

PLAN

Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

Conclusion &
perspectives

APPROXIMATION HARMONIQUE DANS UNE COURONNE ET APPLICATIONS À LA RÉOLUTION NUMÉRIQUE DE QUELQUES PROBLÈMES INVERSES

M. Jaoua, J. Leblond, Moncef Mahjoub, J. R. Partington

LAMSIN - École Nationale d'Ingénieurs de Tunis
Université de Tunis El Manar

09.01.2009 / Séminaire APICS

PLAN

Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

Conclusion &
perspectives

Plan

- 1** Problème extrémal borné
 - Existence et unicité
 - Stabilité
 - Ajustement de la borne adéquate
 - Robustesse
- 2** Applications : problèmes inverses
 - Corrosion dans un tube
 - Localisation de points sources
 - Identification de fissures
- 3** Conclusion & perspectives

PLAN

Problème extrémal borné

Existence et unicité

Stabilité

Ajustement de la borne adéquate

Robustesse

Applications : problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

Conclusion & perspectives

Plan

- 1** Problème extrémal borné
 - Existence et unicité
 - Stabilité
 - Ajustement de la borne adéquate
 - Robustesse
- 2** Applications : problèmes inverses
 - Corrosion dans un tube
 - Localisation de points sources
 - Identification de fissures
- 3** Conclusion & perspectives

PLAN

Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

Conclusion &
perspectives

Plan

- 1 **Problème extrémal borné**
 - Existence et unicité
 - Stabilité
 - Ajustement de la borne adéquate
 - Robustesse
- 2 Applications : problèmes inverses
 - Corrosion dans un tube
 - Localisation de points sources
 - Identification de fissures
- 3 Conclusion & perspectives

PLAN

 Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

 Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

 Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

 Conclusion &
perspectives

Définitions

- $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$; $s\bar{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq s\}$, $0 < s < 1$.
- $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$; $sT = \{z \in \mathbb{C} : |z| = s\}$.
- $G = D \setminus sD$, $\partial G = sT \cup T$.

- $L^2(\partial G) := \{f \text{ mesurables sur } \partial G \text{ tq } |f(z)|^2 \text{ intégrable}\}$

$$\|f\|_{L^2(\partial G)} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(se^{i\theta})|^2 d\theta \right)^{1/2}$$

- $H^2(D) = \left\{ g(z) = \sum_{n \geq 0} g_n z^n \text{ tq } \sum_{n \geq 0} |g_n|^2 < \infty \right\}$.
- $H^2 = H^2(D) \oplus H_0^2(C \setminus s\bar{D})$, $\|f\|_{H^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(1 + s^{2n}\right) |a_n|^2$.

$$e_n(z) := \left(\frac{z^n}{\sqrt{1 + s^{2n}}} \right)_{n \in \mathbb{Z}}$$

PLAN

 Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

 Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

 Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

 Conclusion &
perspectives

(BEP) dans une couronne

 Soit $\partial G = T \cup sT$.

Soit $f \in L^2(\Gamma_d)$, $M > 0$. Trouver $g \in H^2$, $\|g\|_{L^2(\Gamma_i)} \leq M$
 $\|f - g\|_{L^2(\Gamma_d)} = \inf\{ \|f - h\|_{L^2(\Gamma_d)} : h \in H^2, \|h\|_{L^2(\Gamma_i)} \leq M \}$

PLAN

 Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

 Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

 Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

 Conclusion &
perspectives

(BEP) dans une couronne

 Soit $\partial G = T \cup sT$.

Soit $f \in L^2(\Gamma_d)$, $M > 0$. Trouver $g \in H^2$, $\|g\|_{L^2(\Gamma_i)} \leq M$
 $\|f - g\|_{L^2(\Gamma_d)} = \inf \{ \|f - h\|_{L^2(\Gamma_d)} : h \in H^2, \|h\|_{L^2(\Gamma_i)} \leq M \}$



Chalendar et al. (2001)

 admet une unique solution g ,

$$g = (I + \lambda T)^{-1} P_{H^2}(\tilde{f}), \quad \text{où } \tilde{f} = \chi_{\Gamma_d} f,$$

 avec $T = P_{H^2} \chi_{\Gamma_i} : H^2 \longrightarrow H^2$.

De plus, si $f \notin H^2_{\Gamma_d}$ alors $\|g\|_{L^2(\Gamma_i)} = M$ et $\lambda > -1$:
 paramètre de Lagrange tel que $\|g\|_{L^2(\Gamma_i)} = M$.

PLAN

 Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

 Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

 Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

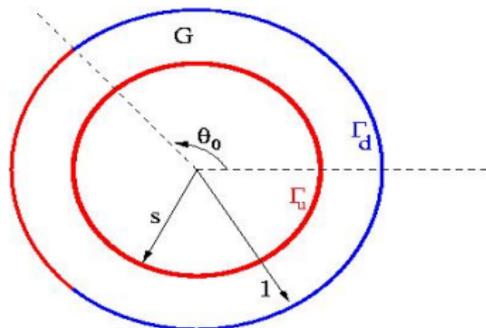
Localisation de points sources

Identification de fissures

 Conclusion &
perspectives

Formule explicite de g

$$\Gamma_d = (e^{-i\theta_0}, e^{i\theta_0}), 0 < \theta_0 \leq \pi, \quad \partial G = T \cup sT$$



T est représenté dans la base $\left\{ z^n / \sqrt{1 + s^{2n}} \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$ par la matrice infinie de Toeplitz :

$$\text{pour } n, m \in \mathbb{Z}, T_{n,m} = \begin{cases} \frac{1}{1 + s^{2n}} \left(1 + s^{2n} - \frac{\theta_0}{\pi} \right) & n = m, \\ \frac{-\sin(m-n)\theta_0}{\pi \sqrt{(1 + s^{2n})(1 + s^{2m})} (m-n)} & n \neq m. \end{cases}$$

PLAN

 Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

 Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

 Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

 Conclusion &
perspectives

Comportement de M % à λ

Soit $e(\lambda) := \|f - g(\lambda)\|_{L^2(\Gamma_d)}$ et $M(\lambda) := \|g(\lambda)\|_{L^2(\Gamma_i)}$,

alors

$$\lim_{M(\lambda) \rightarrow +\infty} e(\lambda) = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow -1} M(\lambda) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} M(\lambda) = 0.$$

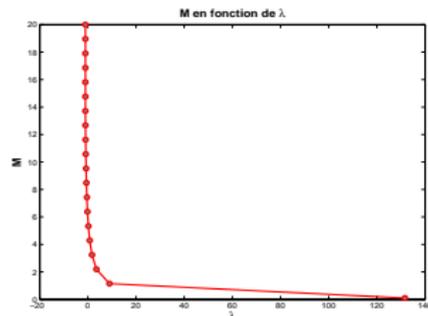
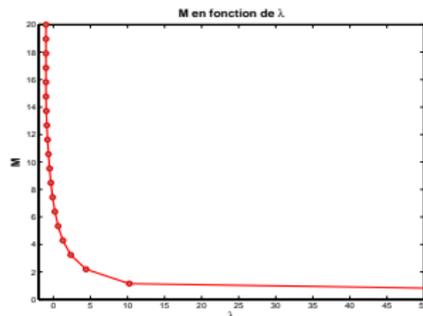


FIG.: M en fonction de λ ($\Gamma_d = T$ & $\Gamma_d \subsetneq T$)

PLAN

 Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

 Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

 Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

 Conclusion &
perspectives

Continuité de g % à (f, M)

$$\Psi : L^2(\Gamma_d) \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow H^2$$

$$(f, M) \mapsto g(f, M),$$

Soit $\mathcal{D} = \{ (h, M) \in H_{|\Gamma_d}^2 \times \mathbb{R}_+^* \mid \|h\|_{L^2(\Gamma_i)} < M \}$.

Théorème

L'application Ψ est faiblement continue sur $L^2(\Gamma_d) \times \mathbb{R}_+^$, et est continue seulement sur $(L^2(\Gamma_d) \times \mathbb{R}_+^*) \setminus \mathcal{D}$.*

- 1** Le résultat de continuité est trop faible.
- 2** Convergence forte : résoudre un (BEP) pour un ordre supérieur.

PLAN

 Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

 Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

 Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

 Conclusion &
perspectives

(BEP) d'ordre m : $(\text{BEP})_m$

Espace de Hardy-Sobolev d'ordre m : $H^m = H^2 \cap W^{m,2}(\partial G)$

Soit $f \in W^{m,2}(\Gamma_d)$, $M > 0$. Trouver $g_m \in H^m$, $\|g_m\|_{W^{m,2}(\Gamma_i)} \leq M$
 $\|f - g_m\|_{W^{m,2}(\Gamma_d)} = \inf\{\|f - h\|_{W^{m,2}(\Gamma_d)} : h \in H^m, \|h\|_{W^{m,2}(\Gamma_i)} \leq M\}$

PLAN

 Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

 Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

 Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

 Conclusion &
perspectives

(BEP) d'ordre m : $(\text{BEP})_m$

Espace de Hardy-Sobolev d'ordre m : $H^m = H^2 \cap W^{m,2}(\partial G)$

Soit $f \in W^{m,2}(\Gamma_d)$, $M > 0$. Trouver $g_m \in H^m$, $\|g_m\|_{W^{m,2}(\Gamma_i)} \leq M$
 $\|f - g_m\|_{W^{m,2}(\Gamma_d)} = \inf\{\|f - h\|_{W^{m,2}(\Gamma_d)} : h \in H^m, \|h\|_{W^{m,2}(\Gamma_i)} \leq M\}$

Théorème

$(\text{BEP})_m$ admet une unique solution $g_m \in H^m$ et $\|g_m\|_{W^{m,2}(\Gamma_i)} = M$ si $f \notin H^m_{\Gamma_d}$. La solution g_m est donnée par

$$g_m = (Id + \lambda T_m)^{-1} P_{H^m} \tilde{f}, \quad \text{où } \tilde{f} = \chi_{\Gamma_d}(f, \dots, f^{(m)}) \quad \text{et}$$

$$T_m g = P_{H^m} \chi_{\Gamma_i}(g, \dots, g^{(m)})$$

PLAN

 Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

 Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

 Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

 Conclusion &
perspectives

Continuité forte

$$\Psi_m : W^{m,2}(\Gamma_d) \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow H^m$$

$$(f, M) \mapsto \mathbf{g}_m(f, M),$$

Soit $\mathcal{D}_m = \{ (h, M) \in H_{|\Gamma_d}^m \times \mathbb{R}_+^* \mid \|h\|_{W^{m,2}(\Gamma_i)} < M \}$.

