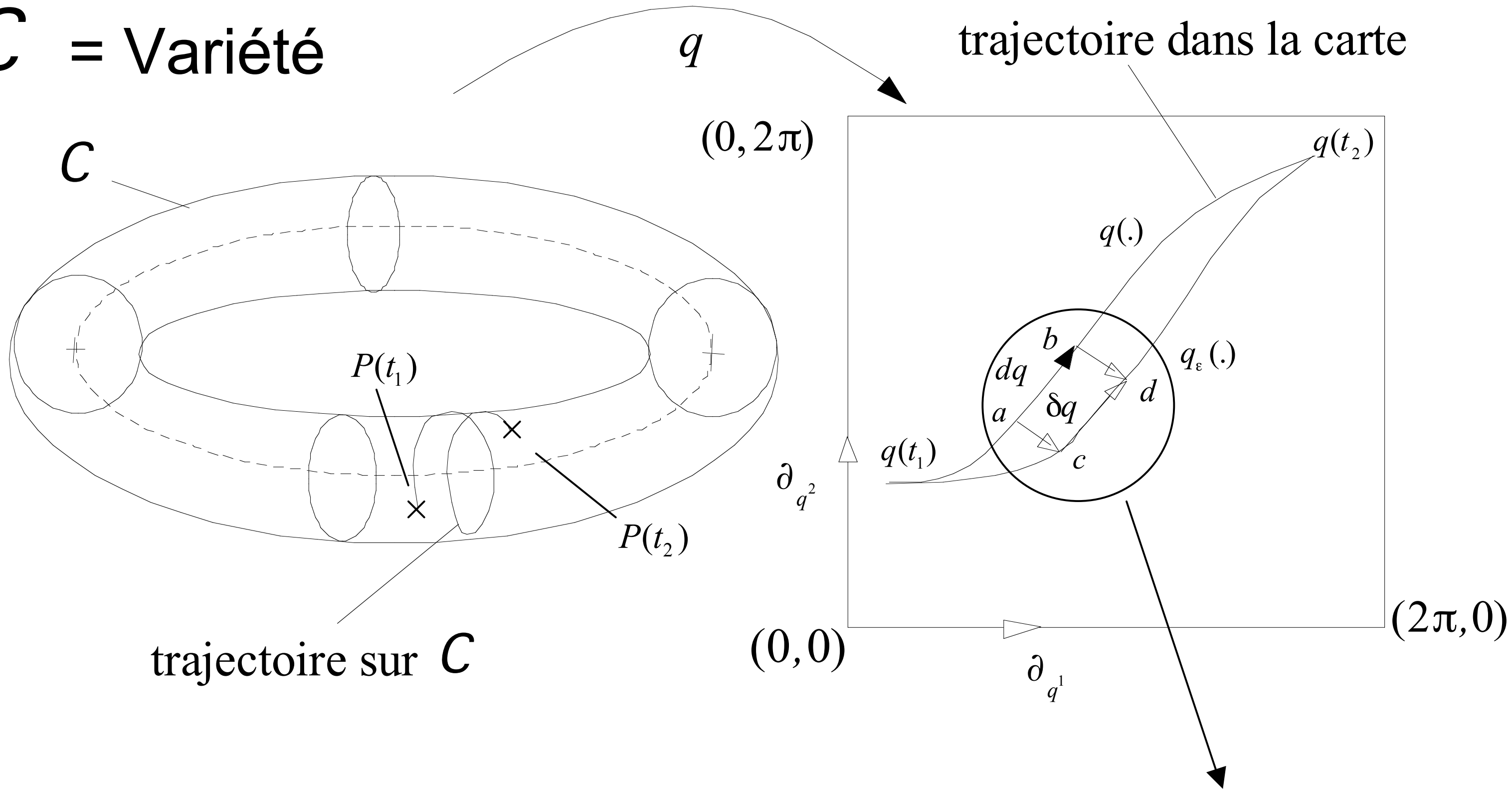
$$\left(\frac{d}{dt}\delta - \delta\frac{d}{dt}\right).f = 0\ ,\ \ \forall f \in C^{\infty}(\mathbb{C},\mathbb{R})$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left(\frac{d}{dt}\delta q - \delta\frac{dq}{dt}\right) = 0$$

En pratique: variation (vitesse) = vitesse(variation)

