

**APICS**

**Analyse et Problèmes Inverses pour le  
Contrôle et le Signal**

**Proposition de création de projet**

8 janvier 2004



# Table des matières

<b>1</b>	<b>L'équipe</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Contexte et Historique</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Fondements scientifiques et perspectives</b>	<b>5</b>
3.1	Théorie des fonctions et identification . . . . .	5
3.2	Théorie des systèmes : réalisations et paramétrages physiques . . . . .	12
3.3	Identification/modélisation non-linéaire . . . . .	13
3.4	Généralités sur les problèmes inverses . . . . .	15
3.5	Les problèmes inverses chez APICS . . . . .	18
3.6	Linéarisation exacte, platitude, classification . . . . .	21
3.7	Feedback, stabilisation, contrôle optimal . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Développements logiciels</b>	<b>24</b>
4.1	Valoriser les développement algorithmiques de MIAOU . . . . .	25
4.2	MIAOU et les formats de documents scientifiques . . . . .	26
4.3	Le développement logiciel chez APICS . . . . .	27
4.4	Annexe : le logiciel hyperion . . . . .	29
<b>5</b>	<b>Quelques points de recherche</b>	<b>31</b>
5.1	Optimisation fréquentielle et théorie des fonctions . . . . .	31
5.1.1	Problèmes extrémaux bornés . . . . .	31
5.1.2	Optimisation convexe et approximation . . . . .	34
5.1.3	Approximation rationnelle . . . . .	36
5.1.4	Comportement asymptotique des pôles . . . . .	39
5.1.5	Problèmes de paramétrages . . . . .	41
5.1.6	Aspects algorithmiques de l'identification des systèmes linéaires stables . . . . .	43
5.2	Problèmes inverses . . . . .	46
5.3	Contrôle/modélisation/identification non-linéaire . . . . .	51
5.3.1	Contrôle, optimisation, feedback . . . . .	51
5.3.2	Caractérisation de la « platitude » . . . . .	52
<b>6</b>	<b>Applications, validation</b>	<b>54</b>
6.1	Filtrage hyperfréquence . . . . .	54
6.2	Filtres à ondes de surface . . . . .	57
6.3	Contrôle non-destructif . . . . .	58
6.4	Contrôle et mécanique spatiale . . . . .	59
6.5	Automatique pour l'optique non-linéaire . . . . .	60
<b>7</b>	<b>Collaborations</b>	<b>60</b>
7.1	Partenaires académiques . . . . .	60
7.2	Conventions . . . . .	61
7.3	Contrats industriels . . . . .	61
<b>8</b>	<b>Diffusion des connaissances</b>	<b>62</b>
8.1	Enseignement et formation . . . . .	62
8.2	Animation de la communauté scientifique . . . . .	62

# 1 L'équipe

Chercheurs permanents :

Laurent Baratchart	[DR INRIA], responsable scientifique
José Grimm	[CR INRIA]
Juliette Leblond	[CR INRIA]
Martine Olivi	[CR INRIA]
Jean-Baptiste Pomet	[CR INRIA], responsable permanent
Fabien Seyfert	[CR INRIA]

Assistante<sup>1</sup> :

France Limouzis

Conseillers scientifiques :

Andrea Gombani	[chercheur CNR (LADSEB, Padoue, It.)]
Mohamed Jaoua	[professeur Univ. Nice]
Jean-Paul Marmorat	[MR CMA, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, Sophia Antipolis]
Jonathan R. Partington	[professeur Univ. Leeds (G.B.)]
Edward B. Saff	[professeur Univ. Vanderbilt (Nashville, USA)]

Doctorants<sup>2</sup> :

David Avanesoff,  
Fehmi Ben Hassen,  
Alex Bombrun,  
Imen Fellah,  
Moncef Mahjoub.

Post-doctorants :

Per Enqvist  
Mario Sigalotti

## 2 Contexte et Historique

Le projet MIAOU s'était donné comme objectif initial de montrer que des techniques de théorie des fonctions, d'analyse harmonique en dimension 2, et de géométrie différentielle pouvaient s'appliquer fructueusement dans le domaine de l'identification fréquentielle des systèmes dynamiques linéaires, *i.e.* la déconvolution en dimension 1. Ayant au fil des années étudié les fondements d'une méthodologie reposant sur la résolution de problèmes extrémaux analytiques particuliers ainsi que sur le paramétrage de certaines fonctions de transfert matricielles, le projet a choisi comme champ d'application, pour tester ses algorithmes, la conception et le réglage de filtres hyperfréquences à cavités résonnantes embarqués à bord des satellites de télécommunications pour le multiplexage et le démultiplexage des signaux. Ce choix applicatif a résulté autant des opportunités de collaboration que de l'adéquation des modèles au savoir-faire de l'équipe, ou encore de l'importance de l'enjeu industriel. Aujourd'hui que ses algorithmes ont été transférés au CNES (Toulouse), à l'IRCOM (Limoges), et chez Alcatel-Space

---

<sup>1</sup>Par ailleurs chef du service des assistantes de projet (SAPR), et également assistante du projet COMORE.

<sup>2</sup>F. Ben Hassen, I. Fellah et M. Mahjoub sont des doctorants ENIT-INRIA, co-encadrés par le projet et par le LAMSIN ; ENIT : École Nationale d'Ingénieurs de Tunis ; le LAMSIN est équipe de recherche associée à l'INRIA (EDidon).

(Toulouse) où ils font l'objet d'une exploitation industrielle, MIAOU peut penser qu'il est devenu un acteur de l'ingénierie logicielle des hyperfréquences en France, cependant que les développements théoriques ont naturellement évolué vers des problèmes inverses un peu plus généraux que la déconvolution unidimensionnelle. Le moment ne paraît donc pas inopportun pour jeter les bases d'un nouveau projet qui, se fondant sur l'acquis, explorerait d'autres aspects de l'optimisation fréquentielle et du filtrage (on pense en particulier au montage sur guide des OMUX ou aux filtres à ondes de surface) et étudierait les possibilités de faire migrer certains de ses algorithmes génériques vers des logiciels dédiés à l'Automatique (tels `matlab` ou `Scilab`), tout en approfondissant ses réflexions sur l'usage de la théorie des fonctions et des théories spectrales concernant les problèmes de potentiel inverses issus du Laplacien en dimensions 2 et 3. Bien que lesdites réflexions soient encore loin d'un stade applicatif, elles participent de questions qui interviennent naturellement en contrôle non-destructif et elles ont d'ores et déjà trouvé un débouché sur certains modèles simplifiés d'exploration fonctionnelle du corps humain (Magnéto-Électro-encéphalographie) dans le cadre de l'ACI « Masse de données », « OBS-CERV ».

Parallèlement à son activité en identification, MIAOU menait des recherches sur les modèles différentiels ordinaires en dynamique des populations (héritière de l'ex-projet EDORA), axées sur l'analyse des solutions stationnaires de systèmes différentiels à flot monotone. A partir du tiers de son existence environ, cette activité a engendré par scissiparité le projet COMORE, qui poursuit aujourd'hui, avec un spectre beaucoup plus large, des recherches en modélisation et contrôle de systèmes biologiques. L'activité en contrôle de MIAOU s'est alors infléchie, avec pour objectif d'exploiter les outils de géométrie différentielle et d'intégrabilité sous-jacents aux fonctions de Lyapunov contrôlées, afin de stabiliser en boucle fermée des systèmes de commande régis par des équations différentielles, notamment dans les cas où leur linéarisé n'est pas ou n'est que peu contrôlable. Centrées au début sur la détermination de *feedbacks* instationnaires, ces investigations ont évolué vers la construction de lois stabilisantes robustes et la question de leurs liens avec la synthèse optimale s'est rapidement posée. Au plan applicatif, une opportunité s'est présentée dans le moyen terme d'étudier le contrôle orbital et la mise à poste d'un satellite muni de moteurs ioniques, qui sont à fort rendement mais faible poussée, dans le cadre d'une collaboration avec Alcatel-Space (Cannes). Là encore, c'est la qualité du partenariat, l'adéquation des modèles, et l'enjeu industriel qui ont motivé l'investissement du projet dans ce domaine pétri de mécanique spatiale. Par ailleurs, l'analyse du comportement d'un système au voisinage d'un équilibre a aussi débouché naturellement sur des problèmes de classification et notamment diverses questions d'équivalence locale à la linéarité. Mues en premier lieu par le souci de déterminer les trajectoires admissibles, ces recherches alimentent également une réflexion sur l'identification non-linéaire en contrepoint de celle menée sur l'identification linéaire dont il a été fait mention auparavant. Commencée plus tard et mobilisant moins de moyens humains, l'activité en contrôle de l'équipe commence seulement à atteindre une certaine maturité, et se trouve à un stade où il convient sans doute de renforcer sa dynamique tout en poursuivant dans les voies qu'elle s'est tracées. La refonte du projet est à tout le moins l'occasion de réfléchir aux moyens de ce renforcement.

Il est un troisième axe scientifique qui a été poursuivi au sein du projet et qui concerne les jeux dynamiques, plus particulièrement leurs aspects discrets, multi-agents, et probabilistes. Cette activité, historiquement liée à MIAOU, n'est plus revendiquée dans APICS et nous ne la commenterons pas davantage dans ce document.

Enfin, sans qu'il ait pour autant affiché d'engagement scientifique à cet égard, le projet MIAOU a concentré au cours de son évolution des compétences concernant les outils de production et de manipulation des documents scientifiques (`LATEX`, HTML, XML, ...), qui ont vu leur exploitation aller croissant au service de l'Institut à mesure que se développait la publication électronique à l'INRIA dont le

raweb<sup>3</sup> est un exemple. Tout en assurant le suivi des réalisations entreprises par MIAOU, APICS n'envisage plus de réalisation d'importance dans ce domaine qui représente une charge importante et un investissement non négligeable pour certains membres de l'équipe.

### 3 Fondements scientifiques et perspectives

Nous passons en revue dans cette section les principaux domaines sur lesquels APICS fonde sa recherche, ainsi que les axes de recherche sur lesquels il entend plus spécifiquement être actif dans ces domaines. On mettra en valeur dans le même temps l'évolution qu'APICS présente par rapport à MIAOU ; à cet égard, les paragraphes indentés en italiques résument les principaux points de cette comparaison.

#### 3.1 Théorie des fonctions et identification

La théorie des fonctions analytiques d'une variable complexe (la « Funktionentheorie » dans la terminologie allemande) est un sujet ancien dont les fondements remontent au début du XIX<sup>ème</sup> siècle, et dont les liens avec l'analyse harmonique ont été mis au jour dans la première moitié du XX<sup>ème</sup>. Il est alors apparu que les espaces de Hardy, par leur capacité à décrire les transformées de Fourier des signaux causaux d'énergie finie et leurs multiplicateurs, étaient un cadre naturel pour étudier certaines équations intégrales comme celle de Riemann-Hilbert ou de Wiener-Hopf, et fonder un calcul spectral des contractions dans l'espace de Hilbert donnant lieu en particulier à une représentation spectrale des processus Gaussiens et à la description des solutions de problèmes d'interpolation classiques [100, 152, 159, 224, 225, 226, 231]<sup>4</sup>. En théorie des systèmes linéaires contrôlés, ce point de vue qui fait jouer un rôle central à l'opérateur de Hankel unifie les notions de réalisation en dimension finie et infinie [155], mais n'a suscité d'intérêt en contrôle qu'assez tardivement pour donner naissance à une théorie de la stabilisation robuste [140, 153], laquelle a ensuite été réinterprétée dans le contexte des jeux dynamiques [102] ; cette latence est sans doute due pour partie au succès justifié des méthodes en variables d'état. Pour ce qui est de l'identification, ce même point de vue a reçu moins d'attention encore jusqu'ici : des méthodes fréquentielles analytiques, en majorité fondées sur l'interpolation, ont commencé à être proposées dans les années 1990 et leur manque de robustesse, inhérent en la matière à toute procédure linéaire, a amené à introduire de nouveau les opérateurs de Hankel, en relation cette fois avec l'approximation [229]. Ces développements, auxquels le projet MIAOU a apporté sa contribution, ont été le fait de la communauté du contrôle et de l'analyse harmonique plus que de celle de l'identification. Cette dernière, traditionnellement centrée sur le paradigme de l'identification paramétrique au maximum de vraisemblance dans lequel le bruit est partie intégrante du modèle, n'a que peu considéré les problèmes analytiques extrémaux bien que ces derniers soient une version asymptotique de ce paradigme [174, 212, 232, 251]. A certains égards, ceci peut surprendre dans la mesure où la théorie des polynômes orthogonaux sur le cercle fut en partie motivée par l'estimation optimale des processus à moyenne mobile, et qu'un analogue rationnel de cette théorie (*i.e.* l'approximation rationnelle dans les classes de Hardy) s'appliquerait aux processus auto-régressifs, si populaires en identification. En contrepartie, il faut bien admettre qu'un tel analogue est considérablement plus difficile à développer, à cause de la non-convexité du problème extrémal sous-jacent, et ceci contribue à expliquer que

---

<sup>3</sup>Mise à disposition sous diverses formes des rapports d'activité annuels des projets, par exemple sur le site web de l'INRIA ou sous forme de CD-ROM.

<sup>4</sup>Les espaces de Hardy ont aussi joué un rôle important dans le développement de la théorie des intégrales singulières [256].

l'investissement dans cette direction soit resté limité de la part des spécialistes de traitement du signal [240]. Cependant, il est suffisamment de situations dans lesquelles les problèmes proviennent moins du bruit que du caractère local en fréquence du modèle linéaire pour motiver une approche constructive de l'approximation rationnelle. De surcroît, l'utilisation d'« optimiseurs » génériques sur un critère fréquentiel aux moindres carrés, pondéré par l'inverse de la covariance estimée comme le préconise le paradigme stochastique, peut fort bien conduire à un modèle instable alors même que le système sous-jacent est stable, indiquant par là les limitations que peut rencontrer cette approche en pratique.

La théorie des fonctions quant-à elle a, depuis longtemps, considéré les problèmes d'approximation rationnelle dans le domaine complexe [107, 266], mais davantage sous l'angle des estimations asymptotiquement optimales en fonction de la régularité de la fonction approximée que sous celui du calcul optimal ou sous-optimal à degré donné. Il est intéressant de noter que, là encore, les opérateurs de Hankel ont joué un rôle essentiel dans deux questions-clefs au moins, à savoir la preuve de la conjecture de Gonchar [228, 236] et la caractérisation des erreurs décroissant plus vite que polynômialement [231, théorème 6.4]; de plus, une borne inférieure de l'erreur uniforme à degré donné est elle aussi déduite du spectre de ces opérateurs [167]. En ce qui concerne le comportement asymptotique des schémas d'interpolation classiques, mentionnons en passant la réfutation récente de la forme forte de la conjecture de Padé [213, 114] dans laquelle l'ordinateur (calcul de racines en précision contrôlée) ainsi que l'itération complexe sont intervenus de façon déterminante. Naturellement, la théorie des systèmes requiert souvent la considération de matrices rationnelles plutôt que de fonctions, ce qui entraîne des complications géométriques supplémentaires qui ne sont que marginalement explorées dans la communauté de l'approximation. Il en va différemment des milieux de l'analyse harmonique, où les fonctions à valeurs opérateurs sont des objets banals et où une véritable théorie des fonctions rationnelles à valeurs matricielles a été développée en relation avec l'interpolation, sans toutefois mettre d'accent sur l'approximation [99].

*C'est à la charnière entre la théorie des fonctions et celle des systèmes que le projet MIAOU situait l'essentiel de ses contributions dans le domaine de l'identification, et c'est encore là que le projet APICS pense effectuer la majorité des siennes à court et moyen terme, selon une évolution que nous détaillons maintenant.*

L'activité de MIAOU a été fédérée en bonne partie par la question suivante : « étant donnée une fonction à valeurs matricielles définie sur un intervalle de l'axe imaginaire, comment l'approcher par une matrice rationnelle de degré donné qui soit analytique dans le demi-plan droit ». Dans la pratique de l'identification harmonique, la fonction que l'on approxime est par exemple la matrice de transfert d'un système stable, telle qu'on peut la mesurer ou la simuler dans la bande passante, et l'approximant rationnel est la matrice de transfert d'un modèle linéaire stable et de dimension d'état prescrite, tel qu'on veut en disposer pour, la plupart du temps, le réaliser et avoir accès aux caractéristiques physiques du système (*cf.* section 3.2). On pourrait au lieu du demi-plan droit considérer le complémentaire du disque unité, ce qui correspond au cas de systèmes en temps discret.

Dans l'approche développée au sein de MIAOU, la question d'approximation précédente a été scindée en deux : on se demande d'abord comment approcher la fonction originale par une fonction analytique dans le demi-plan droit, puis on approxime cette dernière sur l'axe imaginaire entier par une matrice rationnelle du degré désiré dont les pôles sont dans le demi-plan gauche.

### **Problèmes extrémaux bornés**

La première étape permet d'assurer que l'approximation rationnelle est par la suite bien posée, et a l'avantage de pouvoir se formuler de manière convexe (en dimension infinie) : comment approximer

une fonction donnée sur une partie du bord d'un domaine par une fonction analytique dans le domaine. De quelque manière qu'on l'aborde, une telle question se ramène plus ou moins à la régularisation de la continuation analytique laquelle est un problème inverse prototypique, mal posé comme de juste [194, 201, 209], qui intervient dans des contextes variés. Dans l'exemple précédent, le domaine est le demi-plan droit et la fonction est donnée sur un intervalle de l'axe imaginaire correspondant à la bande passante. Un autre exemple, qui illustre comment APICS compte aborder certains problèmes inverses du Laplacien (*cf.* paragraphe 3.5), est celui où la fonction que l'on veut approcher est la complexifiée d'une température ou d'un potentiel qu'on mesure sur une partie du bord d'un conducteur plan après avoir imposé son flux (condition de Neumann).

Le problème d'approximation considéré par MIAOU en guise de régularisation, qu'on nommera « problème extrémal borné », est une variante du schéma de Tikhonov [194, 201] pour l'injection d'une classe de Hardy dans les fonctions définies sur la partie du bord accessible aux mesures. Les formulations exactes varient suivant les critères adoptés, et certaines sont mentionnées précisément au paragraphe 5.1.1 mais, pour ce qui est de l'identification harmonique, le cas  $L^2$  est peut-être parlant : on veut minimiser l'énergie de l'erreur de modélisation dans la bande passante, tout en bornant l'énergie non-modélisée *i.e.* l'énergie du modèle aux fréquences où on n'a rien mesuré. Ce point de vue extrémal semble dû au projet MIAOU [2, 18, 19, 22], mais il est des travaux antérieurs voisins [200]. Ce problème possède son intérêt propre, et présente des liens étroits avec l'interpolation de Carleman-Goluzin-Krylov, laquelle a été considérablement étudiée [86, 101, 193, 230, 265] mais apparemment peu exploitée en pratique. La théorie spectrale des opérateurs de Toeplitz autorise dans ce cas des estimées précises, qui indiquent qu'il est très difficile d'approximer sur la bande passante une fonction qui n'est pas « presque » la trace d'une fonction analytique car l'énergie non-modélisée nécessaire pour y parvenir devient rapidement très grande [16]. A cet égard, la résolution des problèmes extrémaux bornés sert un double propos : fournir des modèles linéaires à certaines fréquences, ou au contraire invalider l'approximation linéaire. Ainsi, les filtres à cavités résonnantes construits par les équipementiers de satellites ont des matrices de répartition qui sont bien représentées par des modèles linéaires dans leur bande passante (*cf.* paragraphe 6.1) mais, par contraste, on a pu montrer que les courbes de réponse en puissance des amplificateurs de signal utilisés dans le même contexte n'admettent pas de modèle linéaire satisfaisant dans leur domaine de fonctionnement (le CNES a obtenu depuis de meilleurs modèles comprenant une non-linéarité qui vient, bien sûr, de la saturation) ; les implémentations correspondantes ont été effectuées au sein du logiciel *hyperion*, écrit en C++, dont nous parlerons en section 4. Certaines implémentations pour des contraintes en norme du *sup* ont aussi été effectuées sous forme de programme *matlab*, en collaboration avec le CMA de l'École des Mines de Paris.

D'autres versions des problèmes extrémaux bornés sont aujourd'hui à l'étude (*cf.* section 5.1.1) : celles comportant des critères mixtes  $L^2 - L^\infty$ , celles où critère et contraintes portent sur les parties réelles et imaginaires des fonctions plutôt que leur module, et celles où la frontière du domaine d'analyticité n'est plus connexe. Les premières ont par exemple pour but d'imposer au modèle un caractère dissipatif, en relation avec l'identification de systèmes passifs comme les dispositifs hyperfréquences ; les secondes apparaissent naturellement en contrôle non-destructif (*cf.* section 6.3) où les parties réelles et imaginaires des fonctions sont les quantités physiques (température, flux de chaleur, potentiel, flux de courant...), cependant que les troisièmes visent à traiter les géométries présentant des cavités. Dans les deux premiers cas, on s'intéressera particulièrement aux conditions qui assurent la continuité de la solution sur la frontière du domaine d'analyticité ; si celle-ci ne pose pas trop de problèmes à l'intérieur de l'ensemble accessible aux mesures, il n'en va pas de même aux extrémités de celui-ci.

Notons aussi en passant que, dans un registre bien différent, les problèmes extrémaux bornés ont fourni un moyen de construire des sous-espaces hyperinvariants pour certains opérateurs qui ne sont ni

compacts, ni quasiniipotents [124, 125].

*Bien qu'ils ne soient plus aussi centraux pour eux-mêmes qu'ils l'étaient dans MIAOU, les problèmes extrémaux bornés continueront d'être étudiés par APICS et resteront à court et moyen terme un vecteur privilégié de l'activité en identification et en conception de dispositifs hyperfréquences que le projet entend poursuivre, ainsi que de l'activité en contrôle non-destructif qu'il veut investir.*

Ces problèmes sont également un des lieux de rencontre entre l'analyse complexe et l'analyse convexe : lors de leur résolution, on doit typiquement choisir entre la résolution d'une équation spectrale pour un opérateur de Toeplitz, qu'il faut discrétiser d'une manière ou d'une autre, ou bien la considération d'une suite de problèmes du même type où l'inconnue est restreinte à un espace de dimension finie (par exemple les espaces de polynômes filtrés par le degré), et dont la solution converge en un sens plus ou moins fort vers celle du problème initial. APICS compte étudier comparativement ces aspects algorithmiques et élargir cette réflexion à d'autres aspects convexes ou quasi-convexes de l'optimisation fréquentielle, comme la satisfaction de gabarit « en escaliers » pour le module d'une fraction rationnelle de degré donné, un problème généralisant celui de Zolotarjov [243] dont les aspects constructifs sont délicats mais sur lequel on espère que les méthodes de points intérieurs peuvent être efficaces [90, 91, 162, 163, 223]. Cette question est très importante pour la conception de filtres, où la réalisation des spécifications avec la moindre complexité possible permet d'économiser au plan de l'étude et du matériel sur la mise en œuvre des dispositifs (par exemple dans le cas d'un filtre, le degré indique le nombre de résonateurs ou de transducteurs élémentaires). Plus intéressante encore est la version de l'optimisation en gabarit où l'on veut aussi contrôler la dérivée de la phase de la réponse du filtre (le « temps de retard de groupe »). Ceci n'est plus un problème convexe, mais il est lié au précédent par l'opérateur de conjugaison et devrait donc progresser avec lui. Un autre domaine où l'analyse convexe se mêle classiquement à la théorie des fonctions pour synthétiser les signaux est fourni par les problèmes trigonométriques de moments [199], qui ont connu récemment un regain d'intérêt pour la reconstruction de la voix [115, 116, 117] et pour lesquels il est tentant d'envisager d'autres critères d'approximation rationnelle que l'interpolation. Il serait également intéressant d'étendre le champ d'application au cas lacunaire ou même non-périodique, par exemple pour la détection sonar et le traitement d'antenne avec des capteurs irrégulièrement espacés ou distribués suivant des géométries complexes [190, 214]. D'autres problèmes de moments, cette fois bidimensionnels [171, 180, 220], interagissent avec l'approximation rationnelle pour la reconstruction tomographique et seront évoqués plus loin au chapitre des problèmes inverses en section 3.5.

*Le champ d'application des méthodes d'analyse convexe en approximation polynomiale et rationnelle a vocation à prendre de l'importance dans APICS, alors qu'il était marginal pour MIAOU. Les domaines visés à moyen et long terme sont la conception de filtres d'après gabarit ou covariances, ainsi que certains problèmes inverses de moments liés à la localisation de sources acoustiques et à la reconstruction tomographique.*

## Approximation rationnelle

La seconde étape de la méthodologie développée dans MIAOU pour l'identification fréquentielle est l'approximation rationnelle. Comme nous venons de le voir, la résolution d'un « problème extrémal borné » à la première étape permet de disposer d'un modèle analytique dans le demi-plan droit, que l'on veut maintenant approximer par une fonction ou une matrice de transfert stable de degré donné. Le projet MIAOU a considéré particulièrement le critère  $L^2$ , à la fois pour ses justifications stochastiques—il correspond à la minimisation de la variance de l'erreur lorsque l'entrée est un bruit blanc—et pour

son caractère prototypique de critère différentiable. Les efforts initiaux ont porté essentiellement sur un paramétrage qui réduise la question à un problème d'optimisation sur une variété compacte. Un tel paramétrage est fourni par la factorisation de Douglas-Shapiro-Shields [155], [27], qui permet de définir le critère sur la variété des matrices intérieures de taille et de degré donné, disons  $n$  [1, 28] et, lorsque la fonction à approximer est assez lisse, de l'étendre à l'ensemble des matrices intérieures de degré *au plus*  $n$  qui est compact (mais stratifié et non plus lisse). A partir de cette construction, deux voies de recherche complémentaires ont été poursuivies.

La première a consisté à développer un algorithme de descente sur la variété des matrices intérieures de degré fixé, en utilisant les cartes fondées sur l'algorithme de Schur tangentiel introduites dans [1], et à exploiter la structure récursive offerte par le critère sur le bord de cette variété (qui consiste en les matrices intérieures de degré plus faible) pour en assurer la convergence vers un minimum local. Cet algorithme a d'abord été développé dans son principe pour le cas scalaire [8], puis dans le cas matriciel où la géométrie est nettement plus compliquée [53], cependant que les implémentations correspondantes ont été effectuées dans le logiciel *hyperion* (fonction *arl2*) [57] et délivrées au CNES, à l'IRCOM, à l'Université de Lille et à celle d'Orsay. Une autre implémentation, dans laquelle les matrices intérieures sont appréhendées par le biais de réalisations orthogonales à chaque étape de l'algorithme de Schur [54, 69], a fait l'objet du logiciel *RARL2* ([www-sop.inria.fr/miaou/Martine.Olivi/RARL2/rarl2-eng.html](http://www-sop.inria.fr/miaou/Martine.Olivi/RARL2/rarl2-eng.html)), écrit dans le langage *matlab* en collaboration avec le CMA de l'École des Mines de Paris. Elle se prête bien à une description interne (*i.e.* en variables d'état) plutôt qu'externe des systèmes sous-jacents, et bénéficie de la souplesse d'utilisation inhérente à l'interpréteur. Le logiciel *PRESTO-HF*, lui aussi écrit en *matlab*, encapsule à la fois la fonction *arl2* d'*hyperion* et *RARL2* et a été livré à Alcatel-Space (centre de Toulouse) pour la synthèse et le réglage de filtres hyperfréquences de (dé)multiplexage. Ces codes d'approximation ont été des pierres angulaires de la validation, de la diffusion et du transfert des recherches effectuées au sein du projet MIAOU, et resteront centraux dans APICS. De nouveaux problèmes d'approximation, cependant, seront à l'étude. Tout d'abord, on compte utiliser l'approximation rationnelle, en conjonction avec les problèmes extrémaux bornés, pour identifier et compenser de manière automatique les retards induits par les systèmes d'accès, un problème général qui est particulièrement aigu pour les dispositifs hyperfréquences ; ceci est par exemple nécessaire pour traiter des filtres à ruban, intéressants à cause de leur faible encombrement mais dont les pertes sont considérables<sup>5</sup> et ne permettent plus l'approximation conservative pour régler le déphasage des voies. Ensuite vient le problème de la synthèse d'OMUX, qui consiste à mettre en parallèle une batterie de filtres sur un guide d'ondes et à obtenir une séparation des canaux ainsi qu'un réglage correct de chaque canal, est une extension naturelle de la synthèse de filtres qui est de première importance pour les industriels du multiplexage. Le réglage des canaux fait intervenir, par la règle du chaînage, la distance hyperbolique plutôt qu'euclydienne entre éléments des matrices de répartition, et le phénomène des petits dénominateurs provoque les « pics de manifold » dont le contrôle est un des enjeux essentiels du sujet. Soulignons aussi qu'il ne s'agit plus ici de modèles rationnels uniquement, car la présence des guides introduit des facteurs exponentiels qui correspondent aux retards. D'autres aspects de l'approximation rationnelle seront également l'objet des préoccupations d'APICS. Mentionnons en particulier ceux liés à la synthèse de filtres à ondes de surface pour les « transducteurs unidirectionnels » utilisés en téléphonie mobile, qui proposent des modèles plus complexe où deux types d'énergie (acoustique et électrique) s'échangent et se propagent [182],[13], induisant des contraintes de symétrie et de parité qui ne sont pas encore bien comprises ; soulignons que l'approche analytique pour la conception de tels filtres commence à susciter l'intérêt de la communauté micro-ondes [130]. Citons aussi la technologie « corruguée », qui supporte une puissance élevée et attire de ce fait l'attention pour le filtrage de sortie en télécommunications satellitaires, mais dont la modélisa-

---

<sup>5</sup>Sauf à utiliser des dispositifs supra-conducteurs.

tion n'est pas encore totalement au point. Enfin, on songe aux problèmes mixtes  $L^2 - L^\infty$  qui procèdent d'un regain d'intérêt en contrôle robuste et pour lesquels le critère n'est plus différentiable [245].

*L'approximation de fonctions matricielles dans les classes de Hardy restera un sujet de recherche central pour APICS, et des approximations plus généraux que rationnels ainsi que des critères autres que les normes  $L^p$  seront considérés. Un des buts de cette recherche sera de faire progresser à moyen terme la synthèse des OMUX comme MIAOU avait contribué à faire progresser celle des filtres à cavités résonantes. Un autre but, également à moyen terme, sera de transposer l'approche précédente aux modèles électro-acoustiques de filtres à ondes de surface. Le cas échéant, et à plus long terme, les modèles issus d'autres technologies hyperfréquences seront également abordés, comme ceux des filtres à ruban et peut-être des filtres corrugués. L'application à des problèmes de contrôle robuste est aussi envisagée.*

L'autre voie de recherche née de la formulation du problème de la meilleure approximation rationnelle  $L^2$  de degré donné comme une question de minimisation sur une variété compacte a été l'étude qualitative des points critiques et la recherche de conditions sur la fonction à approximer garantissant l'unicité d'un minimum local. Une telle étude est bien sûr motivée par le désir d'assurer la convergence globale d'un algorithme de descente, une propriété très désirable mais dont on sait qu'elle ne peut avoir lieu en général [4, 34], [137, 211]. Les résultats obtenus concernent essentiellement le cas scalaire, dans lequel l'espace d'optimisation consiste simplement en les produits de Blaschke de degré au plus un entier donné, lequel est homéomorphe à un espace projectif [5]. En exploitant la stratification fournie par le degré et en reliant la signature des points critiques à la coprimarité de leur forme irréductible, on a montré, en utilisant les outils de la topologie différentielle pour passer du local au global [26, 5, 6], que le fait qu'il n'y ait qu'un point critique est lié à la régularité et à la rapidité de la décroissance géométrique de l'erreur. Il s'en est suivi une série de résultats d'unicité, souvent en degré assez grand, pour certaines classes de fonctions dont les erreurs en interpolation rationnelle peuvent être évaluées assez précisément (car les points critiques sont des interpolants particuliers) [31, 36, 37] ou pour lesquelles une suite de points critiques présente une décroissance convenable [32]. Les fonctions concernées comprennent notamment les fonctions de Markov, une classe très importante en approximation à cause de ses liens avec les fractions continues et les polynômes orthogonaux [98], et qui s'identifie aux fonctions de transfert des systèmes dits « de relaxation » [112, 268]. Le cas matriciel, quant à lui, reste presque inexploré : le seul résultat connu sur l'unicité d'un minimum local concerne les situations où la fonction à approximer est « presque » rationnelle du degré cherché (c'est une version forte de la « consistance » en identification au minimum de variance [28]), et il ne doit rien à la stratification induite par le degré.

Cette recherche est aujourd'hui parvenue à un carrefour où deux directions se présentent. D'un côté l'introduction<sup>6</sup> de techniques de topologie différentielle a permis de mieux comprendre la géométrie des points critiques et de donner des critères d'unicité, les premiers en approximation rationnelle complexe. Il serait naturel d'exploiter cet acquis, soit en déformant une situation donnée en une situation où l'on a unicité pour initialiser une méthode de continuation, soit en cherchant directement un ensemble de conditions initiales pour un algorithme de descente qui garantisse que l'on atteigne l'optimum global. Pour chacune de ces deux questions on dispose d'éléments de réponse qualitatifs<sup>7</sup> mais

---

<sup>6</sup>S'il semble juste d'attribuer celle-ci au projet dans le cas complexe, mentionnons cependant qu'un cheminement assez voisin avait été suivi, en approximation réelle sur l'intervalle, pour prouver l'unicité des monosplines de moindre déviation [108].

<sup>7</sup>Si l'on travaille sur le cercle pour fixer les idées, et si on s'en tient aux cas génériques, il suffit par exemple de remplacer la fonction à approximer  $f(e^{j\theta})$  par  $f(re^{j\theta})$  avec  $r > 0$  assez petit pour avoir unicité [31]; et pour une grille assez fine de conditions initiales en degré inférieur, lorsque l'ordre est assez grand pour que l'erreur relative en interpolation soit inférieure à 1/2, on atteint tous les minima locaux en remontant le champ de gradient [29].

obtenir des estimés quantitatifs pour les rendre constructives constitue un programme de recherche déjà conséquent. D'un autre côté, la classe des fonctions pour lesquelles on sait conclure à l'unicité est à ce jour bien maigre, et il est nécessaire pour l'agrandir d'estimer l'erreur d'interpolation dans des cas plus généraux. Ceci nécessite peu ou prou la localisation des pôles, qui est toujours la difficulté fondamentale en approximation rationnelle et, plus généralement, méromorphe. Il est utile ici d'élargir la discussion et de considérer l'approximation rationnelle  $L^2$  sur le cercle ou la droite comme un cas particulier de l'approximation méromorphe  $L^p$  pour  $p \geq 2$  [32], en soulignant que le cas  $p = \infty$  se résout constructivement pour des fonctions suffisamment régulières grâce à la théorie AAK [82]. Dans le cas précédemment évoqué des fonctions de Markov, c'est à dire des transformées de Cauchy de mesures positives sur un segment, l'estimation du comportement des pôles s'effectue *via* la théorie des polynômes orthogonaux à poids variable [254, 263], qui constitue ici un ingrédient majeur aussi bien dans le cas de la meilleure approximation rationnelle  $L^2$  [35] que dans le cas de la meilleure approximation méromorphe [30]. Pour des fonctions générales définies par des intégrales de Cauchy de mesures complexes, la situation est beaucoup plus délicate. Lorsque le contour d'intégration est symétrique par rapport au potentiel logarithmique, *i.e.* est un contour (généralement ouvert) de « capacité minimale », une technique fondée sur l'orthogonalité non-Hermitienne [253] permet de déterminer l'asymptotique faible<sup>8</sup> des pôles des approximants de Padé, technique qui a été ensuite étendue au cas d'interpolants multipoints [169]. Le cas des meilleurs approximants rationnels sur le cercle ou la droite est plus difficile, car les points d'interpolation ne sont pas connus explicitement. Néanmoins, dans le cas d'intégrales de Cauchy sur un segment [17, 32, 62] puis plus récemment sur des contours symétriques généraux pour le potentiel de Green [33], ces résultats ont été généralisés aux points critiques en approximation rationnelle pour  $p = 2$  et plus généralement méromorphe pour  $p > 2$ . Notons que les fonctions représentées par des intégrales de Cauchy, sur des contours symétriques comprennent en particulier celles dont les singularités sont branchées ou logarithmiques ainsi que les résolvants d'opérateurs auto-adjoints, et interviennent dans plusieurs applications intéressantes (processus à longue mémoire [139], systèmes diffusifs [217, 219], distribution de sources 2D [136], diffraction des ondes 2D [134]) où l'approximation rationnelle a un rôle à jouer, notamment au plan de la simulation numérique et de la conception de compensateurs. Malheureusement, les asymptotiques faibles ne sont pas suffisants pour décider de l'unicité d'un point critique, et le travail nécessaire pour obtenir des estimés plus forts constitue lui aussi un programme de recherche conséquent, qui n'a pour l'instant été mené que pour les fonctions de Markov [30, 35], et qui participe de l'effort vers une théorie spectrale quantitative des opérateurs de Hankel [231]. Toutefois, et c'est là que bifurque quelque peu l'intérêt du projet, les asymptotiques faibles fournissent malgré tout des renseignements substantiels sur les liens entre les singularités de l'approximant et celles de l'approximé qui conduisent à considérer l'usage des résultats précédents pour résoudre des problèmes inverses. C'est ce que se propose de faire APICS, et qui sera développé en section 3.5.