Théorème

L'application Ψ_m est continue sur H^{m-1}

PLAN

Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

Conclusion &
perspectives

Plan

- 1** Problème extrémal borné
 - Existence et unicité
 - **Stabilité**
 - Ajustement de la borne adéquate
 - Robustesse
- 2** Applications : problèmes inverses
 - Corrosion dans un tube
 - Localisation de points sources
 - Identification de fissures
- 3** Conclusion & perspectives

PLAN

 Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

 Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

 Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

 Conclusion &
perspectives

Définition & hypothèses

• Définition

Soit deux suites $(w_n)_{n \in \mathbb{Z}}, (\mu_n)_{n \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$. $H_{w,\mu}^2(\partial G)$ l'espace de Hardy pondéré de la couronne G , muni de la norme

$$\|g\|_{L_{w,\mu}^2(\partial G)}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g_n|^2 [w_n + s^{2n} \mu_n],$$

• Hypothèses

$$\mathcal{H}_1 : \inf_{n \in \mathbb{Z}} \frac{w_n + s^{2n} \mu_n}{1 + s^{2n}} > 0$$

$$\mathcal{H}_2 : \frac{s^{2n} \mu'_n}{w_n + s^{2n} \mu_n} \leq \delta(n) \quad \forall n < 0, \text{ où } \delta(n) \searrow 0 \text{ si } n \rightarrow -\infty,$$

$$\mathcal{H}_3 : \sup_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\mu'_n}{w'_n} \leq \varrho \text{ pour une certaine constante } \varrho > 0.$$

PLAN

 Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

 Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

 Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

 Conclusion &
perspectives

Stabilité logarithmique

Théorème

Supposons que les hypothèses précédentes sont satisfaites. Soit $g \in H_{w,\mu}^2(\partial G)$ telles que $g \in B_{w,\mu}^2$ et $\|g\|_{L_{w'}^2(\Gamma)} \leq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. S'ils $\exists c > 0$ et $\alpha > 0$ telles que $\delta(n) \leq c|n|^{-\alpha}$, alors $\exists C > 0$ telle que

$$\|g\|_{L_{\mu'}^2(s\Gamma)} \leq \frac{C}{|\log \varepsilon|^{\alpha/2}}.$$

Théorème

Soit $((w'_n), (\mu'_n))$ vérifiant \mathcal{H}_∞ , et $((w_n), (\mu_n))$ telles que $\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{|n| \geq N} \frac{w'_n + s^{2n} \mu'_n}{w_n + s^{2n} \mu_n} = 0$. Soit $I \subset \partial G$, $\text{mes}(I) > 0$, et supposons que $(g_p) \in B_{w,\mu}^2 \subset H_{w,\mu}^2(\partial G)$ telle que $\|g_p\|_{L^2(I)} \rightarrow 0$. Alors $\|g_p\|_{H_{w',\mu'}^2(\partial G)} \rightarrow 0$.

PLAN

 Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

 Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

 Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

 Conclusion &
perspectives

Stabilité logarithmique

Corollaire

Soit m et k deux entiers naturels $m > k \geq 0$. Alors il existe une constante C , dépend seulement de m , k et s , telle que dès que $g \in B^{m,2}$ avec $\|g\|_{W^{k,2}(\mathbb{T})} \leq \varepsilon$ pour un certain $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, on a

$$\|g\|_{W^{k,2}(s\mathbb{T})} \leq \frac{C}{|\log \varepsilon|^{m-k}}.$$

Corollaire

Soit m et k deux entiers $m > k \geq 0$, et soit $I \subset \partial G$ un sous-ensemble compact d'intérieur non vide. Soit (g_p) une suite de fonctions dans $B^{m,2} \subset H^{m,2}(\partial G)$ telle que $\|g_p\|_{L^2(I)} \rightarrow 0$. Alors $\|g_p\|_{W^{k,2}(\partial G)} \rightarrow 0$.



Leblond, M.M, Partington, J. *Inv. Ill. P. Problems* (2006)

PLAN

Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

Conclusion &
perspectives

Plan

- 1 **Problème extrémal borné**
 - Existence et unicité
 - Stabilité
 - **Ajustement de la borne adéquate**
 - Robustesse
- 2 **Applications : problèmes inverses**
 - Corrosion dans un tube
 - Localisation de points sources
 - Identification de fissures
- 3 **Conclusion & perspectives**

PLAN

 Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

 Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

 Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

 Conclusion &
perspectives

Cas du disque unité : validation croisée

$f_\varepsilon = f + \varepsilon$ et $\|f\|_{L^2(\Gamma_i)} = M_0$: est la borne adéquate, **inconnue**.

Détermination de M_0 par **validation croisée** :

Une partie des données est dévolue à la détermination de M_0 .

$$\Gamma_d = \Gamma_d^1 \cup \Gamma_d^2$$

- 1 Fixer M ;
- 2 Calculer $g_\varepsilon(M) := g(f_\varepsilon|_{\Gamma_d^1}, M)$;
- 3 Calculer $\underline{M}_\varepsilon := \text{Argmin}_{M>0} \tau_\varepsilon(M) := \|g_\varepsilon(M) - f_\varepsilon\|_{L^2(\Gamma_d^2)}$.



Chaabane et al. *J. Inv. Ill. P. Problems* (2003)

PLAN

 Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

 Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

 Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

 Conclusion &
perspectives

Cas d'une couronne : totalité des données

$f_\varepsilon = f + \varepsilon$ and $\|f\|_{L^2(\Gamma_i)} = M_0$: la borne adéquate, **inconnue**.

Algorithme (A₀)

$$1 \quad (f_\varepsilon, M) \xrightarrow{\text{(BEP)}} g_\varepsilon := g(f_\varepsilon, M)$$

$$2 \quad \left(f_\varepsilon - g_\varepsilon, \|f_\varepsilon - g_\varepsilon\|_{L^2(\Gamma_d)} \right) \xrightarrow{\text{(BEP)}} w_\varepsilon := w(f_\varepsilon, M)$$

PLAN

 Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

 Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

 Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

 Conclusion &
perspectives

Cas d'une couronne : totalité des données

$f_\varepsilon = f + \varepsilon$ and $\|f\|_{L^2(\Gamma_i)} = M_0$: la borne adéquate, **inconnue**.

Lorsque $M \sim M_0$

Algorithme (A_0)

$$1 \quad (f_\varepsilon, M) \xrightarrow{\text{(BEP)}} g_\varepsilon := g(f_\varepsilon, M) \sim \mathbf{f}$$

$$2 \quad (f_\varepsilon - g_\varepsilon, \|f_\varepsilon - g_\varepsilon\|_{L^2(\Gamma_d)}) \xrightarrow{\text{(BEP)}} w_\varepsilon := w(f_\varepsilon, M) \sim \mathbf{0}$$

$$\implies g_\varepsilon + w_\varepsilon \sim \mathbf{f}$$

$$\tau_\varepsilon(M) := \left| \|g_\varepsilon\|_{L^2(\Gamma_i)} - \|g_\varepsilon + w_\varepsilon\|_{L^2(\Gamma_i)} \right| \sim 0.$$

Minimiser $\tau_\varepsilon \Rightarrow$ permet de trouver la borne adéquate

PLAN

 Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

 Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

 Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

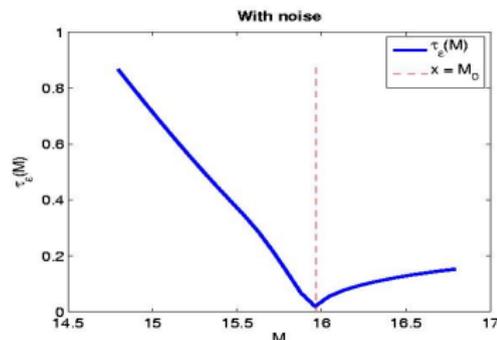
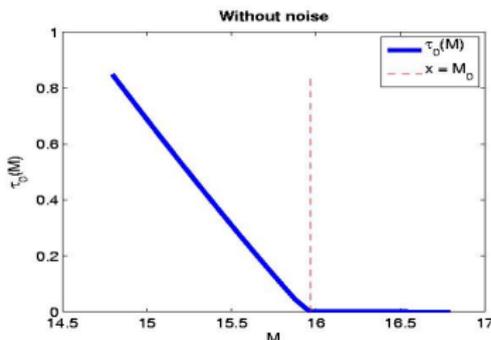
Identification de fissures

 Conclusion &
perspectives

Convergence faible de (\mathbf{A}_0)

Théorème

- 1 Si $\varepsilon = 0$, alors M_0 est le plus petit réel positif qui minimise la fonctionnelle τ_0 et de plus $\tau_0(M_0) = 0$.
- 2 Si $\varepsilon \neq 0$, alors $g_\varepsilon \rightharpoonup f$ sur $H^2_{|\Gamma_i}$ quand $\|\varepsilon\|_{L^2(\Gamma_d)} \rightarrow 0$.