# Dynamique de Lagrange: Point de vue géométrique

$\mathcal{C}$ = Variété




Variation à temps fixe: fermeture de « *a*, *b*, *d*, *c* »

# Dynamique de Lagrange

Commutation de $\delta$ et $d./dt$ :

$$a\vec{b} + b\vec{d} = a\vec{c} + c\vec{d}$$

$$dq(q) + \delta q(q + dq) = \delta q(q) + dq(q + \delta q)$$

$$dq(q) + \delta q(q) + \frac{\partial \delta q}{\partial q}(q)dq = \delta q(q) + dq(q) + \frac{\partial dq}{\partial q}(q)\delta q$$

$$\frac{\partial \delta q}{\partial q}(q)dq = \frac{\partial dq}{\partial q}(q)\delta q \Leftrightarrow \ d\delta q = \delta dq$$

# Dynamique de Lagrange

Sous ces conditions, on fait rentrer $\delta$ sous l'intégrale et on échange $\delta$ et $d./dt$, puis on intègre p.p. où les termes de bords $= 0$….

Equations d'Euler-Lagrange: $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=0$$

Étape intermédiaire: « Principe des Travaux virtuels »

$$\cancel{\int_{t_1}^{t_2}}\delta q^T\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}\right)dt=\cancel{\int_{t_1}^{t_2}}\delta q^T\left(\frac{\partial U}{\partial q}\right)dt\ \ ,\ \forall \delta q$$

$$\delta W_{inert} = \delta W_{ext}\ \ ,\quad \forall \delta q \longrightarrow \text{Déplacement virtuel}$$

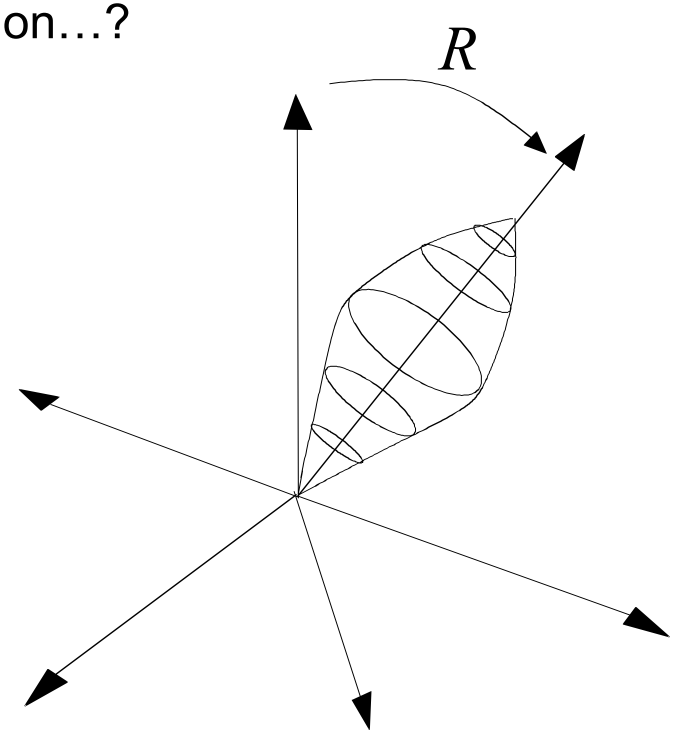
« Principe local »: marche toujours: chargements n.c., liaisons n.h.…

Exemple d'un R.M.: $M(q)\ddot{q}+C(q,\dot{q})+Q(q)=\tau$

# Dynamique de Poincaré

Question: comment se situent les équations d'Euler de la toupie sans gravité / cette construction…?

$$\begin{cases} \underbrace{J\dot{\Omega} + \Omega \times (J\Omega) = 0}_{\text{Dynamique des vitesses}} \\ \underbrace{\dot{R} = R\,\hat{\Omega}}_{\text{Équation de reconstruction}} \end{cases}$$