*La géométrie des points critiques en approximation rationnelle ou méromorphe ne sera plus un sujet central pour APICS comme il l'était pour MIAOU. Néanmoins l'étude du comportement asymptotique des pôles et des erreurs, en bonne partie motivée par l'analyse de problèmes inverses, sera poursuivie et amplifiée à court et moyen terme. Celle-ci pourrait avoir des conséquences sur ladite géométrie, qu'APICS serait alors amené à exploiter, notamment pour établir la convergence globale de certains algorithmes d'approximation.*

---

<sup>8</sup>On entend par là la convergence faible-\* de la « mesure de comptage », *i.e.* la mesure de probabilité ayant une masse en chaque pôle proportionnelle à sa multiplicité.

### 3.2 Théorie des systèmes : réalisations et paramétrages physiques

Le projet MIAOU a étudié depuis ses débuts le paramétrage des fonctions de transfert, du fait qu'il était actif en approximation rationnelle matricielle où l'ensemble des approximants (*i.e.* l'ensemble des systèmes stables de degré donné) est une variété non-triviale lorsqu'il y a plus d'une entrée et d'une sortie, que ce soit dans le cas réel ou complexe [177, 179], [14]. De fait, la fonction arl2 du logiciel *hyperion* ainsi que le logiciel RARL2 sont parmi les rares procédures numériques qui « optimisent » sur une variété avec les problèmes de changement de cartes que cela suppose.

Comme on l'a mentionné dans la section précédente, l'analyse de Schur matricielle a fourni un moyen de représenter la variété des matrices intérieures de degré donné [1] et partant, *via* la factorisation de Douglas-Shapiro-Shields [155], [27], celle des systèmes stables. Ceci a été une des contributions algorithmiques de MIAOU et APICS veut continuer dans cette voie pour traiter de situations plus spécifiques en identification. En effet, les lois physiques de conservation de l'énergie et de réciprocité introduisent des sous-classes de fonctions de transfert, qui jouent un rôle important dans les applications en général et la conception des filtres en particulier. Ce sont entre autres les fonctions  $J$ -intérieures [234, 150] (qui sont les fonctions de transfert des multipôles par opposition aux matrices de répartition), les fonctions de Schur (c'est à dire contractives en tout point et qui interviennent lorsqu'on modélise les pertes), ou encore positives réelles [147] (associées aux systèmes passifs comme les admittances), ainsi que les fonctions symétriques (la symétrie traduit la loi de réciprocité), et celles qui satisfont certaines contraintes d'interpolation (la topologie d'un filtre induit par exemple certains ordre d'annulation à l'infini pour la matrice de répartition). Le paramétrage doit bien sûr satisfaire dans chaque cas à certaines exigences (identifiabilité et différentiabilité), c'est-à-dire constituer un atlas de la variété différentielle correspondante pour pouvoir envisager des algorithmes de descente. Des considérations pratiques, comme la facilité d'implémentation, le conditionnement numérique, le moyen de calculer une carte adaptée pour un système donné afin de gérer les changements de cartes entrent également en ligne de compte.

Il est maintenant nécessaire d'introduire la notion de réalisation. Rappelons que la description de tous les opérateurs différentiels linéaires qui donnent lieu par transformation de Fourier à une matrice de transfert rationnelle donnée est une pierre angulaire de la théorie des systèmes linéaires : un tel opérateur est appelé réalisation de la matrice de transfert et deux réalisations d'ordre minimum se déduisent l'une de l'autre par changement linéaire des variables. Dans la plupart des applications de l'optimisation fréquentielle, et en particulier dans l'identification et la conception des filtres déjà discutés, l'intérêt du constructeur porte moins sur la matrice de transfert (ou de répartition) que sur les grandeurs physiques définissant le dispositif. Celles-ci interviennent typiquement comme paramètres d'une réalisation dont elles contraignent la forme [92, 218, 182], et la question de savoir si un transfert donné admet une réalisation de ladite forme est fondamentale pour poser le problème d'optimisation et en exploiter les résultats. On peut même dire que l'opposition entre la nature fréquentielle des spécifications (qui portent donc sur le transfert) et le caractère spatial des grandeurs physiques (qui définissent le système par le biais d'une réalisation) constitue une des difficultés majeures du domaine, et la principale source de réflexion sur le sujet pour un projet de recherche en Automatique et en Analyse Harmonique appliquée.

L'existence de réalisations possédant certaines propriétés, de nature structurelle ou métrique, lorsque la fonction de transfert a des propriétés analogues est un thème classique en théorie des systèmes. Par exemple, une fonction de transfert rationnelle symétrique (resp. dissipative, conservative, passive, passive-complexe) admet une réalisation (généralement complexe) dont la matrice-système (ou celle en temps rétrograde) est symétrique (resp. contractive, unitaire, symétriquement positive, hermitiquement positive) [147, 156, 157, 161, 268]. Nous avons déjà mentionné l'usage des réalisations unitaires

pour les systèmes conservatifs (*i.e.* les matrices intérieures) en approximation rationnelle [1, 54]. Les situations rencontrées en conception de filtres dépendent non seulement de ces propriétés classiques (symétrie, conservativité, ...) mais aussi de caractéristiques combinatoires spécifiques. En effet, décider de l'existence d'une réalisation ayant une structure de couplage prédéfinie pour une matrice de répartition donnée revient à classer les orbites des réalisations sous l'action du groupe orthogonal complexe ou de l'un de ses sous-groupes. Pour des filtres à cavités résonnantes de topologie standard en degré 6, la question se résout assez simplement par orthogonalisation [77]. Pour les cas plus complexes, on a recouru à des algorithmes de descente initialisés sur une forme déjà creuse, mais la présence de minima locaux, autant que la volonté de décrire tous les jeux de couplage possibles associés à une matrice de répartition, amènent aujourd'hui à envisager la résolution symbolico-numérique de cette question après tout purement algébrique. Au vu d'expériences encourageantes effectuées en collaboration avec le CMA de l'École des Mines de Paris à l'aide des logiciels `alias` du projet COPRIN de l'INRIA-Sophia, puis `GB` du projet SPACES de l'INRIA Lorraine [79, 42], c'est dans cette direction qu'APICS compte se diriger.

Pour des filtres à ondes de surfaces, où la topologie étudiée jusqu'à présent est plus rigide, d'autres difficultés concernent les matrices de répartition que l'on peut engendrer, qui amènent à considérer certaines extensions unitaires symétriques de matrices contractives, sans augmentation du degré, sous contraintes d'interpolation [49, 78]. Ce problème est également de ceux qu'APICS veut considérer, voir section 6.2.

Mentionnons aussi que l'étude de l'optimisation d'OMUX se connecte naturellement à l'approximation rationnelle sous contrainte de dissipativité (*i.e.* par des fonctions de Schur) à laquelle APICS s'intéressera, voir section 6.1.

*Le paramétrage des fonctions de transfert restera un sujet central pour APICS, qui mettra davantage l'accent que MIAOU sur les liens entre représentations interne et externe d'un système soumis à des contraintes fréquentielles ou, a contrario, à des restrictions sur ses réalisations. L'usage de méthodes symbolico-numériques sera combiné à celui de l'analyse de Schur et des méthodes classiques de théorie de la réalisation. Cette recherche sera en partie motivée, dès le court terme, par la synthèse de filtres résonnants de topologie complexe, et à moyen terme par l'étude des OMUX, ainsi que par la conception, à plus long terme, de filtres relevant d'autres technologies (ruban, ondes de surface, ...).*

### 3.3 Identification/modélisation non-linéaire

Dans ce qui précède (sections 3.1 et 3.2), on a exposé des techniques et des méthodes qui, du point de vue de l'automatique, conduisent au choix d'un modèle *linéaire* à partir d'une série de mesures. On peut appeler cette démarche « identification linéaire », même si cela laisse penser que le problème lui-même est linéaire alors qu'on a vu qu'il n'en est rien : l'ensemble des modèles linéaires n'a pas de structure linéaire (voir la structure de variété décrite dans [1]), et les algorithmes ne sont pas non plus linéaires. L'exposition en section 3.2 illustre seulement en partie à quel point la communauté scientifique est parvenue à une compréhension fine de la structure des modèles linéaires. C'est cela, entre autres, qui fait aujourd'hui de l'identification linéaire une véritable discipline. Une autre raison, plus profonde peut-être, est qu'un système linéaire est souvent le « développement au premier ordre » d'un système qui ne l'est pas, et constitue le terme le plus robuste d'un tel « développement » face aux erreurs de mesure ; pour citer [267] : *Linear operations are common in physics- -commoner indeed in physics than in nature, for the first approximation to a most definitely non-linear operator is often a linear one.*

En comparaison, la structure des modèles non-linéaires est beaucoup moins bien connue, essentiellement parce qu'il y en a (*beaucoup!*) plus. Ainsi la classe des modèles linéaires d'ordre fixé est clairement de dimension finie, alors que ce n'est pas le cas des modèles généraux<sup>9</sup>. A vrai dire, c'est presque un non-sens de vouloir considérer « l'ensemble des modèles non-linéaires », et il est difficile de poser de manière cohérente la question du modèle qui rendrait le mieux compte de mesures ou d'observations données. Il n'est pas pour autant absurde de s'intéresser aux modèles non-linéaires du point de vue de l'identification, car il arrive que les modèles différentiels linéaires soient inappropriés pour décrire un phénomène dynamique important. Nous avons déjà rencontré le cas de la saturation en section 3.1, mais c'est aussi la situation de beaucoup d'interactions en dynamique des populations étudiées par le projet COMORE, ou encore des modélisations de l'influx nerveux et du rythme cardiaque considérées par les projets DEMAR et SOSSO, pour ne citer que quelques exemples liés à la biologie dans l'environnement INRIA. Dans le même ordre d'idées MIAOU a mis en évidence sur des phénomènes d'écoulement, en collaboration avec le CEMAGREF [66], le fait qu'il peut être bon d'utiliser un modèle non-linéaire plutôt qu'une famille de modèles linéaires « hybrides » rendant compte du comportement au voisinage de différents points de fonctionnement. Il arrive aussi fréquemment qu'un modèle non-linéaire soit simplement *donné*, analytiquement, par la connaissance que l'on a des phénomènes physiques sous-jacents : c'est le cas des lois de la gravitation universelle ou du roulement sans glissement, pour ne donner que des exemples issus de la mécanique qui concernent APICS (*cf.* section 6.4) et le projet ICARE dans l'environnement de l'INRIA-Sophia. Lorsqu'un tel modèle de connaissance comporte des paramètres inconnus, la nécessité d'une identification non-linéaire n'est pas à démontrer et ne relève même plus d'une modélisation de style « boîte noire ». Ainsi les motivations pour développer une « identification non-linéaire » existent, et c'est là l'un des thèmes abordés par le réseau européen ERNSI [246, 247] dédié à l'identification (*cf.* section 7.2, point 7), l'un des axes d'ailleurs mis en avant lors de sa proposition de renouvellement, dans le cadre du 6<sup>ième</sup> PCRD<sup>10</sup>.

La situation où l'on recherche un modèle au sein d'une classe *de dimension finie* est de même nature que l'identification linéaire à ordre fixé (le choix de l'ordre, quant-à-lui, n'est bien sûr pas toujours facile). Le choix de ladite classe rigidifie le passage d'un nombre fini de mesures au choix d'un modèle, qu'elle soit composée de modèles linéaires ou non. La classe linéaire a des propriétés structurelles remarquables—sans doute parce qu'elle possède une certaine universalité—qui ont conduit à des méthodes très spécifiques. Il est tentant de vouloir généraliser certaines d'entre elles à des classes plus générales, mais ceci est probablement stérile si ces dernières n'ont pas une pertinence démontrée. L'objet qui fait ici totalement défaut est un guide méthodologique pour choisir cette classe sur la base de mesures, d'observations, ou de propriétés qualitatives. Une approche systématique consisterait à envisager une classification des modèles (de systèmes différentiels ordinaires contrôlés) sous une forme relativement générale. Ceci est certainement hors d'atteinte, et la situation locale dans le cas analytique plan est déjà passablement compliquée [186, 187]. Cependant, des résultats partiels seraient déjà intéressants pour donner quelque fondement à une « théorie » de l'identification non-linéaire, pour laquelle on pressent que la topologie des singularités est un ingrédient essentiel en même temps qu'une source de difficultés formidable. Une question de base est ici :

quels sont les modèles qui décrivent une même réalité ? (1)

Bien sûr, la question est vaste, presque philosophique car un modèle ne décrit qu'une partie de la « réalité ». Une formalisation possible de (1) est de classer les modèles de systèmes de contrôle selon des relations d'équivalence qui semblent suffisamment pertinentes pour mériter la qualification : « n'altère

<sup>9</sup> Il est plus juste de parler de modèles « généraux » que « non-linéaires ».

<sup>10</sup> Celle-ci n'est toutefois pas encore acceptée par la Commission Européenne.

pas la réalité »<sup>11</sup>. Pour cela appelons solution d'un (modèle de) système tout comportement (passé et futur des entrées, des sorties, et de toutes grandeurs caractérisant le système) permises par le modèle. L'ensemble des solutions est ce que J. Willems appelle un « behavior » [269]. On espère évidemment que les solutions du modèle reflètent les comportements observés. Dans ce point de vue, on peut dire que deux modèles sont équivalents si il existe une transformation qui envoie les solutions de l'un sur les solutions de l'autre. C'est déjà ce qu'Élie Cartan [121] cherchait à caractériser. Il n'était pas automatique, mais s'intéressait à des systèmes d'équations différentielles « dont la solution générale dépend au moins d'une fonction arbitraire du temps », ce qui est bien l'objet de l'automatique si cette fonction est un contrôle. Le choix des transformations à considérer, qui traduit l'interprétation qui est faite de (1), influe de manière cruciale sur la nature du problème. Ces transformations peuvent être par exemple :

- de « simples » changements de coordonnées sur l'état du système,
- des changements de coordonnées qui mélangent états et contrôles, ce sont les transformations par *feedback statique*, appelées ainsi car les « anciens » états et contrôles sont donnés par des fonctions (non dynamiques) des « nouveaux »,
- des transformations plus complexes dans lesquelles les « anciens » états et contrôles sont obtenus comme sorties d'un système dynamique prenant en entrée les « nouveaux » états et contrôles ; ce sont les transformations par *feedback dynamique*, qui ont elles-mêmes un état en tant que système dynamique (la taille de cet état, ou l'ordre du système dynamique, est a priori arbitraire).

Le projet MIAOU a tenté de contribuer [3, 9, 10, 11] à l'avancement de ces questions en ce qui concerne *l'équivalence locale à un système linéaire* ce qui, du point de vue du contrôle, est la linéarisation exacte, mais peut aussi être compris, pour revenir à la question (1), comme le fait qu'un modèle linéaire rende compte « de la même réalité » que le système considéré. Par exemple, suite aux travaux sur les dynamiques linéaires nilpotentes en temps discret exposés dans [247], et compte tenu du théorème classique de Grobman-Hartman sur la linéarisation locale des équations différentielles autour d'un point fixe hyperbolique, on peut se demander si une dynamique linéaire suivie d'une fonction « statique » non linéaire est un modèle assez riche pour rendre compte de systèmes contrôlés génériques au voisinage d'un équilibre. Dans [9], on a répondu de manière essentiellement négative à cette question, mais il semble que l'on ne sache toujours pas caractériser qualitativement de tels modèles qui représentent, en un sens, les systèmes non linéaires « les plus simples ».

*Les travaux sur l'équivalence et la classification des systèmes de contrôle, constituaient une part de l'activité de MIAOU, notamment en ce qui concerne la linéarisation. Faire de la notion d'équivalence le point de départ d'une théorie, nécessairement partielle, de l'identification et de la modélisation « non-linéaire » est un point de vue naturel mais récent. Pour ce qui le concerne, APICS poursuivra l'étude de l'équivalence dynamique et en particulier de la « platitude » (cf. section 3.6), avec des motivations qui se rapportent davantage au contrôle, mais ne consentira d'engagement fort dans l'identification « non-linéaire » que si l'intérêt en devient manifeste, soit d'un point de vue applicatif, soit du fait d'une collaboration avec d'autres partenaires, dans le cadre par exemple du réseau Européen ERNSI (cf. section 7.2, point 7).*

### 3.4 Généralités sur les problèmes inverses

Introduit vers les années soixante pour désigner la détermination, à partir d'expériences de type « entrée-sortie », des paramètres fonctionnels de certaines équations de la physique (notamment en géophysique, en *inverse scattering*, ou en tomographie), le vocable « problème inverse » s'utilise parfois aujourd'hui, de façon générale, pour parler de ce qui touche à la modélisation quantitative d'une

<sup>11</sup> En dehors de la motivation venant de la modélisation, ce problème de classification a aussi un grand intérêt pour la commande ; voir section 3.6.

loi dont on observe plus ou moins partiellement les effets. En bref, on cherche une description calculatoire d'un opérateur à partir d'un échantillon du graphe. Ce vocable s'oppose à « problème direct », qui réfère à l'effectuation de l'opérateur sur un argument. La terminologie est surtout répandue pour les systèmes régis par des équations aux dérivées partielles. En Automatique et en traitement du signal, l'étape correspondante, où après avoir choisi la forme du modèle on cherche à en ajuster les paramètres, constitue la part algorithmique de l'identification.

La résolution des problèmes inverses est fondamentale pour la décision et le contrôle, car c'est seulement sous forme numériquement close que les modèles acquièrent un caractère prédictif. Elle est aussi par essence un moyen de détecter les pannes ou les défauts, et sert tout autant la conception des dispositifs, que l'on aborde souvent comme un problème inverse bâti sur un comportement idéal. Mais elle est usuellement difficile, car ces problèmes sont la plupart du temps mal posés [183, 201, 209]. La méthodologie courante pour y remédier est de régulariser c'est à dire, après avoir éventuellement restreint l'inconnue à un sous-ensemble de l'espace admissible, de résoudre un problème d'optimisation sous contrainte pour obtenir une solution approchée qui, lorsqu'on relâche la contrainte, et que l'erreur sur les données diminue, converge en un sens plus ou moins faible vers la solution cherchée [194, 262]. Ainsi envisagée comme une famille de problèmes d'approximation, la résolution des problèmes inverses devient, par un glissement de point de vue, l'outil principal de validation des modèles : un exemple élémentaire est celui où on résout un problème aux moindres carrés pour tester la vraisemblance d'une régression linéaire. A cet égard, il est intéressant de constater que l'optimisation, dont l'objet est par nature quantitatif, se trouve paradoxalement être l'outil d'évaluation qualitatif le plus maniable : le fait de chercher un « meilleur modèle » (parfois au sens d'un critère choisi par commodité mais que l'on n'est pas véritablement intéressé à minimiser) représente souvent le meilleur espoir d'en trouver un convenable qui satisfait aux contraintes que l'on s'est donné *a priori*<sup>12</sup>. De fait, l'explosion de la capacité de calcul et le développement de l'analyse numérique, qui ont permis de mesurer ou de simuler des quantités considérables de phénomènes, c'est à dire de résoudre beaucoup de problèmes directs, a, dans des domaines variés, multiplié le nombre et la sorte de problèmes inverses qu'il faut analyser pour exploiter les masses de données ainsi obtenues.

Pour ce qui est des systèmes d'évolution, prolongeant et diversifiant les efforts initiaux fournis dans le domaine de l'identification (historiquement motivé par l'économétrie) et de l'« inverse scattering » (originellement lié à la détection radar), on assiste aujourd'hui, nous semble-t-il, à une tentative systématique de dominer les problèmes inverses associés à un certain nombre de phénomènes physiques fondamentaux qui servent à mesurer ou à matérialiser les grandeurs. Ceux-ci comprennent entre autres les écoulements (notamment pour l'aéronautique, la météorologie), la propagation des ondes (notamment pour la sismique, la tomographie, les télécommunications), la diffusion et la résonance (notamment pour la détection radar, le contrôle des matériaux, la tomographie d'impédance, l'électro-encéphalographie, la géophysique), sans compter les phénomènes hybrides faisant intervenir, par exemple, des réactions chimiques ou des processus biologiques (notamment dans les sciences de l'environnement et les sciences du vivant).

L'ampleur des domaines et des techniques concernés rendrait vain de vouloir en dresser ici fût-ce une liste, et nous nous bornerons à quelques remarques générales qui servent notre propos. Tout d'abord, il paraît clair que les progrès passent par un développement substantiel de la modélisation physique à diverses échelles et des systèmes d'acquisition de données ; de ce fait ils nécessitent la collaboration de scientifiques d'horizons divers et la mise en place de partenariats étroits. Ensuite, le sujet

---

<sup>12</sup>On tend parfois à cacher ce faisant que l'optimalité globale est rarement garantie par les procédures numériques « d'optimisation », et qu'on ne sait pas toujours dans l'absolu ce que signifie « petit » quand on parle de l'erreur. Par ailleurs, certains logiciels utilisant une méthode de relaxation, le résultat peut n'être ni optimal, ni même convenable, et ne pas respecter non plus les contraintes.

tire manifestement une partie de sa vitalité du développement intensif des techniques d'optimisation et d'approximation fonctionnelle dont la floraison au cours des quinze dernières années, des méthodes de quasi-Newton et de points intérieurs à la différentiation de code et au gradient de formes en passant par le recuit simulé, les algorithmes « génétiques » et les approches symboliques, a suscité beaucoup d'espoirs. La raison en est que les problèmes inverses s'abordent en pratique comme des problèmes d'approximation, par souci de régularisation, comme nous l'avons dit, mais aussi parce que les modèles sont imparfaits et les données non seulement entachées d'erreurs mais souvent incomplètes. En troisième lieu l'analyse harmonique, la théorie des fonctions et du potentiel ainsi que l'analyse spectrale sur les variétés ont eu et devraient encore avoir à jouer un rôle déterminant dans les progrès de la discipline.

A ces égards, on assiste d'une part au recours massif à une approche directe de haut niveau, fondée sur la discrétisation paramétrique des modèles et l'emploi de méthodes d'optimisation « génériques » sur des critères assez simples à calculer en fonction des données *via* la résolution du problème direct, et d'autre part à une analyse théorique plus approfondie de modèles, souvent simplifiés, posant des questions mathématiquement structurées (typiquement d'identifiabilité globale) dont une meilleure compréhension permet de progresser au plan de la conception des algorithmes. Mentionnons par exemple qu'en optimisation de formes, l'existence même d'un gradient pose des problèmes épineux, notamment au voisinage d'un changement topologique [271], ou encore que l'identifiabilité d'une conductivité discontinue à partir de données de Dirichlet-Neumann vient seulement d'être établie en dimension 2 [95], cependant qu'on ne sait toujours pas caractériser les potentiels magnétiques de conducteurs homogènes à partir d'observations loin de l'objet [184].

L'approche directe est mise en œuvre couramment depuis des années par les analystes numériques des équations aux dérivées partielles, sur des modèles dont le problème direct a été déjà abondamment étudié (par exemple pour la résolution de problèmes de diffusion en milieux poreux [103], le confinement du plasma [104], le contrôle non-destructif [244], ...); plus récemment elle a commencé d'être adoptée par la communauté du traitement d'image [173, 227]. Ses atouts résident dans une grande adaptabilité et le réemploi de nombreux outils; ses faiblesses gisent dans son coût de calcul (elle requiert maintes résolutions du problème direct et souvent de ses dérivées), dans sa sensibilité à la discrétisation, sa raideur en présence de nombreux paramètres, dans la difficulté à prendre avantage de la structure du modèle laquelle se perd souvent lors de la discrétisation, et dans son caractère heuristique: on ne sait pas en général se garder des optima locaux, ni même garantir que l'optimum global réalise une valeur avantageuse du critère. De plus, la discrétisation joue souvent implicitement le rôle d'un procédé régularisant dont l'influence sur la solution n'est pas toujours contrôlée. Au futur, cette approche sera probablement tributaire d'un perfectionnement et d'une dissémination des codes de différentiation automatique, des progrès généraux de l'optimisation, autant que des méthodes de choix des conditions initiales.

Les analyses théoriques spécifiques, quant-à-elles, concernent naturellement des problèmes prototypes possédant une structure, dont on peut prendre avantage. Celle-ci ne se révèle souvent qu'à une échelle de description simplifiée, où les modèles peuvent s'agréger jusqu'à devenir semi-physiques; la structure résulte aussi quelquefois d'une modification et d'un partitionnement du problème initial. Ces efforts débouchent fréquemment sur des méthodes semi-explicites, dont le coût calculatoire est attrayant mais qui requièrent souvent des hypothèses fortes et dont la régularisation est parfois délicate. Outre cela, l'inconvénient principal de ce genre de démarche est son manque de systématisme: il s'agit au cas par cas d'un investissement de recherche qui demande du temps, de l'expertise, et qui n'est pas toujours couronné de succès. Gageons cependant que cet investissement ira croissant de la part des différents acteurs (industriels, agences de moyens, physiciens, mathématiciens, informaticiens, ingénieurs, biologistes ...) dans les domaines à fort enjeu pour lesquels les approches directes, après avoir

souvent permis de déblayer le sujet, ne permettront pas de progresser autant qu'on l'eût souhaité. C'est, nous semble-t-il, dans cette « mince couche séparant le facile de l'impossible »<sup>13</sup> que les acteurs de la recherche devraient avoir un rôle important à jouer. Une fonction première de l'analyse approfondie de modèles simplifiés est, croyons nous, de pourvoir en conditions initiales les méthodes directes et de fournir des estimés rapides de leur gradient. Une deuxième est d'éclairer la géométrie de l'optimisation et de mettre en évidence les variables et les quantités les plus relevantes, suggérant par là de nouvelles manières de faire les mesures et de conduire les calculs. Une troisième enfin, fondamentale, est de donner des résultats certifiés concernant un problème donné ou certains de ses sous-problèmes, notamment des bornes sur l'erreur atteignable. Ceci est particulièrement important pour les méthodes harmoniques qui sont sujettes au « principe d'incertitude », selon lequel on ne peut pas bien approximer à la fois une fonction et sa transformée de Fourier [176].

### 3.5 Les problèmes inverses chez APICS

Les problèmes inverses auxquels APICS est naturellement amené à s'intéresser sont d'abord ceux induits par les recherches de MIAOU en approximation analytique et méromorphe, à savoir les problèmes de potentiel inverses en dimension 2.

Rappelons que, étant donné un opérateur elliptique et une solution fondamentale de celui-ci, on engendre un potentiel par convolution de cette solution avec une mesure. Le problème inverse est de retrouver la mesure à partir de l'observation de son potentiel dans un sous-ensemble de l'espace ambiant. C'est un problème très classique dont la considération pour le potentiel Newtonien remonte au dix-huitième siècle. Une question aussi générale ne peut évidemment être résolue sans hypothèses supplémentaires, et sur l'ensemble d'observation et sur la mesure [184]. Lorsque l'opérateur considéré est le Laplacien en dimension deux, on a affaire à un potentiel logarithmique dont la dérivée par rapport à la variable complexe est l'intégrale de Cauchy de la mesure. Ce fait, qui fonde la connexion bien connue entre la théorie du potentiel et celle des fonctions holomorphes [239, 243, 264], explique aussi pourquoi l'analyse complexe intervient dans ce contexte : la forme dérivée du problème inverse consiste à retrouver une mesure connaissant son intégrale de Cauchy dans une partie du plan [128].

Le problème inverse du potentiel intervient naturellement en géophysique et en électromagnétisme mais aussi, sous forme légèrement généralisée (car on observe le potentiel à l'addition d'une fonction harmonique près), en contrôle non-destructif qui est l'un des domaines d'application visé par APICS (*cf.* section 6.3). La première occurrence en est le problème de continuation analytique dans un disque ou un demi-plan à partir de données incomplètes sur la frontière, que MIAOU avait abordé en introduisant les problèmes extrémaux bornés (*cf.* section 3.1) pour l'identification fréquentielle. Dans ce cas on connaît le support de la mesure (le cercle ou l'axe imaginaire) et les limites de la dérivée complexe du potentiel de part et d'autre d'un sous-ensemble du support (*i.e.* la fonction à continuer d'un côté, la limite nulle de l'autre). Les problèmes extrémaux bornés sont une manière d'aborder le problème inverse en imposant une contrainte supplémentaire à la solution sur la partie non observée du support afin de régulariser la situation.

Pour donner un exemple d'application, qui concerne des domaines plus généraux que des disques ou des demi-plans, un problème extrémal posé avec une contrainte mixte couplant les parties réelles et imaginaires de la fonction continuée constitue une formulation naturelle pour évaluer le coefficient de Robin d'un problème de Dirichlet-Neumann [46, 45], un cadre classique pour le contrôle de corrosion par observations électriques de surface [88]. Pour donner un autre exemple, plus prospectif, un problème extrémal borné avec contrainte sur la composante intérieure de la frontière d'un domaine

<sup>13</sup>Nous empruntons cette métaphore à E. Rakhmanov.

doublement connexe [250, 123], [40], devrait permettre d'aborder la détection de défauts d'analyticité se produisant lorsque la frontière intérieure touche le support de la mesure et fournir une alternative aux méthodes itératives fondées sur la résolution du problème direct [198]. En faisant varier cette frontière, on peut espérer localiser ainsi des fissures, sources, interfaces entre couches de conductivité différentes, qui sont typiques de certains modèles de contrôle non-destructif [154, 87, 93, 148, 110], d'exploration fonctionnelle du cerveau [172, 143, 144], ou de tomographie d'impédance [197, 183, 138, 127, 205, 111].

La deuxième occurrence du problème inverse pour le potentiel logarithmique dans les travaux de MIAOU est l'approximation rationnelle ou plus généralement méromorphe de fonctions analytiques dans le demi-plan ou le disque (*cf.* section 3.1). En effet une telle fonction est la dérivée d'un potentiel (*i.e.* une intégrale de Cauchy) et, puisque les fractions rationnelles sont elles-mêmes les dérivées de potentiels de mesures discrètes, l'approximation rationnelle dans les classes de Hardy peut se voir comme un problème de discrétisation optimale d'une mesure, le nombre de masses étant fixé, au sens d'une norme de Sobolev pour les potentiels ; l'approximation méromorphe peut s'interpréter de la même manière à l'addition près d'un second potentiel, dont le support connu entoure l'ensemble d'observation et qu'on ne cherche pas à discrétiser. Ce point de vue, peut-être dû au projet [20], permet d'aborder de façon tautologique les situations dans lesquels la mesure sous-jacente est d'ores et déjà supposée discrète [143, 119], au moins au premier ordre [7], [144]. Pour traiter cas plus généraux, il faut savoir relier la distribution des masses d'une discrétisation « optimale » avec la mesure définissant le potentiel, et c'est là que les travaux de MIAOU sur le comportement asymptotique des pôles et des erreurs en approximation méromorphe et rationnelle trouvent un terrain d'application lorsque le support de cette mesure est de dimension 1. En effet, lorsque ce support est un contour symétrique pour le potentiel de Green et que sa densité est suffisamment régulière, il en résulte (*cf.* sections 3.1 et 5.1.4) que les pôles des meilleurs approximants convergent vers ce contour avec une densité asymptotique qui est la mesure d'équilibre. Par déformation, il devient alors possible de localiser les extrémités du support dans un certain nombre de situations qui « ne diffèrent pas trop » du cas symétrique. Une application de ces idées à la détection de fissures par mesures thermiques ou électriques de surface à partir d'une observation générique de l'application « Neumann-donne-Dirichlet » a été développé sous des hypothèses d'analyticité [20, 25, 68] (*cf.* section 6.3), cependant que le cas plus général de fissures polynômiales par morceaux, qui reste pour à étudier, devrait pouvoir se traiter d'après [33]. Ceci peut s'interpréter comme un aspect quantitatif particulier d'un programme plus vaste et plus profond tendant à reconstruire une surface de Riemann connexe étant donné la correspondance « Dirichlet-donne-Neumann », lequel s'étend aux dimensions supérieures pour les variétés analytiques réelles compactes [208]. Comparée à d'autres approches semi-explicites du même problème [93, 110], la méthode donne sous des hypothèses assez fortes des renseignements partiels (localisation des points anguleux et des extrémités) de manière plutôt stable pour un coût de calcul très faible ; elle a typiquement pour vocation d'aider à initialiser une méthode directe exigeant davantage de calculs. L'algorithme s'applique de façon plus directe encore à la détection de sources ponctuelles dipolaires [7]. Le projet APICS fera face ici à un travail important de rédaction et d'implémentation pour mettre au point le cas polynômial par morceaux. Ceci fait, il compte étudier le cas de fissures non-analytiques, et le cas d'inclusions qui est aussi celui de la tomographie d'impédance pour une conductivité constante par morceaux. Ces questions sont certainement difficiles : la première dépend vraisemblablement d'estimés d'erreur plus fins que ceux dont on dispose actuellement, et la seconde est liée à la localisation des zéros de certains polynômes orthogonaux non-hermitiens sur le cercle alors que, même dans le cas d'une mesure positive et régulière, l'asymptotique n'en est pas connu en général<sup>14</sup>. En outre, APICS sera amené à rendre effec-

<sup>14</sup>On sait seulement que les zéros sont dans le disque et que les points d'accumulation de la mesure de comptage ont pour balayage sur le cercle la mesure de Lebesgue [255].

tive l'approximation rationnelle et méromorphe sur d'autres domaines que le disque ou le demi-plan. Une possibilité serait d'utiliser la transformation conforme de manière numérique ; sans envisager véritablement de recherche sur ce sujet déjà fort développé [206], le nouveau projet devra consentir un investissement pour acquérir des compétences sur cet aspect de la théorie constructive des fonctions où il n'a pas d'expérience. Le projet APICS pense également considérer des conductivités non-constantes, pour lesquelles l'analyticité reste un outil possible en contrôle non-destructif [89]. La situation du problème inverse de la conductivité elle-même est plus délicate, comme en témoigne l'état des recherches sur l'identifiabilité globale [95, 118, 221]. De façon générale, une conductivité variable fait intervenir une équation de Beltrami plutôt que de Cauchy-Riemann (application quasi-conforme plutôt que conforme), et il est nécessaire de réfléchir plus avant à la possibilité d'adapter à ce cas les techniques de l'approximation.