PLAN

 Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

 Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

 Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

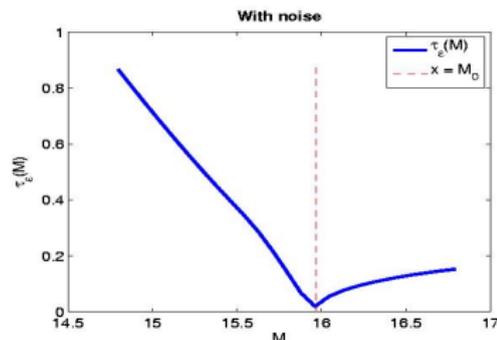
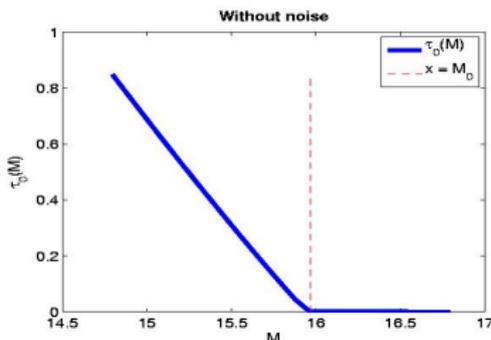
Identification de fissures

 Conclusion &
perspectives

Convergence faible de (A_0)

Théorème

- 1 Si $\varepsilon = 0$, alors M_0 est le plus petit réel positif qui minimise la fonctionnelle τ_0 et de plus $\tau_0(M_0) = 0$.
- 2 Si $\varepsilon \neq 0$, alors $g_\varepsilon \rightharpoonup f$ sur $H^2_{|\Gamma_i}$ quand $\|\varepsilon\|_{L^2(\Gamma_d)} \rightarrow 0$.



\Rightarrow L'algorithme (A_0) ne peut suffire.

PLAN

Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

Conclusion &
perspectives

Plan

- 1** Problème extrémal borné
 - Existence et unicité
 - Stabilité
 - Ajustement de la borne adéquate
 - **Robustesse**
- 2** Applications : problèmes inverses
 - Corrosion dans un tube
 - Localisation de points sources
 - Identification de fissures
- 3** Conclusion & perspectives

PLAN

 Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

 Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

 Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

 Conclusion &
perspectives

Algorithme d'ordre supérieur

L'algorithme $(A)_m$

Suivre les mêmes étapes de l'algorithme $(A)_0$ en résolvant (BEP_m) dans les espaces de Hardy-Sobolev H^m .

Procédé itératif de construction

$$1 \quad g_{m,0}^\varepsilon = g \left(f_\varepsilon, \|f_\varepsilon\|_{W^{m,2}(\Gamma_d)} \right);$$

$$2 \quad g_{m,k+1}^\varepsilon = g_{m,k}^\varepsilon + g \left(f_\varepsilon - g_{m,k}^\varepsilon, \|f_\varepsilon - g_{m,k}^\varepsilon\|_{W^{m,2}(\Gamma_d)} \right), k \geq 0$$

PLAN

Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

Conclusion &
perspectives

Algorithme d'ordre supérieur

L'algorithme $(A)_m$

Suivre les mêmes étapes de l'algorithme $(A)_0$ en résolvant (BEP_m) dans les espaces de Hardy-Sobolev H^m .

Procédé itératif de construction

$$1 \quad g_{m,0}^\varepsilon = g \left(f_\varepsilon, \|f_\varepsilon\|_{W^{m,2}(\Gamma_d)} \right);$$

$$2 \quad g_{m,k+1}^\varepsilon = g_{m,k}^\varepsilon + g \left(f_\varepsilon - g_{m,k}^\varepsilon, \|f_\varepsilon - g_{m,k}^\varepsilon\|_{W^{m,2}(\Gamma_d)} \right), k \geq 0$$

PLAN

Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

Conclusion &
perspectives

Convergence forte

Théorème

Soit $f_\varepsilon \in W^{m,2}(\Gamma_d)$ et $g_{m,\varepsilon}$ la solution de (BEP_m) dans H^m .
Quand $\|\varepsilon\|_{W^{m,2}(\Gamma_d)} \rightarrow 0$ on a :

$$\operatorname{Re} g_{m,\varepsilon} \rightarrow u \text{ dans } W^{m,2}(\partial G) \quad \text{et}$$

$$\partial_\theta \operatorname{Im} g_{m,\varepsilon} \rightarrow \partial_n u \text{ dans } W^{m-1,2}(\partial G).$$



Jaoua, Leblond, M.M, Partington, *IMA Journal of Applied Mathematics* (2008)

PLAN

Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

Conclusion &
perspectives

Plan

- 1 Problème extrémal borné
 - Existence et unicité
 - Stabilité
 - Ajustement de la borne adéquate
 - Robustesse
- 2 Applications : problèmes inverses
 - Corrosion dans un tube
 - Localisation de points sources
 - Identification de fissures
- 3 Conclusion & perspectives

PLAN

Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

Conclusion &
perspectives

Plan

- 1 Problème extrémal borné
 - Existence et unicité
 - Stabilité
 - Ajustement de la borne adéquate
 - Robustesse
- 2 Applications : problèmes inverses
 - Corrosion dans un tube
 - Localisation de points sources
 - Identification de fissures
- 3 Conclusion & perspectives

PLAN

 Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

 Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

 Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

 Conclusion &
perspectives

Tomographie par impédance électrique

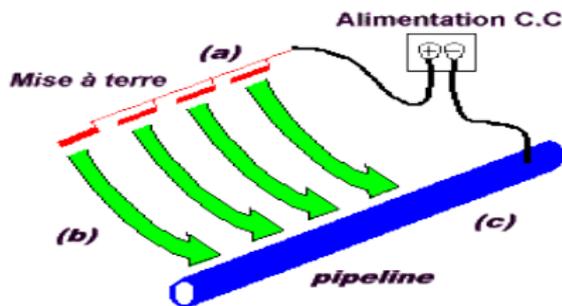


FIG.: Tomographie par impédance électrique (EIT)

Pour effectuer la tomographie par impédance électrique (TIE), on dispose des électrodes sur la partie accessible de l'objet, on applique un courant sinusoïdal entre deux électrodes et on mesure les potentiels engendrés aux autres électrodes. On répète ce processus pour toutes les combinaisons possibles d'électrodes.

PLAN

 Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

 Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

 Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

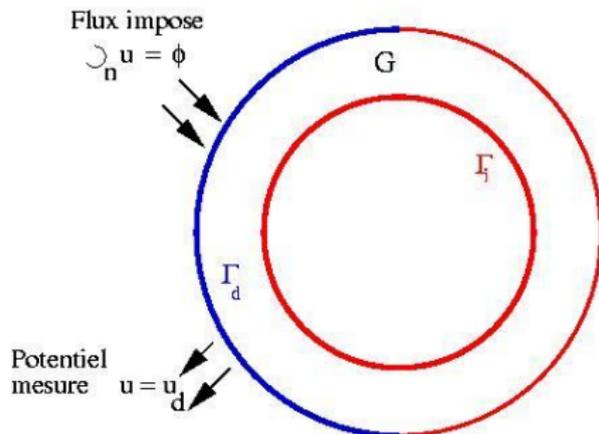
Localisation de points sources

Identification de fissures

 Conclusion &
perspectives

Détection de corrosion

- Retrouver l'information sur la corrosion (parties corrodées, niveau de corrosion) sur la frontière interne d'un tube inaccessible à des mesures.



Extension des données de Γ_d à Γ_i

$$\Gamma_d \cup \Gamma_i = \partial G, \quad \Gamma_d \subset \text{partie extérieure.}$$

PLAN

Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

Conclusion &
perspectives

Modèle linéarisé

$(u_d, \phi) \implies$ un potentiel électrique : $\Delta u = 0$ dans G ;

PLAN

 Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

 Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

 Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

 Conclusion &
perspectives

Modèle linéarisé

$(u_d, \phi) \implies$ un potentiel électrique : $\Delta u = 0$ dans G ;

 Vogelius et Xu (1998)

$\implies \partial_\nu u = q \left(e^{\alpha u} - e^{-(1-\alpha)u} \right)$ sur Γ_i , $0 < \alpha < 1$;

PLAN

 Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

 Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

 Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

 Conclusion &
perspectives

Modèle linéarisé

$(u_d, \phi) \implies$ un potentiel électrique : $\Delta u = 0$ dans G ;

 Vogelius et Xu (1998)

$\implies \partial_\nu u = q \left(e^{\alpha u} - e^{-(1-\alpha)u} \right)$ sur Γ_i , $0 < \alpha < 1$;

 Santosa et al. (1998)

linéarisation $\rightarrow q \left(u + \frac{2\alpha-1}{2} u^2 + \dots \right) \sim qu$

 \Downarrow

$$\partial_\nu u = -qu$$

 \Downarrow

Calculer $q = -\frac{\partial_\nu u}{u}$ sur Γ_i renseigne sur la localisation et l'étendue de cette corrosion.