# Dynamique de Poincaré

Equations : symétriques, sans singularités, sans non-linéarités artificielles / équations de Lagrange du même objet…

$$\begin{pmatrix} s^2\theta(J_1 s^2\psi + J_2 c^2\psi) + J_3 c^2\theta & s\theta s2\psi(J_1 - J_2)/2 & c\theta J_3 \\ s\theta s2\psi(J_1 - J_2)/2 & J_1 c^2\psi + J_2 s\psi^2 & 0 \\ c\theta J_3 & 0 & J_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} (J_1 s^2\psi + J_2 c^2\psi - J_3)s2\theta\dot{\theta}\dot{\phi} + (J_1 - J_2)(s2\psi(s^2\theta\dot{\psi}\dot{\phi} + (c\theta/2)\dot{\theta}^2) + s\theta c2\psi\dot{\theta}\dot{\psi}) - J_3 s\theta\dot{\theta}\dot{\psi} \\ (J_1 - J_2)(s\theta c2\psi\dot{\psi}\dot{\phi} - s2\psi\dot{\psi}\dot{\theta}) - (J_1 s^2\psi + J_2 c^2\psi - J_3)(s2\theta/2)\dot{\phi}^2 - J_3 s\theta\dot{\phi}\dot{\psi} \\ -J_3 s\theta\dot{\theta}\dot{\phi} - (J_1 - J_2)((s2\psi/2)(s^2\theta\dot{\phi}^2 - \dot{\theta}^2) + s\theta c2\psi\dot{\phi}\dot{\theta}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Remarque: le système est conservatif…

$\Rightarrow$ Il doit exister un calcul des variations donnant ces équations!

# Dynamique de Poincaré

Résultat du à Poincaré (1901)

Idée: Quand $\mathcal{C} = G$, un groupe (de Lie) alors on peut écrire sa dynamique directement sur le groupe!

« Sur le groupe »?…, i.e. directement en terme des transformations $g$ de $G$ et non de ses paramètres (coordonnées généralisées):

Ici: représentations matricielles...

$G = SO(3) \longrightarrow g = R$ : matrices rotation

$G = SE(3) \longrightarrow g = \begin{pmatrix} R & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ : matrices des t.h.

# Dynamique de Poincaré: qu’est-ce qu’un groupe de Lie?

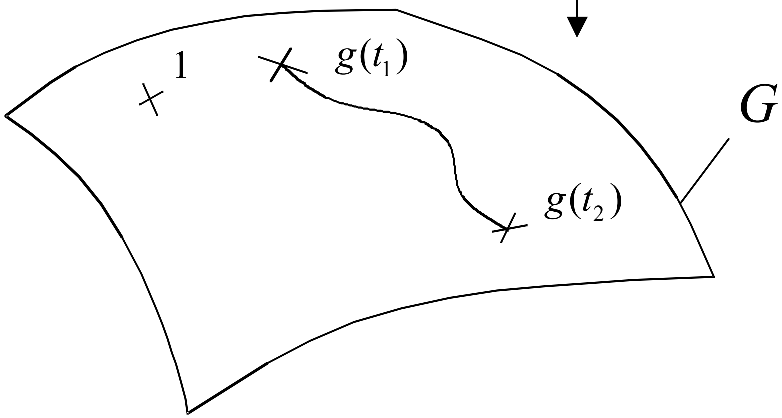
C’est un groupe + variété ⇨ c’est un espace de transformations

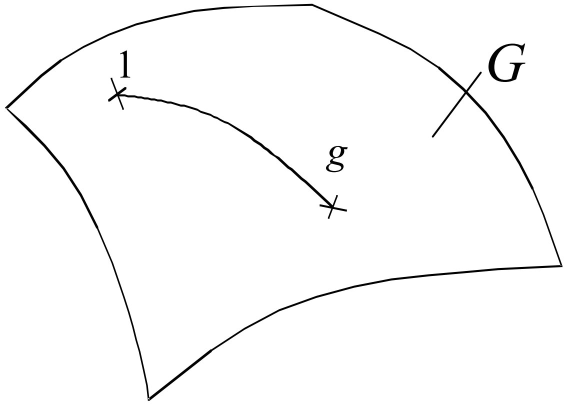
Groupe non commutatif = espace courbe / commutatif = plat

Élément neutre souvent = configuration de référence

Trajectoires du système :