Nous n'avons mentionné jusqu'ici que des techniques planes qui supposent, pour être applicables en dimension 3, une symétrie axiale. Il est cependant intéressant de constater que l'analyse d'un problème de sources 3D dans une sphère peut se ramener sur des tranches 2D à une famille de problèmes qui ne sont plus des problèmes de sources mais auxquels les algorithmes de détection de fissures précédents s'appliquent [21]. Le projet APICS compte exploiter ce fait sur les modèles simplifiés de magnéto-électro-encéphalographie (MEEG) qu'il étudiera dans le cadre de l'ACI « OBS-CERV », et le généraliser à certaines déformations explicites de la sphère, que ce soit par transformation conforme dans les tranches planes ou bien directement, par projection et extension harmonique, ou par une autre voie encore. Par ailleurs, et indépendamment, la question de la discrétisation optimale d'un potentiel de Newton en dimension 3 se pose tout aussi bien que celle d'un potentiel logarithmique en dimension 2, même si on ne dispose plus alors de la puissance calculatoire de l'analyse complexe pour l'aborder. Le projet APICS souhaite approfondir cet aspect des choses. Il serait particulièrement intéressant d'investiguer dans ce contexte un analogue de la théorie AAK sur la boule, dans lequel les projections de Riesz peuvent être définies classiquement [256] mais où la difficulté provient de l'absence de structure multiplicative. Une piste, encore vague à ce stade, serait peut-être fournie par l'analyse quaternionique [259]. Mentionnons que le problème d'une conductivité variable en dimension supérieure ou égale à 3 est plutôt délicat ; l'identifiabilité n'est par exemple établie que sous des conditions de régularité assez fortes [261].

D'autres problèmes inverses 2D sur lesquels APICS pourrait être actif à long terme sont ceux liés à l'équation de Helmholtz, qui gouverne par exemple le problème de l'*inverse scattering* lorsqu'on linéarise l'équation d'Euler autour d'une solution stationnaire et que l'on suppose la densité constante [194]. La situation où l'on connaît l'onde incidente et où on observe le champ lointain est assez similaire aux problèmes inverses du Laplacien, mais la solution fondamentale qui définit le potentiel est bien sûr différente. Dans le cas plan, il faut remplacer le logarithme par une fonction de Hankel de première espèce [131] et, comme leurs comportement au voisinage des singularités est le même, il est possible que l'approximation rationnelle joue un rôle similaire à celui que l'on suppose dans le cas d'inclusions. Cependant, un travail considérable reste nécessaire pour vérifier ce point. Par ailleurs, le cas plan est ici encore celui d'une symétrie axiale, et l'examen de véritables problèmes 3D paraît pour l'instant assez lointain. Le projet APICS ne compte pas être actif à court terme dans cette direction.

Mentionnons pour finir un autre type de problème inverse où l'approximation rationnelle et méromorphe semble pouvoir jouer un rôle intéressant. Il s'agit des problèmes de moments bidimensionnels, issus de l'inversion de la transformée de Radon [178], qui interviennent notamment en tomographie [180, 220]. En bref, certains domaines plans, à savoir les domaines de quadrature pour les fonctions analytiques [85], sont caractérisés par le fait qu'une certaine transformée exponentielle de la série des moments en deux variables conjuguées de leur fonction caractéristique est rationnelle à l'infini, de dénominateur séparable [237]. Partant, des algorithmes de reconstruction relevant de l'interpolation

bivariable ont été proposés pour retrouver l'équation d'un tel domaine (qui est un polynôme en deux variables conjuguées) à partir de la série des moments ; en outre, la densité de ces domaines parmi les domaines bornés généraux (au sens de la distance de Hausdorff [170]) permet, sous des hypothèses d'analyticité, d'associer à certaines approximations rationnelles de la transformée exponentielle d'un domaine des approximations de celui-ci par des domaines de quadrature [171]. Ici, le type d'approximation est particulier : la rationalité est en deux variables conjuguées à dénominateur séparable. Pourtant, la situation est remarquablement similaire à celle du problème inverse du potentiel, et appelle la question de savoir quelle efficacité aurait une approximation rationnelle ou méromorphe optimale de ladite transformée exponentielle sur une frontière distinguée entourant le domaine que l'on veut reconstruire. C'est là un type de problème d'approximation nouveau, dont certaines formulations sont quasi-convexes, et sur lequel APICS envisage de travailler à moyen terme. Notons que les domaines de quadrature sont liés à l'injectivité de la représentation des potentiels de double couche [141] de sorte que ces recherches concernent aussi, en un sens, les problèmes inverses du Laplacien en dimension 2.

*L'étude des problèmes inverses sera importante pour APICS alors qu'elle n'était qu'émergente<sup>15</sup> dans MIAOU. Le projet APICS se concentrera, à court et moyen terme, sur les problèmes liés à la discrétisation du potentiel de Laplace, le modèle qui en est fourni par l'approximation rationnelle ou méromorphe, et ses généralisations possibles à la dimension 3. Les applications visées sont le contrôle non destructif, et la détection de sources notamment pour la MEEG. Les problèmes de moments en tomographie et particulièrement l'usage de l'approximation rationnelle pour l'inversion approchée de la transformée de Radon seront également une priorité à moyen terme pour APICS. A plus long terme, le projet pourrait se pencher sur des questions analogues en conductivité variable, ainsi que sur l'inversion du potentiel de Helmholtz pour l'inverse scattering.*

### 3.6 Linéarisation exacte, platitude, classification

Les considérations qui suivent recourent celles de la section 3.3, mais la motivation diffère. Supposons un problème de contrôle posé, avec un modèle réputé convenable ; y a-t-il un modèle plus simple, équivalent, qui permette de résoudre plus aisément la question ? C'est une interrogation récurrente dans nombre de situations : tout le monde tombe d'accord sur le fait qu'un choix de variables intelligent pour décrire un problème donne souvent la moitié de la solution !

Particulièrement bien connus sont les systèmes linéaires. Les problèmes de linéarisation exacte sont ceux de savoir si un modèle donné est un système linéaire déguisé par certaines transformations. Une **transformation par « feedback dynamique »**, pour les systèmes de contrôle, donne les « anciens » contrôles comme la sortie d'un système dynamique prenant en entrée l'état et les « nouveaux » contrôles, puis effectue un changement de coordonnées sur l'ensemble. Une telle transformation a elle-même un état en tant que système dynamique ; la taille de cet état (ordre du système dynamique) est a priori arbitraire. Le problème de la **linéarisation dynamique**, non résolu à ce jour, est celui de trouver des conditions explicites sur un système pour qu'il existe une transformation par *feedback* dynamique qui le rende linéaire et contrôlable. La difficulté mathématique essentielle est que la transformation par *feedback* dynamique possède un état *dont la dimension n'est pas connue à l'avance*.

On dit qu'un système est **différentiellement plat** [151] si il existe un certain nombre de fonctions de l'état et des dérivées de la commande —on les appelle des **sorties plates**— qui ne sont liées par aucune équation différentielle, et qui « paramètrent toutes les trajectoires ». Il est montré dans [151] qu'un système plat est linéarisable par *feedback* dynamique, la réciproque étant vraie sous des hypothèses de

<sup>15</sup>Ou ne recouvrait que la déconvolution mono-dimensionnelle.

régularité et d'inversibilité des transformations dynamiques mises en jeu (voir la note de bas de page numéro 22 à la section 5.3.2). Cette propriété de paramétrage « libre » de l'ensemble des solutions a en elle-même un intérêt au moins aussi important pour la commande que l'équivalence à un système linéaire : elle fournit par exemple des solutions simples aux problèmes de planification de trajectoire car l'ensemble des trajectoires peut être décrit sans intégrer d'équation différentielle. Un bon exposé des applications de la platitude est donné par exemple dans [215].

La question fondamentale reste cependant ouverte de décider de façon algorithmique si un système donné est plat. Ce problème est en un sens un peu mieux posé que celui de la linéarisation dynamique, mais la principale difficulté demeure : de même qu'on ne savait pas borner *a priori* la taille d'un *feedback* linéarisant, on ne sait pas davantage borner le nombre de dérivées des contrôles dont peuvent dépendre les « sorties plates ».

Les auteurs de [151] eux-mêmes ont relié cette question à des travaux du début du vingtième siècle [121, 181] sur la possibilité de donner la solution générale d'un système d'équations différentielles sous-déterminé en fonction d'un certain nombre de fonctions du temps arbitraires. Si l'on voit un système d'équations différentielles sous-déterminé comme un système de contrôle, l'équivalence par *feedback* dynamique est très voisine de l'équivalence absolue d'É. Cartan.

Le projet MIAOU a investi dans la formalisation de la platitude des systèmes analytiques, localement autour d'un équilibre. En introduisant une valuation *ad hoc* [3], il a obtenu une filtration de dimension finie des équations correspondantes et constaté l'intégrabilité *formelle* de celles-ci, cependant qu'une condition nécessaire serait l'existence d'une *vraie* solution. En parallèle, V. Chetverikov dans [129] a obtenu une condition nécessaire et suffisante d'un type un peu différent, à laquelle il est tentant d'appliquer la filtration évaluée précédente. Le rapprochement de ces points de vue laisse espérer des progrès concernant la caractérisation de la platitude, qu'APICS compte réaliser.

MIAOU s'est aussi intéressé à la classification par *feedback* statique, sans régularité autre que topologique de la transformation ; il est montré par exemple dans [9] que l'équivalent du Théorème de Grobman-Hartman pour les systèmes de contrôle est essentiellement faux, c'est à dire qu'un système « générique », localement autour d'un point d'équilibre « générique », n'est généralement pas équivalent topologiquement à son linéarisé puisqu'en réalité l'équivalence topologique entraîne l'équivalence par un *feedback* statique aussi lisse que le système lui-même, et il est connu que cette propriété est très rare. On peut d'ailleurs se demander, et c'est là un point intrigant, si le fait que l'équivalence topologique entraîne (génériquement) l'équivalence différentiable reste vrai pour des classes de conjugaison par *feedback* statique plus générales que celles des systèmes linéaires. Il est d'autres conclusions en apparence plus positives de cette recherche, comme le fait que la linéarisation peut être obtenue sous des conditions très faible mais en « boucle ouverte » [9]. Toutefois la nature de telles transformations reste pour l'instant obscure et APICS ne fonde pas de projet de recherche précis sur ce point.

*A moyen terme, APICS souhaite faire fructifier les travaux de MIAOU sur la caractérisation de la platitude<sup>16</sup>. Il est possible que les outils développés débouchent sur une implémentation dans un système de calcul formel. Ce sujet intensifierait alors une collaboration pour l'instant informelle avec le projet CAFE. Des travaux plus généraux sur l'équivalence topologique ou les invariants par feedback dynamique pourraient également être envisagés dans le long terme.*

---

<sup>16</sup>Dans le cadre d'une collaboration naissante avec V. Chetverikov, de l'Université Baumann à Moscou.

### 3.7 Feedback, stabilisation, contrôle optimal

Il y a eu, dans MIAOU, d'importants travaux sur la *stabilisation non-linéaire*. En collaboration avec le projet ICARE, on a notamment introduit l'idée de *feedbacks* temps-variants [48, 70, 71, 74], avec des applications à des systèmes mécaniques (robots mobiles) [60, 67, 72]. Ces travaux se sont ensuite orientés plutôt vers la recherche de fonctions de Lyapunov contrôlées<sup>17</sup> [50, 51, 52], qui constituent un outil pour étudier et assurer la robustesse de la stabilisation. Nous exposons dans cette section les nouvelles directions de ces travaux dans APICS, qui sont centrées sur les ponts à lancer entre la stabilisation et la commande optimale.

Le contrôle optimal [233, 210, 191] est une branche du calcul des variations [160, 120]. Ce qui en fait une discipline appliquée, c'est la nécessité de calculer réellement les commandes qui produisent ces trajectoires optimales ou des trajectoires proches.

Il est frappant de constater que les manuels d'automatique non-linéaire à l'usage des ingénieurs —voir par exemple l'ouvrage [185], une référence en la matière— mentionnent à peine le contrôle optimal ; on parle même souvent de ce dernier comme d'une discipline déconnectée de l'automatique. Pourtant, si minimiser un coût ne doit pas être une obsession, il existe de nombreux cas concrets dans lesquels un critère à optimiser s'impose naturellement.

Le calcul d'une trajectoire optimale en « boucle ouverte », produite par un contrôle qui est fonction du temps, est déjà une tâche difficile y compris numériquement. L'obtention d'une *synthèse optimale* —un moyen de calcul en fonction de l'état et non plus du temps de la commande optimale— est plus ardue encore, car il n'existe pas de moyen systématique pour l'obtenir (la calculer numériquement n'a pas de sens ; seule une bonne compréhension du système à contrôler et de sa géométrie, permet de l'obtenir, tout au moins partiellement), et de plus la manière dont le contrôle dépend de l'état est en général très irrégulière.

Nombre de recherches en commande optimale, au sein de la communauté scientifique, concernent la nature des contrôles optimaux et la structure de la synthèse dans les cas génériques [105, 202, 260]. Force est de constater que la majorité de ces travaux montre l'incroyable complexité de cette structure. La recherche d'une synthèse ne se fait vraiment que sur des exemples ou des classes d'exemples, et de cas concrets.

Il y a eu aussi des travaux sur les stratégies « sous-optimales », dont le but est d'obtenir un contrôle sous forme de *feedback*, aussi régulier que possible, qui ne soit pas nécessairement optimal mais proche (au sens du coût) de l'être. Cette approche, qui paraît frappée au coin du bon sens, est largement invoquée en pratique à ceci près que l'on a pas vraiment de moyens de s'assurer que l'on est « à peu près » optimal, les méthodes de construction de ces *feedbacks* que l'on dit « sous-optimaux » n'ayant en général aucune parenté avec le problème de contrôle optimal. Il semble qu'il faille en réalité parvenir à une compréhension suffisante de la synthèse pour pouvoir « l'approximer » en un sens approprié, une problématique pour laquelle il n'est pas de méthode systématique et qui ramène à la question initiale d'étudier le contrôle optimal lui-même.

**Fonctions de Lyapunov contrôlées.** Les fonctions de Lyapunov sont un outil bien connu pour l'étude de la stabilité des systèmes dynamiques non contrôlés. Pour un système contrôlé, on appelle *Fonction de Lyapunov contrôlée* une fonction qui est de Lyapunov pour le système bouclé par une certaine commande. Ceci se traduit par une inéquation différentielle que l'on appellera « Équation

---

<sup>17</sup>En anglais : *clf*.

d'Artstein [94] », et qui ressemble à l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellmann mais est largement sous-déterminée. On peut déduire de la connaissance d'une fonction de Lyapunov contrôlée des *feedbacks* stabilisants de manière très commode.

L'obtention de fonctions de Lyapunov contrôlées n'est pas une fin en soi mais :

- cela peut être la première étape de la synthèse d'une commande stabilisante ;
- si une commande stabilisante est déjà connue, l'obtention d'une fonction de Lyapunov contrôlée peut être très utile pour étudier la robustesse de la stabilisation, ou pour rendre la loi de commande initiale plus robuste ;
- si il est important d'optimiser un critère et que la solution optimale est difficile à mettre en place, on peut rechercher une fonction de Lyapunov contrôlée « proche » de la fonction valeur du problème de contrôle optimal, qui conduise à une commande stabilisante plus aisée à mettre en œuvre et d'un coût (au sens du critère) voisin de l'optimum.

Certains travaux menés dans le projet MIAOU ont consisté à partir d'objets qui sont « presque » des fonctions de Lyapunov contrôlées, et qui sont explicitement descriptibles, à les déformer de manière constructive en fonctions de Lyapunov contrôlées ou, au contraire, à montrer le cas échéant qu'une telle construction n'est pas possible. Dans [50], ces objets sont soit des intégrales premières[51], que l'on ne peut pas faire décroître strictement, soit des fonctions qui ont les caractéristiques de décroissance voulues mais ne sont pas lisses [52].

*Le contrôle optimal n'était pas en soi un champ d'investigation du projet MIAOU, dont l'activité en contrôle s'orientait plutôt vers la construction de fonctions de Lyapunov contrôlées pour la stabilisation. Toutefois, le travail [50] tendait à tracer un parallèle entre la stabilisation et le contrôle optimal, et APICS souhaite investir davantage dans le rapprochement des deux points de vue. Les recherches méthodologiques seront, dans un futur proche, guidées par une application au domaine spatial (voir section 6.4) à savoir le transfert d'orbite en faible poussée, où le coût à minimiser a une importance cruciale.*

## 4 Développements logiciels

Comme beaucoup de projets de recherche en mathématiques appliquées, MIAOU a développé des codes de programmes numériques pour au moins deux raisons :

- la validation à usage interne des algorithmes issus de la théorie et l'alimentation en retour de cette dernière par les expériences numériques,
- la diffusion des résultats de la recherche lors de collaborations extérieures.

Si un code peut voir le jour pour la première raison et finir son cycle de développement pour la deuxième raison, l'activité de programmation n'est pas exactement la même dans les deux cas. Le premier participe du va et vient qui s'établit entre la description mathématique d'un algorithme et sa matérialisation sous forme de code, dans lequel la théorie trouve son compte. Il faut alors développer du code performant mais plutôt prototypique. Le deuxième cas, où l'on développe une application destinée à être exportée, réclame une discipline supplémentaire de suivi et d'assistance à l'utilisateur final, impliquant une standardisation du code et un travail de documentation, souvent aussi l'ajout de fonctionnalités spécifiques de l'application en question qui ne sont pas nécessairement des produits de la recherche du projet. Le code prend de ce fait un caractère plus figé, se décline en versions successives, et se dote généralement d'un interface avec l'utilisateur plus sophistiqué.

Le projet MIAOU a expérimenté ces deux types de production. Tout d'abord, l'activité en théorie des fonctions a donné naissance à plusieurs algorithmes concernant notamment l'extrapolation de données fréquentielles par résolution de problèmes extrémaux bornés ou l'approximation rationnelle

par optimisation sur la variété des matrices de transfert stables de degré donné, cf. section 3.1. Ceci a donné naissance à des codes numériques dont le logiciel *hyperion*, écrit en C puis C++ cf. section 4.4, est la forme la plus intégrée, et numériquement la plus performante. Ce logiciel a été exporté à l'IRCOM et au CNES, aux Universités de Lille et d'Orsay, au CMA de l'École des Mines de Paris à Sophia-Antipolis, et vendu à Alcatel-Space (centre de Toulouse). Soulignons qu'*hyperion* est bien davantage qu'une bibliothèque de programmes dédiés à l'identification fréquentielle : c'est un système généraliste doté d'un interprète de commandes symboliques et d'une arithmétique puissante hérités du logiciel *Sisyphe* [158]. Ensuite, à mesure que se développait la collaboration avec le CMA de l'ENSMP concernant l'optimisation d'OMUX et les problèmes inverses, à mesure aussi que s'étoffait le transfert auprès d'Alcatel pour le filtrage hyperfréquences, il est apparu qu'*hyperion*, avec toute la qualité de ses algorithmes, manquait de fonctionnalités autant que de documentation, et que l'effort nécessaire pour les lui conférer était trop grand pour MIAOU dont la vocation générale n'était pas de faire de la programmation système. Son développement a donc été arrêté et, à partir de ce moment, le projet a développé ses algorithmes sous *matlab* qui était à la fois d'un confort appréciable pour la programmation et largement répandu dans le milieu des utilisateurs visés. C'est dans ce langage que des versions en variables d'état des algorithmes d'approximation rationnelle ont vu le jour *via* le logiciel RARL2, livré à Alcatel-Space (centre de Toulouse) ainsi qu'à l'IRCOM, et que des modes de complétion dédiés à la détermination des retards ont été ajoutés à la panoplie existante au sein du logiciel PRESTO-HF, qui encapsule à la fois RARL2 et *hyperion*.

La question à laquelle le projet APICS doit maintenant faire face est double : comment capitaliser les acquis algorithmiques de MIAOU d'une part, et quelle politique logicielle adopter au futur d'autre part. Ces choix doivent aussi être arrêtés concernant les outils de production et de manipulation des documents scientifiques auxquels MIAOU a consacré une énergie appréciable au cours des deux dernières années.

#### 4.1 Valoriser les développements algorithmiques de MIAOU

Les procédés de complétion et d'approximation rationnelle développés par MIAOU sont assez versatiles pour intéresser divers aspects des sciences de la modélisation, cependant qu'*arl2* (*hyperion*) et RARL2 sont, à notre connaissance, les codes d'approximation rationnelle matricielle à degré donné les plus efficaces disponibles aujourd'hui sur le marché du logiciel. Bien qu'ils aient été développés de manière expérimentale, en liaison avec l'identification des dispositifs hyperfréquences, pour prouver la faisabilité d'approches extrémales en théorie des fonctions, la question se pose de leur diffusion auprès d'un public plus large. Bien qu'APICS n'ait pas plus que MIAOU vocation à réaliser et maintenir des développements logiciels d'ampleur, des opportunités peuvent par exemple être recherchées de transférer ces algorithmes au sein de plates-formes à vocation généraliste. Une occasion naturelle à cet égard est la naissance du consortium Scilab, sous l'égide, entre autres, de l'INRIA. Le portage des algorithmes d'*hyperion* dans Scilab est certes délicat, notamment les algorithmes assez complexes d'approximation rationnelle : *hyperion* est écrit en C++, utilise en certains endroits une arithmétique étendue, et possède ses propres structures de données incompatibles avec celles de Scilab. Néanmoins, selon l'intérêt manifesté par le consortium, il serait envisageable d'entreprendre l'effort de programmation correspondant pour pérenniser les algorithmes. Pour ce qui est des codes *matlab*, leur syntaxe est suffisamment voisine de celle de Scilab dans les parties purement algorithmiques pour que le portage, tout en représentant une somme de travail appréciable, figure *a priori* parmi les objectifs d'APICS.

D'autres occasions de transfert pourraient également se présenter par le biais de réseaux européens comme ERNSI (*European Research Network on System Identification*, cf. section 7.2, point 7), et

sous d'autres architectures logicielles encore. Le public visé serait *grosso modo* le même, à savoir des équipes de recherche et de développement en Identification, en Automatique et en Traitement du Signal, universitaires, institutionnelles ou industrielles. Par ailleurs, APICS devrait connaître de nouvelles situations propices au transfert des algorithmes de MIAOU au sein de la communauté micro-ondes avec laquelle il entretient des liens *via* l'IRCOM, le CNES, et le cycle des congrès internationaux du domaine. Toutefois, bien qu'il compte rester attentif à de telles opportunités, le futur projet ne cherchera pas systématiquement à les provoquer.

*Le projet APICS étudiera les possibilités de transférer à moyen terme les codes d'approximation développés par MIAOU à des plates-formes logicielles existantes jouissant d'une large diffusion et, plus généralement, considérera au cas par cas les occasions de faire migrer ses outils vers d'autres sphères d'utilisateurs que la communauté des hyperfréquences.*

Pour ce qui est de la partie système et notamment l'interprète d'hyperion, le projet envisage de le mettre en accès libre, par exemple sous une licence de type GNU.

## 4.2 MIAOU et les formats de documents scientifiques

Une partie croissante de la ressource humaine du projet MIAOU a été consacrée au développement et à la maintenance d'outils pour manipuler, créer ou convertir des documents scientifiques à différents formats (L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, HTML, XML, etc.) du domaine public (on exclut des formats propriétaires comme Word) ; il a également assuré une veille technologique dans des secteurs sensibles (pdf<sub>T</sub>E<sub>X</sub>, MathML, preview-latex). Soulignons que la publication électronique à l'Inria a pris de l'importance, d'autant plus que les rapports de recherche Inria ne sont plus diffusés sous forme papier. Ces développements se sont faits principalement à l'occasion de la publication du rapport d'activité de l'Inria sur le Web (raweb) [58].

L'avènement de T<sub>E</sub>X [195] a été une véritable révolution dans le domaine de l'édition scientifique. D'une part, la qualité typographique des sorties est excellente, mais de plus, le format dvi (inventé par David R. Fuchs en 1979) est d'une grande stabilité (les fichiers dvi créés il y a 20 ans sont encore lisibles, *modulo* une substitution de fontes). Regarder un document sur un écran, plutôt que l'imprimer et le lire sur papier ou, mieux encore, pouvoir lire un document composé il y a quelques minutes dans un pays étranger et envoyé par courrier électronique, ont modifié considérablement la façon de travailler des chercheurs.

D'un autre côté, le standard de fait est le logiciel L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X de Leslie Lamport [207], qui a bénéficié en 1994 de l'aide de nombreux chercheurs européens (autour de Frank Mittelbach) lors du passage à la version 2 $\epsilon$ . Il est entièrement compatible avec PDF (un format plus universel, et plus moderne que le format dvi) grâce aux travaux de Hàn Thé Thành. De cette façon, on peut mettre une version entièrement formatée du rapport d'activité de l'Inria sur un support aussi petit qu'un CD-rom (l'équivalent de 3000 pages au format A4), et lisible sur tout ordinateur personnel. On utilise pour cela XML comme langage intermédiaire, et comme XML n'est pas fait pour être lu par des humains, on utilise des outils de traduction comme XSLT [192] pour produire la version HTML et pdf<sub>T</sub>E<sub>X</sub> pour engendrer la version PDF. Une contribution du projet MIAOU à cette traduction structurée a été l'écriture du logiciel *Tralics* [59] qui transforme un texte L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X en un document XML. Ce traducteur, qui a déjà permis en 2002 la confection du rapport d'activité de l'Inria, fait aujourd'hui partie du *package* Raweb distribué par la DISC. A quelques détails près qui restent à améliorer, le projet considère qu'il s'agit d'un transfert essentiellement achevé, cependant que la DISC devrait se préoccuper de la diffusion de *Tralics*.

*Le projet APICS relaiera la veille technologique assurée par MIAOU dans le domaine de la ma-*

*nipulation de documents scientifiques*<sup>18</sup>, tout en assurant le suivi des logiciels créés par MIAOU, en particulier *Tralics*. Toutefois, le nouveau projet n'envisage pas au futur de nouveaux développements dans ce domaine.

### 4.3 Le développement logiciel chez APICS

Le nombre de sujets de recherche exigeant de développer du code ainsi que le nombre des acteurs concernés allant croissant de MIAOU à APICS, ce dernier est amené tout à la fois à diversifier la nature de ses réalisations logicielles et à définir un minimum d'inter-opérabilité entre elles. Dans le domaine de l'approximation, de l'identification fréquentielle et des problèmes inverses, `matlab` a été retenu comme interprète commun aux différents codes. Ceci n'impose pas un langage de programmation en particulier mais demande à chaque développeur de rendre accessible ses réalisations les plus importantes depuis le langage de commande `matlab`, par exemple par un mécanisme client/serveur. Le but avoué de cette manière de faire est de constituer à terme une bibliothèque de procédures de « haut niveau » en analyse harmonique, en approximation, et en optimisation fréquentielle, qui capitalise le savoir faire du projet dans ces domaines et permette à de nouveaux développements (cf. 4.3) de voir le jour sans devoir recoder à partir de rien. Un autre élément de la politique de programmation du projet APICS sera l'usage du système de *literate programming* `noweb`. Celui-ci permet de commenter les programmes en  $\LaTeX$ , et non plus en ASCII simple, et ce de manière essentiellement indépendante du langage utilisé grâce aux travaux de Ramsey [238] (`hyperion` avait quant à lui été écrit en `C++web` et le projet MIAOU a déjà développé une version de `web` pour le langage utilisateur de `hyperion`).

Le choix de `matlab` s'explique ici par l'importance des bibliothèques de programmes auxquelles il donne accès ainsi qu'à sa très large diffusion dans la communauté mondiale du traitement du signal. Compte tenu de la création récente d'un consortium auquel l'INRIA participe, il est sans doute approprié de commenter spécifiquement la position d'APICS à l'égard de `Scilab`. Ce dernier ne paraissait pas assez fiable pour les besoins du projet à l'époque où le choix de `matlab` a été fait, mais les deux langages bien qu'incompatibles sont cependant assez proches dans les parties purement algorithmiques pour envisager, le cas échéant, une traduction de certains codes d'un système vers l'autre ou même au futur des développements conjoints. Par exemple, nous expérimentons la réécriture conjointe de `RARL2` sous `matlab` et `Scilab`, le tout sous le système de documentation de code `noweb`. De plus, le projet est favorable pour certains codes à ce qu'ils soient en accès libre (sources disponibles pour tout le monde). Aussi APICS reste-t-il ouvert à participer, dans la mesure où son spectre scientifique le lui permet, aux efforts de la communauté Française dans le domaine des outils logiciels pour l'Automatique et le Traitement du Signal *via* le système `Scilab`.

Parmi les aspects du sujet susceptibles d'être le lieu de développements logiciels conséquents en vue de constituer la bibliothèque évoquée ci-dessus, on peut recenser les suivants.

- La continuation analytique ou méromorphe sous diverses formes, notamment les problèmes extrémaux mixtes ou à partie imaginaire bornée, et la discrétisation numérique des équations spectrales pour les opérateurs de Hankel et de Toeplitz qui servent à leur résolution (cf. section 5.1.1).
- La mise au point, pour les problèmes extrémaux bornés, d'outils permettant de contrôler la régularité des approximants *via* le choix du comportement de référence.
- L'approximation rationnelle ou méromorphe dans les espaces de Hardy en une variable, scalaire et matricielle (cf. section 5.1.3), notamment des versions pondérées (qui pourraient amener à développer une base de données de poids) et intégrant des contraintes sur l'approximant, par exemple être une fonction de Schur ou satisfaire certaines contraintes d'interpolation comme

---

<sup>18</sup>L'un de ses membres continuera notamment d'être le correspondant  $\LaTeX$  de l'UR de Sophia-Antipolis.

c'est le cas en filtrage, ou encore satisfaire certaines relations directionnelles entre les résidus comme il semble raisonnable de l'imposer en détection de fissures (*cf.* section 6.3).

- L'approximation par des fractions rationnelles ayant pour coefficients des exponentielles afin de modéliser les retards.
- L'approximation rationnelle ou méromorphe en deux variables à dénominateur séparable, notamment sur le tore qui est le cas intervenant dans les problèmes de moments liés à l'inversion de la transformée de Radon (*cf.* section 5.1.3).
- La possibilité de développer les fonctions sur d'autres bases que celle de Fourier (en supposant pour fixer les idées que l'on travaille sur le cercle), par exemple des bases rationnelles dont les pôles se concentrent sur les bords de bande. En effet, les problèmes de complétion n'étant pas symétriques par rapport à la bande passante, l'usage de bases uniformément distribuées en fréquence n'est pas toujours judicieux pour les résoudre ; et en approximation rationnelle, de telles bases permettent d'encoder plus efficacement les fonctions qui n'ont pas de symétrie circulaire, *e.g.* celles possédant une singularité frontière comme les transferts à puissances fractionnaires des processus à longue mémoire et de certains systèmes diffusifs. L'usage de bases de ce type exigeant généralement le contrôle du nombre de chiffres significatifs des coefficients, il pourrait conduire à utiliser des bibliothèques de calcul en grande précision.
- La mise en place de procédures permettant de travailler sur d'autres contours que le cercle ou la droite, par transformation conforme ou calcul direct dans des bases adaptées (par exemple les polynômes de Szegő du contour).
- Les procédures de réalisation des matrices de transfert sous diverses contraintes, notamment de symétrie et de type Schur pour le paramétrage des systèmes dissipatifs (*cf.* section 5.1.5), mais aussi sous des contraintes géométriques de couplage des états pour la détermination de paramètres physiques de filtres (section 5.1.5). Ce dernier point conduit à l'utilisation de calcul symbolico-numérique pour la résolution de systèmes algébriques *via* les bases de Gröbner ou leurs dérivés (section 5.1.5).
- La résolution de problèmes d'optimisation convexes ou quasi-convexes dédiés à l'approximation polynômiale et rationnelle, particulièrement lorsque les variables parcourent le cône des polynômes positifs (trigonométriques ou algébriques). Ceci serait l'occasion d'adapter des méthodologies récentes en optimisation convexe (comme la programmation SDP et la formulation SOCP) à la conception de filtres en gabarit ou à l'approximation en dimension finie des problèmes extrémaux bornés (*cf.* sections 5.1.1, 5.1.2), ainsi qu'à la résolution de certains problèmes de moments (*cf.* sections 5.1.3, 5.1.2).
- La constitution de modules de calcul harmonique dans l'espace euclidien, notamment sur la boule, incluant le développement en harmoniques sphériques et les projections de Riesz, pour traiter des problèmes de sources en dimension 3 (*cf.* section 5.2).

La bibliothèque ainsi envisagée pourrait s'agréger en codes applicatifs spécialisés :

- programme de réglage assisté de filtres hyperfréquences, avec identification, calcul exhaustif des jeux de couplage associés, suivi des réalisations (*cf.* section 6.1) ;
- programme de conception et d'optimisation d'OMUX, avec détermination des longueurs de ligne et réglage des filtres à partir d'un gabarit spécifié (*cf.* section 6.1) ;
- programme d'optimisation de fonctions de transfert scalaires à partir de gabarits pour la conception de filtres (*cf.* section 5.1.2) ;
- inversion approchée de la transformée de Radon, par reconstruction de moments bi-dimensionnels et approximation rationnelle de ceux-ci, pour la tomographie 5.1.3) ;
- détection et localisation de fissures ou d'inclusions en 2D à partir de mesures électriques, magnétiques ou thermiques sur la frontière d'un conducteur, pour le contrôle non-destructif (*cf.* section 6.3) ;

- reconstruction de coefficients ou de géométries frontière inconnus en 2D depuis des mesures disponibles sur une partie du bord seulement (*cf.* section 6.3) ;
- détection de sources ponctuelles à partir de signaux électro-encéphalographiques en 2D et 3D (*cf.* section 6.3).

Un des objectifs du projet APICS est aussi de diffuser ses méthodes et ses algorithmes vers des utilisateurs industriels. L'expérience de MIAOU dans le domaine du filtrage confirme le fait bien connu qu'un transfert réussi est plus que la simple mise à disposition de certaines procédures génériques. Lors de la collaboration quadripartite CNES-IRCOM-Alcatel-INRIA par exemple, MIAOU a dû s'intéresser en détail au problème de l'identification de paramètres de couplages de filtres hyperfréquences pour pouvoir faire une contribution significative. Cette démarche a largement enrichi et orienté les recherches pour aboutir au plan logiciel au code dédié qu'est PRESTO-HF, et au plan des recherche à l'inscription de l'étude des formes canoniques de filtres dans la liste des objectifs d'APICS. Aussi l'écriture de code spécialisé, lorsque cela est nécessaire pour assurer un débouché aux méthodes développées ou tout simplement parce que c'est intéressant d'un point de vue scientifique, fait partie de la politique de développement logiciel d'APICS. Cette activité s'appuiera naturellement sur la bibliothèque de méthodes générales évoquée précédemment, mais comporte aussi des aspects moins prévisibles auxquels le futur projet se réserve la possibilité de s'intéresser.

Des développements logiciels devraient également voir le jour dans le domaine du contrôle, notamment en ce qui concerne les applications à la commande de satellites (*cf.* section 6.4) et les problèmes de linéarisation dynamique (*cf.* section 5.3.2). Dans le premier cas, on peut s'attendre à ce que des programmes numériques d'intégration d'équations différentielles dédiés au transfert d'orbite soient mis au point par APICS pour tester ses algorithmes ; toutefois, il semble que le partenaire industriel (*i.e.* Alcatel-Space, centre de Cannes) soit pour l'instant demandeur d'études plutôt que de code, et qu'il entende développer lui-même ses logiciels dans un domaine aussi sensible. Dans le second cas, l'opportunité de développer des programmes symboliques pour tester les conditions d'intégrabilité sous-jacentes à la notion de « platitude » sera décidée en fonction des progrès de la recherche ; cet aspect pourrait le cas échéant faire l'objet d'une collaboration renforcée avec le projet CAFE, qui a déjà été associé à MIAOU pour encadrer des travaux de DEA sur la différentiation formelle, dans lequel le langage utilisé était MAPLE. Cependant, il serait en tout état de cause prématuré d'arrêter de manière précise les choix informatiques qui présideront à ces développements.