PLAN

 Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

 Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

 Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

 Conclusion &
perspectives

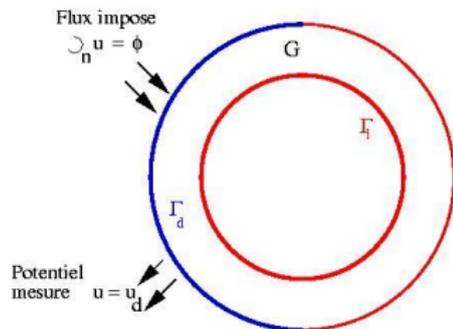
Modélisation : problème inverse de Robin

Étant donnée u_d et ϕ , chercher q tq la solution u de

$$(PC) \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } G \\ u = u_d & \text{sur } \Gamma_d \\ \partial_\nu u = \phi & \text{sur } \Gamma_i \end{cases}$$

vérifie aussi

$$\partial_\nu u + qu = 0 \text{ sur } \Gamma_i$$



PLAN

 Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

 Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

 Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

 Conclusion &
perspectives

Modélisation : problème inverse de Robin

 Etant donnée u_d et ϕ , chercher q tq la solution u de

$$(PC) \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } G \\ u = u_d & \text{sur } \Gamma_d \\ \partial_\nu u = \phi & \text{sur } \Gamma_d \end{cases}$$

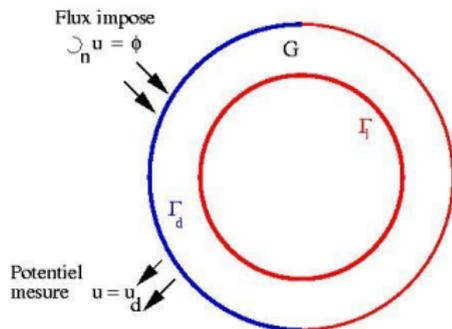
vérifie aussi

$$\partial_\nu u + qu = 0 \text{ sur } \Gamma_i$$

$$u_d, \phi \text{ sur } \Gamma_d \longrightarrow u, \partial_n u \text{ sur } \Gamma_i$$

$$\curvearrowright q = -\frac{\partial_\nu u}{u} \text{ sur } \Gamma_i$$

\Rightarrow Résolution d'un problème de Cauchy dans un domaine annulaire.



PLAN

 Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

 Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

 Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

 Conclusion &
perspectives

Questions

Identifiabilité : unicité de la solution q pour une mesure donnée u (et $\partial_\nu u$) sur Γ_d ?

 Inglese 1997

 Chaabane et Jaoua (1999), Chaabane et al. (2003)

Classe admissible :

$$Q^0 = \{q \in C^0(\Gamma_i), |q| \leq C, \text{ and } q \geq c, C, c > 0\}.$$

Théorème

Soient $\phi \in L^2(\Gamma_d)$, $\phi \geq 0$, $\phi \neq 0$ et $q_1, q_2 \in Q^0$. Soient u_1 et u_2 les solutions associées. Si $u_1|_{\Gamma_d} = u_2|_{\Gamma_d}$, alors $q_1 = q_2$.

PLAN

 Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

 Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

 Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

 Conclusion &
perspectives

Stabilité logarithmique

 $(H_{\phi,m}) : \phi \in W^{m,2}(\Gamma_d), \phi \geq 0, \phi \neq 0.$

 Pour des constantes $\underline{c}, \bar{c} > 0,$
 $(H_{q,m}) : q \in \mathcal{Q}^{(m)} := \{q \in C^m(\Gamma_i), |q^{(k)}| \leq \bar{c}, 0 \leq k \leq m, \text{ et } q \geq \underline{c}\}$

Théorème

1 Pour $m \geq 1$, si $(\|u_1 - u_2\|_{L^2(\Gamma_d)}, \|\phi_1 - \phi_2\|_{L^2(\Gamma_d)} \leq \varepsilon)$

$$\text{alors } \|q_1 - q_2\|_{L^2(\Gamma_i)} \leq \frac{K_2}{|\log \varepsilon|^m}$$

2 Pour $m \geq 2$, si $(\|u_1 - u_2\|_{L^\infty(\Gamma_d)}, \|\phi_1 - \phi_2\|_{L^\infty(\Gamma_d)} \leq \varepsilon)$

$$\text{alors } \|q_1 - q_2\|_{L^\infty(\Gamma_i)} \leq \frac{K_\infty}{|\log \varepsilon|^{m-1}}$$


 Leblond, M.M, Partington, J. *Inv. Ill. P. Problems* (2006)

PLAN

Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

Conclusion &
perspectives

Questions

Identification :

- 1 La plupart des algorithmes d'identification nécessitent des **données complètes** sur le bord
- 2 Comment identifier à partir de mesures incomplètes ?
 - Résoudre un problème de Cauchy pour reconstruire les données manquantes.
 - Utiliser les données ainsi complétées comme "input" dans un algorithme de reconstruction des défauts.
- 3 **Souci** : résolution successive de deux problèmes instables.

Notre idée : utilisation des problèmes extrémaux bornés.

PLAN

 Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

 Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

 Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

 Conclusion &
perspectives

Le problème de Cauchy \longrightarrow fonction analytique

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & G \\ u = u_d & \Gamma_d \\ \partial_n u = \phi & \Gamma_i \end{cases}$$

$$u_d, \phi \text{ sur } \Gamma_d \longrightarrow u, \partial_n u \text{ sur } \Gamma_i?$$

Equations de
Cauchy-Riemann : $\exists v$

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & G \\ \partial_t v = \partial_n u & \partial G \end{cases}$$

et $u = \operatorname{Re} g$ pour $g = u + iv$
analytique dans G , donnée
sur Γ_d par

$$f = g|_{\Gamma_d} = u_d + i \int \phi ds$$

$$q = -\frac{\partial_\theta \operatorname{Im} g}{\operatorname{Re} g} \text{ sur } \Gamma_i.$$

PLAN

Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

Conclusion &
perspectives

Problème de Cauchy \longrightarrow minimisation

$$(A) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } g \in H^2 \text{ telle que} \\ \|g - f\|_{L^2(\Gamma_d)} = \min_{h \in H^2} \|h - f\|_{L^2(\Gamma_d)} \end{array} \right.$$

PLAN

Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

Conclusion &
perspectives

Problème de Cauchy \longrightarrow minimisation

$$(A) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } g \in H^2 \text{ telle que} \\ \|g - f\|_{L^2(\Gamma_d)} = \min_{h \in H^2} \|h - f\|_{L^2(\Gamma_d)} \end{array} \right.$$

1 Si $f \in H^2_{|\Gamma_d}$, alors $\exists! g \in H^2$.

PLAN

 Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

 Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

 Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

 Conclusion &
perspectives

Problème de Cauchy \longrightarrow minimisation

$$(A) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } g \in H^2 \text{ telle que} \\ \|g - f\|_{L^2(\Gamma_d)} = \min_{h \in H^2} \|h - f\|_{L^2(\Gamma_d)} \end{array} \right.$$

1 Si $f \in H^2_{|\Gamma_d}$, alors $\exists! g \in H^2$.

2 Si $f \notin H^2_{\Gamma_d}$ (données bruitées), alors (A) n'admet pas de solution :

$\exists g_n \in H^2 : g_n \rightarrow f$ dans $L^2(\Gamma_d)$ **mais** $\|g_n\|_{L^2(\Gamma_i)} \rightarrow \infty$.

PLAN

 Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

 Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

 Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

 Conclusion &
perspectives

Problème de Cauchy \longrightarrow minimisation

$$(A) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } g \in H^2 \text{ telle que} \\ \|g - f\|_{L^2(\Gamma_d)} = \min_{h \in H^2} \|h - f\|_{L^2(\Gamma_d)} \end{array} \right.$$

1 Si $f \in H^2_{|\Gamma_d}$, alors $\exists! g \in H^2$.

2 Si $f \notin H^2_{|\Gamma_d}$ (données bruitées), alors (A) n'admet pas de solution :

$\exists g_n \in H^2 : g_n \rightarrow f$ dans $L^2(\Gamma_d)$ **mais** $\|g_n\|_{L^2(\Gamma_i)} \rightarrow \infty$.

Controler g sur Γ_i : (BEP)

PLAN

 Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

 Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

 Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

 Conclusion &
perspectives

Convergence forte

Théorème

Supposons $\phi \in W^{m,2}(\Gamma_d)$, $m \geq 1$. Soit alors $g_{m,\varepsilon}$ la solution de (BEP_m) dans $H^{m,2}$. Quand $\|\varepsilon\|_{W^{m,2}(\Gamma_d)} \rightarrow 0$ on a :

$$q_{m,\varepsilon} = -\frac{\partial_\theta \operatorname{Im} g_{m,\varepsilon}}{\operatorname{Re} g_{m,\varepsilon}} \rightarrow q \quad \text{dans } W^{m-1,2}(\Gamma_i).$$

 Jaoua, Leblond, M.M, Partington, *IMA Journal of Applied Mathematics* (2008)

PLAN

 Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

 Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

 Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

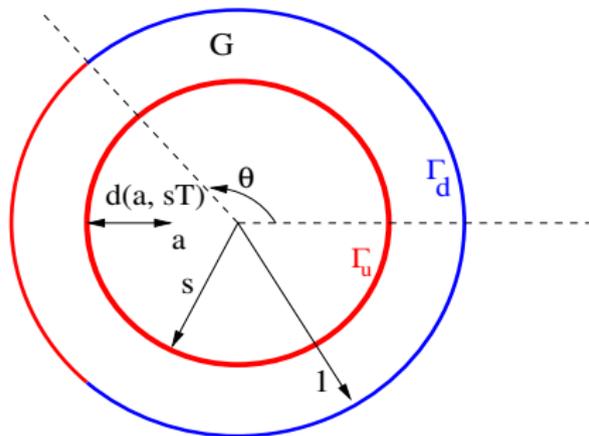
Localisation de points sources

Identification de fissures

 Conclusion &
perspectives

Simulations numériques

G anneau, $s = 0.6$, $\Gamma_d = (e^{-i\theta_0}, e^{i\theta_0})$, $0 < \theta_0 \leq \pi$



$$f(z) = 12 + \frac{2(z-1)}{z - \text{pole}} \in H^2_{|\Gamma_d} \quad \text{pole} \notin G$$

