

Quelle est la forme optimale d'un tuyau ?

Yannick PRIVAT

Laboratoire MAPMO
Fédération Denis Poisson - Université d'Orléans & CNRS

12 décembre 2008



Qui a raison ?

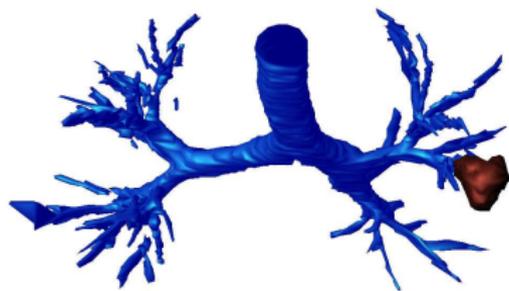


FIG.: L'exemple d'un pipeline et de l'arbre bronchique

Plan de l'exposé

- 1 Introduction
 - Modélisation inverse en sc. du vivant
 - Optimisation de forme
- 2 La forme optimale d'un tuyau
 - Les modèles mathématiques et physiques
 - La forme de la trachée
- 3 Recherche numérique d'optimums
 - La forme optimale d'un tuyau
 - Comment dissiper un fluide à travers une bifurcation ?
 - La meilleure bifurcation
- 4 Perspectives

Principe de modélisation inverse

QUESTION

Les formes présentes dans la Nature tentent-elles d'optimiser un certain critère ?

- On considère un organe ou une partie du corps humain.
- On écrit un modèle mathématique (par exemple une EDP) traduisant le comportement de cet organe.
- On imagine un critère (numérique) que la Nature pourrait vouloir optimiser.
- On résout le problème d'optimisation de formes correspondant.
- On compare avec les formes réelles.

Problèmes d'optimisation de forme

COMMENT LES DÉFINIR ?

- **Choix d'un modèle**, par exemple une EDP qui permet d'analyser physiquement le comportement d'une structure.
- **Choix d'un critère** (ou fonction objectif), à minimiser ou maximiser.
- **Choix d'un ensemble de formes admissibles**, tenant compte d'éventuelles contraintes.

Exemple : en 814 av. J.C., légende de la reine Didon. (problèmes d'inégalités isopérimétriques)

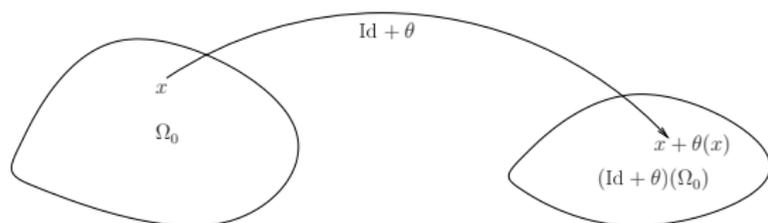
Les outils : dérivation par rapport au domaine (1)

→ Murat-Simon, Sokolowski-Zolésio, etc.

Soit Ω_0 , un domaine de référence. On considère des perturbations du type :

$$\Omega_\theta := (\text{Id} + \theta)(\Omega_0), \text{ avec } \theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N).$$

→ Si $\|\theta\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} < 1$, $\text{Id} + \theta$ est un difféomorphisme de \mathbb{R}^N .



Les outils : dérivation par rapport au domaine (2)

Définition.

La dérivée d'une fonction $\Omega \mapsto J(\Omega)$ par rapport au domaine est le différentielle au sens de Fréchet, en 0 de l'application :

$$\theta \mapsto J(\Omega_\theta) = J((\text{Id} + \theta)(\Omega_0)).$$

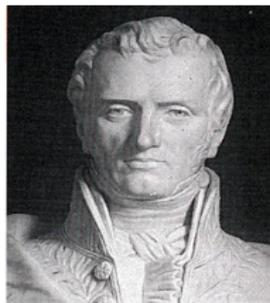
Exemple. Si Ω est un ouvert borné de classe C^2 (ou convexe) et si $\lambda_k(\Omega)$ ($k^{\text{ème}}$ valeur propre du Laplacien-Dirichlet) est simple, alors :

$$\langle d\lambda_k(\Omega), \mathbf{V} \rangle = - \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) d\sigma,$$

avec \mathbf{V} , une perturbation régulière du domaine.

Les modèles mathématiques et physiques (1)

- \mathcal{U} = ensemble des ouverts simplement connexes de \mathbb{R}^3 dont l'entrée E et la sortie S sont fixées.
- On suppose que $\Omega \in \mathcal{U}$ est parcouru par un fluide **newtonien incompressible visqueux**, gouverné par les équations de **Navier-Stokes**.
- $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x_1, x_2, x_3)$ = vitesse du fluide et $p = p(x_1, x_2, x_3)$ = pression du fluide.



Les modèles mathématiques et physiques (2)

L'EDP

Le fluide est régi par l'EDP de Navier-Stokes :

$$\begin{cases} -\mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p + \boxed{\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}} = 0 & \mathbf{x} \in \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \mathbf{x} \in \Omega \end{cases}$$

Conditions au bord

- ① **À l'entrée** : on suppose connue la vitesse du fluide (**profil parabolique**).
- ② **Sur la paroi latérale** : on impose une condition de non glissement (i.e. vitesse nulle sur le bord).
- ③ **À la sortie** : on impose une condition de **contrainte normale**.