*Le projet APICS constituera, dans le moyen et long terme, une bibliothèque de codes dédiés à l'optimisation fréquentielle et à l'approximation rationnelle ou méromorphe, qui seront accessibles depuis matlab. Ces codes seront déclinés en logiciels applicatifs spécialisés, notamment le réglage assisté de filtres hyperfréquences, l'optimisation d'OMUX, la conception de filtres en gabarit, le contrôle non destructif 2D, la détection de sources 3D notamment pour la MEEG, et les problèmes de moments 2D en particulier pour la tomographie. APICS considérera en outre le développement conjoint de ces outils sous Scilab dans la mesure où il perçoit une demande à cet égard. Le nouveau projet sera aussi amené, au moins pour son usage interne, à mettre au point à moyen terme des programmes numériques de simulation de trajectoires de systèmes dynamiques contrôlés, notamment dans le cadre de la mécanique spatiale pour le transfert orbital ainsi, à plus long terme, que des codes symboliques de transformations de systèmes différentiels par feedback dynamique, sous une forme qui reste à préciser.*

#### 4.4 Annexe : le logiciel hyperion

Le logiciel hyperion est à la fois un interprète de commandes généraliste, et possède une bibliothèque d'algorithmes dédiés à l'identification fréquentielle. Initialement écrit en C, il a été traduit plus

tard en C++[258], et a atteint une stabilité comparable à celle de  $\text{\TeX}$ . Dans sa version initiale, l'interprète de commande était rudimentaire (choix entre trois ou quatre méthodes de `peb2`), mais rapidement nous avons décidé d'utiliser Lisp comme langage de commandes, plus précisément un clone de LeLisp de l'Inria [122]. Profitant de l'expérience acquise dans le projet SAFIR, nous avons récupéré le compilateur du logiciel Sisyphé [158] de sorte que `hyperion` dispose maintenant d'un interprète de commandes symboliques, à la Macsyma, dont le langage possède de bonnes propriétés théoriques (les fonctions sont des objets de première classe, la liaison des variables est lexicale par défaut, etc.).

Ce logiciel possède également une arithmétique puissante, en effet, les nombres connus sont non seulement les entiers et flottants machine, mais, héritage de Sisyphé (voir [55, 56]), les entiers de taille arbitraire, les nombres rationnels (quotient de deux entiers) et les flottants à précision contrôlée (le résultat d'une opération peut avoir un grand nombre de chiffres, mais ils sont tous exacts), et, spécifiques à `hyperion`, les flottants en quadruple et octuple précision (mantisse de 128 et 256 bits), de même que les polynômes et les matrices (et les matrices de polynômes à coefficients double, quadruple ou octuple précision (réels ou complexes)). D'autres objets n'ont pas le statut de nombre, mais en ont certaines propriétés, par exemple les séries trigonométriques  $\sum a_k z^k$  peuvent être additionnées ; la propriété principale d'une telle série est de pouvoir être évaluée pour un certain  $z$ , et une évaluation multiple permet de dessiner la série (Bode, Nyquist, etc.) Notons que si la série est un développement de Taylor (tronqué à l'ordre  $N$ ), on peut définir une multiplication, mais dans le cas de séries de Laurent (si  $k$  peut-être positif et négatif, avec troncature dans les deux sens) la multiplication n'a plus de sens.

Les algorithmes principaux de `hyperion` sont `peb2/arl2` (voir section 3) qui permet d'identifier une fonction de transfert de degré donné à partir de mesures fréquentielles ; comme `arl2` identifie des systèmes en temps discret, et que c'est la partie `peb2` qui fait la conversion des systèmes en temps continus vers les systèmes en temps discrets, et que cette conversion n'est pas unique, la partie `arl2` ne peut pas fonctionner indépendamment de la partie `peb2` (plus précisément, la gestion des résultats intermédiaires et finaux, de même que le traçage des courbes, dans `arl2` est sous le contrôle de `peb2`). Notons également que dans le cas d'un système à plusieurs entrées et plusieurs sorties, donc dans le cas où on cherche à identifier une matrice  $F_{ij}$ , on applique `peb2` à chaque composante de la matrice, et `arl2` à l'ensemble. Certains paramètres ont donc le droit de dépendre de  $i$  et  $j$ , d'autres le ne peuvent pas. On a écrit un petit langage qui permet d'exprimer de façon simple les desiderata de l'utilisateur, et un traducteur qui traduit ceci en commandes qui sont interprétés par `hyperion`.

Le principe fondamental de `peb2/arl2` est le suivant

1. Passage en temps discret,
2. Interpolation des données,
3. Extrapolation des données,
4. Approximation des données.

Le premier item ne pose pas de problèmes théoriques, mais dans la pratique, pour identifier des systèmes non strictement propres dont on ne connaît pas la valeur à l'infini, et qui peuvent éventuellement contenir des retards, plusieurs stratégies peuvent être utilisées. Dans le cadre des filtres du CNES, on considère que la variable est  $\omega + 1/\omega$ , ce qui, en première approximation divise le degré de McMillan par deux, et transforme les systèmes réels en système complexes. Notons que les problèmes du type  $(P)$ <sup>19</sup> sont toujours exprimés comme : soit  $K$  un arc du cercle, alors que dans la pratique,  $K$  doit être symétrique par rapport à l'axe réel, et l'astuce précédente permet de traiter le cas où  $K$  est union de deux arcs, l'un des sous-arc étant le symétrique de l'autre. La deuxième étape consiste à remplacer une suite de valeurs ponctuelles par une fonction, en général par interpolation par des splines cubiques.

<sup>19</sup>La formulation a changé, mais le programme utilise toujours le demi-cercle (ndlr)

Ceci suppose que les données sont de classe  $C^\infty$  (on veut les approcher par une fonction rationnelle), mais cette hypothèse n'est pas nécessaire. L'important est que la fonction soit définie sur un ensemble  $K$  de mesure non nulle, en particulier infini. La troisième étape est la partie `peb2` proprement dite alors que la quatrième partie est `arl2`.

Pour chaque étape, on a implémenté un algorithme (et parfois plusieurs) qui prend en entrée une suite finie de nombres et rend une suite finie de nombres. Pour l'instant, il s'agit de nombres flottants, en double précision, et on se demande si cela est suffisant. Bien entendu, avec des mesures ayant de l'ordre de quatre chiffre significatifs, et une approximation finale de l'ordre de un pour cent ou un pour mille, on peut imaginer que 15 chiffres suffisent pour les grands algorithmes (en interne `arl2` a parfois besoin de la quadruple précision). Comme les espaces fonctionnels considérés sont tous de dimension infinie non dénombrable, il n'est pas possible de représenter les fonctions comme une suite finie de nombres, et on considère des projections sur des « bases », comme la base de Fourier. Mais le choix de la base n'est pas innocent, par exemple la base de Fourier ne contient que des fonctions continues (et même rationnelles), et donc les fonctions manipulées à chaque étape sont continues (et même rationnelles : dans la version courante, `arl2` calcule le meilleur approximant rationnel d'un objet rationnel, et donc fait de la réduction de modèle). Comme dit plus haut, si on cherche un excellent approximant rationnel, la fonction a intérêt à être continue, mais on peut vouloir utiliser `arl2` à d'autres fins.

Rappelons que les trois premières étapes sont linéaires (si  $g_1$  et  $g_2$  sont de bons approximations de  $f_1$  et  $f_2$  alors  $g_1 + g_2$  est un bon approximant de  $f_1 + f_2$ ), mais ceci n'est plus le cas de `arl2`, car la contrainte de degré nous fait travailler sur une variété différentielle (de dimension finie). La question n'est donc plus de trouver une bonne base sur laquelle projeter, mais le choix d'un atlas de la variété et un algorithme de choix de cartes. Il est à remarquer que l'optimiseur de `hyperion` travaille dans une carte locale, il fonctionne tant qu'on l'informe d'un changement de cartes, mais ce n'est pas lui qui prend de décision (on a une stratégie ad-hoc qui fonctionne, `RARL2` utilise un autre atlas, et une autre stratégie, avec autant de succès).

## 5 Quelques points de recherche

Nous précisons dans cette section certains aspects plus techniques de la recherche qu'APICS se propose de mener. Sans viser à être exhaustif, on cherche à illustrer, *pour un lecteur déjà versé dans les sujets correspondants*, la nature des problèmes considérés.

### 5.1 Optimisation fréquentielle et théorie des fonctions

#### 5.1.1 Problèmes extrémaux bornés

**Participants :** *L. Baratchart, J. Leblond, J.R. Partington, F. Seyfert, J. Grimm*

Il s'agit de problèmes d'approximation analytique de données frontières incomplètes dans les classes de Hardy d'un domaine plan. C'est une formulation possible de la question du prolongement analytique, qui se pose naturellement en identification fréquentielle de systèmes dynamiques (voir sections 3.1, 6.1) et en contrôle non-destructif (voir section 6.3). Du point de vue de la théorie des fonctions, ces questions généralisent les problèmes extrémaux classiques [159]. Pour fixer les idées, nous présentons les choses dans le disque.

Soit  $\mathbb{D}$  le disque unité,  $\mathbb{T}$  le cercle unité,  $H^p$  l'espace de Hardy d'exposant  $p$ , c'est-à-dire le sous-espace de  $L^p(\mathbb{T})$  formé des fonctions dont les coefficients de Fourier d'indice négatif valent 0. Ces fonctions sont les traces sur  $\mathbb{T}$  des fonctions  $g$  holomorphes dans  $\mathbb{D}$  telles que  $\|g(re^{i\theta})\|_{L^p(0,2\pi)}$  est borné indépendamment de  $r \in [0, 1)$ .

Un problème extrémal borné typique est le suivant :

(P) Soient  $p \geq 1$ ,  $K$  un sous-ensemble du cercle unité  $\mathbb{T}$  de mesure positive ainsi que son complémentaire  $E = \mathbb{T} \setminus K$ ,  $f \in L^p(K)$ ,  $\psi \in L^p(E)$  et  $M > 0$  ; on cherche une fonction  $g \in H^p$  telle que  $\|g - \psi\|_{L^p(E)} \leq M$  et telle que  $g - f$  soit de norme minimale dans  $L^p(K)$  sous cette contrainte.

En pratique  $f$  correspond aux données,  $K$  à l'endroit où ces données peuvent être mesurées,  $\psi$  est un comportement de référence aux endroits où l'on n'a rien pu mesurer, et  $g$  un modèle (e.g. une fonction de transfert stable, une solution complexifiée du Laplacien etc...).

Ces problèmes sont convexes et admettent une unique solution, à condition, si  $p = \infty$ , de supposer (nous le ferons tacitement) que la fonction concaténée  $f \vee \psi$  est continue [19, 22]. En général, il n'est pas facile d'exprimer la solution parce que l'on ne connaît pas mieux que numériquement la projection de meilleure approximation de  $L^p$  sur  $H^p$  qui intervient dans l'équation variationnelle [80], [249]. Dans les cas  $p = 2$  et  $p = \infty$ , on peut exprimer cette projection (le cas  $p = 2$  est trivial, le cas  $p = \infty$  est plus subtil et fait l'objet du théorème de Nehari qui introduit un opérateur de Hankel) et, partant, résoudre le problème. Nous les passons en revue rapidement afin de donner une idée de ces problèmes qui marient l'analyse complexe et convexe.

Si  $p = 2$ , la solution du problème (P) s'obtient en résolvant une équation spectrale pour l'opérateur de Toeplitz de symbole  $\chi_E$ , la fonction caractéristique de  $E$  :

$$\begin{aligned} \phi_{\chi_E} : H^2 &\rightarrow H^2 \\ g &\mapsto P_{H^2}(\chi_E g) \end{aligned} \quad (2)$$

où  $P_{H^2} : L^2(\mathbb{T}) \rightarrow H^2$  est la projection orthogonale. Plus précisément, si  $f$  n'est pas déjà la trace sur  $K$  d'une fonction de  $H^2$  satisfaisant les contraintes, l'unique solution  $g_0$  de (P) est donnée par :

$$g_0 = (1 + \lambda \phi_{\chi_E})^{-1} P_{H^2}(f \vee (1 + \lambda)\psi), \quad (3)$$

où  $\vee$  indique la concaténation et où  $\lambda \in (-1, +\infty)$  est l'unique nombre réel tel que le membre de droite de (3) soit à distance  $M$  de  $\psi$  dans  $L^2(E)$ . Notons que  $\lambda$  joue le rôle d'un multiplicateur de Lagrange qui rend implicite la dépendance en  $M$  de la solution et que l'on ajuste par dichotomie. Une implémentation de la méthode figure dans le logiciel `hyperion` sous le nom `peb2`<sup>20</sup>.

Si  $p = \infty$ , la solution de (P) s'obtient en introduisant un opérateur de Hankel. Pour le décrire, on introduit le complémentaire orthogonal  $\bar{H}_0^2$  de  $H^2$  dans  $L^2(\mathbb{T})$  (l'espace de Hardy du complémentaire de  $\mathbb{D}$ ). L'opérateur de Hankel de symbole  $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$  est alors :

$$\Gamma_\varphi : H^2 \rightarrow \bar{H}_0^2 \quad \text{défini par} \quad \Gamma_\varphi g = P_{\bar{H}_0^2}(\varphi g),$$

où  $P_{\bar{H}_0^2}$  est la projection orthogonale  $L^2(\mathbb{T}) \rightarrow \bar{H}_0^2$ . Il faut aussi, pour  $\rho > 0$  arbitraire, introduire la fonction auxiliaire

$$w_\rho(z) = \exp \left\{ \frac{\log \rho}{2\pi} \int_K \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\theta \right\}, \quad z \in \mathbb{D}, \quad (4)$$

<sup>20</sup>En fait, c'est le nom anglais `bep` qui est utilisé.

(c'est la « fonction extérieure » de module  $\rho$  sur  $K$  et 1 sur  $E$ ). À présent, si  $f$  n'est pas la trace sur  $K$  d'une fonction de  $H^\infty$  de sorte que la valeur  $\beta$  du problème est strictement positive, l'unique solution de  $(P)$  est

$$g_0 = w_{M/\beta}^{-1} \frac{P_{H^2}((f \vee \psi) w_{M/\beta} v_0)}{v_0}, \quad (5)$$

où  $v_0$  est un vecteur maximisant de l'opérateur de Hankel  $\Gamma_{(f \vee \psi) w_{M/\beta}}$ . Bien que  $\beta$  ne soit évidemment pas connu *a priori*, on peut le déterminer par dichotomie car c'est l'unique nombre positif tel que le membre de droite de (5) est à distance  $M$  de  $\psi$  sur  $E$ .

On peut aussi considérer le problème mixte :

$(P')$  Soient  $K$  un sous-ensemble du cercle unité  $\mathbb{T}$  de mesure positive ainsi que son complémentaire  $E = \mathbb{T} \setminus K$ ,  $f \in L^2(K)$ ,  $\psi \in L^\infty(E)$  et  $M > 0$  ; on cherche une fonction  $g \in H^2$  telle que  $\|g - \psi\|_{L^\infty(E)} \leq M$  et telle que  $g - f$  soit de norme minimale dans  $L^2(K)$  sous cette contrainte.

Cette formulation est en particulier intéressante pour imposer un modèle conservatif en identification fréquentielle. La solution de  $(P')$  est donnée par une équation implicite analogue à (3), à ceci près que le paramètre de Lagrange  $\lambda$  est cette fois une fonction dans  $L^1(E)$  [24]. Lorsque  $K$  est une union finie d'arcs, un schéma de résolution de type SODP basé sur l'approximation polynomiale de  $(P')$  est à l'étude (cf. section 5.1.2). Soulignons à ce propos qu'on fait face du point de vue constructif à des questions comme : si  $E_m$  est un sous-espace de dimension finie  $m$  de  $H^p$  et si  $g_m$  est la solution de  $(P)$  restreint à  $E_m$ , converge-t-elle vers  $g_0$ , et dans quel sens ? Aussi, si la fonction  $f$  est connue en un nombre fini de points (c'est le cas en pratique) puis interpolée, disons par des splines cubiques, à partir de quelle valeur de  $m$  l'erreur d'interpolation devient-elle prépondérante ?

*Une question importante pour la pratique, dans tous les cas ci-dessus, est de donner des conditions sur  $f$ ,  $\psi$  et  $M$  qui assurent la continuité de la solution.* Dans le cas  $p = \infty$ , elles sont assez restrictives [23]. Le cas  $p = 2$  et le cas mixte sont ouverts et constitueront à cet égard l'une des premières préoccupations d'APICS.

L'intérêt de (3) n'est pas uniquement de fournir un algorithme de résolution, mais aussi des estimés d'erreur. En fait, le caractère mal posé du prolongement analytique a pour effet, si les données ne sont pas exactement analytiques, que l'erreur d'approximation sur  $K$  tend vers 0 si, et seulement si,  $M$  tend vers l'infini [22]. En diagonalisant l'opérateur de Toeplitz, on peut quantifier assez précisément ce phénomène en fonctions de la régularité de  $f$ , et voir par exemple que, génériquement,  $M$  croît exponentiellement avec l'inverse de l'erreur dans certaines classes de Sobolev mais polynomialement seulement dans le cas méromorphe. En simplifiant, l'erreur décroît très lentement lorsque  $M$  augmente si  $f$  ne se prolonge pas analytiquement au voisinage de  $K$  [16]. Ceci est intéressant pour discriminer entre les données proches d'être analytiques et celles qui ne le sont pas, et donne l'idée d'utiliser l'analogue de  $(P)$  sur un domaine multiplement connexe [123] afin de détecter des frontières d'analyticité pour le contrôle non destructif (cf. section 6.3). En bref, si on a des données sur la frontière extérieure d'un anneau et si on cherche à les approcher par une fonction analytique sur l'anneau dont la norme ne dépasse pas  $M$  sur la frontière intérieure, il faudra consentir un  $M$  très grand pour obtenir une bonne approximation si les données ne se prolongent pas analytiquement à travers la frontière intérieure. *Ceci n'est qu'intuitif* : les opérateurs de Toeplitz ont des propriétés spectrales très différentes sur l'anneau et les estimés dans ce cas restent à établir et à tester numériquement. APICS compte y travailler.

Mentionnons aussi, comme objet d'étude pour APICS, le problème  $(P_R)$  suivant, qui intervient naturellement en relation avec les conditions de Dirichlet-Neumann :

$(P_R)$  Soient  $p \geq 1$ ,  $K$  un sous-ensemble du cercle unité  $\mathbb{T}$  de mesure positive ainsi que son complémentaire  $E = \mathbb{T} \setminus K$ ,  $f \in L^p(K)$ ,  $\psi \in L^p(E)$ ,  $\alpha, \beta > 0$ , et  $M > 0$  ; on cherche une fonction  $g \in H^p$  telle

que  $\operatorname{Re}(g - f)$  soit de norme minimale dans  $L^p(K)$  sous la contrainte  $\alpha \|\operatorname{Re}(\psi - g)\|_{L^p(E)} + \beta \|\operatorname{Im}(\psi - g)\|_{L^p(E)} \leq M$ .

Pour  $p = 2$ ,  $(P_R)$  se résout au moyen de combinaisons linéaires d'opérateurs de Toeplitz et de Hankel. Notons que le problème est maintenant linéaire par rapport aux coefficients réels, mais non plus complexes. L'analyse numérique et l'implémentation d'algorithmes sont en cours [63], avec en vue des applications à certains problèmes inverses du Laplacien 2D, voir section 6.3.

Notons que  $(P)$  se formule aussi bien pour des approximants méromorphes et non plus analytiques : on demande que  $g$  appartienne à  $H^p + R_N$  où  $R_N$  est l'ensemble des fonctions rationnelles de degré  $N$  sans pôles sur  $\mathbb{T}$ . Ce problème intéressant est sans aucun doute difficile. Pour  $p = \infty$  il se résout de manière similaire à  $(P)$  via la théorie AAK [23]. Dans le cas  $p = 2$ , il est *a priori* plus général que le problème d'approximation rationnelle mentionné en section 5.1.3 ; on peut espérer le ramener à ce dernier de la même manière que pour  $p = \infty$  en utilisant l'interprétation de l'approximation rationnelle  $L^2$  comme la recherche des valeurs singulières d'un opérateur de Hankel non hermitien [32].

A plus long terme, le projet s'intéressera à l'étude de problèmes extrémaux mixtes et pondérés, qui sont naturels en optimisation fréquentielle et que l'on peut poser de la façon suivante.

$(P_g)$  Soient  $p, q \geq 1$ ,  $\mu, \nu$  deux mesures positives sur  $\mathbb{T}$ ,  $f \in L^p_\mu(\mathbb{T})$ ,  $\psi \in L^q_\nu(\mathbb{T})$  et  $M > 0$  ; on cherche une fonction  $g \in H^p$  telle que  $\|g - \psi\|_{L^q_\nu(\mathbb{T})} \leq M$  et telle que  $g - f$  soit de norme minimale dans  $L^p_\mu(\mathbb{T})$  sous cette contrainte.

Bien que des instances particulières de  $(P_g)$  aient déjà été considérées, notamment  $(P)$  et  $(P')$  qui correspondent à  $d\mu = \chi_K d\theta$  et  $d\nu = \chi_E d\theta$  avec, respectivement,  $p = q$  et  $p = 2, q = \infty$ , ou encore  $d\mu = |w|^2 \chi_K d\theta$  et  $d\nu = |w|^2 \chi_E d\theta$ , pour  $w \in H^\infty$  telle que  $w^{-1} \in H^\infty$ , et  $p = q = 2$  [64], la plupart des configurations restent à analyser, avec des hypothèses de régularité et de compatibilité sur les mesures et les exposants  $p$  et  $q$ . Les situations où les dérivées de  $\mu$  et  $\nu$  par rapport à  $d\theta$  sont de logarithme sommable (condition de Szegö) sont à distinguer de celles déjà abordées, car elle sont plus singulières en ce qu'elles ne garantissent pas la saturation de la contrainte.

## 5.1.2 Optimisation convexe et approximation

**Participant : F. Seyfert**

On s'intéresse ici à des problèmes d'approximation convexes, ou quasi-convexes. Par convexe (resp. quasi-convexe), on entend des problèmes de minimisation à critères convexes (resp. quasi-convexe c'est à dire dont les ensembles de niveaux sont convexes) pour lesquels l'ensemble admissible est lui-même convexe. Par exemple, les problèmes d'approximation suivants font partie de cette classe : les problèmes extrémaux bornés  $(P)$  et  $(P')$  (détaillés en section 5.1.1), certains problèmes classiques de moment avec contraintes d'interpolation [117, 164], les problèmes d'approximation uniforme d'une fonction continue par un polynôme positif ou une fraction rationnelle positive. Un cas simple mais typique, intervenant en conception de filtres, est le suivant :

$(P_1)$  Si  $\mathbb{C}_n[z]$  est l'ensemble des polynômes complexes en une variable  $z$  de degré au plus  $n$  et,  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  deux fonctions positives sur  $\mathbb{R}$ , peut-on trouver  $p, q \in \mathbb{C}_n[z]$  avec  $q$  unitaire tels que

$$\varepsilon_1(x) \leq \left| \frac{p}{q} \right| \leq \varepsilon_2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

En élevant (6) au carré et en chassant les dénominateurs, on se ramène à un problème de décidabilité convexe quantifié sur les carrés des modules de polynômes de  $\mathbb{C}_n[z]$ , lesquels ne sont autre que les éléments du cône convexe  $\mathcal{P}_{2n}$  des polynômes réels de degré au plus  $2n$  qui sont positifs sur  $\mathbb{R}$ .

Parmi ces problèmes convexes ou quasi-convexes, on distingue deux catégories : ceux pour lesquels l'ensemble admissible peut être décrit par un nombre fini d'inégalités convexes et ceux pour lesquels l'ensemble admissible a une description plus complexe. Le problème  $(P_1)$ , par exemple, appartient à la deuxième catégorie et est dit semi-infini parce que le cône admissible  $\mathcal{P}_{2n}$  est décrit par un nombre dénombrable d'inégalités convexes indexées sur un ensemble indépendant des paramètres d'optimisation (e.g. il suffit d'écrire qu'un polynôme réel prend des valeurs positives en chaque point d'un maillage dense sur le cercle pour qu'il soit positif).

Si la formulation duale des problèmes de la première catégorie permet souvent de se ramener de manière constructive à l'ajustement de paramètres de Lagrange par maximisation concave sur un simplexe, la stratégie à adopter pour les problèmes de la seconde catégorie est plus ouverte.

Dans le cas semi-infini, on pourra par exemple sélectionner un nombre fini seulement des inéquations en jeu, et s'intéresser aux propriétés de convergence de la solution du problème ainsi discrétisé vers celle du problème initial lorsque l'ensemble d'inéquations sélectionnées croît. Dans le cas  $(P_1)$  on est par exemple ramené à résoudre un programme linéaire de taille croissante [135, 270]. Dans le cas du problème extrémal  $(P')$ , la discrétisation de la contrainte aboutit à une formulation quadratique à nombre croissant de contraintes quadratiques, dite en anglais SOCP (pour *second order cone program*). Bien que la dualisation lagrangienne permette d'envisager la résolution d'une telle suite de problèmes pour des instances de tailles modestes, les progrès annoncés de certaines méthodes de point intérieur dédiées à SOCP [90, 223] semblent plaider pour l'utilisation de ces dernières dans le cas où le degré des polynômes considérés dépasse la centaine. Notons que, pour être utilisée en approximation fonctionnelle, cette stratégie de discrétisation requiert des résultats d'analyse pour estimer l'erreur commise et donner des indications quant au choix des points d'interpolation. Dans le cas du problème  $(P_1)$ , par exemple, on sera amené à borner un polynôme de degré donné dont on contrôle le module sur une grille de points [142].

De manière concurrente, on peut aussi faire appel pour certains problèmes à une paramétrisation *ad-hoc* de l'ensemble admissible. Pour reprendre le cas de  $(P_1)$  et des polynômes positifs, on pourra représenter ces derniers comme modules au carré de polynômes dans  $\mathbb{C}_n[\mathcal{Z}]$ . Ce faisant, on perd la convexité du critère mais ceci est moins grave qu'il n'y paraît : en procédant ainsi on ne rajoute pas de *minima* locaux parasites.

Pour finir, on peut penser aussi à utiliser la programmation semi-définie positive (SDP) *via* les méthodes de point intérieur [222]. Le problème extrémal borné  $(P')$  admet par exemple une formulation duale de type maximisation concave sur le cône des formes linéaires positives agissant sur les polynômes de degré donné, cet ensemble étant lui-même caractérisé par la positivité de la forme quadratique associée (ici une forme de Toeplitz). Remarquons que l'utilisation de la SDP ne nécessite pas de discrétisation contrairement à la formulation SOCP. Nombre de publications récentes, voir [91, 162, 163], exploitent la SDP pour résoudre certains problèmes d'approximation par des polynômes positifs. Si l'utilisation de ces méthodes peut paraître attrayante, leur mise en œuvre n'est pas sans problèmes sur le plan numérique, en particulier dans le cas de problèmes du type de  $(P_1)$  [162].

La question est ici de savoir comment adapter au contexte de la théorie des fonctions certaines méthodologies récentes de l'optimisation convexe — comme la programmation SDP et la formulation SOCP — et quels outils d'analyse constructive mettre en œuvre pour surmonter la complexité inhérente à la programmation semi-infinie. Ultérieurement, le rajout de contraintes non-convexe sera étudié. On pense ici en particulier à des contraintes sur l'amplitude de la dérivée de la phase (le « temps de retard de groupe » dans le vocabulaire propre au filtrage) de la fonction de transfert d'un filtre, qui viennent s'ajouter aux contraintes sur le module dans le cadre de certains problèmes de synthèse.

### 5.1.3 Approximation rationnelle

**Participants :** L. Baratchart, J. Grimm, J. Leblond, J.-P. Marmorat, M. Olivi, F. Seyfert

**Approximation rationnelle en une variable** Le problème qui consiste à approcher, au sens de la norme  $L^p$ , une fonction analytique dans le disque unité par une fonction rationnelle stable de degré donné s'énonce ainsi avec les notations de la section 5.1.1 :

Soient  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $f \in H^p$  et  $n$  un entier ; on cherche une fonction rationnelle  $P/Q$  analytique dans un voisinage du disque unité et de degré au plus  $n$  qui minimise

$$\left\| f - \frac{P}{Q} \right\|_{L^p(\mathbb{T})}. \quad (7)$$

Si  $n > 0$ , il n'existe aucun algorithme<sup>21</sup> connu pour résoudre cette question malgré son importance pratique, sauf si  $n = 2$  et que  $f$  est rationnelle auquel cas l'équation aux points critiques est algébrique et justiciable des méthodes d'algèbre formelle, mais la complexité est alors trop grande pour résoudre même des cas de degré faible [189, 175]. Dans le cas  $p = \infty$  il existe des stratégies sous-optimales fondées sur la troncation du meilleur approximant méromorphe donné par la théorie AAK, avec bornes certifiées (qui peuvent être mauvaises) lorsque  $f$  est rationnelle [167]. Pour  $p = 2$ , le projet MIAOU a développé des algorithmes de descente convergeant génériquement vers un *minimum local* [8] et prouvé la convergence globale dans des cas particuliers [37, 31, 36, 32]. Le fondement de la méthode est que, lorsque le dénominateur  $Q$  est fixé, le numérateur optimal  $P$  quand  $p = 2$  dans (7) est déterminé par une opération linéaire, à savoir la projection orthogonale sur les fractions de dénominateur  $Q$ . Ceci permet d'éliminer la variable  $P$  dans le critère et de la remplacer par une fonction de  $f$  et  $Q$ . Par définition de la projection, le critère reste alors borné par  $\|f\|_{L^2(\mathbb{T})}$  même si les racines de  $Q$  s'approchent de  $\mathbb{T}$  ce qui signifie que le numérateur optimal simplifie à la limite les pôles de module 1. Lorsque  $f$  est assez régulière cette simplification s'effectue de manière lisse et on peut ainsi définir le critère sur l'ensemble des polynômes unitaires de degré donné quotienté par la relation d'équivalence « avoir les mêmes racines de module strictement inférieur à 1 ». Une représentation explicite de la classe d'équivalence dans  $H^2$  s'obtient en formant la fraction  $Q/\tilde{Q}$  où  $\tilde{Q}$  est le réciproque de  $Q$  ( $Q$  et son réciproque ont les mêmes racines de module 1) et l'ensemble de ces fractions (i.e. les *produits de Blaschke* de degré donné), a la structure topologique d'une boule dont le bord est stratifié par les produits de Blaschke de degré inférieur [5]. Cette construction a deux conséquences importantes :

- la donnée d'un *minimum local* au degré inférieur fournit une condition initiale pour chercher un nouveau *minimum* au degré courant dans la boule,
- la connaissance globale de la topologie et de la fonction critère sur les strates fournit, *via* la théorie du degré, des relations entre les indices des points critiques [26, 5].

Le premier *item* est utilisé pour engendrer de manière récursive des *minima* locaux. Le second *item* est à la base des preuves de convergence globale évoquées précédemment.

Le résultat le plus intéressant ici serait sans doute de prouver la convergence générique d'un algorithme, au moins pour de larges classes de fonctions. Cependant, la stratégie précédente pour chasser les *minima* locaux est assez efficace sur les exemples traités à ce jour et, sans pour autant abandonner l'idée de progresser dans l'analyse de la convergence globale, APICS compte plutôt se consacrer à court et moyen terme à des variantes du problème qui interviennent en optimisation fréquentielle (cf. 6.1). En particulier, on compte considérer le cas où l'approximant est borné ponctuellement en

<sup>21</sup>On entend par algorithme une procédure démontrablement et globalement convergente en théorie

module sur le cercle ; dans cette optique, une modification intéressante du critère est celle qui ferait intervenir la distance hyperbolique plutôt qu'eulidienne dans le disque. Rien, ou presque, n'existe à ces égard, mais on peut gager que l'analyse de Schur doit ici jouer un rôle déterminant sachant que, *grosso modo*, les coefficients de Schur sont au cas hyperbolique ce que les coefficients de Taylor sont au cas euclidien. Un autre exemple est l'approximation pondérée qui peut s'aborder de façon relativement analogue lorsque le poids est l'inverse du module au carré d'un polynôme, en développant le numérateur sur la base des polynômes orthogonaux correspondants [64] (même alors se posent des problèmes de complexité cf. section 5.1.6), mais qui reste largement ouvert pour des poids plus généraux. Une troisième direction, très intéressante, est l'approximation rationnelle sur un arc de  $\mathbb{T}$  de données incomplètes sous contrainte en module sur l'arc complémentaire. La solution de ce problème permettrait d'éviter l'actuel traitement en deux temps (complétion analytique par résolution d'un problème extrémal borné puis approximation rationnelle sur  $\mathbb{T}$ ) ; il s'agit d'une question difficile, puisque plus générale *a priori* que l'approximation rationnelle sur le cercle, mais il serait important de savoir si elle se ramène implicitement à une approximation rationnelle pondérée sur  $\mathbb{T}$  de la même façon qu'un problème extrémal borné se ramène implicitement à un problème extrémal ordinaire (cf. section 5.1.1).

Pour beaucoup d'applications à l'Automatique et au Traitement du Signal, le problème scalaire (7) n'est pas suffisant. Il faut traiter le problème matriciel :

Soient  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $F \in (H^p)^{m_1 \times m_2}$  et  $n$  un entier ; on cherche une matrice rationnelle  $\mathcal{R}$  analytique dans un voisinage du disque unité et de degré de McMillan au plus  $n$  qui minimise

$$\|F - \mathcal{R}\|_{L^p(\mathbb{T})}.$$

La norme matricielle peut s'interpréter de diverses manières, la plus courante étant la norme  $L^p$  usuelle de la norme d'opérateur. Dans le cas  $p = 2$ , on utilise aussi la norme de Frobenius. La raison pour laquelle le problème est fondamentalement plus difficile que dans le cas scalaire est que le degré de McMillan couple les éléments de la matrice entre eux ; nous ne le définirons pas ici mais disons simplement que c'est le degré d'une réalisation minimale associée au transfert  $\mathcal{R}$ . Comme dans le cas scalaire, le problème admet des stratégies sous-optimales si  $p = \infty$ , et des approches symbolico-numériques sont théoriquement possibles si  $p = 2$  ; en fait, les références ci-dessus traitent aussi bien du cas matriciel. Toujours si  $p = 2$ , l'approche développée par le projet MIAOU a été généralisée en ce que la factorisation  $\mathcal{R} = Q^{-1}P$ , où  $Q$  et  $P$  sont des *matrices rationnelles* telles que  $Q$  est analytique dans  $\mathbb{D}$  et unitaire sur  $\mathbb{T}$  cependant que  $P$  est analytique dans  $\mathbb{D}$  (factorisation de Douglas-Shapiro-Shields [27],[155]), fournit une définition du dénominateur et du numérateur qui permet d'éliminer ce dernier. Une différence notable est que la topologie dans  $(H^2)^{m_1 \times m_2}$  des produits de Blaschke *matriciels* de degré inférieur ou égal à un entier donné est mal connue, notamment la manière dont le bord se colle sur l'intérieur, et qu'en conséquence aucune relation entre les indices des points critiques n'a été démontrée pour l'instant. Une autre différence notable est que l'ensemble des « numérateurs » admissibles pour un « dénominateur » donné est un espace vectoriel qui « dépend vraiment » de ce dénominateur, *i.e.* l'ensemble des fonctions de transfert stables de taille  $m_1 \times m_2$  est un fibré non trivial sur les produits de Blaschke  $m_1 \times m_1$  dès que  $m_1 > 0$  et  $m_2 > 0$ . Ceci fait que l'adjonction d'un poids, par exemple, pose des problèmes nouveaux car il n'est pas clair de savoir quel type de décomposition orthogonale utiliser dans la fibre. L'équation aux points critiques est cette fois une condition d'interpolation bitangentielle [28] qui est plus difficile à interpréter en termes d'orthogonalité : on ne sait même pas, par exemple, si le meilleur approximant d'une fonction de Markov matricielle est encore du même type, alors que dans le cas scalaire cela se déduit, comme pour les approximants de Padé, les propriétés classiques des polynômes orthogonaux [37], [255]. Le projet APICS compte étudier ces questions prototypiques.