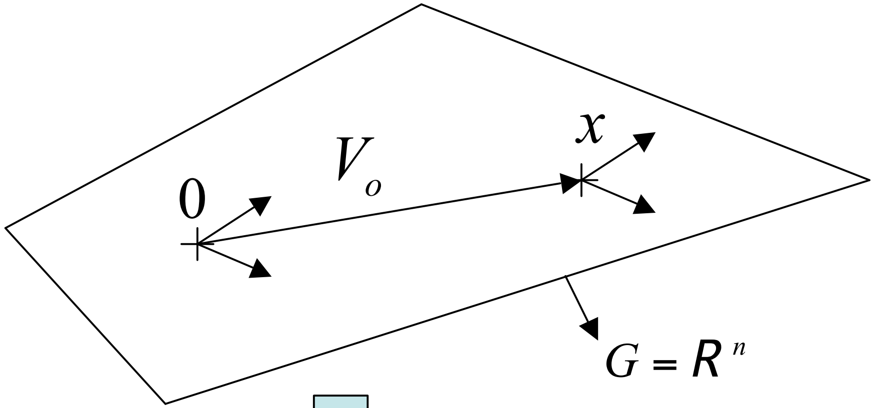
$$g(.) : t \in [t_1, t_2] \mapsto g(t) \in G$$

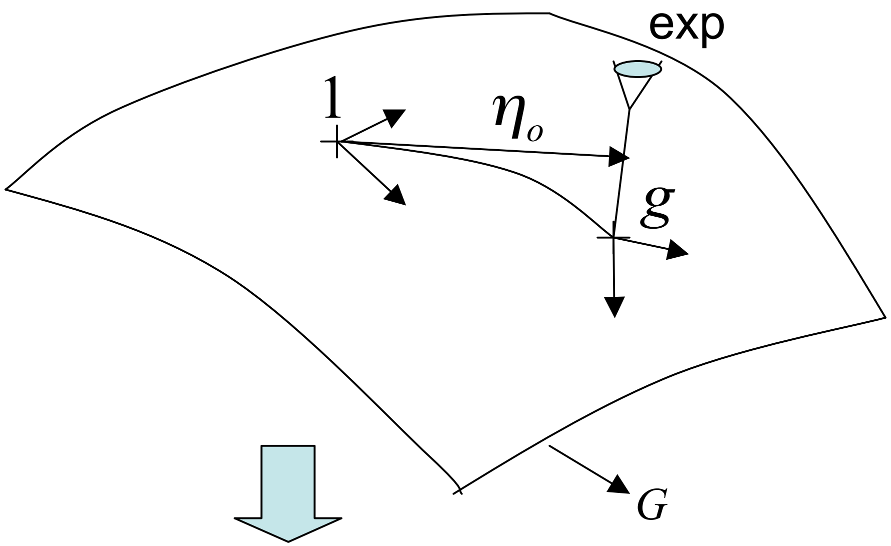


# Dynamique de Poincaré: l'application exponentielle

On montre que $\forall g \in G$ peut s'écrire comme l'exp(d'1 vecteur de $T_1 G$ )




$$\begin{cases} \dot{x} = V_o \ , \ x(0) = 0 \\ x = V_o t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{g} = g\eta_o \ , \ g(0) = 1 \\ g(t) = 1 + \dot{g}(0)t + \ldots g^{(n)}(0)t^n / n! + \ldots \\ \Rightarrow \quad g(t) = \exp(\eta_o t) \end{cases}$$