PLAN

 Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

 Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

 Applications :
problèmes inverses

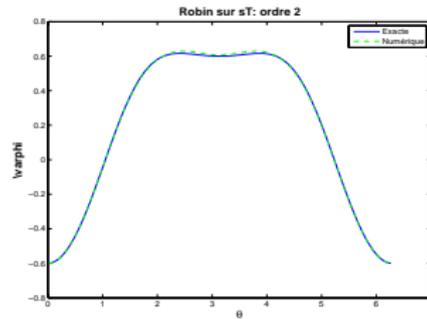
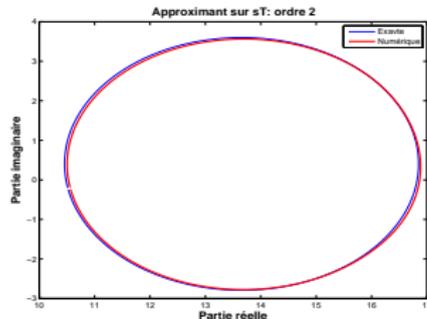
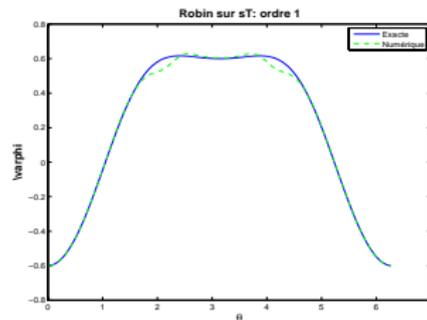
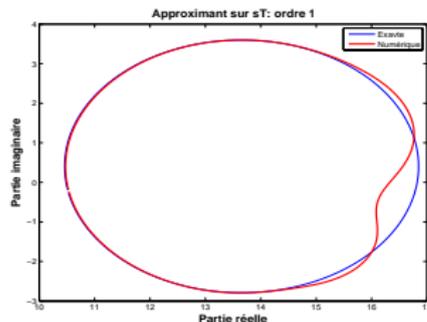
Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

 Conclusion &
perspectives

La continuité de l'approximant est garantie


 FIG.: Reconstruction de g et q sur sT : ordre 1 et 2.

PLAN

 Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

 Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

 Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

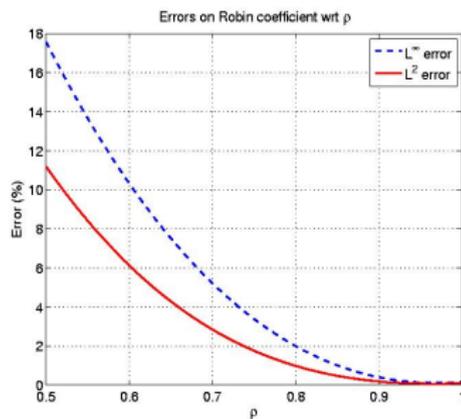
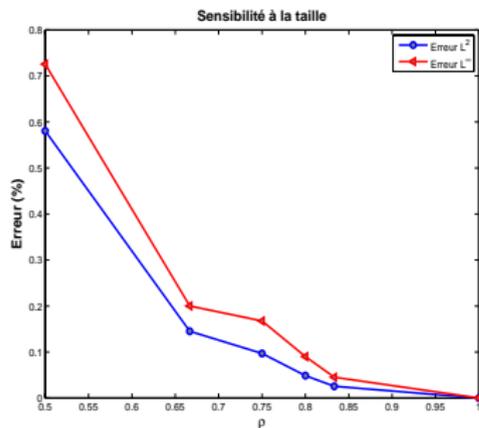
Localisation de points sources

Identification de fissures

 Conclusion &
perspectives

Sensibilité à la qté de données

$$\rho = \frac{|\Gamma_d|}{2\pi} = \text{quantité de mesures sur la frontière externe}$$


 FIG.: Erreurs en fct de ρ

PLAN

 Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

 Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

 Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

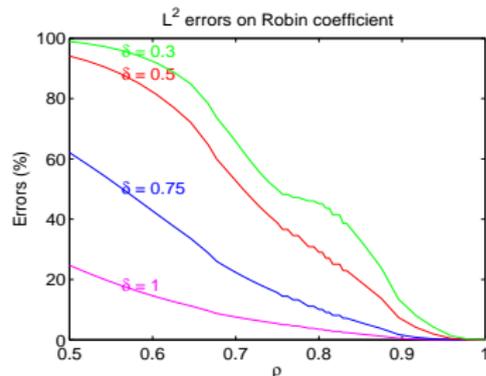
Localisation de points sources

Identification de fissures

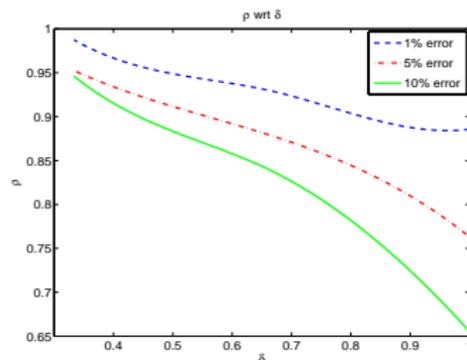
 Conclusion &
perspectives

Sensibilité au bruit I

$$\text{Soit } \delta := \frac{1}{s} d(\text{pole}, sT).$$



Erreurs % ratio pour
différentes valeurs de δ



$\rho\% \delta$ pour différents niveaux
d'erreurs

On peut compenser les effets du bruit en se rapprochant de sT .

PLAN

 Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

 Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

 Applications :
problèmes inverses

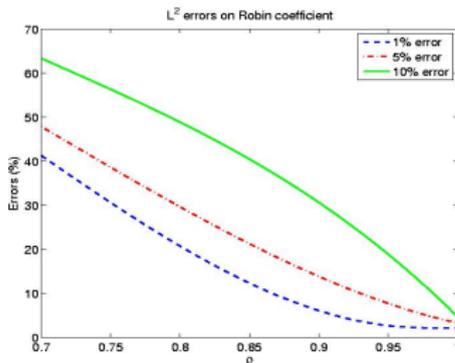
Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

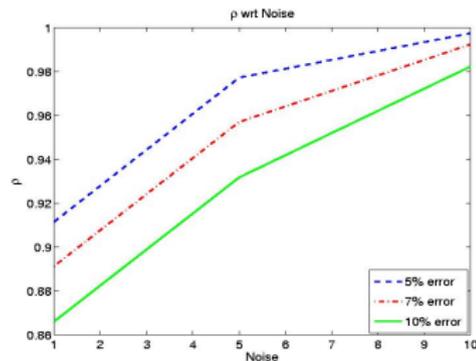
Identification de fissures

 Conclusion &
perspectives

Sensibilité au bruit II



Erreurs % ratio des données
disponibles



ρ %bruit pour différents
niveaux d'erreurs

On peut compenser les effets du bruit en augmentant le ratio de données disponibles.

PLAN

Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

Conclusion &
perspectives

Plan

- 1 Problème extrémal borné
 - Existence et unicité
 - Stabilité
 - Ajustement de la borne adéquate
 - Robustesse
- 2 Applications : problèmes inverses
 - Corrosion dans un tube
 - Localisation de points sources
 - Identification de fissures
- 3 Conclusion & perspectives

PLAN

 Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

 Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

 Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

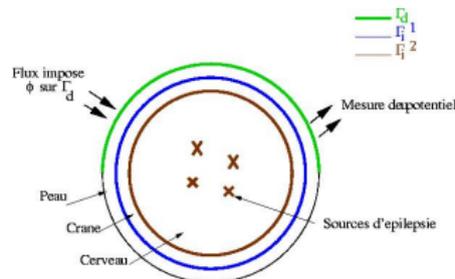
Identification de fissures

 Conclusion &
perspectives

Sources (modèle 2D d'un problème EEG)

 Soit $\Omega = sD \cup rD \cup D$, $0 < s < r < 1$.

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\sigma \nabla u) & = \sum_{k=1}^{m_2} p_k \cdot \nabla \delta_{c_k} & \Omega \\ \sigma \partial_\nu u & = \Phi & \partial\Omega \\ u & = u_0 & \partial\Omega \end{cases}$$



$$\begin{cases} \text{Imposé : flux de courant} & \sigma \partial_\nu u|_{\partial\Omega} \\ \text{mesures : potentiel électrique} & u|_{\partial\Omega} \end{cases}$$

 $\Downarrow??$

 Déterminer le nombre m_2 , position c_k , les moments p_k des sources dipolaires

 \Downarrow

Comment ?

PLAN

 Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

 Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

 Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

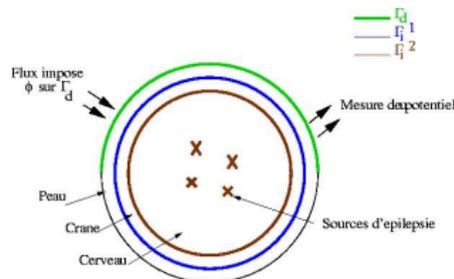
Identification de fissures

 Conclusion &
perspectives

Sources (modèle 2D d'un problème EEG)

 Soit $\Omega = sD \cup rD \cup D$, $0 < s < r < 1$.