Néanmoins, un algorithme de descente génériquement convergent vers un *minimum* local, assez similaire au cas scalaire, se déduit d'une analyse locale du bord de la variété des produits de Blaschke

matriciels de degré donné [53] et a été implémenté dans le logiciel *hyperion*, avec des coordonnées pour les produits de Blaschke qui sont des paramètres de Schur tangentiels. Une version procédant par représentation interne, où les coordonnées sont les éléments d'une réalisation unitaire, a été implémentée dans le logiciel RARL2 mais la topologie du bord est singulière dans ce cas et la preuve de la convergence globale (*i.e.* du fait que le point courant de l'algorithme ne peut s'échapper par ce bord) reste à faire. APICS tâchera de mettre ici les choses au point. Un des avantages des paramétrages utilisant les réalisations est qu'ils se prêtent sans doute mieux à la description de certaines propriétés additionnelles de la fonction de transfert que l'on veut parfois imposer comme la symétrie, la passivité *etc.* L'approximation sous cette dernière contrainte devra, comme dans le cas scalaire, être examinée.

**Approximation rationnelle en deux variables et problèmes de moments bi-dimensionnels** Si  $\Omega$  est un domaine plan borné et  $\chi_\Omega$  sa fonction caractéristique, on définit les moments de  $\chi_\Omega$  par la formule :

$$a_{m,n} = \int_{\Omega} z^m \bar{z}^n dA(z), \quad m, n \in \mathbb{N}$$

où  $A(z)$  est la mesure de Lebesgue. Le problème de reconstruire  $\Omega$  à partir de ses moments apparaît naturellement en tomographie pour inverser la transformée de Radon de  $\Omega$  [180, 220].

Ce problème est connecté à l'approximation rationnelle comme suit. Définissons la transformée exponentielle de  $\chi_\Omega$  par :

$$E_\Omega(z, \bar{w}) = \exp\left(-\frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{dA(z)}{(\xi - z)(\bar{\xi} - \bar{w})}\right), \quad z, w \in \bar{\mathbb{C}} \setminus \Omega.$$

On prouve que  $\Omega$  est un domaine de quadrature d'ordre  $N$  pour les fonctions holomorphes si, et seulement si,  $E_\Omega$  est une fonction rationnelle du type

$$E_\Omega(z, \bar{w}) = \frac{q(z, \bar{w})}{p(z)p(\bar{w})} \quad (8)$$

où  $p$  et  $q$  sont de degré  $N$ . Dans ce cas les nœuds de la quadrature sont les racines de  $p$ , et une équation de  $\Omega$  est  $q(z, \bar{z}) < 0$  [237]. De plus, on dispose de l'estimé :

$$|E_\Omega - 1| \leq \frac{A(\Omega)}{\pi d(z, \Omega)d(w, \Omega)} \quad (9)$$

où  $d(z, \Omega)$  est la distance euclidienne de  $z$  à  $\Omega$  [171].

A partir de (8)-(9), on montre dans la référence précédente comment approcher (au sens de l'aire de la différence symétrique) un domaine  $\Omega$  contenu dans une boule donnée par un domaine de quadrature *via* l'interpolation rationnelle de sa transformée exponentielle en dehors de cette boule. Puisque l'approximation rationnelle à pôles libres est *a priori* plus performante que l'interpolation, on peut se poser les questions suivantes.

- Si  $\Omega$  est à l'intérieur d'un cercle  $S$ , peut-on améliorer la technique en minimisant par exemple  $\|E_\Omega - q(z, \bar{w})/p(z)p(\bar{w})\|_{L^p(S \times S)}$  à degré de  $p$  et  $q$  fixés ? Lorsque  $p = \infty$ , ce problème est quasi-convexe (*cf.* section 5.1.2).
- Peut-on obtenir des estimés géométriques de l'erreur faisant intervenir la capacité du condensateur  $(S, \bar{\Omega})$  comme dans le cas de l'approximation rationnelle en une variable [169] ?
- Peut-on caractériser le comportement asymptotique des pôles des approximants comme dans le cas de l'approximation rationnelle en une variable d'intégrales de Cauchy sur un contour symétrique (*cf.* section 5.1.4) ?

Ce problème peut aussi être l'occasion d'une réflexion sur l'approximation méromorphe en deux variables sur le tore, pour laquelle la situation est nettement moins claire que dans le cas unidimensionnel [132, 133, 149]. Celle-ci pourrait être menée en collaboration avec l'Université de Provence.

#### 5.1.4 Comportement asymptotique des pôles

**Participants :** *L. Baratchart, E.B. Saff.*

**Collaborateur notable :** *H. Stahl (TFH de Berlin).*

La description du comportement asymptotique des pôles des meilleurs approximants rationnels ou méromorphes d'une fonction analytique d'une variable complexe est à la fois un des aspects fondamentaux de la recherche d'APICS en théorie des fonctions et l'outil technique, apparemment original, avec lequel il aborde certains problèmes inverses. Nous avons mentionné en section 5.1.3 que le problème de l'approximation rationnelle est non-résolu analytiquement, et le problème de l'approximation méromorphe ne l'est que dans le cas de la norme uniforme par le biais du spectre d'un opérateur de Hankel qu'il n'est pas aisé d'analyser [82]. Aussi n'est-il pas question ici d'étudier les pôles des approximants directement. Dans le cas d'une analyse *asymptotique*, cependant, les équations aux points critiques se conjuguent de manière plaisante à la théorie du potentiel pour donner, dans le cas de fonctions à singularités branchées, des théorèmes de convergence inattendus dans ce contexte. Pour simplifier la description, nous nous limitons au cas du disque unité en reprenant les notations de la section 5.1.1.

Si  $K \subset \mathbb{D}$  est compact de capacité positive [243], il existe une unique mesure  $\mu_e$  qui, parmi toutes les mesures de probabilité  $\mu$  sur  $K$ , minimise l'énergie de Green :

$$E(\mu) = \int_K \int_K \log \left| \frac{1 - z\bar{t}}{z - t} \right| d\mu(z) d\mu(t).$$

La quantité  $1/E(\mu_e)$  est par définition la capacité  $\text{cap}(\mathbb{T}, K)$  du condensateur  $(\mathbb{T}, K)$  ; l'interprétation électrostatique (dans le cas où  $K$  est connexe pour simplifier) est que, si l'on dépose une charge unité sur  $\mathbb{T}$  et une de signe opposé sur  $K$ , alors  $\mu_0$  décrira l'équilibre des charges sur  $K$  sous l'action du potentiel de Coulomb. Cette *distribution d'équilibre* est caractérisée par le fait que son *potentiel* :

$$\mathcal{P}_{\mu_e}(z) = \int_K \log \left| \frac{1 - z\bar{t}}{z - t} \right| d\mu(t)$$

est constant quasi-partout sur  $K$  où il vaut  $1/\text{cap}(\mathbb{T}, K)$ .

Soit à présent une mesure complexe  $\nu$  sur  $K$  et définissons la fonction :

$$f_\nu(z) = \int_K \frac{d\nu(t)}{z - t} \tag{10}$$

ainsi que la suite  $h_n/q_n$  de ses meilleurs approximants méromorphes dans  $L^\infty(\mathbb{T})$ , avec  $h \in H^\infty$  et  $q_n$  un polynôme de degré  $n$  (approximation AAK). On lui associe la *mesure de comptage* de ses pôles, c'est à dire la mesure de probabilité discrète :

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum d_j \delta_{\xi_j}$$

où  $\xi_j$  est un zéro de  $q_n$  de multiplicité  $d_j$ .

Lorsque  $K$  est un contour symétrique pour le potentiel de Green (une union finie d'arcs analytiques tels que sur l'intérieur de chacun de ces arcs les dérivées normales du potentiel d'équilibre à droite et

à gauche coïncident :  $\partial\mathcal{P}_{\mu_e}/\partial n^+ = \partial\mathcal{P}_{\mu_e}/\partial n^-$ ), et pourvu que la mesure  $\nu$  présente assez de régularité, on a prouvé récemment [33] que la suite  $\mu_n$  converge au sens faible-étoile vers la mesure d'équilibre  $\mu_e$  (ceci signifie que  $\mu_n(\Omega) \rightarrow \mu_e(\Omega)$  pour tout ouvert  $\Omega \subset \mathbb{C}$ ). En particulier, les pôles des approximants s'accumulent sur  $K$ . Le résultat se généralise aux approximants méromorphes  $L^p$  pour  $p \geq 2$ , en particulier aux approximants rationnels  $L^2$  (qui coïncident dans ce cas avec les approximants méromorphes sur le cercle); en fait, on peut prouver que seul un nombre fini de pôles peut s'accumuler hors de  $K$ , et on a même des estimés de ce nombre en fonction de la variation de l'argument de  $\nu$  dans le cas du segment [68, 17, 62].

Un exemple prototypique de contour symétrique est la solution du problème de Lavrentiev [203, 204] : étant donnés  $m$  points du disque, trouver le *continuum*  $K$  qui les connecte et qui minimise la capacité  $\text{cap}(\mathbb{T}, K)$ . Pour les fonctions à singularités branchées, pour lesquelles on peut écrire la représentation de Cauchy (10) sur tout *continuum* joignant les points de branchement, on peut donc conclure concernant l'asymptotique des pôles et ceci est à la base de certains développements en sections 6.3, 5.2. La figure 1 illustre la situation sur un exemple numérique où il y a quatre points de branchement. Notons que ceci peut se voir comme une version hyperbolique d'un résultat célèbre en approximation de Padé [253] généralisé au cas multipoint dans [169].

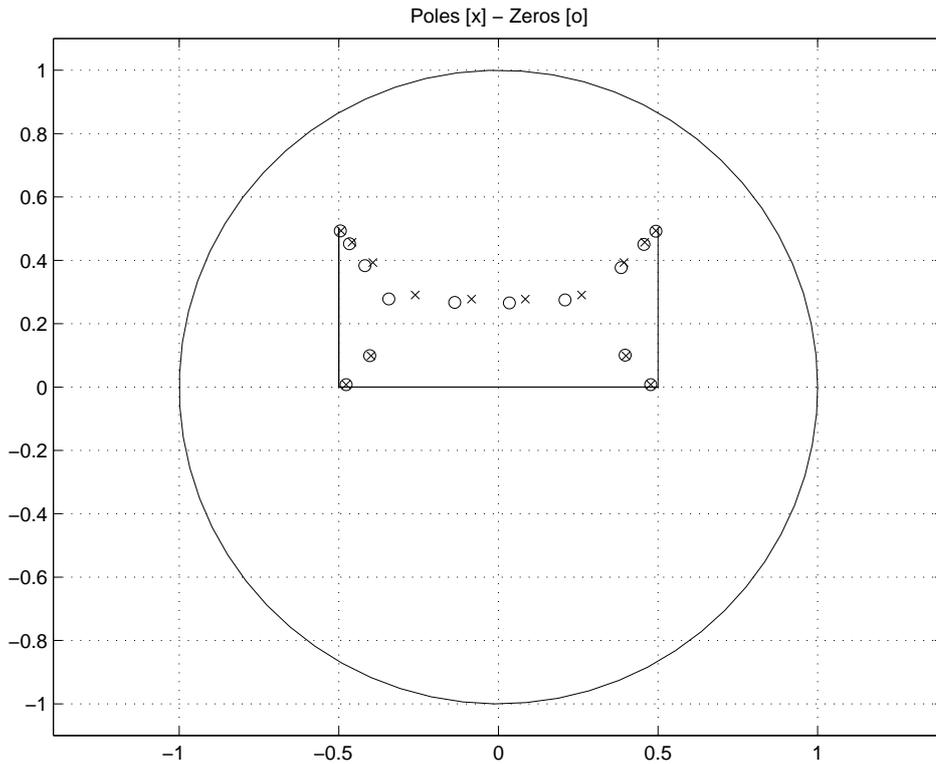


FIG. 1 – Les trois segments en trait plein définissent  $K$ , les quatre extrémités sont des points de branchement, on a calculé le meilleur approximant AAK avec 14 pôles, matérialisés par des croix. Le contour qu'ils dessinent a effectivement l'allure du continuum de capacité de Green minimale joignant ces quatre points.

Les problèmes de contrôle non destructif, réciproquement, posent de nouvelles questions et en particulier celle de connaître l'asymptotique des pôles lorsque  $K$  est un compact plus général, de dimension

2 par exemple (pour traiter les inclusions). Une conjecture à cet égard, qui généralise le résultat précédent, est la suivante :

*Si  $f$  est donnée par (10) où l'argument de  $v$  est assez régulier, et si  $K$  est le continuum de capacité minimale en dehors duquel  $f$  est analytique et n'a qu'une seule branche [252], alors, la suite  $\mu_n$  des mesures de comptage des pôles des meilleurs approximants méromorphes de  $f$  sur  $\mathbb{T}$  a pour points d'accumulation au sens faible-étoile des mesures à support dans  $K$ , dont le balayage sur la frontière  $\partial K$  est la distribution d'équilibre  $\mu_e$ ,*

Pour son intérêt propre et ses conséquences potentielles en contrôle non destructif (cf. section 5.2), cette question sera considérée par APICS avec une attention particulière. Cependant, on est très loin aujourd'hui de savoir conclure dans une telle généralité.

### 5.1.5 Problèmes de paramétrages

**Participants :** L. Baratchart, P. Enqvist, A. Gombani, J.P. Marmorat, M. Olivi, F. Seyfert

Ces problèmes ont été au cœur de l'activité « identification » du projet MIAOU. Ils interviendront à nouveau pour APICS de façons complémentaires dans les contextes suivants :

1. paramétrer une classe de fonctions (les modèles) pour aborder un problème d'optimisation,
2. faire le lien, dans un contexte applicatif donné (e.g. les filtres résonnants, les filtres à ruban, les filtres à ondes de surface, ...), entre le comportement fréquentiel et les paramètres physiques qui définissent le système.

Pour ce qui est du premier point, la variété des matrices intérieures de degré donné a été paramétrée pour les besoins de l'approximation rationnelle (cf. sections 5.1.3 et 5.1.6) à partir d'un algorithme de Schur tangentiel [1] qui est associé au problème d'interpolation de Nevanlinna-Pick (interpolation dans des directions données en des points donnés sous contrainte d'analyticité et de bornitude en norme d'opérateur). Dans les logiciels d'approximation développés par MIAOU (section 4), on utilise deux atlas différents :

- celui décrit dans [53, 57] et implémenté dans le logiciel `hyperion`. Une représentation polynômiale des matrices intérieures  $y$  est utilisée.
- Celui décrit dans [73] et implémenté dans le logiciel `RARL2`. Les matrices intérieures  $y$  sont représentées par une réalisation interne unitaire.

Il se trouve que problème de Nevanlinna-Pick sous-jacent dans les deux cas admet une généralisation sous forme intégrale connue sous le nom de problème de Nudelman [99]. Celui-ci pourrait servir de base à la construction de nouveaux atlas et autoriserait semble-t-il une description unifiée des matrices de fonctions analytiques (fonctions de transfert de systèmes stables) de degré de McMillan donné satisfaisant certaines contraintes issues de la physique des dispositifs que l'on rencontre en filtrage comme le caractère intérieur ou contractif (issu de la passivité), la symétrie (issue de la réciprocité), ou encore des propriétés d'interpolation en certains points (issues de la topologie des dispositifs qui force la présence de retards). APICS se propose d'utiliser la souplesse de ces atlas pour unifier son approche.

Le paramétrage de Schur a aussi été utilisé pour donner un caractère récursif aux algorithmes de descente sur la variété des matrices intérieures de dimension et de degré fixés. En fait, la frontière topologique de cette variété, dans  $H^2$ , est composée de matrices intérieures de degré strictement inférieur et cette stratification est à l'origine d'une stratégie de recherche itérative sur le degré de l'approximant. Afin d'une part de prouver la convergence de l'algorithme `RARL2` vers un *minimum* local, et d'autre part de conférer à cette stratégie un caractère global qui autorise l'usage des outils de topologie différentielle comme dans le cas scalaire, APICS compte étudier la stratification de cette frontière de manière plus fine.

Pour ce qui est du second point, il s'agit d'un problème que MIAOU a rencontré lors de travaux sur l'identification et la synthèse de filtres hyperfréquences et de filtres à ondes de surface (voir sections 6.1 et 6.2) [15, 41, 81, 13] : comme indiqué en section 3.2, les comportements identifiés ou synthétisés sont mesurés ou spécifiés dans le domaine fréquentiel, cependant que les grandeurs physiques qui sont d'intérêt central pour le concepteur et le constructeur (afin de corriger un filtre existant ou d'en dimensionner un nouveau) interviennent par le biais de certaines réalisations des matrices de transfert ou de *scattering* sous-jacentes.

Dans le cas des filtres à cavités résonnantes, on cherche à associer à une matrice de *scattering* donnée un ensemble de réalisations satisfaisant à certaines contraintes qui sont imposées par la géométrie physique du filtre, laquelle gouverne les couplages entre cavités. Ceci se traduit par le fait qu'il doit exister une réalisation  $(A, B, C, D)$  dans laquelle  $D = \text{Id}$  et  $C = B^T = [e_1, e_n]$  où les  $e_j$  sont les vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{C}^n$ , cependant que la matrice  $A$  est symétrique et doit comporter des zéros à certains endroits bien précis. Un exemple de géométrie à 3 cavités et 6 pôles, pour un filtre asymétrique à 2 zéros de transmission, est donné par :

$$A = \begin{pmatrix} \star & \star & 0 & \star & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \star & \star & \star & 0 & \star \\ \star & 0 & \star & \star & \star & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & \star & 0 & \star & \star \end{pmatrix},$$

De façon générale, on montre sous certaines conditions raisonnables sur la géométrie des couplages (il ne faut pas qu'elle soit redondante) que ce problème revient à déterminer les racines d'un système polynômial multivarié de dimension zéro. C'est en collaboration avec les projets COPRIN, GALAAD et SPACES que MIAOU a abordé ce problème que l'on parvient aujourd'hui à résoudre pour les tailles d'instances rencontrées en pratique. Lors de cette collaboration, la contribution du projet a consisté en une mise en équations du problème adaptée à l'algorithme de résolution, ici le calcul d'une base de Groebner finalement rendu effectif par les algorithmes du projet SPACES (voir [145]). La formulation retenue contient en particulier un grand nombre d'équations redondantes de bas degré et brise une symétrie naturelle du problème. Les inconnues sont les éléments d'un quotient (induit par la détermination des coefficients au signe près) du groupe des changements de base orthogonaux complexes, appliqués à une réalisation canonique initiale dite « en flèche », elle-même relié aux travaux de [97].

La première préoccupation d'APICS sera ici de produire un code stable et raisonnablement automatisé pour une procédure à ce jour guidée et segmentée en nombreuses étapes (écriture adaptée des équations, calcul de la dimension, obtention d'une représentation univariée, résolution, ...). En outre, une question qui se pose aujourd'hui avec acuité est celle de l'existence de solutions réelles, qui correspondent à un filtre idéal (sans pertes), lequel sert de modèle à la synthèse. C'est un sujet délicat qui touche à la topologie de certains revêtements de la sous-variété constituée par les filtres d'une géométrie donnée. APICS ambitionne d'avancer dans la compréhension de ce phénomène. Si l'utilisation de méthodes algébriques peut sembler très spécifique au problème de filtrage considéré ici, cette étape s'inscrit cependant dans la démarche, défendue par APICS après MIAOU, visant à résoudre certains problèmes de synthèse ou d'identification en les formulant comme des problèmes d'approximation. Dans ce processus, la remontée vers les grandeurs physiques est amenée à faire partie des recherches chaque fois que la relation entre paramètres physiques et paramètres d'optimisation n'est pas triviale.

Dans le cas des filtres à ondes de surface, le problème de la correspondance entre matrices de *scattering* et paramètres physiques se pose de la même manière, mais le formalisme change. Il s'agit de circuits électriques imprimés sur un substrat piézo-électrique, qui échangent de l'énergie via les ondes

acoustiques qu'ils engendrent dans ce substrat. Le but est de réaliser une fonction de filtrage entre les ports de deux circuits, très similaire à celle des filtres résonnants. Il y a cependant une différence fondamentale avec le cas précédent : il est ici deux types d'énergie en jeu, électrique et acoustique, de sorte que le modèle conservatif est de taille  $4 \times 4$  et non plus  $2 \times 2$ . Cette fonction de *scattering* globale est définie par une matrice intérieure rationnelle symétrique  $\mathcal{S}$  qui relie les ondes et les énergies électriques incidentes  $\mathbf{W}_i$  et  $\mathbf{W}_i'$  aux ondes et énergies émergentes  $\mathbf{W}_o$  et  $\mathbf{W}_o'$  :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_o \\ \mathbf{W}_o' \end{bmatrix} = \mathcal{S} \begin{bmatrix} \mathbf{W}_i \\ \mathbf{W}_i' \end{bmatrix},$$

et la fonction de filtrage que l'on veut synthétiser est l'élément 4-3 (ou 3-4 par symétrie) de  $\mathcal{S}$ . Le problème vient de ce que si on peut écrire une réalisation de  $\mathcal{S}$  en fonction des paramètres physiques (réflexion et intensité des sources des cellules élémentaires qui composent le filtre) [13], on ne connaît pas de caractérisation intrinsèque des fractions rationnelles qu'il est ainsi possible de former, et on ne peut de ce fait construire un modèle de référence sur lequel mettre en œuvre des techniques d'approximation. Parmi les questions qui se posent naturellement, on peut citer la suivante :

*Si  $\mathcal{S}$  est une matrice rationnelle symétrique contractive analytique dans le disque, à quelle condition est-elle un bloc diagonal d'une matrice rationnelle symétrique intérieure (i.e. analytique dans le disque et unitaire sur le cercle) de taille plus grande, et quelle est le degré de McMillan minimal d'une telle extension ?*

Pour voir comment la question surgit, observons que la matrice de transfert électrique est le bloc  $2 \times 2$  en bas à droite de  $\mathcal{S}$  qui en est donc une extension symétrique et intérieure ; au prix de quelques calculs, on peut montrer de plus que le degré de  $\mathcal{S}$  est supérieur de 2 à celui de ce block  $2 \times 2$ . Le problème de l'extension intérieure sans augmentation du degré d'une matrice rationnelle contractive  $\mathcal{S}$  est classique, et requiert que les blocks de Jordan associés aux zéros réels de la matrice  $I - \mathcal{S}\mathcal{S}^*$  soient de taille paire [168]. Si l'on choisit  $\mathcal{S}$  symétrique et que l'on impose à l'extension d'être symétrique aussi, on a établi récemment la condition supplémentaire que les multiplicités algébriques de *tous* les zéros de  $I - \mathcal{S}\mathcal{S}^*$  doivent être paires [12]. A présent, si cette condition n'est pas remplie, il reste *a priori* possible de construire une extension intérieure symétrique, mais il faudra consentir une augmentation du degré. C'est là le sens de la question ci-dessus. Il y a bien d'autres problèmes associés à la caractérisation du transfert  $\mathcal{S}$ , liées au fait que des retards dûs au temps de propagation des ondes induisent des conditions d'interpolation sur la matrice de *scattering* acoustique dont le développement de Schur à l'origine est de ce fait « pair ». Le projet APICS compte poursuivre l'étude de ces modèles entreprise par MIAOU.

### 5.1.6 Aspects algorithmiques de l'identification des systèmes linéaires stables

**Participants :** J. Leblond, J. Grimm, J.P. Marmorat, F. Seyfert

Au vu de l'expérience acquise avec les logiciels `hyperion`, `RARL2`, `PRESTO-HF`, et autres, le projet APICS considère que les items suivants sont susceptibles de donner lieu à des implémentations d'algorithmes dans `matlab` ou `Scilab` ou autre, et/ou posent des questions intéressantes, tant du point de vue théorique que du point de vue appliqué. Parmi les quatre phases de l'identification, citées page 30, les deux plus importantes portent le nom de `peb2` (voir section 5.1.1) et `arl2` (voir section 5.1.3).

L'objectif principal est de réaliser un logiciel qui identifie une fonction  $\mathcal{H} = \sum_{k=0}^{\infty} H_k / s^{k+1}$  connaissant certaines valeurs  $\mathcal{H}(i\omega)$ , rangées dans un fichier, suivant une convention quelconque, mais normalisée, et sachant que  $\mathcal{H}$  est analytique dans le demi-plan et rationnelle de degré fixé. C'est la fonction de transfert d'un système stable en temps continu. Grâce à une transformation du type  $s = (z + 1)/(z - 1)$ ,

on se ramène à identifier  $\mathcal{H}' = \sum_{k=0}^{\infty} H'_k z^k$ , analytique dans le disque, rationnelle de même degré, c'est la fonction de transfert d'un système stable en temps discret.

1. Problème de représentation. Dans la phase d'interpolation, on a décidé d'utiliser des splines cubiques pondérées, et de calculer les  $H'_k$ , coefficients Fourier de ces splines, par intégration par parties. Ce n'est pas la seule méthode (on peut par exemple calculer les  $H_k$ , et les convertir, ce qui revient implicitement à effectuer un algorithme `peb2/arl2` en temps continu, mais à quoi devrait ressembler un tel algorithme ?). La pondération des splines a pour but de réduire le bruit de mesure, mais réclame à l'utilisateur du logiciel trois pondérations (pour les splines, la complétion analytique et l'approximation rationnelle), n'est-ce pas trop lui demander ?

On calcule typiquement une expression de la forme

$$\sum_j \int_{\alpha}^{\beta} c_{kj} (x - \gamma)^k e^{-inx} dx,$$

où les  $c_{kj}$  sont les coefficients en  $x^k$  de la spline numéro  $j$ ,  $[\alpha, \beta]$  l'intervalle support de la spline. Pour garantir la stabilité numérique, on choisit pour  $\gamma$  un point intérieur à l'intervalle, par exemple le milieu, ce qui donne

$$\sum_j \int_{-\delta}^{\delta} c'_{kj} x^k e^{inx} dx.$$

Le nombre de sinus et de cosinus à calculer est assez grand, et cette façon de faire n'est pas optimale (il est plus judicieux de calculer les puissances successives de  $e^{-i\theta}$  que tous les  $e^{-in\theta}$ ). Par ailleurs elle n'utilise pas le fait que  $\beta_j = \alpha_{j+1}$  : quelle est l'influence numérique de cette approximation ? peut-on trouver une limite sur le nombre de coefficients de Fourier à calculer, connaissant le nombre de mesures, le pourcentage de bruit sur les mesures, les diverses erreurs numériques ?

2. Optimisation. Un certain nombre de méthodes numériques pour minimiser une fonction  $f$  utilisent le gradient de la fonction calculé par estimation, par exemple  $[f(x + hv) - f(x)]/h$  pour un certain  $h$  dans la direction  $v$ , et s'il faut calculer la dérivée dans  $n$  directions, on peut utiliser  $n$  valeurs différentes de  $h$ . En général on ne connaît pas de formules explicite de la dérivée, mais plutôt un procédé calculatoire exact (issu le plus souvent de la différentiation automatique en mode direct). Dans un certain nombre de cas, la différentiation en mode inverse [146, 241] est nettement plus efficace, car le temps de calcul est indépendant du nombre de directions  $n$ , mais le prix à payer en place mémoire est lourd. Dans le cas `arl2` scalaire, on sait que le temps de calcul optimal de la fonction est en  $nm + k(n)$ , où  $m$  est le nombre de coefficients de Fourier,  $n$  le degré et  $k(n)$  une fonction indépendante de  $n$  (si on pouvait utiliser les racines de  $q$  comme paramètres, la situation serait plus simple). Une variante permet de faire le calcul en temps  $2nm$ , et la différentiation automatique en mode inverse s'applique de façon effective.

Calculer la dérivée seconde n'est pas facile. Les différences divisées permettent d'avoir une approximation suffisante pour un intégrateur comme *Isode*, mais sûrement pas pour une méthode de Newton, dans la mesure où le test d'arrêt est basé sur la positivité du Hessien. La plupart des logiciels évacuent ce problème en fixant a priori le nombre d'itérations. Trouver un algorithme précis et efficace pour le Hessien est un de nos objectifs.

3. Comportement de référence. La fonction  $\psi$  qui est de classe  $L^{\infty}$  ou  $L^p$  dans l'énoncé du problème ( $P$ ) ou ( $P'$ ) est dans les faits rarement connue. On connaît plutôt certaines indications sur l'approximant rationnel (par exemple, sous la forme : module près de 0.97, phase presque

linéaire), et on cherche à construire une fonction  $\psi$  adéquate (dans `hyperion`, la fonction nulle est la seule possibilité). On peut choisir quelques points pour  $\psi$ , puis interpoler par des droites ou des splines puis projeter le résultat sur  $L^\infty$  (ou sur la base de Fourier de  $L^2$ ); du point de vue algorithmique, il semble plus simple d'utiliser une fonction de  $H^\infty$  ou  $H^p$ , qui est dans l'espace dans lequel on cherche  $g$ . Ceci nous laisse le choix entre plusieurs possibilités, qui devront être validées par l'usage. Si l'on cherche un approximant borné par une fonction  $M$ , comment s'y prend-on? évaluer la fonction sur une grille de points comme cela est suggéré en section 5.1.2 est-il le plus rapide?

4. Algorithme `arl2` pondéré. On cherche  $F$  minimisant

$$\psi_{\mathcal{H}}(F) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(e^{i\theta}) - \mathcal{H}(e^{i\theta})|^p w(\theta) d\theta \quad (11)$$

où  $F$  est une fonction rationnelle de degré fixé, et  $\mathcal{H} = \sum H_i z^i$  est le développement (en général tronqué à  $m$  termes) de la fonction que l'on cherche à identifier. Dans le cas  $p = 2$ , et si  $w(\theta) = 1$ , l'intégrale devient  $\sum_i |F_i - H_i|^2$ , et peut se calculer exactement en temps fini. On ne connaît pas de formule pour  $p \neq 2$ , et on ne connaît pas grand-chose pour un  $w$  quelconque. Se posent les questions suivantes : dans le cas  $w = 1$  et  $p \neq 2$ , comment calculer l'intégrale? et quelle est l'équation au points critiques (l'équation obtenue en écrivant la condition nécessaire au premier ordre)? peut-on écrire  $F$  comme un quotient  $P/Q$  et éliminer formellement  $P$ , de sorte à avoir une équation aux points critiques ne dépendant que de  $Q$  comme dans le cas scalaire quand  $p = 2$  [26]? A-t-on comme alors une formule pour la valeur du critère, qui ne nécessite pas le calcul de  $P$ ? Dans le cas  $w \neq 1$ , il serait possible de calculer l'intégrale *via* le calcul de valeurs singulières d'un certain opérateur, mais n'est il pas trop lourd numériquement, et dans le cas de la dérivée seconde numériquement peu stable?

Dans le cas matriciel, l'expression précédente peut s'écrire

$$\psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{kl} |F_{kl}(e^{i\theta}) - \mathcal{H}_{kl}(e^{i\theta})|^p w(\theta) d\theta$$

mais on peut vouloir faire dépendre  $w$  des indices  $k, l$ , ou même remplacer la somme par la trace de  $X^* W X$ , où  $X = F - \mathcal{H}$  et  $W$  une matrice de pondération. Comment décider laquelle des méthodes est la meilleure? En théorie, et en pratique, retrouve-t-on les bonnes propriétés de l'algorithme (consistance, etc)? introduire un poids ne risque-t-il pas de multiplier le nombre de points critiques? certaines constantes numériques dans le programme ont été ajustées avec soin au vu des nombreux essais effectués dans le projet; ces constantes doivent-elle dépendre du poids?

5. Algorithme `arl2` matriciel. Les pôles de l'approximant peuvent bien sûr avoir une partie réelle négative. Or, l'algorithme de Schur [53] monte les degrés en ajoutant un pôle en  $+1$ , donc loin des pôles cherchés dans ce cas. Peut-on trouver un algorithme similaire, aussi efficace, mais qui permette, comme dans le cas scalaire, de placer un pôle n'importe où sur la frontière?
6. Algorithme `arl2` scalaire pondéré. La théorie de Szegő permet d'approcher au degré  $n$  une fonction en norme pondérée par un poids  $1/|w|^2$  (où  $w$  est un polynôme en  $z$  de degré  $d$ ), avec une complexité égale à l'approximation non-pondérée au degré  $n + d$ . Cependant, la différentiation en mode inverse (utilisée pour trouver le gradient de la fonction objectif) ne s'applique pas, et une méthode mixte doit être utilisée. On peut vouloir choisir d'autres fonctions de pondération, par exemple, de type fraction rationnelle. Comme  $w$  est une fonction polynomiale de la variable complexe  $z$ , et que l'on s'intéresse à  $w(e^{i\theta})$  en tant que fonction de  $\theta$ , le choix de  $w$  par l'utilisateur final n'est pas simple. Faut-il faire une base de données de poids? un automate cellulaire pour y accéder?

7. Changement de carte dans arl2 matriciel. Soit  $\omega$  un nombre complexe,  $u$  et  $y$  deux vecteurs, et  $\Theta$  défini par ces trois quantités, une étape élémentaire de l'algorithme de Schur est définie par

$$B = T_{\Theta}(A) = (A - \alpha uv^*)(I - \alpha yv^*)^{-1},$$

où on a posé  $b = (z - \omega)(1 - \bar{\omega})$ ,  $\beta_{\omega} = b/\tilde{b}$  ( $\tilde{b}$  est le polynôme réciproque de  $b$ ),  $\alpha = (1 - \beta_{\omega})(1 - y^*y)^{-1}$ , et  $v = A^*u - y$ . Il y a une différence de 1 entre les degrés de McMillan entre  $A$  et  $B$ , de sorte que toute matrice intérieure de degré  $n$  s'obtient par application de  $n$  transformation du type  $T_{\Theta}$ . La transformation inverse a la même forme. La transformation est singulière si  $|\omega| = 1$  ou  $\|y\| = 1$ , et numériquement mal conditionnée au voisinage de ces points.

L'algorithme de Schur est naturellement récursif en  $u$  et  $y$ . On peut ainsi concevoir un algorithme qui change une partie uniquement des paramètres. En prenant pour  $\omega$  un pôle, on peut mettre à 0 le  $y$  correspondant, mais cela peut nuire au conditionnement numérique. Dans le cas complexe, en degré  $k$ , on a le choix de  $k$  racines, dans le cas réel, les  $k$  pôles pourraient être imaginaires si  $k$  est pair. Dans la version actuelle, l'algorithme de changement de carte est indépendant du critère à optimiser, ce qui n'est sans doute pas optimal.

8. Bases exotiques. Est-il possible de faire tourner arl2 sur des bases autres que la suite des  $z^n$ , par exemple des ondelettes *etc.* Faut-il utiliser la même base que celle qui a servi pour résoudre peb2 ? Dans l'équation (11), il faut se poser la question de la représentation de  $F$  (le résultat) et  $\mathcal{H}$  (les entrées).