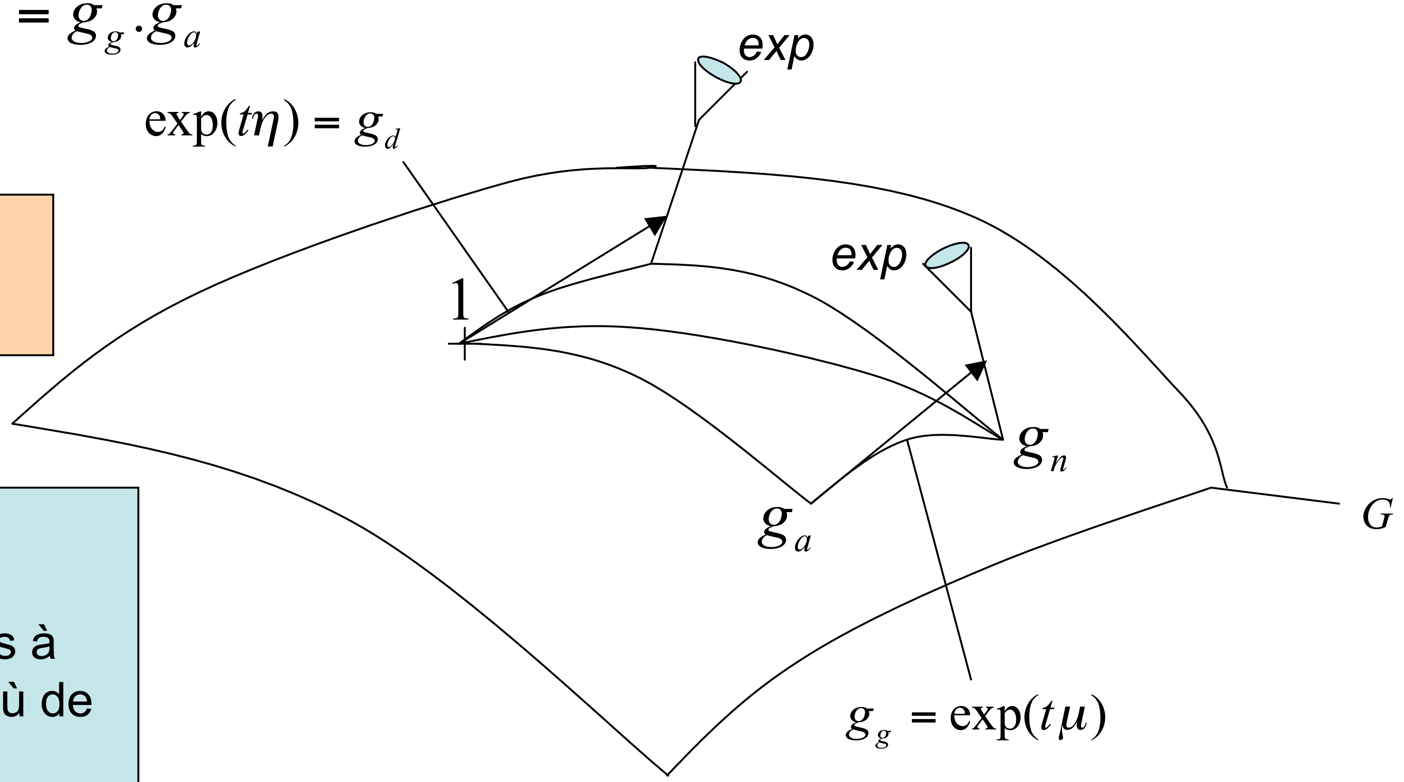
# Dynamique de Poincaré: comment se déplacer sur *G* ?

Question: pour passer de $g_{ancien} = g_a$ à $g_{nouveau} = g_n$

$$\Rightarrow \quad g_n = g_a . g_d = g_g . g_a$$

Algèbre de Lie :
esp. Vect. Muni de [,]

$\eta$ et $\mu$ :
Vitesses appliquées à la config. courante où de référence



# Dynamique de Poincaré

Déplacement finis: utiles pour l'intégration numériques…

Pour écrire la dynamique: déplacements ∞tésimaux: vitesses, variations…

⇨ Définis comme les termes du 1er ordre des déplacements finis

Vitesses:

$$\dot{g} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g\exp(t\eta) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(t\nu)g = \nu g = g\eta$$

Variations:

$$\delta g = \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} g\exp(\varepsilon\delta\zeta) = \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \exp(\varepsilon\delta\nu)g = \delta\nu g = g\delta\zeta$$

# Dynamique de Poincaré

Problème de départ, on se donne un lagrangien:

$$(g,\dot{g}) \mapsto L(g,\dot{g}) = T(g,\dot{g}) - U(g)$$

On construit l'action:

$$A(g(.)) = \int_{t_1}^{t_2} L(g,\dot{g})\, dt = \int_{t_1}^{t_2} L(g,g\xi)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} l(g,\xi)\, dt$$

Réduction du lagrangien

On pose « Hamilton »: $\delta A(g(.)) = \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} A(g_\varepsilon(.)) = 0 \;,\quad \forall \delta g$

Où la variation est (par ex. à droite): $t \mapsto g_\varepsilon(t) = g(t)\exp(\varepsilon\delta\zeta)$

# Dynamique de Poincaré

La variation est faite à extrémités et temps fixes

⇒ Le temps est indépendant de $\varepsilon$, et... $\left\} \left(\frac{d}{dt}\delta - \delta\frac{d}{dt}\right).f = 0 \;,\; \forall f \in C^{\infty}(G, R) \right.$