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\sigma \nabla u) & = \sum_{k=1}^{m_2} p_k \cdot \nabla \delta_{c_k} & \Omega \\ \sigma \partial_\nu u & = \Phi & \partial\Omega \\ u & = u_0 & \partial\Omega \end{cases}$$



$$\begin{cases} \text{Imposé : flux de courant} & \sigma \partial_\nu u|_{\partial\Omega} \\ \text{mesures : potentiel électrique} & u|_{\partial\Omega} \end{cases}$$

 $\Downarrow??$

 Déterminer le nombre m_2 , position c_k , les moments p_k des sources dipolaires

 \Downarrow

Comment ?

PLAN

 Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

 Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

 Applications :
problèmes inverses

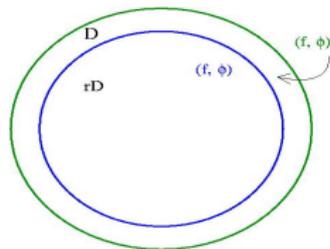
Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

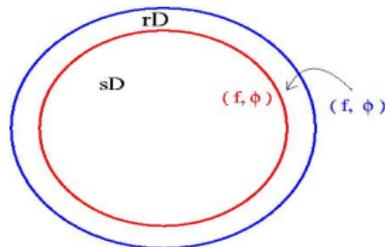
Identification de fissures

 Conclusion &
perspectives

$$\begin{cases} \Delta u_2 & = 0 & D \setminus rD \\ \sigma_2 \partial_\nu u_2 & = \phi & \mathbf{T} \\ u_2 & = f & \mathbf{T} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \Delta u_1 & = 0 & rD \setminus sD \\ \sigma_1 \partial_\nu u_1 & = \sigma_2 \partial_\nu u_2 & \mathbf{rT} \\ u_1 & = u_2 & \mathbf{rT} \end{cases}$$



$$(f, \phi) \rightarrow (f, \phi) \rightarrow (f, \phi)$$

Approximation harmonique

PLAN

 Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

 Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

 Applications :
problèmes inverses

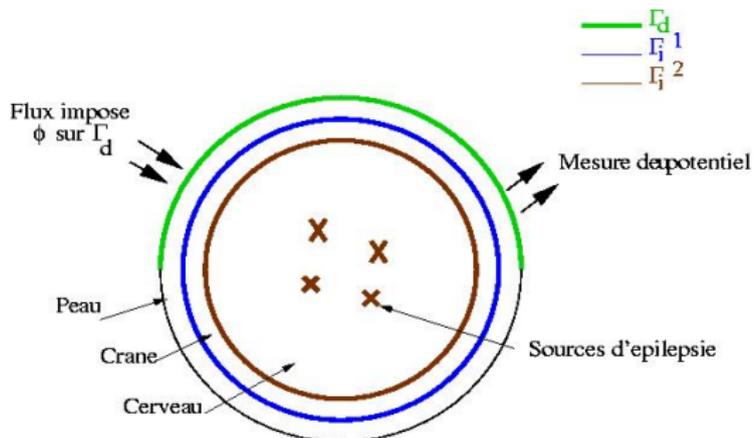
Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

 Conclusion &
perspectives

Exemple



$$\left\{ \begin{array}{lll} \sigma_2 = 1 & R_1 = 1 \\ \sigma_1 = 0.0125 & r = 0,92 \\ \sigma_0 = 1 & s = 0,87 \end{array} \right.$$

PLAN

 Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

 Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

 Applications :
problèmes inverses

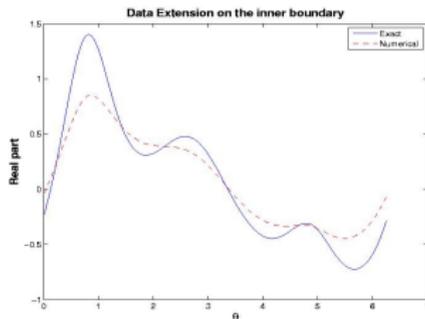
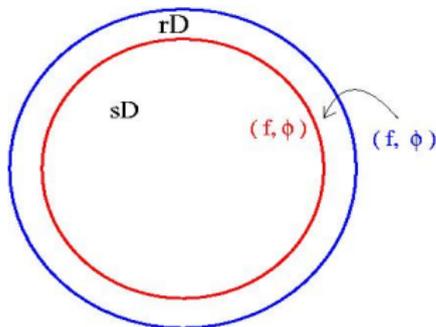
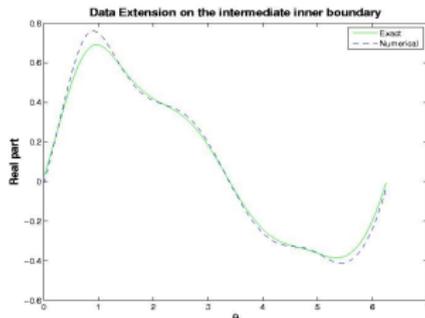
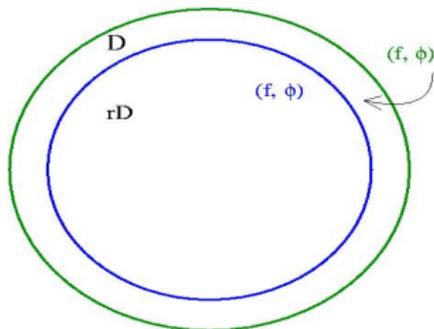
Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

 Conclusion &
perspectives

Résultats numériques



PLAN

 Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

 Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

 Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

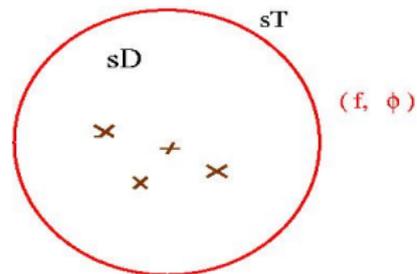
Localisation de points sources

Identification de fissures

 Conclusion &
perspectives

Approximation rationnelle (Baratchart et al. (2005))

$$(PN) \begin{cases} \Delta u & = \sum_{k=1}^{m_2} p_k \cdot \nabla \delta_{c_k} & sD \\ \sigma_0 \partial_\nu u & = \sigma_s \partial_\nu u_s & sT \\ u & = u_s & sT \end{cases}$$



$$u(z) = \operatorname{Re} \left(\mathcal{A}(z) - \sum_{k=1}^{m_2} \frac{p_k}{2\pi(z - C_k)} \right) = \operatorname{Re}(h(z)), \quad z \in sD \setminus \{C_k\},$$

où \mathcal{A} est une fonction analytique dans sD et

$$h(z) = u_s + i \int_{\tilde{\zeta}_0}^z \phi(\tilde{\zeta}) ds(\tilde{\zeta}), \quad \forall z \in sT; \quad \tilde{\zeta}_0 \text{ est fixé sur } sT$$

Localisation des singularités de h à partir des données sur sT .

PLAN

 Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

 Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

 Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

 Conclusion &
perspectives

Approximation rationnelle L^2

Soit $f \in H^2(sD)$ une fonction analytique dans sD . On définit

$$H^2(sD) = \left\{ \sum_{n \geq 0} a_n z^n, z \in sD, \sum_{n \geq 0} s^{2n} |a_n|^2 < \infty \right\}$$

\bar{H}_0^2 : le complément orthogonal de $H^2(sD)$ dans $L^2(sT)$.

Le **meilleur approximant L^2 rationnel de degré n dans \bar{H}_0^2** , noté par g_n , de $h - \mathcal{A}$ est donné par

$$\left\| h - \mathcal{A} - \frac{p_{n-1}}{q_n} \right\|_{L^2(sT)} = \min_{\deg p < \deg q = n} \left\| h - \mathcal{A} - \frac{p}{q} \right\|_{L^2(sT)}$$

PLAN

 Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

 Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

 Applications :
problèmes inverses

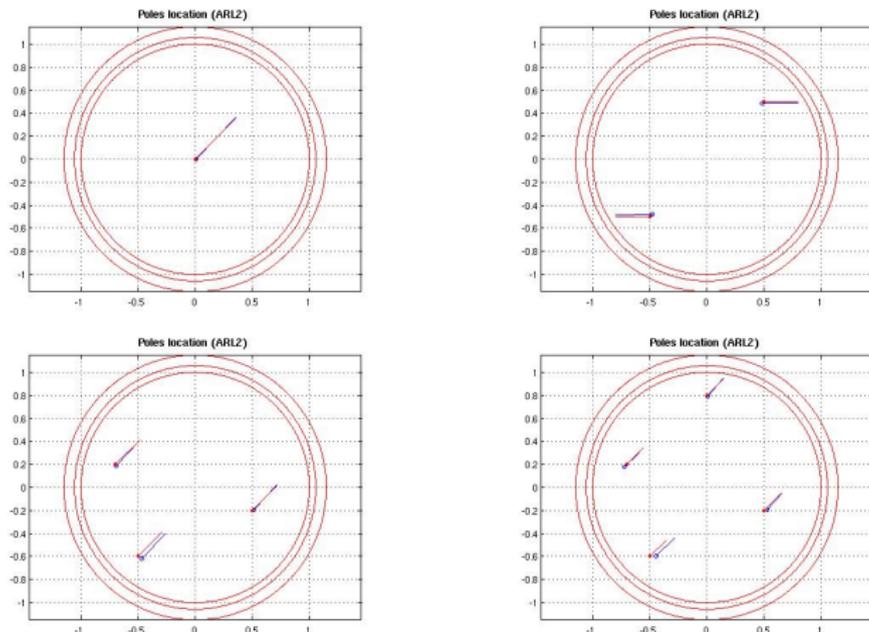
Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

 Conclusion &
perspectives

Résultats numériques


 FIG.: $m_2 = 1, 2, 3, 4$.