Dans le cas multivariable, peut-on choisir une base différente pour chaque entrée ? Comment traiter le cas (pas complètement idiot) où la  $n$ -ième composante dans la base doit être connue avec une précision décroissante avec  $n$  (par exemple 500 chiffres pour le premier, 400 pour le second, 300 pour le troisième, 1.115, pour le dernier *etc.*) ? Peut-on faire des calcul dans une base qui n'est pas formée de fractions rationnelles ?

9. Démonstrations. Faire une base de données de démonstrations accessibles par le Web, avec explications et commentaires, pour chaque algorithme. Faire un help interactif (à la Scilab), mais autoriser le couper-coller sur les exemples.

## 5.2 Problèmes inverses

**Participants :** L. Baratchart, F. Ben Hassen, M. Jaoua, I. Fellah, J. Leblond, M. Mahjoub, J.-P. Marmorat, J.R. Partington.

**Collaborateurs notables :** A. Ben Abda, S. Chaabane (LAMSIN-ENIT, Tunis).

C'était pour MIAOU un domaine relativement récent, né d'une collaboration avec le LAMSIN-ENIT sur la détection de fissures dans un matériau conducteur en dimension 2, avec pour modèle un problème de Dirichlet-Neumann [20]. Ultérieurement, on a aussi considéré la détection de sources ponctuelles plutôt que de fissures suivant des modèles couramment utilisés en MEEG [7]. Dans ce contexte électromagnétique, l'approximation quasi-statique des équations de Maxwell (on néglige les dérivées en temps des champs électriques et magnétiques) permet de se ramener au cas d'un problème inverse de type géométrique pour l'opérateur de Laplace que l'on peut, avec les notations de la section 5.1.1, énoncer par exemple ainsi pour des mesures électriques :

**Cas des sources ponctuelles.** *Étant donné un domaine lisse simplement connexe  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  et deux fonctions  $\phi$  (le flux de courant imposé) et  $\gamma$  (la différence de potentiel mesurée) sur le bord extérieur*

$\partial\Omega$ , on souhaite trouver des points  $S_j, C_k \in \Omega$  et des moments  $\lambda_j \in \mathbb{R}, \mathbf{p}_k \in \mathbb{R}^2$  tels que la solution  $u$  de

$$-\Delta \mathbf{u} = \sum_{j=1}^{m_1} \lambda_j \delta_{S_j} + \sum_{k=1}^{m_2} \mathbf{p}_k \cdot \nabla \delta_{C_k} \text{ dans } \Omega$$

vérifie

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}|_{\partial\Omega}} = \phi, \quad \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \gamma. \quad (12)$$

**Cas d'une fissure.** Étant donné  $\Omega, \phi$ , et  $\gamma$  comme précédemment, on souhaite trouver un arc  $S \subset \Omega$ , tel que la solution  $u$  de

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega \setminus S \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}^\pm} = 0 & \text{sur } S \end{cases}$$

vérifie (12).

La condition de stationnarité du flux nécessaire pour garantir l'existence d'une solution au problème direct est ici :

$$\int_{\partial\Omega} \phi = \begin{cases} \sum_{j=1}^{m_1} \lambda_j & \text{pour le cas des sources ponctuelles,} \\ 0 & \text{pour le cas d'une fissure.} \end{cases}$$

L'approche développée par MIAOU consiste à affaiblir le problème, pour le ramener à l'approximation méromorphe d'une fonction dont des mesures sont disponibles sur la frontière et qui est définie par une intégrale de Cauchy sur le lieu singulier, puis à déterminer le comportement asymptotique des singularités de l'approximant (*i.e.* ses pôles) en relation avec celles de l'approximé.

Classiquement, on discrétise l'opérateur sur un nombre fini d'éléments de base ; ici, de façon « duale », on discrétise les conditions au bord. En effet, on dispose sur le bord extérieur  $\partial\Omega$  de mesures de la fonction

$$f = \gamma + i \int \phi,$$

qui (d'après les équations de Cauchy-Riemann) est analytique dans le domaine  $\Omega$  privé des singularités  $\{S_j, C_k\}$  ou  $S$  et telle que  $\text{Re } f = \mathbf{u}$ ; de plus, si  $\phi \in L^2(\partial\Omega)$ , alors  $f$  est continue (en fait Hölder 1/2 [165]) sur  $\partial\Omega$ . Dans le cas où  $\Omega = \mathbb{D}$ , auquel l'on se ramène par transformation conforme lorsque  $\Omega$  est assez régulier, on obtient alors une solution approchée en calculant le meilleur approximant rationnel  $L^2$  de degré  $N$  (*cf.* section 5.1.3), ou méromorphe  $L^\infty$  (approximant AAK *cf.* [82]) avec au plus  $N$  pôles, de  $f$  sur  $\partial\Omega = \mathbb{T}$ . Pour  $N$  suffisamment grand, celui-ci est une fonction  $g_N$  telle que  $\text{Re } g_N \simeq \mathbf{u}$  dont les pôles fournissent une localisation (en un sens relativement faible dans le cas d'une fissure ou de sources monopolaires) des singularités de  $f$ , car celle-ci s'exprime, à une fonction analytique près, comme une intégrale de Cauchy dont le support coïncide avec les singularités [17, 20, 68] ce qui permet d'invoquer les résultats mentionnés en section 5.1.4. Dans le cas particulier de sources dipolaires, cette intégrale est même une fonction rationnelle dont les pôles coïncident théoriquement avec les dipôles  $\{C_k\}$ . Dans le cas général, l'approche a typiquement pour vocation de fournir, pour un coût calculatoire faible, des informations permettant d'initialiser une méthode directe.

Plus précisément, dans le cas de singularités de dimension 0 ou 1, on a prouvé, et le résultat a une signification assez générale du point de vue de la théorie des fonctions, que la mesure de comptage de ces pôles converge (dans le sens faible-étoile) vers une distribution d'équilibre pour un potentiel de Green lié aux points singulier de la singularité elle-même, voir figure 1 et section 5.1.4. Sur des données

simulées, les résultats numériques obtenus à l'aide du logiciel RARL2 sont vraiment bons et engendrent beaucoup d'espoir au sein du projet. Ceux-ci restent à valider sur des données expérimentales. La détection de singularités de dimension 2 (sources, inclusions, cavités) devra elle aussi être considérée (dans le cas de petites inclusions circulaires, la solution est proche d'une fonction rationnelle [148] dont les pôles (centres des inclusions) sont bien localisés par RARL2, [7]). Suite à ces travaux, deux questions centrales se posent :

- peut-on obtenir des estimés « durs » sur la géométrie des pôles dans le cas d'une fissure générale ? (on peut dans le cas d'un arc « suffisamment analytique » [68, 62]) ;
- peut-on étendre cette approche au cas d'inclusions 2-D ?

Ces points sont à relier à la conjecture mentionnée en section 5.1.4, et ils participent pour APICS d'une perspective de recherche à long terme. Mentionnons au passage une autre problématique, certainement difficile également : quel type d'information concernant les singularités peut-on déduire des données frontière ? Leur nombre ? Leur dimension ?

D'autres questions relevant toujours de la détection et l'identification de défauts mais cette fois en données incomplètes, dans le cas réaliste où la totalité de la frontière n'est pas accessible aux mesures, peuvent se formuler au moyen des problèmes  $(P)$  dans  $H^\infty + R_N$  avec  $N > 0$  (voir section 5.1.1). Il s'agit par exemple du problème ci-dessus de détection d'une fissure, lorsque les mesures ne sont disponibles que sur  $K \subset \partial\Omega$ . Les algorithmes disponibles pour la résolution de  $(P)$  ont permis d'étendre de telles données sur des cas simulés, et d'initialiser avec un certain succès des techniques de localisation de fissures développées à l'ENIT qui nécessitent des données complètes, [39, 61]. La répartition asymptotique des pôles des approximants méromorphes pourrait sans doute, ici aussi, donner des indications directes sur les fissures ou défauts, mais ceci reste à étudier pour APICS.

D'autres problèmes de singularités frontières, reliés à des modèles de corrosion, relèvent des problèmes extrémaux avec contrainte sur les parties réelles ou imaginaires de la solution (*cf.* section 5.1.1). Il s'agit-là de déterminer la géométrie inconnue d'une partie de la frontière d'un domaine depuis des mesures effectuées sur la partie complémentaire. Dans les cas les plus simples, le bord entier est supposé connu mais l'on cherche à déterminer un certain coefficient d'échange, lié à des conditions de Robin portant sur la partie corrodée. Les solutions des problèmes extrémaux bornés et les algorithmes d'approximation analytique développés pour la résolution de  $(P)$  avec  $p = 2$  et des données suffisamment régulières se sont avérés très efficaces pour la détermination de ce coefficient (logiciel *hyperion*), voir [44, 46]. Des résultats de stabilité globale pour ce problème de Robin ont aussi été établis en utilisant sa formulation dans les espaces de Hardy et certaines propriétés de ces derniers, voir [38, 45] et aussi [88]. Suite à cela, APICS souhaite investiguer des problèmes géométriques d'identification d'une frontière libre dans le cadre de l'une des thèses co-encadrées par le LAMSIN et le projet. Il s'agit, par le biais d'un changement de variable construit sur les données disponibles, de transformer le problème géométrique en problème de détermination d'une fonction sur une partie du bord du domaine transformé, dans le style de [128].

Si le domaine  $\Omega$  a des « trous », les mêmes questions extrémales [47, 65], [123, 250] autorisent l'abord de problèmes inverses du Laplacien à frontière libre. Par exemple pour identifier une composante connexe de la frontière d'un domaine d'analyticité (matérialisée par une fissure ou une cavité), on peut poser après transformation conforme un problème extrémal dans l'espace de Hardy d'une couronne (*cf.* section 5.1.1). Naturellement l'application conforme elle-même n'est pas connue, mais en utilisant une famille suffisamment riche d'automorphismes de l'intérieur du bord extérieur  $\partial\Omega$  (*e.g.* en conjuguant par une application conforme sur le disque une famille suffisamment riche de transformations de Möbius), on peut espérer localiser la frontière intérieure comme enveloppe de courbes de niveau au delà desquelles l'extension analytique n'est plus possible. Ceci permet une autre approche de la détection de fissures et aussi d'aborder l'estimation de coefficients d'échanges aux interfaces entre

différents milieux [40] qui intervient dans des géométries tridimensionnelles à symétrie cylindriques. Citons par exemple le problème de Robin sur la peau interne d'un tube, qui consiste à déterminer le coefficient  $\varphi$  tel que la solution de

$$\Delta u = 0 \text{ dans la couronne } \Omega = \mathbb{D} \setminus \overline{s\mathbb{D}}, \quad 0 < s < 1$$

soumise aux conditions (12) sur le bord extérieur  $\mathbb{T}$  vérifie

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \varphi u = 0$$

sur le bord interne  $s\mathbb{T}$ . Pour valider une telle approche, le projet APICS cherchera dans un premier temps à étendre au présent contexte les résultats de stabilité logarithmique de [45] et [88].

Une question naturelle, celle qui est peut-être la plus importante au regard des applications, est de savoir si les études effectuées en dimension 2 permettent d'aborder la dimension 3. Il se trouve que sur des géométries sphériques, en particulier dans le cas de sources ponctuelles dans une boule  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  (un modèle courant quoique simplifié pour le problème de l'EEG), on peut en considérant la trace des solutions  $u$  le long de cercles  $T_p$  contenus dans la sphère  $\partial\Omega$  tirer parti des résultats mentionnés précédemment concernant le comportement des pôles en approximation rationnelle ou méromorphe dans le plan. Le cas particulier d'une unique source se traite ici de façon particulièrement simple : la restriction à  $T_p$  du carré de  $u$  privé de sa projection harmonique est alors la trace d'une fonction rationnelle dans le disque  $D_p$  de frontière  $T_p$  et la singularité cherchée se trouve dans le disque  $D_p$  où le pôle (simple ou triple) de cette fonction est de module maximum ; ainsi, au degré approprié, les pôles de l'approximant la localisent en principe exactement [7]. Dans le cas de plusieurs sources  $u_p^2$  est une fonction à points de branchements dans chaque tranche, et le comportement asymptotique des pôles des approximants donne à nouveau une localisation des singularités qui atteignent tour à tour un maximum en module dans les plans qui contiennent une source (voir figure 2). Cette approche préliminaire du cas 3D a donné des résultats convaincants sur des données simulées par le projet ODYSSEÉ, et devra être testée sur des données réelles. Notons que le caractère sphérique intervient à deux niveaux : d'une part pour comparer explicitement les « tranches » (elles sont toutes isomorphes au disque à une renormalisation près), et d'autre part pour effectuer commodément la projection harmonique *via* le développement en harmoniques sphériques [96], c'est à dire rendre effectif le fait qu'un champ de vecteurs  $L^2$  (non nécessairement tangent) sur la sphère est somme du gradient d'une fonction harmonique à l'extérieur et du gradient d'une fonction harmonique à l'intérieur (sur le demi-plan cela découle de l'existence des transformées de Riesz [256, 257], et on passe à la sphère par transformée de Kelvin [96]). La première préoccupation d'APICS sera ici de tenter une généralisation de la méthode à des déformées explicites de la sphère, par exemple en étendant harmoniquement les données jusqu'à la sphère « la plus proche » ou au contraire en procédant tranche à tranche par application conforme.

Une autre voie, plus naturelle et plus ambitieuse à la fois, serait d'étendre les résultats-clés en dimension 2 à la dimension 3. La difficulté devient alors double : il faut d'une part généraliser de quelque façon les propriétés de convergence des mesures de comptage (*cf.* section 5.1.4) à la discrétisation optimale d'un potentiel de Newton et non plus d'un potentiel logarithmique, et il faut d'autre part mettre au point les outils pour calculer un discrétisé optimal ou sous-optimal en dimension 3, où l'on ne dispose plus de la puissance calculatoire de l'analyse complexe. Par exemple, les résultats discutés en section 5.1.4 dans le cas plan conduisent à la question suivante :

*Si  $\mathcal{P}_\mu$  est le potentiel de Newton d'une mesure  $\mu$  à support suffisamment régulier dans la boule unité de  $\mathbb{R}^3$ , et  $\mu_N$  est la mesure discrète à  $N$  masses dont le potentiel approxime le mieux (disons en norme uniforme)  $\mathcal{P}_\mu$  sur la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$ , la mesure de probabilité équirépartie sur le support de  $\mu_N$  converge-t-elle (au sens faible-\*) lorsque  $N \rightarrow \infty$  ou du moins quels sont ses points d'accumulation ?*

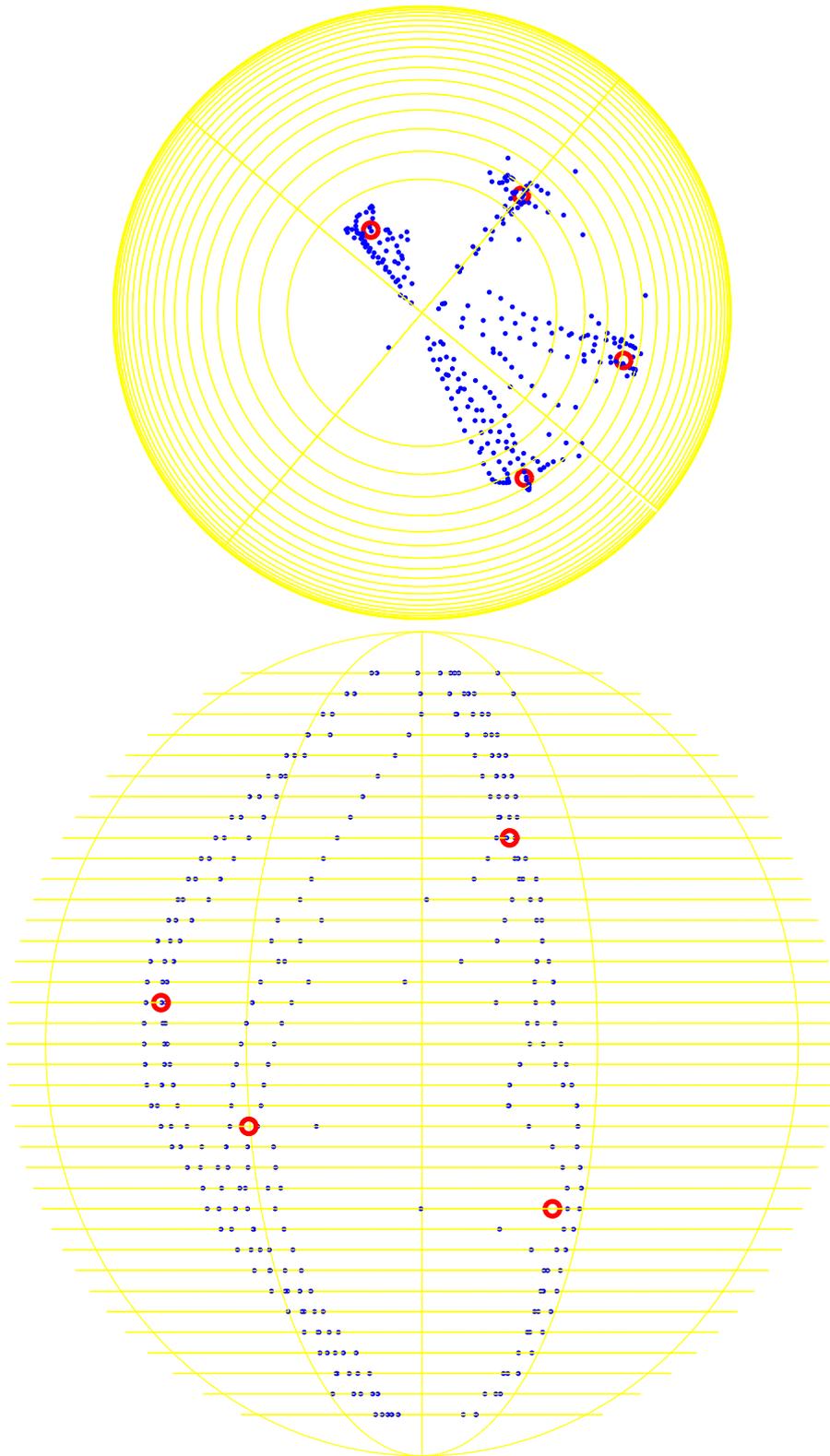


FIG. 2 – 4 dipôles dans  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , approximants de deg. 8

Il faut noter que la théorie des fonctions quaternioniques a donné naissance à une analyse harmonique relativement complète sur la sphère qui est assez similaire à celle du cercle [106, 166, 259], mais l'absence de structure multiplicative à ce jour ne permet pas de définir des analogues aux opérateurs de Hankel et de Toeplitz qui sont si importants pour l'analyse en dimension 2. Le projet APICS tentera d'approfondir ces aspects en relation avec la question ci-dessus. Ce cercle d'idées pourrait faire, le cas échéant, l'objet d'une collaboration avec l'Université de Provence.

## 5.3 Contrôle/modélisation/identification non-linéaire

### 5.3.1 Contrôle, optimisation, feedback

**Participants :** A. Bombrun, J. Grimm, J.-B. Pomet, M. Sigalotti.

On a expliqué en section 3.7 que les travaux d'APICS dans ce domaine porteraient sur l'obtention de *feedback*, tout en gardant le souci de ne pas dégrader un critère qu'il faudrait idéalement optimiser.

On entend ici « stabilisation » dans un sens général : soit la stabilisation asymptotique d'un point d'équilibre, soit l'obtention d'un *feedback* qui permette d'atteindre, par exemple en temps fini, une « cible », qui peut elle-même avoir une dynamique. Stabiliser est un objectif qualitatif, tandis qu'optimiser un critère (par exemple le temps pour atteindre la « cible ») est un objectif quantitatif. Une synthèse optimale (le contrôle optimal écrit comme un *feedback*) est évidemment une solution particulière du problème qualitatif de stabilisation, mais d'une part elle est quasi-impossible à construire explicitement en général, et d'autre part elle est d'une complexité qui la rendrait difficilement implémentable en pratique, voir par exemple [260, 202]. En laissant de côté les cas heureux où une synthèse optimale explicite est possible, on cherchera donc, soit à approcher cette synthèse optimale par un *feedback* explicite, soit tout du moins à quantifier le coût de *feedbacks* stabilisants construits d'autre manière. La question est assez générale, mais APICS a l'intention de focaliser son attention sur des problèmes de contrôle issus du domaine spatial, en particulier le problème du transfert d'orbite en poussée faible (*cf.* section 6.4) dont l'enjeu industriel est important et qui devrait être une source d'inspiration pour des travaux méthodologiques.

Précisons trois directions importantes.

1. *Quantification de feedbacks.* Si l'on a construit un *feedback* par une méthode qui n'est absolument pas reliée au critère que l'on souhaite optimiser, il reste ensuite à quantifier ses « performances ». On peut bien sûr évaluer le critère sur certaines trajectoires-test à l'aide d'une campagne de simulation, ou faire de l'optimisation sur un nombre de paramètres laissés libres dans la construction du *feedback*; cette approche est parfois qualifiée de « directe » dans les problèmes d'ingénierie. Des méthodes un peu plus systématiques pour cette évaluation, par exemple plus indépendantes des conditions initiales choisies, seraient très souhaitables. Cette question n'est pas un « défi » en elle-même, il s'agit plutôt de systématiser des démarches existantes, pour une question à laquelle on a souvent à faire face.
2. *Caractérisation des problèmes de contrôle optimal dont la fonction valeur, non lisse, est proche (au sens  $C^0$ ) de fonctions de Lyapunov contrôlées (lisses).* Les travaux [50, 52] vont dans cette direction en ce qu'ils étudient les fonctions non lisses qui peuvent être limites de fonctions de Lyapunov contrôlées lisses. Il manque une confrontation avec l'étude des synthèses génériques. En effet, bien que non lisse, cette fonction valeur a quand même de la structure : elle est parfois sous-analytique, parfois plus complexe [83, 84]. Cette question précise est très ambitieuse, et APICS n'espère pas obtenir de réponse « générale », mais croit que c'est une façon de penser

fructueuse. Toute réponse, même partielle, serait une contribution importante au contrôle non linéaire.

3. **Applications.** Ces questions sont au cœur de certains problèmes de contrôle en mécanique spatiale (on détaille ces derniers à la section 6.4). D'ailleurs, le programme de recherche ci-dessus est en partie inspiré par le problème de transfert d'orbite, ou de rendez-vous, pour des satellites munis de moteurs à poussée faible (propulsion électrique, moteurs plasmiques). Ce problème pratique, qui a énormément de structure, sera un sujet privilégié pour APICS dans les années à venir. En particulier, une étude géométrique aussi poussée que possible de la synthèse des problèmes de contrôle optimal correspondants ne semble pas hors de portée, et permettrait de donner du corps à la question 2 ci-dessus.

### 5.3.2 Caractérisation de la « platitude »

**Participants :** D. Avanessoff, L. Baratchart, J.-B. Pomet.

**Collaborateur notable :** V. Chetverikov (Univ Baumann, Moscou).

Ce problème, dont on a exposé les bases à la section 3.6, est à la fois difficile et important pour l'automatique non-linéaire. Pour toute fonction  $v$  du temps, on note  $v^{(i)}$  pour  $d^i v/dt^i$ ;  $\dot{v}$  a la même signification que  $v^{(1)}$ . Pour résumer, un système de contrôle

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (13)$$

dont l'état est  $x \in \mathbb{R}^n$  et l'entrée  $u \in \mathbb{R}^m$  sera « plat » si il existe  $m$  fonctions de l'état, de la commande et d'un certain nombre de ses dérivées par rapport au temps

$$y_j = \phi_j(x, u, u^{(1)}, \dots, u^{(k)}), \quad 1 \leq j \leq m,$$

qui soient différentiellement indépendantes et qui permettent d'exprimer  $x$  et  $u$  sans avoir à intégrer d'équations différentielles<sup>22</sup> :

$$(x, u) = \Psi(y, y^{(1)}, \dots, y^{(\ell)}), \quad \text{avec} \quad y^{(i)} = (y_1^{(i)}, \dots, y_m^{(i)}).$$

Si on introduit le module des différentielles du système, *i.e.* l'ensemble des combinaisons linéaires :

$$\sum a_i dx^{(i)} + \sum b_j du^{(j)}$$

où les  $a_i$  et  $b_j$  sont des fonctions de  $x, u$  et d'un nombre finis de leurs dérivées, muni de la relation

$$dx^{(1)} = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial u} du$$

qui permet d'éliminer les  $dx^{(i)}$  pour  $i > 0$ , la platitude est équivalente à l'existence d'une base de formes exactes<sup>23</sup> pour ce module sur l'anneau des opérateurs différentiels en  $d/dt$  à coefficients fonctions. En ce sens, il s'agit donc d'une question d'intégrabilité.

<sup>22</sup> Les travaux initiaux sur les systèmes d'équations différentielles sous-déterminés (voir par exemple [188] pour une rétrospective) portaient sur l'existence de la fonction  $\Psi$ , mais pas des  $\phi_j$  donnant chaque  $y_j$  comme une fonction de l'état, de la commande et d'un certain nombre de ses dérivées. On peut dire que le système (13) *admet une paramétrisation*, ou paramétrisation de Monge, si il existe une fonction  $\Psi$  telle que, pour tout choix de fonctions du temps  $t \mapsto (y_1(t), \dots, y_m(t))$ , les formules  $(x, u) = \Phi(\dots)$  donnent une solution de (13), et que ceci décrive toutes les solutions de (13). Cette propriété est en fait suffisant pour que le système (13) soit linéarisable par *feedback* dynamique (voir section 3.6). L'existence des fonctions  $\phi_j$  assure que, pour chaque solution  $(x, u)$  de (13), il existe un unique choix des fonctions  $y$ , données par la formule ci-dessus ; dans ce cas, le *feedback* linéaire qui permet de linéariser est dit *endogène* [151].

<sup>23</sup>L'existence d'une base de formes possiblement non exactes est en fait assurée par la contrôlabilité du système.

Soit à présent un système de contrôle, dont on voudrait savoir si il est plat et, le cas échéant obtenir des sorties plates  $y_j$ . L'état des connaissances est à ce jour le suivant.

1. Soit on arrive à construire des sorties plates, grâce à une compréhension profonde de la structure du système et/ou grâce aux méthodes disponibles dans la littérature<sup>24</sup> et, dans ce cas, plus aucune question ne se pose concernant l'existence de sorties plates. Tout-au-plus peut-on se demander si on a obtenu les plus simples : par exemple, si l'on en connaît qui dépendent de l'état, des contrôles et des dérivées premières des contrôles, en existe-t-il d'autres qui dépendent seulement de l'état et des contrôles, ou seulement de l'état ?
2. Soit on peut appliquer l'une des rares conditions nécessaires disponibles dans la littérature pour décider que le système n'est *pas* plat. La seule condition nécessaire générale, outre la contrôlabilité de l'approximation linéaire est le « critère de surface réglée » [242, 248]. On peut aussi se rapporter pour certaines classes de systèmes particulières aux conditions nécessaires et suffisantes mentionnées dans la note 24 en bas de page.
3. Sinon on est réduit à rechercher des sorties plates de la manière suivante : d'abord comme fonctions de l'état seulement, en écrivant les relations différentielles qu'elles doivent satisfaire, pour parvenir (par chance) à une solution explicite ou du moins à un développement en série ou bien à une contradiction<sup>25</sup> qui montre qu'il n'existe pas de sorties plates dépendant de l'état seulement ; on peut alors reprendre la même démarche pour des fonctions de l'état et des contrôles puis, si une nouvelle contradiction survient, de l'état des contrôles et de leurs dérivées premières, et ainsi de suite<sup>26</sup> ...

Il est juste de dire que la principale difficulté, c'est-à-dire le fait que les objets recherchés (les sorties plates) soient des fonctions dépendant potentiellement d'une infinité de variables, n'est surmontée que dans les travaux mentionnés à l'item 2.

Un travail de longue haleine dans le but de développer une théorie de l'intégrabilité formelle « à une infinité de variables », qui donne un sens aux équations qui régissent les sorties plates indépendamment du nombre de variables dont elles dépendent, a été mené depuis plusieurs années au sein du projet MIAOU. Il se trouve que ce travail a porté quelques fruits. L'article préliminaire [3] décrit une valuation naturelle, adaptée au système de contrôle en un point, qui permet de donner un sens formel à la notion de troncature à un certain ordre des « équations de la platitude ».

Nous fondons de grands espoirs, à court terme, sur ces résultats, et sur une collaboration récente avec V. Chetverikov (Univ. Bauman), qui a mené des travaux tout-à-fait complémentaires aux nôtres, voir [129]. Le projet est de mettre sur pied des méthodes explicites pour tester l'existence de sorties plates, au moins localement dans le cas analytique, et de les rendre effectives à l'aide de systèmes de calcul formel, en collaboration avec nos collègues du projet CAFE.

---

<sup>24</sup> Pour les systèmes à un contrôle, ou à deux contrôles mais linéaires en les contrôles (c'est-à-dire du type  $\dot{x} = u_1 f_1(x) + u_2 f_2(x)$ , avec  $u_1$  et  $u_2$  scalaires), la platitude est entièrement caractérisée ; c'est essentiellement contenu dans [121], et explicité pour les systèmes de contrôle dans [126] et [216], voir aussi [75, §6]. La situation des systèmes affines en les contrôles à quatre états et deux entrées est élucidée dans [76] pour le cas où on ne dérive pas la commande.

<sup>25</sup> La théorie de l'intégrabilité formelle est bien résumée dans [113] ; pour les systèmes ne faisant intervenir que des fonctions polynomiales, on peut par exemple employer le package `diffalg` du système de calcul formel Maple.

<sup>26</sup> Pour les systèmes à quatre états et deux commandes dont la dynamique est affine en ces commandes (ce sont les premières dimensions pour lesquelles le problème est véritablement non-trivial), les conditions nécessaires et suffisantes [76] pour l'existence de fonctions linéarisantes dépendant de l'état et de la commande (mais pas des dérivées de la commande) sont certes explicites mais pointent la complexité de la question.

## 6 Applications, validation

Les applications que le projet APICS met en avant dans son activité scientifique concernent :

1. la résonance en cavités pour le filtrage hyperfréquence,
2. le couplage de circuits électriques par ondes surfaces pour le filtrage SAW-SPUDT (Surface Acoustic Wave-Single Phase UniDirectional Transducer),
3. la détection de sources et de défauts sur des modèles diffusifs associés à un Laplacien en dimension deux ou trois, pour le contrôle non-destructif de matériaux ou la modélisation de l'activité cérébrale,
4. le contrôle spatial,
5. la régénération des signaux optiques.

Toutes ces activités, à des degrés de profondeur très divers, ont été initiées du temps du projet MIAOU. On peut dire *grosso modo* que l'item 1 est le plus ancien et vit sa maturité, cependant que l'item 2 n'a pas encore vraiment débouché et que les items 3 et 4 sont émergents mais de ceux qu'APICS veut développer fortement. L'item 5 est un peu à part méthodologiquement, et résulte d'une opportunité dont le futur n'est pas encore complètement défini.

Ce qui unifie les trois premiers items, c'est que les modèles sous-jacents sont holomorphes (pour généraliser la définition usuelle à la dimension 3, on dit qu'un champ de vecteurs est holomorphe si c'est le gradient d'une fonction harmonique). Ceci reflète le formalisme utilisé pour décrire les phénomènes physiques sous-jacents (la transformée de Fourier et l'opérateur de Laplace sont ici responsables de l'intervention de l'holomorphie).

En dernière analyse, les approches développées par le projet MIAOU pour les 3 premiers items consistent toujours plus ou moins à poser les problèmes inverses sous-jacents comme celui de l'approximation d'un potentiel (logarithmique en dimension 2, Newtonien en dimension 3) par un potentiel discret. Là se révèle la structure particulière que l'on cherche à exploiter.

### 6.1 Filtrage hyperfréquence

**Participants :** L. Baratchart, J.-P. Marmorat, F. Seyfert

Le domaine des hyperfréquences est le seul dans lequel le projet MIAOU a une expérience de plusieurs années allant de recherches assez abstraites jusqu'au transfert industriel. Partant, c'est le sujet dont APICS cerne le moins mal la prospective. La demande socio-industrielle est forte et ne devrait pas se démentir pendant plusieurs années encore : les transmissions satellitaires ont une capacité de couverture inégalée et la plupart des applications fortement factorisées (comme la télévision) devraient continuer d'emprunter ce vecteur, de même que les missions d'observation de la planète qui sont sûrement amenées à prendre de l'importance. Par ailleurs, les exigences de débit et les contraintes physiques liées à l'embarquement ne présagent pas d'un avènement prochain du « tout numérique » dans le traitement des signaux satellitaires. Aussi, l'aide informatisée à la conception et au réglage de filtres analogiques semble-t-elle avoir de l'avenir, surtout si l'on considère que la chaîne de ré-amplification (filtrage, démultiplexage, amplification, remultiplexage, filtrage) compose l'essentiel de la charge utile d'un satellite de télécommunications. Ceci se renforce du fait que les constellations de satellites envisagées aujourd'hui, si elles voient le jour, exigeront la réalisation de batteries de filtres par centaines, et que les spécifications pointues en réjection et en largeur de bande peuvent demander des semaines de mises au point, quelquefois infructueuses. A son passif, la transmission par satellite ne propose pas pour l'instant de solution technique claire à la prise en compte des requêtes individuelle des utilisateurs

(il est difficile d'organiser l'accès de chaque utilisateur à une station montante). Elle devra pallier cela pour ne pas subir à terme la concurrence des fibres optiques sur ce plan.

Un regroupement des acteurs européens dans le domaine du filtrage (EADS-Astrium, Alcatel-Space,...) pourrait se dessiner à moyen terme. Notons que TESAT (ex Bosch) semble travailler davantage en collaboration avec les laboratoires universitaires sous l'égide de l'ESA (notamment l'Université de Darmstadt) que ses homologues français. L'ETH est aussi un laboratoire actif en physique des hyperfréquences. Dans l'hexagone, c'est surtout le CNES qui fédère la recherche de laboratoires comme l'IRCOM (Limoges), l'INRIA, ou d'entreprises de logiciels comme CADOE, en collaboration avec les industriels nationaux. Notons que le numéro un mondial des filtres micro-ondes, le canadien COMDEV, n'est pas équipementier (il fournit des équipementiers, notamment ceux du continent Nord-Américain comme Lockheed-Martin), et dépend donc davantage de son innovation que d'autres. Le projet MIAOU a reçu le soutien du CNES depuis des années et collaboré de longue date avec l'IRCOM. Il a transféré certains de ses outils chez Alcatel-Space depuis deux ans, tout en essayant d'élargir sa base de contacts au sein du domaine des micro-ondes. APICS compte s'appuyer sur ces acquis pour rester un acteur de cette communauté.