⇒ $d\delta\eta / dt = \delta\xi - ad_{*\xi}(\delta\eta) \;,\; ad_{*\xi}(.) = [\xi, .] \longrightarrow$ variation de la vitesse $\neq$ *d*(variation)/*dt*

Qu'on injecte dans l'action avant intégration p.p., finalement:

Equations de Poincaré: $$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial l}{\partial \xi}\right) - ad^{*}_{\xi}\left[\frac{\partial l}{\partial \xi}\right] - X_g(l) = 0}$$

Avec: $X_g(l) = \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} l(g_\varepsilon, \xi)$ : terme d'« asymétrie »

→ *g* perturbé sur la droite

ECOLE DES MINES DE NANTES

# Dynamique de Poincaré: application à la toupie eulerienne

Exemple de la toupie eulerienne...

Lagrangien réduit dans *so*(3): $l(\Omega) = 1/2\ \Omega^T J\Omega$

Action co-adjointe dans *so*(3): $ad^*_{\Omega}(.) = -\Omega \times (.)$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial l}{\partial \xi}\right) - ad^*_{\xi}\left[\frac{\partial l}{\partial \xi}\right] - X_g(l) = J\dot{\Omega} + \Omega \times (J\Omega) = 0$$

Remarque: $l$ ne dépend pas de $g$ !

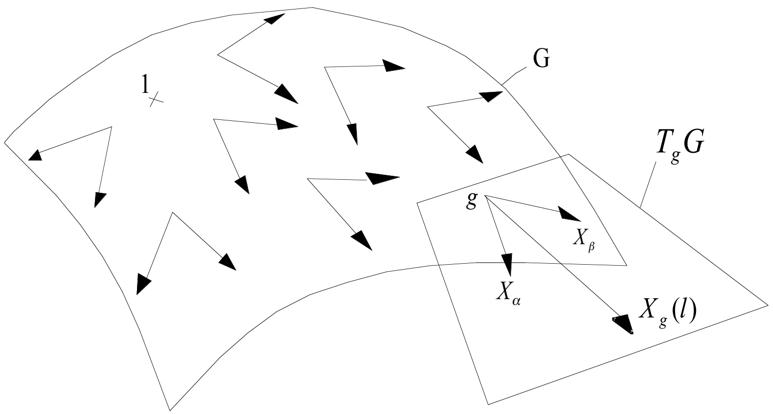
$\Rightarrow$ Propriété de symétrie (ici gauche): $L(g,\dot{g}) = L(hg, h\dot{g})\ ,\ \forall h \in G$

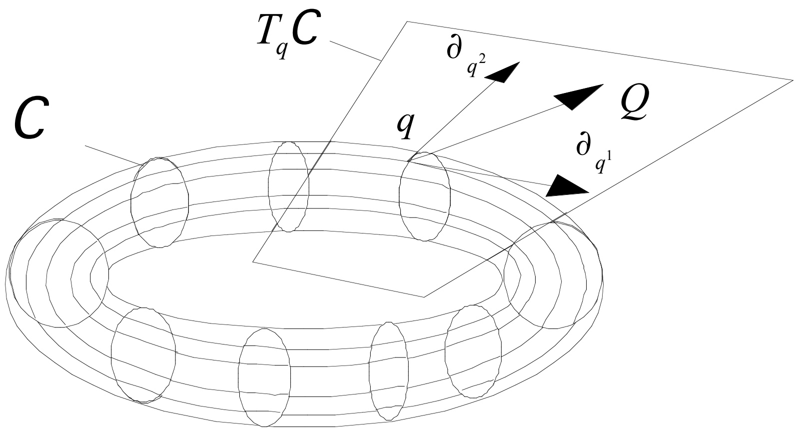
$$\Rightarrow \quad L(g^{-1}g, g^{-1}\dot{g}) = L(1,\xi) = l(\xi) \quad \Rightarrow \quad X_g(l) = 0$$

Symétrie / l’espace: « *rien n’indique à un observateur attaché à la toupie où est le nord!* »: dominante en Mécanique du solide (symétrie droite / la matière: dominante en dynamique des fluides).

# Conclusion: Dynamique de Poincaré / celle de Lagrange

Finalement, on écrit « $f = m\gamma$ » …




…dans le « repère mobile » de *G*

(Poincaré)

…dans une base qui dérive d'1 carte:

(Lagrange)