PLAN

 Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

 Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

 Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

 Conclusion &
perspectives

Résultats numériques

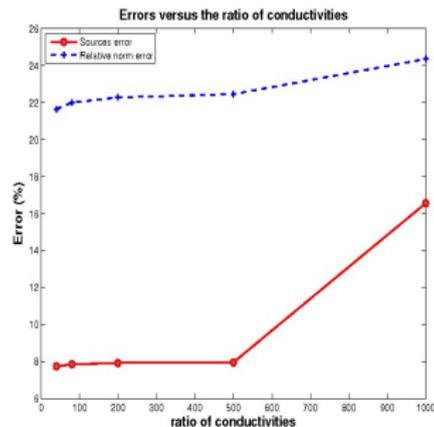
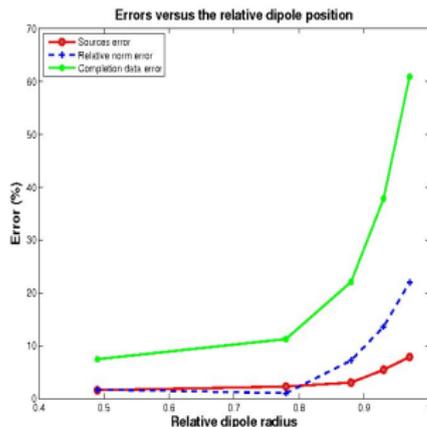


FIG.: Erreurs % position de la source. Erreurs % σ_s pour une source à 97% du rayon s

PLAN

 Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

 Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

 Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

 Conclusion &
perspectives

Résultats numériques

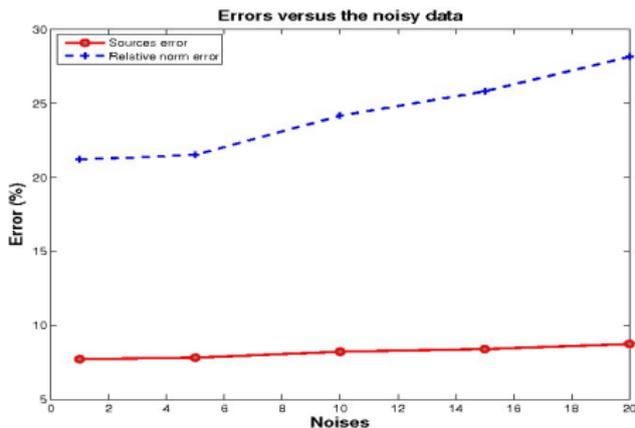


FIG.: Les erreurs sur les sources et sur les moments en fonction du bruit.

PLAN

 Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

 Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

 Applications :
problèmes inverses

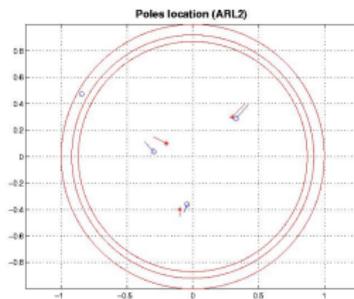
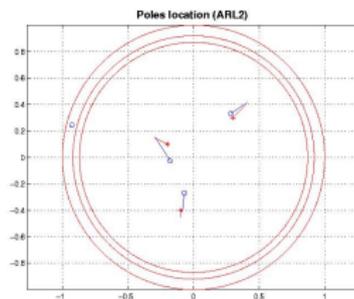
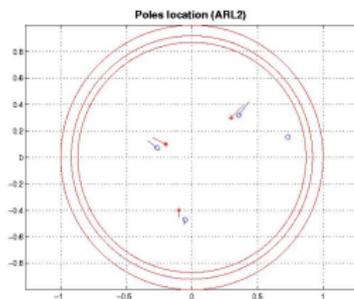
Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

 Conclusion &
perspectives

Résultats numériques



PLAN

Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

Conclusion &
perspectives

Plan

- 1 Problème extrémal borné
 - Existence et unicité
 - Stabilité
 - Ajustement de la borne adéquate
 - Robustesse
- 2 Applications : problèmes inverses
 - Corrosion dans un tube
 - Localisation de points sources
 - Identification de fissures
- 3 Conclusion & perspectives

PLAN

 Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

 Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

 Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

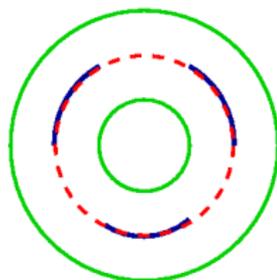
Identification de fissures

 Conclusion &
perspectives

Fissures circulaires

 Cherchons $\sigma \subset \Gamma_i = \lambda T, s < \lambda < 1, tq$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } G \setminus \sigma \\ \partial_\nu u = 0 & \text{sur } \sigma \\ \partial_\nu u = \Phi & \text{sur } \partial G \end{cases}$$



— σ
— Γ_e
- - Γ_i

 $\sigma?$

Etape1 : reconstruction
de $[u]$

Etape2 : retrouver λ le
rayon du cercle porteur

PLAN

 Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

 Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

 Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

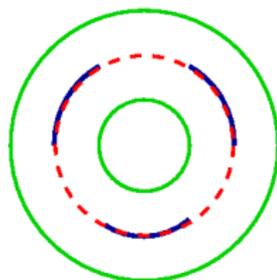
Identification de fissures

 Conclusion &
perspectives

Fissures circulaires

 Cherchons $\sigma \subset \Gamma_i = \lambda T, s < \lambda < 1, tq$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } G \setminus \sigma \\ \partial_\nu u = 0 & \text{sur } \sigma \\ \partial_\nu u = \Phi & \text{sur } \partial G \end{cases}$$



— σ
— ξ
- - Γ_i

 $\sigma?$

↙

Etape1 : reconstruction
de $[u]$

↘

Etape2 : retrouver λ le
rayon du cercle porteur

PLAN

 Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

 Ajustement de la borne
adéquate

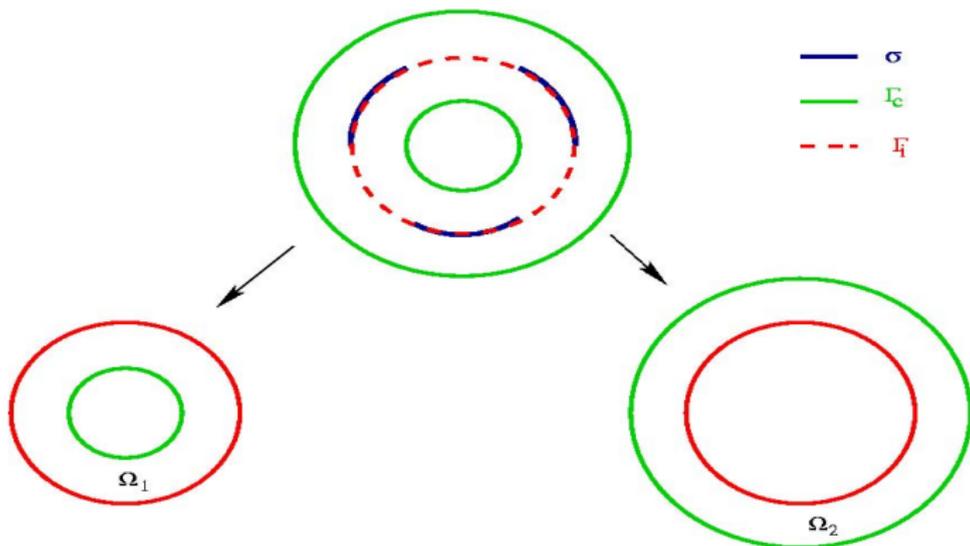
Robustesse

 Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

 Conclusion &
perspectives


Clé : Lemme du support

Si $\int_{\sigma} [u] ds \neq 0$ alors $\sigma \equiv \overline{\{(\lambda, \theta) : [u](\lambda, \theta) \neq 0\}}$.

PLAN

 Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

 Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

 Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

 Conclusion &
perspectives

Cas 1 : λ connu !