Au plan technique, l'approche développée par le projet MIAOU, qui systématise le recours aux problèmes extrémaux dans des espaces de fonctions analytiques pour la détermination de la matrice de répartition du modèle passe-bas, a montré une réelle efficacité pour ce qui est de l'aide à la conception et au réglage d'IMUX (Input MULTipleXer) *via* les logiciels *hyperion*, *RARL2* et *PRESTO-HF*[15] (voir aussi section 4). Elle paraît posséder un peu d'avance sur les méthodes développées dans la communauté, dont certaines, d'ailleurs, commencent à prôner à leur tour l'usage de techniques d'approximation polynomiales ou rationnelles. La figure 3 illustre cette approche sur un exemple à cinq cavités comportant 10 pôles et 8 zéros, les couplages associés étant à titre indicatif donnés par la matrice :

$$\begin{pmatrix} -0.068 & 0.795 & 0.000 & 0.058 & 0.000 & 0.067 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.795 & 0.060 & 0.542 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.542 & 0.016 & 0.562 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.058 & 0.000 & 0.562 & 0.006 & -0.522 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.522 & -0.029 & 0.504 & 0.000 & 0.012 & 0.000 & 0.000 \\ 0.067 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.504 & 0.023 & 0.534 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.534 & -0.020 & -0.210 & 0.000 & -0.688 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.012 & 0.000 & -0.210 & 0.075 & 0.975 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.975 & -0.083 & -0.504 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.688 & 0.000 & -0.504 & 0.071 \end{pmatrix}$$

Le nouveau projet pense que la théorie des fonctions et l'analyse harmonique, dans ses aspects analytiques à valeurs matricielles, et plus particulièrement les problèmes extrémaux (approximation sous contraintes variées de norme ou de degré, voir section 5.1.1), pourrait jouer un rôle conséquent dans les progrès à moyen terme de la conception des dispositifs hyperfréquences, à mesure que leur association aux équations différentielles de la propagation et de la résonance (Maxwell et Helmholtz) ira croissant. Par ailleurs, la détermination des paramètres physiques du modèle passe-bas, à partir de sa matrice de répartition, a fait l'objet d'expériences assez convaincantes de la part du projet MIAOU (*cf.* section 5.1.5) en couplant une interprétation automatique des équations à un logiciel de résolution symbolico-numérique, pour déterminer tous les jeux de paramètres possibles (le problème n'est généralement pas univoque). Ceci semble indiquer que la théorie classique des systèmes, d'une part, et les outils de résolution d'équations algébriques, d'autre part, sont aussi des ingrédients importants pour l'avancement du sujet. C'est donc un domaine où pourraient se valoriser des collaborations entre APICS et des projets comme CAFÉ, COPRIN, GALAAD, ou SPACES.

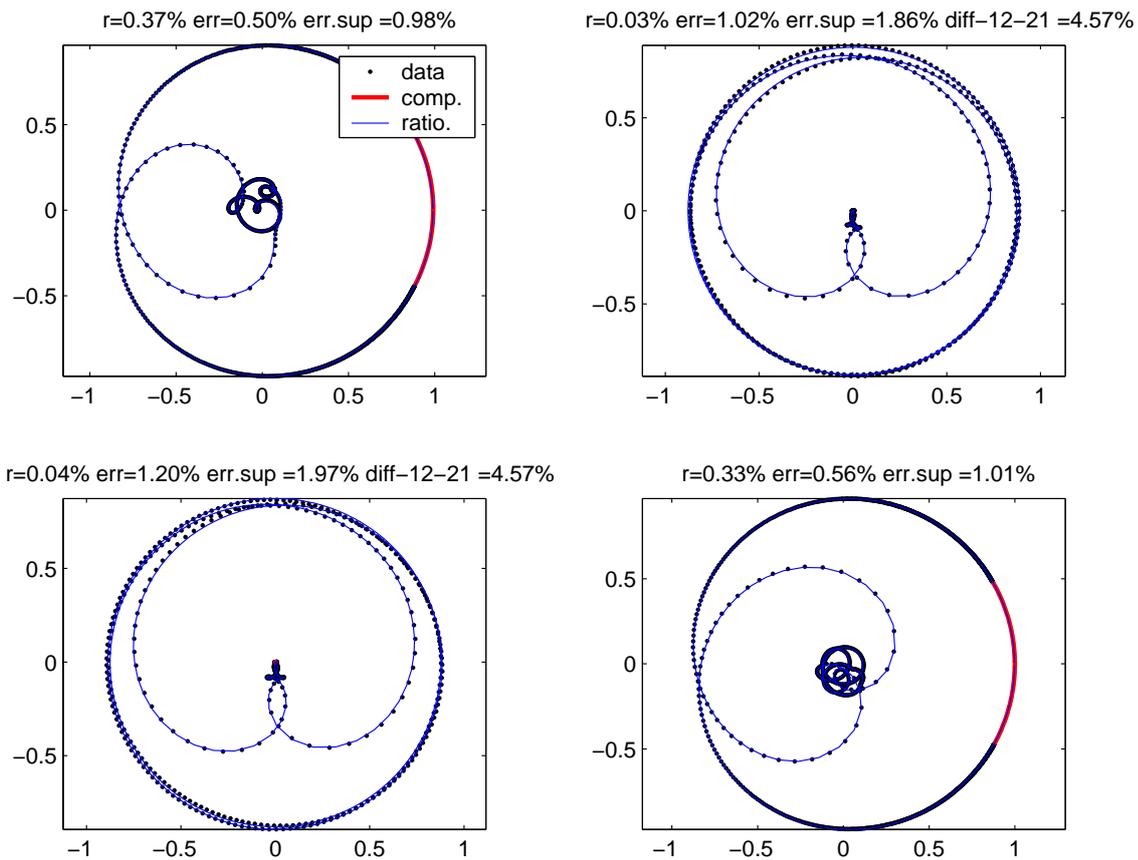


FIG. 3 – La procédure d'identification fréquentielle fondée sur la résolution d'un problème extrémal (pour compléter les données partielles) suivie d'une approximation rationnelle, illustrée à l'aide du logiciel PRESTO-HF sur un filtre résonnant à cinq cavités (10 pôles) proposé par Alcatel-Space (centre de Toulouse). Les quatre voies (réflexion et transmission à chacun des deux ports) sont figurées séparément par leur diagramme de Nyquist. Les points figurent les données mesurées, le trait continu est l'approximant rationnel matriciel de degré 10.

Soulignons que les concepts d'une approche dédiée comme celle-ci doivent se situer assez en amont pour ne pas être trop dépendants de la technologie : peut-être assistera-t-on dans un futur proche au développement d'autres types de filtres, (citons les dispositifs à ruban ou encore corrugués pour le traitement passe-bas de sortie) ; même si les modèles en éléments localisés correspondants n'ont pas encore été complètement mis au point par les physiciens des micro-ondes, il est fondamental pour un projet de recherche en mathématiques appliquées de mener des réflexions qui puissent se transposer, le cas échéant, à des contextes nouveaux.

Un enjeu important du traitement des signaux hyperfréquence pour le futur projet (*cf.* section 3.1) serait la conception et le réglage des OMUX (Output MULTipleXer). Il s'agit de batteries de filtres couplés en parallèle par un guide d'ondes. Par rapport au cas d'un seul filtre, évoqué au paragraphe précédent, le problème se complique du fait que la modélisation inclut des retards, induits par les longueurs de guide, et que la règle de chaînage introduit la distance hyperbolique entre matrices de répartition des différents canaux. Quoique dégrossi par l'étude individuelle de chaque filtre, le problème est calculatoirement plus lourd que précédemment et aussi plus spécialisé. Par une approche directe, développée en collaboration avec le CMA et testée sur deux situations délicates, nous avons obtenu des résultats comparables à ceux déjà obtenus par Alcatel-Space au moyen d'un code « d'optimisation » générique. Le seul progrès significatif a été le gain de temps, dû au calcul explicite du gradient, que l'« optimiseur » générique n'effectue même pas. Il s'agit d'exemples sur lesquels les spécifications ne sont pas remplies, et où l'industriel a par ailleurs imposé des contraintes à certains paramètres parce qu'il souhaitait réutiliser plusieurs éléments du dispositif. On se trouve ainsi dans un cas typique où l'on voudrait : soit des bornes certifiées pour éclaircir ce que l'on peut espérer sous les contraintes en question, soit une méthode dédiée qui fasse mieux que l'approche directe. APICS croit possible le développement d'une telle méthode, en se fondant d'une part sur une version hyperbolique des problèmes extrémaux déjà mentionnés pour les IMUX, et d'autre part sur la géométrie des matrices intérieures pour procéder récursivement par ajout de cavités. Cependant, le caractère presque périodique des exponentielles assure la présence de nombreux optima locaux, et interagit de manière délicate avec la discrétisation en fréquence. L'idéal serait d'obtenir des bornes *a priori* sur les longueurs de guide qui assurent l'unimodalité. C'est un champ d'investigation intéressant qui s'ouvre ici, enrichissant la classe des fonctions à considérer et faisant jouer un rôle premier à la distance hyperbolique. Mais il s'agit d'une recherche d'assez longue haleine, relativement spécialisée (il n'y a peut-être pas beaucoup d'autres applications qu'aux OMUX), demandant une masse critique d'efforts en partenariat pour aboutir. APICS est décidé à faire cet investissement dans la mesure où le CNES et Alcatel-Sace ne démentent pas leur intérêt.

## 6.2 Filtres à ondes de surface

**Participants :** *L. Baratchart, P. Enqvist, A. Gombani, M. Olivi*

Il s'agit de circuits électriques imprimés sur un substrat piézo-électrique, qui échangent de l'énergie *via* les ondes acoustiques qu'ils engendrent dans ce substrat. Le but est de réaliser une fonction de filtrage entre les ports de deux circuits, très similaire à celle des filtres résonnants évoqués dans la section précédente. Il y a cependant une différence fondamentale : il y a ici deux types d'énergie en jeu, électrique et acoustique (*cf.* section 5.1.5). En particulier, l'une des principales difficultés est de dissiper aussi peu d'énergie acoustique que possible au voisinage de la fréquence considérée c'est à dire de rendre la transmission aussi unidirectionnelle que possible, ce qui explique l'appellation *Single-Phase UniDirectional Transducer* (SPUDT).

L'expérience de MIAOU sur ce type de système est limitée, et se résume à une collaboration avec

Thomson Microsonics, fabricant de puces pour le téléphone mobile, qui a duré environ deux ans. Le modèle physique se présente sous forme de relations récursives, à mesure que l'on chaîne les cellules, qui sont du type Szegő (récurrences à trois termes qui lient les polynômes orthogonaux). Le projet a investi un temps significatif, dans l'écriture d'une réalisation de la matrice de scattering explicite en fonction des paramètres physiques, et l'analyse de la sévérité des contraintes sur les valeurs des paramètres physiques (coefficients de réflexion et de source) qui sont faibles de par la technologie actuelle (mais celle-ci évolue rapidement); il a enfin tenté de synthétiser directement les paramètres physiques en utilisant un code d'« optimisation » générique, sans beaucoup de succès. A ce stade, l'industriel s'est quelque peu désengagé cependant que le MIAOU, convaincu de la nécessité d'une approche spécifique, s'est attelé à établir quelques conjectures sur le type de modèle que l'on peut réaliser qui n'ont pas encore été vérifiées mais ont tout de même considérablement progressé [12] (*cf.* section 5.1.5).

La conception de filtres SAW-SPUDT est un sujet intéressant au plan scientifique, où l'analyse de Schur matricielle, les polynômes orthogonaux, et les opérateurs de Hankel interviennent dès le premier stade de modélisation macroscopique. Cependant, c'est une recherche qui n'est pas à court terme et qui nécessite là encore un partenariat étroit avec les physiciens. Comme le domaine évolue très vite, et que les débouchés sont soumis à de fortes fluctuations économiques, il n'est pas facile pour un projet de recherche de nouer des relations directement avec un industriel qui fait face à de nombreux impératifs et aléas. Pour ce qui est du futur proche, APICS compte mener à bien les travaux entamés par MIAOU sur la modélisation fréquentielle de ces dispositifs, car il considère cela comme un investissement dont l'intérêt déborde largement l'application initialement envisagée. A moyen terme, il souhaite recontacter un partenaire industriel dans ce domaine assez vaste lorsqu'il pensera avoir véritablement avancé au plan méthodologique.

### 6.3 Contrôle non-destructif

**Participants :** *L. Baratchart, F. Ben Hassen, M. Jaoua, I. Fellah, J. Leblond, M. Mahjoub, J.-P. Mar-morat, J.R. Partington.*

**Collaborateurs notables :** *A. Ben Abda, S. Chaabane (LAMSIN-ENIT, Tunis).*

Les applications visées à terme assez rapproché sont de contribuer à la détection de sources ponctuelles suivant des modèles couramment utilisés en magnéto-encéphalographie, notamment en collaboration avec le projet ODYSSEÉ autour du problème inverse MEEG et au travers de l'ACI « OBS-CERV », *cf.* section 5.2. Le projet est également en train de nouer des contacts avec S. Lowitzsch (Center for Advanced Imaging, West Virginia Univ.) sur les mêmes problèmes et aussi sur ceux issus de la résonance magnétique. Le but est de faire progresser l'exploration fonctionnelle du cerveau, que ce soit pour l'avancement des connaissances elles-mêmes concernant les potentiels d'évènements ou pour le diagnostic (par exemple la détection des foyers épileptiques). Le traitement des données magnétiques (mesures du champ ou du flux magnétiques) n'a pas encore été considéré, bien qu'il se formule encore (sous l'hypothèse quasi-statique) par le biais d'un opérateur de Laplace; la solution, cependant, est ici un potentiel magnétique, vecteur dont dérive le champ magnétique. Celui-ci sera nécessaire pour aborder le problème inverse MEEG dans sa globalité (puisque l'on dispose aussi pour le résoudre de mesures du champ magnétique prélevées sur le scalp, en vue de retrouver les défauts de conductivité).

D'autres applications à connotation médicale sont envisagées, plus spécialement l'inversion de la transformée de Radon *via* la résolution de problèmes de moments bi-dimensionnels (*cf.* section 5.1.3) pour la tomographie, mais il ne s'agit pour l'instant que d'un projet de recherche pour lequel APICS

n'a pas encore de partenaire.

Les possibilités de considérer d'autres opérateurs elliptiques, comme celui de l'équation de Helmholtz pour l'*inverse scattering* (détection d'obstacles, prospection des sous-sols, ...) ou encore l'équation  $-\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0$ , qui généralise le Laplacien au cas d'une conductivité  $\sigma$  variable et sert par exemple en tomographie d'impédance sont envisagées à un horizon plus lointain. Elles pourraient faire l'objet de collaborations avec l'UNSA, l'UTC (Compiègne), ainsi que les projets ODYSSÉE et OPALE.

Bien d'autres problèmes de contrôle non destructif font intervenir des mesures électriques ou magnétiques, parmi lesquels on peut citer la reconstruction géométrique (forme et position) d'un arc électrique dans un court-circuit, élément constituant majeur des réseaux de distribution électrique [109], la vérification de matériaux (tuyaux, pièces métalliques ...) [93], ou encore l'identification de la frontière intérieure du plasma (gaz ionisé produisant des réactions de fusion nucléaire) dans un Tokamak (dispositif de confinement magnétique du plasma utilisé en recherches sur la fusion thermonucléaire) [104]. Ces exemples relèvent des techniques 2-D à cause de leur symétrie axiale, et pourraient de ce fait valoriser plus directement les acquis de MIAOU. Le projet APICS n'a pas pour l'instant noué de partenariat en ce qui les concerne, mais étudiera la possibilité d'y adapter ses techniques. Le confinement de plasma pourrait, le cas échéant, faire l'objet d'une collaboration avec l'UNSA.

## 6.4 Contrôle et mécanique spatiale

**Participants :** *J. Grimm, J.-B. Pomet, M. Sigalotti, A. Bombrun.*

Les problèmes de mécanique spatiale et de contrôle de ces satellites sont un peu l'intendance des technologies de communication satellitaires, et posent des problèmes d'automatique difficiles. Pour les résoudre, l'industrie spatiale est très demandeuse de lois de contrôle précises et performantes. Par exemple, dans le domaine de la propulsion de satellites, la limitation de la quantité d'ergol qu'on peut embarquer rend très pertinente la minimisation de la consommation, ou du temps de parcours.

Un contrat d'étude est en cours avec Alcatel Space (établissement de Cannes), sur le problème de transfert orbital en poussée faible. Spécifiquement, le carburant (les ergols) représente à lui seul une part très importante de la masse d'un satellite à son lancement, ce qui réduit d'autant la masse que l'on peut consacrer à la charge réellement utile pour la mission (télécommunication, surveillance, etc..) puisque la masse totale est limitée par la capacité des lanceurs. Il est donc naturel que l'on ait cherché à développer des moyens de propulsion à rendement très élevé. Les progrès de la physique ont permis de rendre opérationnels des modes de propulsion électriques (moteurs ionique, à plasma, etc..) qui ont un rendement bien meilleur que les moteurs chimiques classiques, mais en contrepartie une puissance instantanée considérablement plus faible. Ceci rend par exemple le temps de mise à poste nettement plus long, et résulte en une grande difficulté numérique pour calculer des contrôles « optimaux » (en temps ou en consommation de carburant). Par ailleurs, il est souhaitable d'obtenir, plutôt qu'une loi de commande en « boucle ouverte » obtenue numériquement, un contrôle de type *feedback* qui se comporte bien vis-à-vis d'évènements comme des arrêts de poussée dûs à des passages à l'ombre. Ce problème est donc un excellent prototype pour le programme de recherche décrit en section 5.3.1.

La mécanique spatiale pose de nombreux problèmes de contrôle délicats, qui sont importants vues les conditions extrêmes et la très longue durée de vie exigée d'un satellite. Le projet APICS souhaite intensifier son effort dans ce domaine applicatif; dans un futur immédiat, cela se concrétise par la venue d'A. Bombrun (doctorant) et de M. Sigalotti (post-doctorant), tous deux motivés par le sujet. L'environnement régional y est favorable puisqu'Alcatel Space a installé un département « recherche » dans son établissement de Cannes. Par ailleurs, le problème spécifique du transfert en faible poussée

intéresse d'autres équipes avec lesquelles nous collaborons, comme le CAS (Fontainebleau), l'Univ. Paris-Sud, ou l'université de Bourgogne.

Notons qu'une proposition de réseau RTN (action Marie Curie) vient d'être soumise sur ce thème, voir section 7.2, point 10. Dans cette proposition, l'équipe baptisée INRIA inclut des chercheurs du projet, mais aussi des enseignants-chercheurs des universités de Bourgogne et de Paris-sud.

## 6.5 Automatique pour l'optique non-linéaire

L'augmentation du débit des signaux numériques dans les réseaux d'information est un enjeu industriel majeur. Le moyen le plus performant à l'heure actuelle pour transporter ces signaux de manière individuelle entre le serveur et l'utilisateur est de les faire porter par des ondes lumineuses se propageant dans des fibres optiques. L'utilisation de ce *médium* à la limite de ses temps de réponse pose de nombreux problèmes de contrôle pour maintenir un signal aussi peu altéré que possible, à la fois dans les fibres elles-mêmes et dans les dispositifs de routage et/ou de régénération « tout-optique ». Le projet MIAOU s'est intéressé au cours des deux dernières années au problème de la régulation d'un composant consacré à la régénération tout optique. Le cadre contractuel liait l'INRIA à Alcatel CIT (Marcoussis).

Le travail effectué à cette occasion ne constitue pas une avancée méthodologique du point de vue de l'automatique, mais plutôt une synthèse fructueuse entre des idées de physiciens et d'automaticiens dont la connaissance des outils classiques de modélisation mathématique a été utile. C'est certainement un transfert de connaissances concret puisque cette collaboration d'un an débouche sur un brevet Européen<sup>27</sup>, déposé par Alcatel CIT, dont trois des inventeurs sont des membres de la future équipe. Il n'est donc pas opportun pour APICS d'abandonner cette collaboration, bien qu'il soit difficile de l'intégrer dans le programme de recherche développé par le présent document. Dans le problème précis auquel nous nous sommes intéressés, aller plus loin nécessite un étonnamment gros investissement mathématique pour aboutir à un modèle pertinent en contrôle. APICS poursuivra ses contacts avec Alcatel CIT pour motiver ces développements.

## 7 Collaborations

### 7.1 Partenaires académiques

À l'INRIA : projets CAFÉ, COPRIN, GALAAD, ICARE et ODYSSEÉ à Sophia Antipolis, et, dans d'autres U.R., SPACES, SIGMA2.

Dans la région : CMA (École de Mines, Sophia-Antipolis), UNSA (labo. J.-A. D.), Observatoire Nice Côte d'Azur, Univ. de Provence (LATP, Marseille),

Ailleurs en France : CAS (École de Mines, Sophia-Antipolis), IRCOM (Limoges), UTC (Compiègne), Univ. de Lille, Univ. de Bourgogne (Dijon), Univ. de Besançon, Univ. de Bordeaux I, CEMA-GREF (Montpellier).

Dans le monde : LAMSIN-ENIT (Tunis, Tu.), T.F.H. Berlin (All.), Univ. Szeged (Hongrie), LADSEB-CNR (Padoue, It.), Vanderbilt Univ. (Nashville, USA), Michigan State Univ. (East Lansing), Univ. Beer Sheva (Isr.), Univ. Leeds (G.B.), Univ. Maastricht et CWI (Hol.), Acad. de Sc. de Pologne (Varsovie), SISSA (Trieste (It.)).

---

<sup>27</sup>Brevet numéro 03292257.7-, enregistré le 19/09/2003.

## 7.2 Conventions

### Conventions en cours

1. ACI Masse de données « OBS-CERV », avec les projets CAIMAN, ODYSSEE (INRIA-Sophia, ENPC), l'UNSA (labo. Dieudonné), le CEA, le CNRS-LENA (Paris), et plusieurs services hospitaliers, 2003-2006 (problèmes inverses EEG, localisation de sources).
2. Région PACA : financement à 50% du séjour post-doctoral de Per Enqvist, et soutien financier pour des échanges avec le SISSA (Trieste, It.).
3. NATO CLG (Collaborative Linkage Grant), PST.CLG.979703, « Constructive approximation and inverse diffusion problems », avec Vanderbilt Univ. (Nashville, USA) et le LAMSIN-ENIT (Tunis, Tu.), 2003-2004.
4. Partenaire d'un NSF EMSW21 Research Training Group formé par l'INRIA-Sophia et l'Université Vanderbilt (Nashville, USA).
5. Marie Curie EIF (Intra European Fellowship) FP6-2002-Mobility-5-502062, (24 mois, 2003-2005), qui finance le séjour post-doctoral de Mario Sigalotti.
6. Marie Curie Multi-partner Training Site HPMT-CT-2001-00278 « Control Training site », 2001-2005.

### Conventions soumises

7. Réseau européen TMR-RTN-ERNSI (identification des systèmes). Participation du projet depuis 1992. Renouvellement en cours d'examen dans le 6<sup>e</sup> PCRD. Partenaires : KTH Stockholm, Univ. Linköping (Suède), SZTAKI Budapest (Hongrie), CWI / T.U. Delft / T.U. Eindhoven (Pays bas), T.U. Vienne (Aut.), Univ. Cambridge (GB), Univ. Louvain (Belgique), Univ de Padoue (It.)
8. Demande de subvention INRIA-Universités Tunisiennes, proposition STIC, avec le LAMSIN-ENIT (Tunis, Tu.), 2004, soumise.
9. Demande de soutien de l'Institut Lyapunov pour échanges entre le projet et l'Université Baumann (Moscou), soumise.
10. Proposition de réseau Marie Curie RTN, sur le thème de l'automatique pour le spatial, « innovative space applications of advanced control theory » (ISAAC), novembre 2003. Partenaires, outre l'INRIA : ESA, École des Mines, DLR (Deutschen Zentrum für Luft- und Raumfahrt), Univ. de Calabre, Politecnico Milano, T. U. Eindhoven, T. U. Delft, Imperial College, Univ. Aalborg.

## 7.3 Contrats industriels

**Partenaires avec lesquels MIAOU est lié par des contrats en cours** qu'APICS reprendra à son compte.

- CNES Toulouse (filtres hyperfréquences),
- Alcatel-Space Toulouse (filtres hyperfréquences),
- Alcatel-Space Cannes (contrôle orbital de satellites).

**Partenaires avec lesquels MIAOU a été lié par des contrats** et avec lesquels APICS pourrait reprendre une collaboration.

- Thalès (filtres à ondes de surface),
- Alcatel CIT Marcoussis (contrôle de dispositifs de régénération de signaux dans les fibres optiques, dépôt de brevet en Sep. 2003).

## 8 Diffusion des connaissances

### 8.1 Enseignement et formation

Pour 2003-2004, cours au DEA Géométrie et Analyse, LATP-CMI, Univ. de Provence (Marseille).

Enseignement des mathématiques au collège (cycle 12-15 ans de l'école Montessori « les Pouces Verts », Mouans-Sartoux).

Membre (correspondant : J.B. Pomet) du Marie Curie Multi-partner Training Site HPMT-CT-2001-00278 « Control Training site », 2001-2005

Membre (correspondants : L. Baratchart et B. Mourrain) du NSF EMSW21 Research Training Group formé par l'INRIA-Sophia et l'Université Vanderbilt (Nashville, USA), 2003–2005.

### 8.2 Animation de la communauté scientifique

Les membres du projet ont participé à la direction et à l'organisation de l'école thématique d'été CNRS-INRIA, *Analyse Harmonique et Approximation Rationnelle : leurs rôles en théorie du signal, du contrôle et des systèmes dynamiques*, Porquerolles, septembre 2003.

L. Baratchart est Conférencier invité à *Constructive Functions Tech-04*, Georgia Tech, 7-9 Novembre 2004.

L. Baratchart est membre du comité Éditorial de *Computational Methods and Function Theory*

## Bibliographie de l'équipe

- [1] D. Alpay, L. Baratchart, and A. Gombani. On the differential structure of matrix-valued rational inner functions. *Operator Theory : Advances and Applications*, 73 :30–66, 1994.
- [2] D. Alpay, L. Baratchart, and J. Leblond. Some extremal problems linked with identification from partial frequency data. In R. Curtain, A. Bensoussan, and J. Lions, editors, *10th conference on analysis and optimization of systems, Sophia-Antipolis 1992*, volume 185 of *Lect. Notes in Control and Information Sc.*, pages 563–573. Springer-Verlag, 1993.
- [3] D. Avanesoff, L. Baratchart, and J.-B. Pomet. Sur l'intégrabilité (très) formelle d'une partie des équations de la platitude des systèmes de contrôle. Rapport de recherche, INRIA, Dec. 2003.
- [4] L. Baratchart. Existence and generic properties for  $L^2$  approximants of linear systems. *I.M.A. Journal of Math. Control and Identification*, 3 :89–101, 1986.
- [5] L. Baratchart. On the topological structure of inner functions and its use in identification. In B. Bonnard, B. Bride, J. Gauthier, and I. Kupka, editors, *Analysis of Controlled Dynamical Systems, Lyon, France, 1990*, Progress in Systems and Control Theory, vol. 8, pages 51–59. Birkhauser, 1990.

- [6] L. Baratchart. Rational and meromorphic approximation in  $L^p$  of the circle : system-theoretic motivations, critical points and error rates. In N. Papamichael, S. Ruscheweyh, and E. Saff, editors, *Computational Methods and Function Theory*, pages 45–78. World Scientific Publish. Co, 1999.
- [7] L. Baratchart, A. Ben Abda, F. Ben Hassen, J. Leblond, and J.-P. Marmorat. Sources identification using meromorphic approximation. In *Proceedings AMAM 2003 (Nice)*, 2003. Version longue en préparation.
- [8] L. Baratchart, M. Cardelli, and M. Olivi. Identification and rational  $L^2$  approximation : a gradient algorithm. *Automatica*, 27(2) :413–418, 1991.
- [9] L. Baratchart, M. Chyba, and J. Pomet. On the Grobman-Hartman theorem for control systems. Submitted, J. of Diff. Equations.
- [10] L. Baratchart, M. Chyba, and J.-B. Pomet. On the differentiability of feedback linearization and the Hartman-Grobman theorem for control systems. In *38th IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 1617–1622, Phoenix (USA), Dec. 1999.
- [11] L. Baratchart, M. Chyba, and J.-B. Pomet. Topological versus smooth linearization of control systems. In *Contemporary trends in nonlinear geometric control theory and its applications*, pages 203–215. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2002.
- [12] L. Baratchart, P. Enqvist, A. Gombani, and M. Olivi. Surface acoustic wave filters, unitary extensions and Schur analysis. in preparation.
- [13] L. Baratchart, A. Gombani, and M. Olivi. Parameter determination for surface acoustic wave filters. In *39th IEEE Conf. on Decision and Control (CDC)*, Sydney (Australie), Dec. 2000.
- [14] L. Baratchart and J. Grimm. An elementary proof of the nonexistence of canonical forms in the real and complex case. *System & Control Lett.*, 3 :193–196, 1983.
- [15] L. Baratchart, J. Grimm, J. Leblond, M. Olivi, F. Seyfert, and F. Wielonsky. Identification d’un filtre hyperfréquences par approximation dans le domaine complexe. Rapport technique 0219, Inria, 1998.
- [16] L. Baratchart, J. Grimm, J. Leblond, and J. Partington. Asymptotic estimates for interpolation and constrained approximation in  $H^2$  by diagonalization of Toeplitz operators. *Integral Equations and Operator Theory*, 45 :269–299, 2003.
- [17] L. Baratchart, R. Küstner, and V. Totik. Zero distribution via orthogonality. En préparation.
- [18] L. Baratchart and J. Leblond. Identification harmonique et trace des classes de Hardy sur un arc de cercle. In *Actes du Colloque en l’honneur du 60<sup>e</sup> anniversaire du professeur Jean C ea, Sophia-Antipolis, avril 1992*, pages 17–29. C epadu es-Editions, 1993.
- [19] L. Baratchart and J. Leblond. Hardy approximation to  $L^p$  functions on subsets of the circle with  $1 \leq p < \infty$ . *Constructive Approximation*, 14 :41–56, 1998.
- [20] L. Baratchart, J. Leblond, F. Mandréa, and E. Saff. How can meromorphic approximation help to solve some 2D inverse problems for the Laplacian ? *Inverse Problems*, 15(1) :79–90, 1999.
- [21] L. Baratchart, J. Leblond, and J.-P. Marmorat. Sources identification in 3D balls using meromorphic approximation in 2D disks. En préparation.
- [22] L. Baratchart, J. Leblond, and J. Partington. Hardy approximation to  $L^\infty$  functions on subsets of the circle. *Constructive Approximation*, 12 :423–436, 1996.
- [23] L. Baratchart, J. Leblond, and J. Partington. Problems of Adamjan-Arov-Krein type on subsets of the circle and minimal norm extensions. *Constructive Approximation*, 16 :333–357, 2000.

- [24] L. Baratchart, J. Leblond, and F. Seyfert. A pointwise constraint for  $H^2$  approximation on subsets of the circle. En préparation.
- [25] L. Baratchart, F. Mandréa, E. Saff, and F. Wielonsky. Asymptotic behaviour of poles of rational and meromorphic approximants : Application to 2D inverse problems for the Laplacian. En préparation.
- [26] L. Baratchart and M. Olivi. Index of critical points in  $P$ -approximation. *System and Control Letters*, 10 :167–174, 1988.
- [27] L. Baratchart and M. Olivi. Inner-unstable factorization of stable rational transfer functions. In G. D. Masi, A. Gombani, and A. Kurzhansky, editors, *Modeling, Estimation and Control of Systems with Uncertainty*, volume 10 of *Progress in System and Control Theory*, pages 22–39. Birkhauser, 1991.
- [28] L. Baratchart and M. Olivi. Critical points and error rank in best  $H^2$  matrix rational approximation of fixed McMillan degree. *Constructive Approximation*, 14 :273–300, 1998.
- [29] L. Baratchart, M. Olivi, and F. Wielonsky. On a rational approximation problem in the real Hardy space  $H_2$ . *Theoretical Computer Science*, 94 :175–197, 1992.
- [30] L. Baratchart, V. Prokhorov, and E. Saff. Best meromorphic approximation of Markov functions on the unit circle. *Foundations of Constructive Math*, 1(4) :385–416, 2001.
- [31] L. Baratchart, E. Saff, and F. Wielonsky. A criterion for uniqueness of a critical points in  $H^2$  rational approximation. *J. Analyse Mathématique*, 70 :225–266, 1996.
- [32] L. Baratchart and F. Seyfert. An  $L^p$  analog to the AAK theory. *Journal of Functional Analysis*, 191 :52–122, 2002.
- [33] L. Baratchart and H. Stahl. Asymptotic behaviour of poles of best meromorphic approximants. En préparation.
- [34] L. Baratchart, H. Stahl, and F. Wielonsky. Non-uniqueness of rational best approximants. In *Proc. of Conference on Continuous Fractions, in honour of H. Waadeland, Trondheim*. J. of Comp. and Applied Math., May 1997.
- [35] L. Baratchart, H. Stahl, and F. Wielonsky. Asymptotic error estimates for  $L^2$  best rational approximants to Markov functions on the unit circle. *Journal of Approximation Theory*, (108) :53–96, 2001.
- [36] L. Baratchart, H. Stahl, and F. Wielonsky. Asymptotic uniqueness of best rational approximants of given degree to Markov functions in  $L^2$  of the circle. *Constructive Approximation*, (17) :103–138, 2001.
- [37] L. Baratchart and F. Wielonsky. Rational approximation in the real Hardy space  $H^2$  and Stieltjes integrals : a uniqueness theorem. *Constructive Approximation*, 9 :1–21, 1993.
- [38] L. Baratchart and M. Zerner. On the recovery of functions from pointwise boundary values in a Hardy-Sobolev space of the disk. *Journal of computational and applied mathematics*, 46 :255–269, 1993.
- [39] A. Ben Abda, M. Kallel, J. Leblond, and J.-P. Marmorat. Line-segment cracks recovery from incomplete boundary data. *Inverse Problems*, 18 :1057–1077, 2002.
- [40] A. Ben Abda, J. Leblond, M. Mahjoub, and J. Partington. Analytic extensions on circular domains, with applications to Cauchy-type inverse problems. En préparation.
- [41] S. Bila, D. Baillargeat, M. Aubourg, S. Verdeyme, P. Guillon, F. Seyfert, J. Grimm, L. Baratchart, C. Zanchi, and J. Sombrin. Direct electromagnetic optimization of microwave filters. *IEEE Microwave Magazine for the Microwave & Wireless Engineer*, 2(1), Mar. 2001.

- [42] S. Bila, D. Baillargeat, S. Verdeyme, F. Seyfert, L. Baratchart, C. Zanchi, and J. Sombrin. Simplified design of microwave filters with asymmetric transfer functions. In *Proceedings EUMC*, 2003.
- [43] M. Cardelli. *Contribution à l'approximation rationnelle  $L^2$  des fonctions de transfert*. Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis, 1990.
- [44] S. Chaabane. *Étude de quelques problèmes inverses*. Thèse de doctorat, ENIT, Université Tunis II, 1999.
- [45] S. Chaabane, I. Fellah, M. Jaoua, and J. Leblond. Logarithmic stability estimates for a Robin coefficient in 2D Laplace inverse problems. *Inverse Problems*, 20 :47–59, 2004.
- [46] S. Chaabane, J. Leblond, and M. Jaoua. Parameter identification for Laplace equation and approximation in Hardy classes. *J. of Inverse and Ill posed problems*, 11(1) :1–25, 2003.
- [47] I. Chalendar, J. Leblond, and J. Partington. Approximation problems in some holomorphic spaces, with applications. In A. A. Borichev and N. K. Nikolski, editors, *Systems, Approximation, Singular Integral Operators, and Related Topics, Proceedings of IWOTA 2000*, pages 143–168. Birkhäuser, 2001.
- [48] J.-M. Coron and J.-B. Pomet. A remark on the design of time-varying stabilizing control laws for controllable systems without drift. In M. Fliess, editor, *Nonlinear Control Systems Design 1992*, volume 7 of *IFAC Symposia Series*, pages 397–401, 1993. Selected papers from a conference held in Bordeaux, France.
- [49] G. Delong. Modélisation d'un filtre à ondes de surface. Rapport de Stage du DESS Techniques et Applications de la Physique, Université J. Fourier, 2000.
- [50] L. Faubourg. *Construction de fonctions de Lyapunov contrôlées et stabilisation non-linéaire*. PhD thesis, Université de Nice - Sophia Antipolis, France, Dec. 2001.
- [51] L. Faubourg and J.-B. Pomet. Control Lyapunov functions for homogeneous "Jurjjevic-Quinn" systems. *ESAIM : Control, Optim. & C. of Variations*, 5 :293–311, 2000.
- [52] L. Faubourg and J.-B. Pomet. Nonsmooth functions and uniform limits of control Lyapunov functions. In *41st IEEE Conf. on Decision and Control*, Las Vegas (USA), Dec. 2002.
- [53] P. Fulcheri and M. Olivi. Matrix rational  $H^2$ -approximation : a gradient algorithm based on Schur analysis. *SIAM J. Control Optim.*, 36(6) :2103–2127, 1998.
- [54] A. Gombani and M. Olivi. A new parametrization of rational inner functions of fixed degree : Schur parameters and realizations. *Math. Control Signal Systems*, 13 :156–177, 2000.
- [55] J. Grimm. L'arithmétique g erique de Sisyphe. Rapport technique 136, INRIA, 1991.
- [56] J. Grimm. Implémentation en C de l'arithmétique de Sisyphe. Rapport technique 168, INRIA, 1994.
- [57] J. Grimm. Rational approximation of transfer functions in the hyperion software. Rapport de recherche 4002, INRIA, Sept. 2000.
- [58] J. Grimm. Outils pour la manipulation du rapport d'activité. Technical Report RT-0265, Inria, 2002.
- [59] J. Grimm. Tralics, a L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X to XML Translator. In *Proceedings of Eurotex*, 2003.
- [60] Z.-P. Jiang and J.-B. Pomet. Global stabilization of parametric chained-form systems by time-varying dynamic feedback. *Int. J. of Adaptive Control and Signal Processing*, 10 :47–59, 1996.
- [61] M. Kallel. *Algorithmes rapides pour l'identification de fissures*. Thèse de doctorat, ENIT, Université Tunis II, 2002.