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega_1 \\ u = u_+ & \text{sur } s\Gamma \\ \partial_n u = \Phi_+ & \text{sur } s\Gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega_2 \\ u = u_- & \text{sur } \Gamma \\ \partial_n u = \Phi_- & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

$$f_+ = u_+ + i \int_{z_+}^{se^{i\theta}} \Phi_+(se^{it}) dt$$

$$f_- = u_- + i \int_{z_-}^{e^{i\theta}} \Phi_-(e^{it}) dt$$

$$g_+ \text{ dans } \Omega_1 \quad \text{tq} \quad g_+|_{s\Gamma} \simeq f_+$$

$$g_- \text{ dans } \Omega_2 \quad \text{tq} \quad g_-|_{\Gamma} \simeq f_-$$

$$[u] \simeq g_+ - g_- \quad \text{sur } \lambda\Gamma$$

PLAN

 Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

 Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

 Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

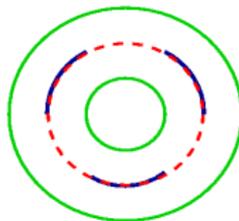
Identification de fissures

 Conclusion &
perspectives

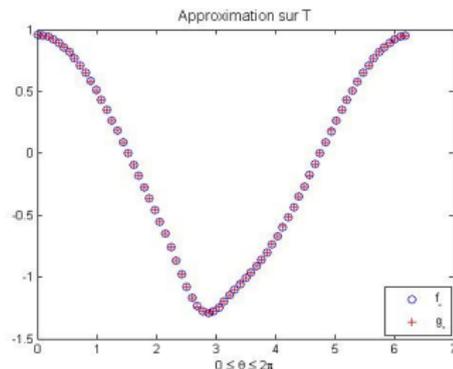
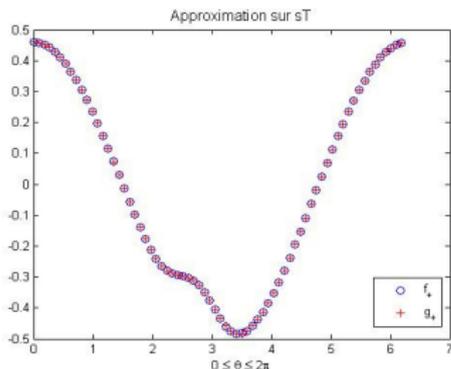
Résultats numériques

Soit $\sigma_{exacte} = \left[\lambda = 0.75, \left(e^{i3\pi/4}, e^{i\pi} \right) \right] \cdot \Phi_+ = -\cos(\theta),$
 $\Phi_- = \cos(\theta)$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } G \setminus \sigma \\ \partial_n u = 0 & \text{sur } \sigma \\ \partial_n u = \Phi & \text{sur } \partial G \end{cases}$$



— σ
 — Γ_e
 - - - Γ_i



PLAN

 Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

 Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

 Applications :
problèmes inverses

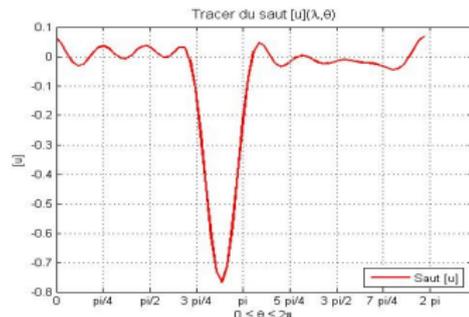
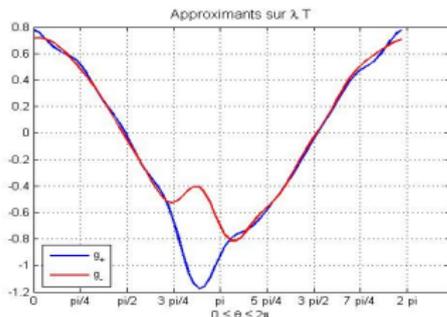
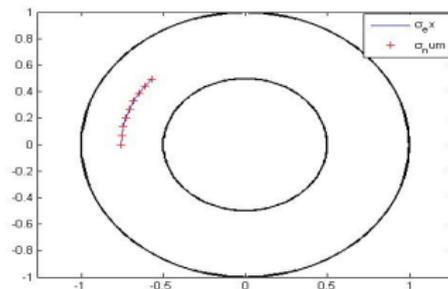
Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

 Conclusion &
perspectives

Résultats numériques : construction de σ


 Tracer des solutions g_+ et g_- sur λT


PLAN

 Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

 Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

 Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

 Conclusion &
perspectives

Etape 2 : λ inconnu

- Idée : Approximation harmonique dans $\Omega_{r,1} := D \setminus \overline{rD}$ et $\Omega_{r,2} = rD \setminus \overline{sD}$ pour $s < r < 1$;

1 si $r < \lambda$,

- l'erreur \gg dans $H^2(\Omega_{r,1}) : \sigma \subset \Omega_{r,1}$ et $g_+ \notin H^2(\Omega_{r,1})$;
- l'erreur \ll dans $H^2(\Omega_{r,2})$

2 Un raisonnement analogue si $r > \lambda$.

\Rightarrow Les erreurs des deux cotés jouent le rôle inverse, jusqu'elles se tiennent petites ensemble lorsque $r = \lambda$.

PLAN

 Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

 Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

 Applications :
problèmes inverses

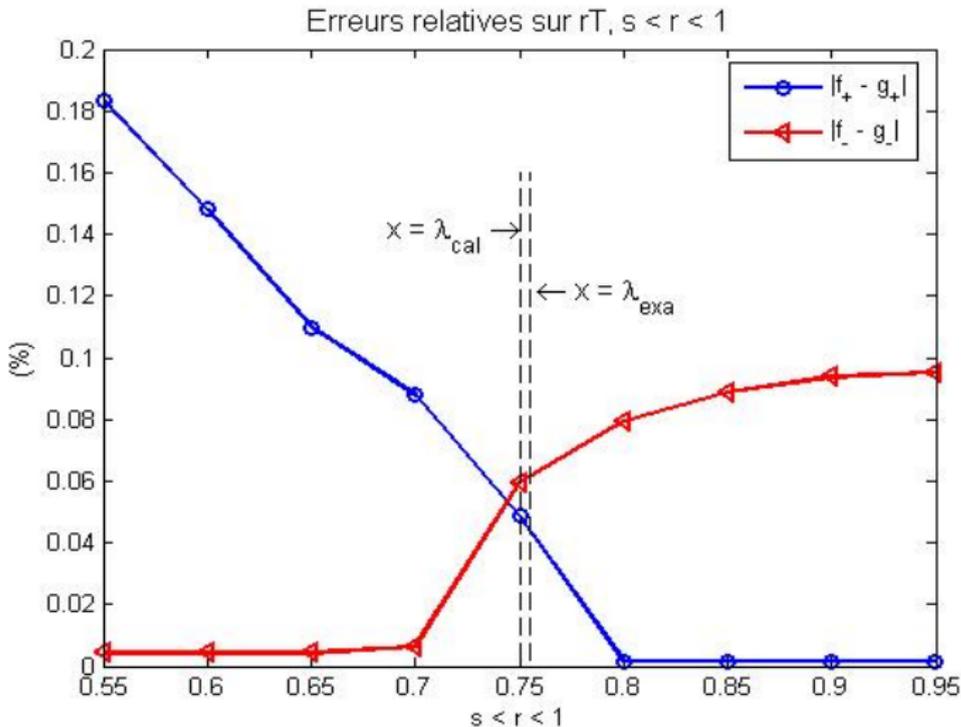
Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

 Conclusion &
perspectives

Résultat numérique



PLAN

 Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

 Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

 Applications :
problèmes inverses

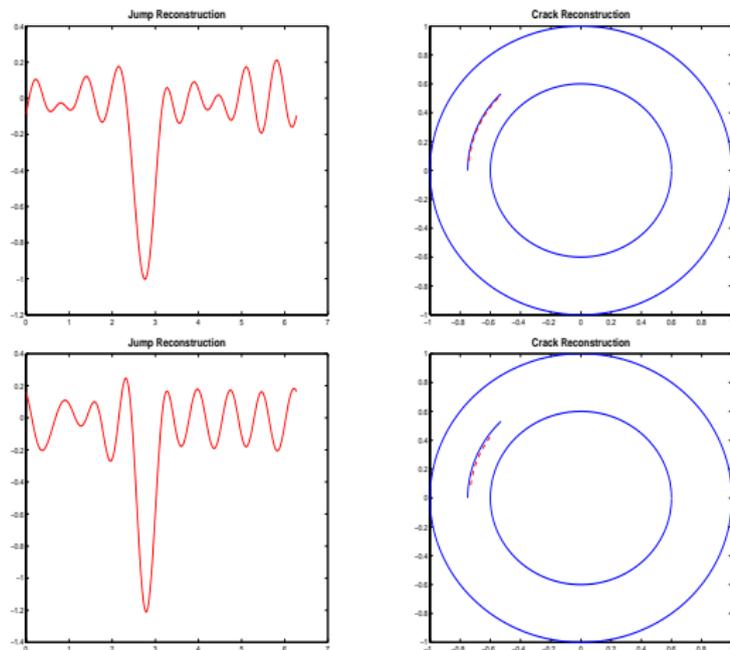
Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

 Conclusion &
perspectives

Résultats numériques : données bruitées


 FIG.: Saut $[u]$ et σ pour un bruit de 5%, et 10%

PLAN

Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

Conclusion &
perspectives

Plan

- 1 Problème extrémal borné
 - Existence et unicité
 - Stabilité
 - Ajustement de la borne adéquate
 - Robustesse
- 2 Applications : problèmes inverses
 - Corrosion dans un tube
 - Localisation de points sources
 - Identification de fissures
- 3 Conclusion & perspectives

PLAN

Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

Conclusion &
perspectives

Conclusions

- 1** Un algorithme robuste pour la résolution du (PI) de Robin : meilleure approximation harmonique (méthode non couteuse), formules explicites, limité au cas 2D et à l'équation de Laplace ;
- 2** Robustesse : une famille d'algorithmes rapides d'identification robustes, validés théoriquement et numériquement ;
- 3** Stabilité : propriétés de stabilité globales de type logarithmique ;
- 4** Méthode efficace pour diverses applications.

PLAN

Problème extrémal
borné

Existence et unicité

Stabilité

Ajustement de la borne
adéquate

Robustesse

Applications :
problèmes inverses

Corrosion dans un tube

Localisation de points sources

Identification de fissures

Conclusion &
perspectives

Perspectives

- 1 Comparaison avec d'autres méthodes 2D (travail en cours)
- 2 Identification de fissures à partir de données partielles :
 - détermination du cercle minimal
 - approximation harmonique couplé avec RG (en cours)
 - soumise à des conditions de Robin
- 3 Extension de l'approximation harmonique au cas 3D