- [62] R. Küstner. Distribution asymptotique des zéros de polynômes orthogonaux par rapport à des mesures complexes ayant un argument à variation bornée. Thèse de doctorat, Université de Nice, 2003.
- [63] J. Leblond, J.-P. Marmorat, and J. Partington. Solutions of inverse diffusion problems by analytic approximation with real constraints. En préparation.
- [64] J. Leblond and M. Olivi. Weighted  $H^2$  approximation of transfer functions. *MCSS (Math. Control Signals Systems)*, 11 :28–39, 1998.
- [65] J. Leblond and J. Partington. Constrained approximation and interpolation in Hilbert function spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 234(2) :500–513, 1999.
- [66] X. Litrico and J.-B. Pomet. Nonlinear modelling of a long river stretch. In *European Control Conference ECC'03, Cambridge (UK)*, Sept. 2003.
- [67] M. Maini, P. Morin, J.-B. Pomet, and C. Samson. On the robust stabilization of chained systems by continuous feedback. In *38th IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 3472–3477, Dec. 1999.
- [68] F. Mandréa. *Comportement asymptotique des pôles d'approximants rationnels et méromorphes : applications aux problèmes inverses du Laplacien 2D*. PhD thesis, Univ. de Nice - Sophia Antipolis, Jan. 2001.
- [69] J.-P. Marmorat, M. Olivi, B. Hanzon, and R. Peeters. Matrix rational  $H^2$  approximation : a state-space approach using Schur parameters. In *Proceedings CDC 2002 (Las-Vegas)*, 2002.
- [70] P. Morin, J.-B. Pomet, and C. Samson. Developments in time-varying feedback stabilization of nonlinear systems. In H. Huijberts, H. Nijmeijer, A. van der Schaft, and J. Scherpen, editors, *IFAC Nonlinear Control Systems Design Symposium NOLCOS'98*, pages 587–594, July 1998.
- [71] P. Morin, J.-B. Pomet, and C. Samson. Design of homogeneous time-varying stabilizing control laws for driftless controllable systems via oscillatory approximation of lie brackets in closed loop. *SIAM J. on Control and Optim.*, 38(1) :22–49, 1999.
- [72] P. Morin, C. Samson, J.-B. Pomet, and Z.-P. Jiang. Time-varying feedback stabilization of the attitude of a rigid spacecraft with two controls. *Syst. & Control Lett.*, 25 :375–385, 1995.
- [73] R. Peeters, B. Hanzon, and M. Olivi. Balanced realizations of discrete-time stable all-pass systems and the tangential Schur algorithm. In *Proceedings ECC99 (Karlsruhe, Germany)*, 1999.
- [74] J.-B. Pomet. Explicit design of time-varying stabilizing control laws for a class of controllable systems without drift. *Syst. & Control Lett.*, 18 :147–158, 1992.
- [75] J.-B. Pomet. A differential geometric setting for dynamic equivalence and dynamic linearization. In *Geometry in Nonlinear Control and Differential Inclusions (Warsaw, 1993)*, volume 32 of *Banach Center Publications*, pages 319–339. Polish Acad. Sci., Warsaw, 1995.
- [76] J.-B. Pomet. On dynamic feedback linearization of four-dimensional affine control systems with two inputs. *ESAIM : Control, Optim. & C. of Variations*, 2 :151–230, June 1997. URL : <http://www.edpsciences.com/cocv/>.
- [77] Projet MIAOU. Rapport final du contrat CNES-INRIA 714/CNES/98/7386/00. confidentiel, 1998.
- [78] Projet MIAOU. Rapport du contrat INRIA-TMX C/1 00 E 0062 00 41604 20 2-706.2. confidentiel, 2000.
- [79] Projet MIAOU. Rapport final du contrat CNES-INRIA 714/CNES/01/8831/00. confidentiel, 2001.

- [80] F. Seyfert. *Problèmes extrémaux dans les espaces de Hardy, application à l'identification de filtres hyperfréquences à cavités couplées*. Thèse de doctorat, ENSMP, 1998.
- [81] F. Seyfert, J.-P. Marmorat, L. Baratchart, S. Bila, and J. Sombrin. Extraction of coupling parameters for microwave filters : Determination of a stable rational model from scattering data. *Proceedings of the International Microwave Symposium, Philadelphia*, 2003.

## Bibliographie générale

- [82] V. Adamjan, D. Arov, and M. Krein. Analytic properties of Schmidt pairs for a Hankel operator and the generalized Schur-Takagi problem. *Math. USSR Sbornik*, 15 :31–73, 1971.
- [83] A. Agrachev, B. Bonnard, M. Chyba, and I. Kupka. Sub-Riemannian sphere in Martinet flat case. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 2 :377–448 (electronic), 1997.
- [84] A. Agrachev and J.-P. Gauthier. On the subanalyticity of Carnot-Carathéodory distances. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 18(3) :359–382, 2001.
- [85] D. Aharonov and H. Shapiro. Domains on which analytic functions satisfy quadrature identities. *J. Anal. Math.*, 30 :39–73, 1976.
- [86] L. Aizenberg. *Carleman's formulas in complex analysis*. Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [87] G. Alessandrini, E. Beretta, and S. Vessella. Determining linear cracks by boundary measurements-Lipschitz stability. *SIAM J. Math. Analysis*, 27(2) :361–375, 1996.
- [88] G. Alessandrini, L. Del Piero, and L. Rondi. Stable determination of corrosion by a single electrostatic measurement. *Inverse Problems*, 19 :973–984, 2003.
- [89] G. Alessandrini and L. Rondi. Stable determination of a crack in a planar inhomogeneous conductor. *SIAM J. Math. Anal.*, 30 :326–340, 1998.
- [90] F. Alizadeh and D. Goldfarb. Second-order cone programming. Technical Report 51-2001, RUTCOR, Rutgers University. 6, Nov. 2001.
- [91] B. Alkire and L. Vandenberghe. Interior-point methods for magnitude filter design. *Proceedings of 26th IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 2001.
- [92] B. Anderson and S. Vongpanitlerd. *Network analysis and synthesis*. Prentice-Hall, 1973.
- [93] S. Andrieux and A. Ben Abda. Identification of planar cracks by complete overdetermined data : inversion formulae. *Inverse Problems*, 12 :553–563, 1996.
- [94] Z. Artstein. Stabilization with relaxed control. *Nonlinear Analysis TMA*, 7(11) :1163–1173, Nov. 1983.
- [95] K. Astala and L. Päivärinta. Calderon's inverse conductivity problem in the plane. Soumis, 2003.
- [96] S. Axler, P. Bourdon, and W. Ramey. *Harmonic function theory*, volume GTM 137. Springer-Verlag, 1991.
- [97] B. Hanzon and R. Ober. Overlapping block-balanced canonical forms for various classes of linear systems. *Linear Algebra and its Applications*, 281 :171–225, 1998.
- [98] G. A. Baker and P. Graves-Morris. *Padé Approximants*, volume 59 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press/Birkhäuser Verlag, Basel, 1996.
- [99] J. Ball, I. Gohberg, and L. Rodman. *Interpolation of rational matrix functions*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1990.

- [100] H. Bart, I. Gohberg, and M. Kaashoek. *Minimal Factorization of Matrix and Operator Functions*. Birkhäuser-Verlag, 1979.
- [101] V. Bart. Estimates of the norm of the Carleman-Goluzin-Krylov operators in the disk-algebra and the Hardy space  $H^1$ . *Journal of Mathematical Sciences*, 105(5) :2330–2346, 2001.
- [102] T. Basar and P. Bernhard.  *$H^\infty$ -optimal control and related minimax design problems : a dynamic game approach*. Systems and control : foundations and applications. Birkhäuser, 1995.
- [103] H. Ben Ameur, G. Chavent, and J. Jaffré. Refinement and coarsening indicators for adaptive parametrization : application to the estimation of hydraulic transmissivities. *Inverse Problems*, 18 :775–794, 2002.
- [104] J. Blum. Identification et contrôle de l'équilibre du plasma dans un tokamak. *Le courrier du CNRS, Images des mathématiques*, 00. Supplément au no. 76.
- [105] B. Bonnard and I. Kupka. Generic properties of singular trajectories. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 14(2) :167–186, 1997.
- [106] F. Brackx, R. Delanghe, and F. Sommen. *Clifford analysis*. Pitman, 1982.
- [107] D. Braess. *Nonlinear Approximation Theory*, volume 7 of *Series in computational mathematics*. Springer-Verlag, 1986.
- [108] D. Braess and N. Dyn. On the uniqueness of generalized monosplines of least  $L^p$ -norm. *Const. Approx.*, 2 :79–99, 1986.
- [109] C. Brdys, J.-P. Toumazet, A. Laurent, and J.-L. Ponthenier. Optical and magnetic diagnostics of the electric arc dynamics in a low voltage circuit breaker. *Meas. Sci. Technol.*, 13 :1146–1153, 2002.
- [110] M. Brühl, M. Hanke, and M. Pidcock. Crack detection using electrostatics measurements. *Math. Model. Numer. Anal.*, 35(3) :595–605, 2001.
- [111] M. Brühl, M. Hanke, and M. Vogelius. A direct impedance tomography algorithm to detect small inhomogeneities. *Nuer. Math.*, 93 :635–654, 2003.
- [112] R. Brockett and P. Fuhrmann. Normal symmetric dynamical systems. *SIAM J. Control and Optimization*, 14(1) :107–119, 1976.
- [113] R. L. Bryant, S. S. Chern, R. B. Gardner, H. L. Goldschmitt, and P. A. Griffiths. *Exterior Differential Systems*, volume 18 of *Mathematical Sciences Research Institute Publications*. Springer-Verlag, 1991.
- [114] V. Buslaev. Simple counterexample to the Baker-Gammel-Wills conjecture. *East Journal on Approximations*, 7(4) :515–517, 2001.
- [115] C. Byrnes, P. Enqvist, and A. Lindquist. Cepstral coefficients, covariance lags and pole-zero models for finite data strings. *IEEE Trans. Signal Processing*, SP-50 :677–693, Apr. 2001.
- [116] C. Byrnes, P. Enqvist, and A. Lindquist. Identifiability and well-posedness of shaping-filter parameterizations : a global analysis approach. *SIAM J. on Control and Optimization*, 41(1) :23–59, 2002.
- [117] C. Byrnes, T. Georgiou, and A. Lindquist. A generalized entropy criterion for Nevanlinna-Pick interpolation with degree constraint. *IEEE Transaction On Automatic Control*, 46(5), 2001.
- [118] A. Calderón. *Seminar on numerical analysis and its applications to continuum physics*, chapter On an inverse boundary value problem, pages 65–73. Soc. Brasil Mat. Rio de Janeiro, 1980.
- [119] J. Cannon and R. Ewing. *Improperly Posed Boundary Value Problems*, chapter The locations and strengths of points sources, pages 39–53. Research Notes in Maths. Pitman Publ., 1975.

- [120] C. Carathéodory. *Calculus of variations and partial differential equations of the first order. Part II : Calculus of variations*. Holden-Day Inc., San Francisco, Calif., 1967. Translated from the German by Robert B. Dean, Julius J. Brandstatter, translating editor.
- [121] É. Cartan. Sur l'équivalence absolue de certains systèmes d'équations différentielles et sur certaines familles de courbes. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 42 :14–48, 1914.
- [122] J. Chailloux et al. *Le-Lisp de l'Inria*, version 15.22 edition, 1989.
- [123] I. Chalendar and J. Partington. Approximation problems and representations of Hardy spaces in circular domains. *Studia Mathematica*, 136(3), 1999.
- [124] I. Chalendar and J. Partington. Constrained approximation and invariant subspaces. *J. Math. Anal. Appl.*, . To appear.
- [125] I. Chalendar, J. Partington, and M. P. Smith. Approximation in reflexive Banach spaces and applications to the invariant subspace problem. *Proc. A.M.S.*, . To appear.
- [126] B. Charlet, J. Lévine, and R. Marino. Sufficient conditions for dynamic state feedback linearization. *SIAM J. on Control and Optim.*, 29 :38–57, 1991.
- [127] M. Cheney, D. Isaacson, and J. Newell. Electrical impedance tomography. *SIAM Review*, 41(1) :85–101, 1999.
- [128] V. Cherednichenko. *Inverse Logarithmic Potential Theory*. VSP, Inverse & Ill-Posed Problems Series, 1996.
- [129] V. N. Chetverikov. Flat control systems and deformations of structures on diffeities. Preprint, Jan. 2002.
- [130] C. Coelho, J. Phillips, and L. Silveira. Passive constrained rational approximation algorithm using Nevanlinna-Pick interpolation. In *Proceedings DATE'02*, 2002.
- [131] D. Colton and R. Kress. *Integral Equation Methods in Scattering Theory*. Wiley, 1983.
- [132] M. Cotlar and C.Sadosky. Nehari and nevanlinna-pick problems and holomorphic extensions in the polydisk in terms of restricted bmo. *J. Funct. Anal.*, 124(1) :205–210, 1994.
- [133] M. Cotlar and C.Sadosky. Two distinguished subspaces of product bmo and nehari-aak theory for hankel operators on the torus. *Integral Equations Operator Theory*, 26(3) :273–304, 1996.
- [134] J. Croisille and G. Lebeau. Diffraction by an immersed elastic wedge : theory and numerical computation. Prépublication du dép. de Math. de l'Université Paris-Sud.
- [135] B. N. Datta, editor. *Applied and Computational Control, Signals, and Circuits*, volume 1. Birkhauser, 1999.
- [136] R. Dautray and J. Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique*, volume 2. Masson, 1987.
- [137] J. Della Dora. Contribution à l'approximation de fonctions de la variable complexe au sens de Hermite-Padé et de Hardy. Thèse d'état, Univ. Scient. et Médicale de Grenoble, 1980.
- [138] A. Dijkstra, B. Brown, N. Harris, D. Barber, and D. Endbrooke. Review : clinical applications of electrical impedance tomography. *J. Medical Eng. Technol.*, 17 :89–98, 1993.
- [139] P. Doukhan, G. Oppenheim, and M. S. Taquq, editors. *Theory and applications of long-range dependence*. Birkhäuser Boston, 2003.
- [140] J. Doyle, B. Francis, and A. Tannenbaum, editors. *Feedback control theory*. MacMillan, 1992.
- [141] P. Ebenfelt, D. Khavinson, and H. Shapiro. An inverse problem for the double layer potential. *Computational Methods and Function Theory*, 1(2) :387–401, 2001.
- [142] H. Ehlich and K. Zeller. Schwankung von polynomen zwischen gitterpunkten. *Math. Zeitschr.*, 86 :41–44, 1964.

- [143] A. El Badia and T. Ha-Duong. An inverse source problem in potential analysis. *Inverse Problems*, 16 :651–663, 2000.
- [144] O. Faugeras, F. Clément, R. Deriche, R. Keriven, T. Papadopoulo, J. Roberts, T. Vieville, F. Devernay, J. Gomes, G. Hermosillo, P. Kornprobst, and D. Lingrand. The inverse EEG and MEG problems : the adjoint state approach. I : the continuous case. Technical Report 3673, Inria, 1999.
- [145] J.-C. Faugère. A new efficient algorithm for computing Groebner bases ( $F_4$ ). *J. Pure Appl. Algebra*, 139, num :1-3 :61–88, 1999.
- [146] C. Faure and Y. Papegay. Odyssee User’s Guide. Version 1.7. Rapport technique 0224, INRIA, Sept. 1998.
- [147] P. Faurre, M. Clerget, and F. Germain. *Opérateurs rationnels positifs*. Number 8 in Méthodes Mathématiques de l’Informatique. Dunod, 1979.
- [148] D. Fengya, S. Moskow, and M. Vogelius. Identification of conductivity imperfections of small diameter by boundary measurements. Continuous dependence and computational reconstruction. *Inverse Problems*, 14 :553–595, 1998.
- [149] S. H. Ferguson. The nehari problem for the Hardy space on the torus. *J. Operator Theory*, 40 :309–321, 1998.
- [150] A. Fettweis. Factorization of transfer matrices of lossless two-ports. *IEEE Trans. on Circuit Theory*, 17 :86–94, 1970.
- [151] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, and P. Rouchon. Flatness and defect of nonlinear systems : Introductory theory and examples. *Int. J. Control*, 61(6) :1327–1361, 1995.
- [152] C. Foias and A. Frazho. The commutant Lifting Approach to Interpolation Problems. Number 44 in Operator Theory : Advances and Applications. Birkhäuser, 1990.
- [153] B. Francis. *A course in  $H^\infty$  Linear Systems and Operators in Hilbert Space*. Springer-Verlag, 1981.
- [154] K. Friedman and M. Vogelius. Indiana Univ. Math. J. *Determining cracks by boundary measurements*, 38(3) :527–556, 1989.
- [155] P. A. Fuhrmann. *Linear Systems and Operators in Hilbert Space*. McGraw-Hill, 1981.
- [156] P. A. Fuhrmann. On symmetric rational transfer functions. *Linear Algebra and its applications*, 50 :167–250, 1983. Special issue in memory of Wilhelm Cauer.
- [157] P. A. Fuhrmann and U. Helmke. On complex parameterizations of real rational functions. *Archiv fur Elektronik und Ubertragungstechnik*, 49 :293–306, 1995. Special issue in memory of Wilhelm Cauer.
- [158] A. Galligo, J. Grimm, and L. Pottier. The design of SISYPHE : a system for doing symbolic and algebraic computations. In A. Miola, editor, *LNCS 429 DISCO’90*, pages 30–39, Capri, Italy, Apr. 1990. Springer-Verlag.
- [159] J. Garnett. Bounded Analytic Functions. Academic Press, 1981.
- [160] I. M. Gel’fand and S. V. Fomin. *Calculus of variations*. Revised English edition translated and edited by Richard A. Silverman. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1963. Unabridged re-publication (2000) by *Dover Publications*.
- [161] Y. Genin, P. V. Dooren, T. Kailath, J. Delosme, and M. Morf. On  $\sigma$ -lossless transfer functions and related questions. *Linear algebra and its applications*, 50 :251–275, 1983.

- [162] Y. Genin, Y. Hachez, Y. Nesterov, and P. V. Dooren. Convex optimization over polynomials and filter design. *Proceedings of the 2000 UKACC International Conference on Control, Cambridge University, 2000.*
- [163] Y. Genin, Y. Nesterov, and P. V. Dooren. Positive transfer functions and convex optimization. *Proceedings of the European Control Conference, EUCA, Karlsruhe, Germany, 1999., 1999.*
- [164] T. Georgiou. The interpolation problem with a degree constraint. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(3) :631–635, 1999.
- [165] D. Gilbarg and N. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order.* Springer, 1983.
- [166] J. E. Gilbert and M. A. Murray. *Clifford algebras and Dirac operators in harmonic analysis.* Number 26 in Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1991.
- [167] K. Glover. All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their  $L^\infty$ -error bounds. *Int. J. Control*, 39(6) :1115–1193, 1984.
- [168] I. Gohberg and S. Rubinstein. Proper contractions and their unitary minimal completion. *Operator Theory : Advances and Applications*, 33 :223–247, 1988.
- [169] A. Gonchar and E. Rakhmanov. Equilibrium distributions and the degree of rational approximation of analytic functions. *Math. USSR Sbornik*, 176 :306–352, 1989.
- [170] B. Gustafsson. Quadrature identities and the Schottky double. *Acta Appl. Math.*, 1 :209–240, 1983.
- [171] B. Gustafsson, C. He, P. Milanfar, and M. Putinar. Reconstructing planar domains from their moments. *Inverse Problems*, 16 :1053–1070, 2000.
- [172] M. Hämäläinen, R. Hari, J. Ilmoniemi, J. Knuutila, and O. Lounasmaa. Magnetoencephalography-theory, instrumentation, and applications to noninvasive studies of the working human brain. *Reviews of Modern Physics*, 65(2) :413–497, 1993.
- [173] M. Hanke. Iterative regularization techniques in image reconstruction. In D. Colton, H. Engl, A. Louis, J. McLaughlin, and W. Rundell, editors, *Surveys on solution methods for inverse problems*, pages 35–52. Springer, 2000.
- [174] E. Hannan and M. Deistler. *The statistical theory of linear systems.* Wiley, New York, 1988.
- [175] B. Hanzon and J. M. Maciejowski. Constructive algebra methods for the  $l_2$ -problem for stable linear systems. *Automatica J. IFAC*, 32(12) :1645–1657, 1996.
- [176] V. Havin. On the uncertainty principle in harmonic analysis. In *Proc. Twentieth Century Harmonic Analysis-A Celebration.* Kluwer Academic Publisher, 2001. J.S. Byrnes ed.
- [177] M. Hazewinkel and R. Kalman. Moduli and canonical forms for linear systems ii : the topological case. *Mathematical System Theory*, 10 :363–385, 1977.
- [178] S. Helgason. *Radon Transforms.* Birkhäuser, 1980.
- [179] U. Helmke. A global parametrization of asymptotically stable linear systems. *Systems Control Lett.*, 13(5) :383–389, 1989.
- [180] G. Herman. *Image reconstruction from projections.* Academic Press, 1980.
- [181] D. Hilbert. Über den Begriff der Klasse von Differentialgleichungen. *Math. Annalen*, 73 :95–108, 1912.
- [182] J. M. Hodé, J. Desbois, P. Dufilié, M. Solal, and P. Ventura. Spudt-based filters : design principles and optimization. In *Proc. IEEE International Ultrasonics Symposium*, 1995.

- [183] V. Isakov. *Inverse problems for partial differential equations*, volume 27 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, 1990.
- [184] V. Isakov. *Inverse sources problems*. ams, 1990.
- [185] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Comm. in Control Engineering. Springer-Verlag, 3rd edition, 1995.
- [186] B. Jakubczyk. Equivalence and invariants of nonlinear control systems. In *Nonlinear controllability and optimal control*, pages 177–218. Dekker, New York, 1990.
- [187] B. Jakubczyk and W. Respondek. Feedback classification of analytic control systems in the plane. In *Analysis of controlled dynamical systems (Lyon, 1990)*, pages 263–273. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1991.
- [188] M. Janet. P. Zervos et le problème de Monge. *Bull. Sci. Math. (2)*, 95 :15–26, 1971.
- [189] D. Jibeteau. *Algebraic optimization with applications to system theory*. PhD thesis, Mathematics, Vrije Universiteit, Amsterdam, 2003.
- [190] D. Johnson and D. Dudgeon. *Array signal processing : concepts and techniques*. Prentice Hall signal processing series, 1993.
- [191] V. Jurdjevic. *Geometric Control Theory*, volume 51 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge Univ. Press, 1997.
- [192] M. Kay. *XSLT*. Wrox Press Ltd., 2001.
- [193] V. Khavin and V. Bart. Szegő-Kolmogorov-Krein theorems on weighted trigonometrical approximation and Carleman-type relations. *Ukrainian Math. Journal*, 46 :101–132, 1994.
- [194] A. Kirsch. *An introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*. Number 120 in Applied Mathematical Sciences. Springer, 1996.
- [195] D. Knuth. *The TeXbook*. Addison-Wesley, 1984.
- [196] D. E. Knuth. *The Art of Computer Programming, Seminumerical Algorithms*. Addison Wesley, 1981.
- [197] R. Kohn and M. Vogelius. Determining conductivity by boundary measurements. *Comm. Pure Appl. Maths.*, 37 :289–298, 1984.
- [198] V. Kozlov, V. Maz’ya, and A. Fomin. An iterative method for solving the Cauchy problem for elliptic equations. *Comput. Math. Phys.*, 31 :45–52, 1991.
- [199] M. Krein and A. Nudel’man. *The Markov moment problem and extremal problems*, volume 50. AMS Translations of Mathematical Monographs, 1977.
- [200] M. Krein and P. Nudel’man. Approximation of  $L^2(\omega_1, \omega_2)$  functions by minimum-energy transfer functions of linear systems. *Problemy Peredachi Informatsii*, 11(2) :37–60, 1975. English translation.
- [201] R. Kress. *Linear integral equations*. Number 82 in Applied Mathematical Sciences. Springer, 1989.
- [202] I. A. K. Kupka. The ubiquity of Fuller’s phenomenon. In *Nonlinear controllability and optimal control*, volume 133 of *Monogr. Textbooks Pure Appl. Math.*, pages 313–350. Dekker, New York, 1990.
- [203] G. Kuz’mina. methods of geometric function theory. i. *St Petersburg Math. J.*, 9(3) :455–507, 1998.
- [204] G. Kuz’mina. methods of geometric function theory. ii. *St Petersburg Math. J.*, 9(5) :889–930, 1998.

- [205] O. Kwon, J. Seo, and J. Yoon. A real-time algorithm for the location search of discontinuous conductivities with one measurement. *Comm. Pure Appl. Math.*, 2002.
- [206] P. K. Kythe. *Computational conformal mapping*. Birkhäuser, 1998.
- [207] L. Lamport. *TEX, a document preparation system*. Addison-Wesley, 1985.
- [208] M. Lassas and G. Uhlmann. On determining a Riemannian manifold from the Dirichlet-to-Neumann map. *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, 34(4) :771–787, 2001.
- [209] M. Lavrentiev. *Some Improperly Posed Problems of Mathematical Physics*. Springer, 1967.
- [210] E. B. Lee and L. Markus. *Foundations of optimal control theory*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1967.
- [211] A. Levin. The distribution of poles of rational functions of best approximation and related questions. *Math. USSR Sbornik*, 9(2) :267–274, 1969.
- [212] L. Ljung. *System identification : Theory for the user*. Prentice-Hall, 1987.
- [213] D. Lubinsky. Rogers-Ramanujan and the Baker-Gammel-Wills (Padé) conjecture. *Ann. of Math.*, 157(3) :847–889, 2003.
- [214] A. Manikas, A. Sleiman, and I. Dacos. Manifold studies of nonlinear antenna array geometries. *IEEE Trans. Signal Process*, 49(3) :497–506, 2001.
- [215] P. Martin, R. M. Murray, and P. Rouchon. Flat systems. In G. Bastin and M. Gevers, editors, *European Control Conference, Plenary Lectures and Mini-Courses*, pages 211–264, 1997.
- [216] P. Martin and P. Rouchon. Feedback linearization and driftless systems. *Math. of Control, Signals & Systems*, 7 :235–254, 1994.
- [217] D. Matignon. Réalisation en variable d'état de modèles de guide d'ondes avec dérivation fractionnaire. Thèse de doctorat, Université Paris XI, 1994.
- [218] G. Matthaei, L. Young, and E. Jones. *Microwave filters, impedance-matching networks, and coupling structures*. Artech House, 1980.
- [219] B. Mbodje, G. Montseny, and J. Audounet. Analysis of fractionally damped flexible systems via a diffusion equation. *Internat. J. Systems Sci.*, 25(11) :1775–1791, 1994.
- [220] P. Milanfar, G. Verghese, W. Karl, and A. Willsky. Reconstructing polygons from moments with connections to array processing. *IEEE Trans. Signal Proc.*, 43 :432–443, 1995.
- [221] A. Nachman. Global uniqueness for a two-dimensional inverse boundary value problem. *Ann. Math.*, 143(1) :71–96, 1996.
- [222] Y. Nesterov and A. Nemirovsky. *Interior-point polynomial algorithms in convex programming*, volume 13 of *SIAM Studies in Applied Mathematics*. SIAM, Philadelphia, 1994.
- [223] Y. Nesterov and M. Todd. Primal-dual interior-point methods for self-scaled cones. *SIAM J. Opt.*, 8(3) :324–364, 1998.
- [224] N. Nikolskii. *Treatise on the shift operator*. Number 273 in Grundlehren der Math. Wiss. Springer-Verlag, 1986.
- [225] N. Nikolskii. *Operators, functions, and systems : an easy reading. Vol. 1. Hardy, Hankel, and Toeplitz*. Number 92 in Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Soc., 2002.
- [226] N. Nikolskii. *Operators, functions, and systems : an easy reading. Vol. 2. Model operators and systems*. Number 93 in Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Soc., 2002.

- [227] S. Osher and N. Paragios, editors. *Geometric Level Set Methods in Imaging, Vision, and Graphics*. Springer-Verlag, 2003.
- [228] O. Parfenov. Estimates of the singular numbers of a Carleson operator. *Math USSR Sbornik*, 59(2) :497–514, 1988.
- [229] J. Partington. *Interpolation, identification, and sampling*. Number 17 in London mathematical society monographs. Clarendon press, 1997.
- [230] D. Patil. Representation of  $HP$  functions. *Bull. A.M.S.*, 78(4), 1972.
- [231] V. Peller. *Hankel Operators and Their Applications*. Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, 2003.
- [232] R. Pintelon and J. Schoukens. *System Identification, a Frequency Domain Approach*. IEEE Press, 2001.
- [233] L. S. Pontryagin, V. G. Boltjanskiĭ, R. V. Gamkrelidze, and E. Mitchenko. *Théorie mathématique des processus optimaux*. Editions MIR, Moscou, 1974.
- [234] V. Potapov. The multiplicative structure of  $J$ -contractive matrix functions. *American Math. Soc. Transl.*, 15(2) :131–244, 1960.
- [235] W. Press, S. Teukolsky, W. Vetterling, and B. P. Flannery. *Numerical Recipes in C++ – The art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 2nd edition, 2002.
- [236] V. Prokhorov. Rational approximation of analytic functions. *Russ. Acad. Sci., Sb., Math.* 78, 1(1) :139–164, 1994. English translation from *Math. Sbornik*, 184(2) :3–32, 1993.
- [237] M. Putinar. Extremal solutions of the two-dimensional L-problem of moments. *J. Funct. Anal.*, 1996.
- [238] N. Ramsey. Building a language-independent WEB. *Communications of the ACM*, pages 1051–1055, 1989.
- [239] T. Ransford. *Potential theory in the complex plane*. Number 28 in LMS Student Texts. Cambridge University Press, 1995.
- [240] P. Regalia. *Adaptive IIR Filtering in Signal Processing and Control*. Marcel Dekker, 1995.
- [241] N. Rostaing. *Différentiation automatique : application à un problème d’optimisation en météorologie*. PhD thesis, Université de Nice-Sophia Antipolis, 1993.
- [242] P. Rouchon. Necessary condition and genericity of dynamic feedback linearization. *J. of Math. Systems, Estimation, and Control*, 4 :1–14, 1994.
- [243] E. Saff and V. Totik. *Logarithmic Potentials with External Fields*, volume 316 of *Grundlehren der Math. Wiss.* Springer-Verlag, 1997.
- [244] F. Santosa and M. Vogelius. A computational algorithm to determine cracks from electrostatics boundary measurements. *Int. J. Engeneering Sci.*, 29(8) :917–937, 1991.
- [245] C. Scherer. An efficient solution to multi-objective control problems with LMI objectives. *Systems Control Letters*, 40(1) :43–57, 2000.
- [246] J. Schoukens, R. Pintelon, Y. Rolain, and T. Dobrowiecki. Frequency response function measurements in the presence of nonlinear distortions. *Automatica*, 37(6) :939–946, 2001.
- [247] J. Sjöberg, Q. Zhang, L. Ljung, A. Benveniste, B. Delyon, P.-Y. Glorennec, H. Hjalmarsson, and A. Juditsky. Nonlinear black box modeling in system identification : a unified overview. *Automatica*, 33(6) :1197–1198, 1997.
- [248] W. M. Sluis. A necessary condition for dynamic feedback linearization. *Syst. & Control Lett.*, 21 :277–283, 1993.

- [249] M. Smith. Constrained approximation in banach spaces. To appear in Constructive Approximation.
- [250] M. Smith. *Approximation problems and operator theory in function spaces*. PhD thesis, Univ. Leeds, UK, 2002.
- [251] T. Söderström and P. Stoica. *System Identification*. Prentice-Hall, 1987.
- [252] H. Stahl. Extremal domains associated with an analytic function i, ii. *Complex Variables*, 4 :311–324, 325–338, 1985.
- [253] H. Stahl. The convergence of Padé approximants to functions with branch points. *J. of Approximation Theory*, 91 :139–204, 1997.
- [254] H. Stahl. Strong asymptotics for orthogonal polynomials with varying weights. *Acta Sci. Math (Szeged)*, 65 :717–762, 1999.
- [255] H. Stahl and V. Totik. *General orthogonal polynomials*. Encyclopedia of Mathematics. Cambridge university press, 1992.
- [256] E. Stein. *Harmonic analysis : real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*. Princeton Univ. Press, 1993.
- [257] E. Stein and G. Weiss. *Introduction to Fourier analysis on euclidean spaces*. Princeton Univ. Press, 1971.
- [258] B. Stroustrup. *The C++ Programming Language*. Addison-Wesley, third edition, 2000.
- [259] A. Sudbery. Quaternionic analysis. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 85 :199–225, 1979.
- [260] H. J. Sussmann. Regular synthesis for time-optimal control of single-input real analytic systems in the plane. *SIAM J. Control Optim.*, 25(5) :1145–1162, 1987.
- [261] J. Sylvester and G. Uhlmann. A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem. *Ann. Math.*, 125 :153–169, 1987.
- [262] A. Tikhonov and N. Arsenine. *Méthodes de résolution de problèmes mal posés*. MIR, 1976.
- [263] V. Totik. *Weighted approximation with varying weights*. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 1994.
- [264] M. Tsuji. *Potential theory in modern function theory*. Maruzen, Tokyo, 1959.
- [265] I. Videnskii. Carleman formula for some spaces of functions analytic in the disk and smooth in its closure. *Operator Theory : Advances and Applications*, 113 :399–408, 2000.
- [266] J. L. Walsh. *Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain*. A.M.S. Publications, 1962.
- [267] N. Wiener. *The Fourier integral and certain of its applications*. Dover, 1958.
- [268] J. Willems. Dissipative dynamical systems, Part I : general theory, Part II : linear systems with quadratic supply rates. *Arch. Rat. Mech. and Anal.*, 45 :321–351, 352–392, 1972.
- [269] J. C. Willems. Paradigms and puzzles in the theory of dynamical systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 36 :259–294, 1991.
- [270] S.-P. Wu, S. Boyd, and L. Vandenberghe. *FIR Filter Design via Spectral Factorisation and Convex Optimization*, volume 1, pages 215–246. Birkhauser, 1999.
- [271] J. Zolesio. *Shape optimization and optimal design*. Number 216 in Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker Inc., 2001.