Les modèles mathématiques et physiques (3)

Le critère

On définit :

- Tenseur des déformations : $\varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T)$.
- Tenseur des contraintes de Cauchy : $\sigma(\mathbf{u}, p) = -pl_3 + 2\mu\varepsilon(\mathbf{u})$.

Un critère raisonnable d'un point de vue physique est :

$$J(\Omega) = 2\mu \int_{\Omega} |\varepsilon(\mathbf{u})|^2 dx.$$

Les deux directions envisagées

1 Une approche théorique.

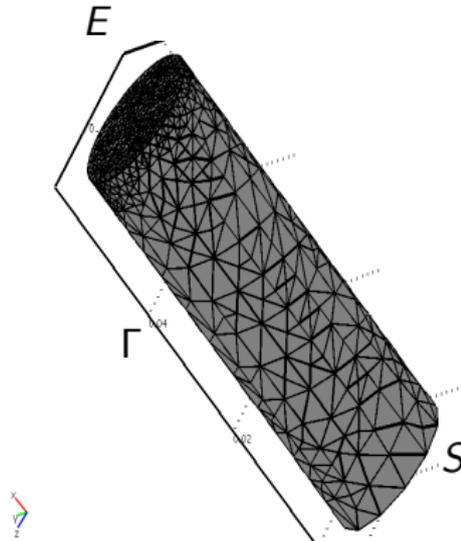
Est-ce que le cylindre est une forme optimale pour minimiser l'énergie dissipée par un fluide ?

2 Une approche numérique. (collaboration avec Benjamin Mauroy)

Quelle forme doit-on donner à une bifurcation (par exemple la trachée et les bronches souches) pour minimiser l'énergie dissipée par un fluide ?

La forme optimale d'un tuyau

- **Une question naturelle** : est-ce que le cylindre minimise l'énergie de dissipation du fluide ?
- On considère un cylindre de longueur $L > 0$ et rayon $R > 0$.



Le cylindre est-il optimal ? (1)

L'EDP posée sur le cylindre

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p + \boxed{\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}} = 0 & \mathbf{x} \in \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 & \mathbf{x} \in E \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \mathbf{x} \in \Gamma \text{ (Non glissement)} \\ \sigma(\mathbf{u}, p) \cdot \mathbf{n} = 0 & \mathbf{x} \in S \text{ (flot normal),} \end{array} \right.$$

avec :

- \mathbf{u}_0 = profil de vitesses parabolique ;
- $\sigma(\mathbf{u}, p) = -pI_3 + \mu(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T)$ = tenseur des contraintes.

Le cylindre est-il optimal ? (2)

On rappelle que :

$$J(\Omega) = 2\mu \int_{\Omega} |\varepsilon(\mathbf{u})|^2 dx.$$

Théorème. Un résultat de non optimalité (A. HENROT, Y.P.)

Le cylindre n'est pas solution du problème d'optimisation :

$$\begin{cases} \min J(\Omega) \\ \text{Vol}(\Omega) \text{ est fixé.} \end{cases}$$

Le cylindre est-il optimal ? (3)

Les grandes étapes de la preuve (1)

- **Étape 1 : calcul de la dérivée de forme.**

On pose $f(t) = J((I + t\mathbf{V})\Omega)$, pour t petit et \mathbf{V} , un champ de vecteurs réguliers.

La dérivée de forme du problème est :

$$f'(0) = dJ(\Omega, \mathbf{V}) = 2\mu \int_{\Gamma} (\varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v}) dx - |\varepsilon(\mathbf{u})|^2) (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) d\sigma,$$

où \mathbf{v} est solution d'un **problème adjoint** (\simeq Navier-Stokes linéarisé) :

$$(PA) \begin{cases} -\mu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla q = -2\mu \Delta \mathbf{u} & \mathbf{x} \in \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 & \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{v} = \mathbf{0} & \mathbf{x} \in E \cup \Gamma \\ \sigma(\mathbf{v}, q) \cdot \mathbf{n} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) - 4\mu \varepsilon(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = 0 & \mathbf{x} \in S. \end{cases}$$

Le cylindre est-il optimal ? (4)

Les grandes étapes de la preuve (2)

- **Étape 2 : Analyse mathématique du problème adjoint.**

Un résultat de symétrie : il existe trois fonctions w , w_3 et \tilde{q}

t.q. $\forall (x_1, x_2, x_3) \in \Omega :$

- $v_i(x_1, x_2, x_3) = x_i w(r, x_3), i \in \{1, 2\}.$
- $v_3(x_1, x_2, x_3) = w_3(r, x_3),$
- $q(x_1, x_2, x_3) = \tilde{q}(r, x_3).$

De plus,

$$(\mathbf{v}, q) \in C^1(\overline{\Omega}) \times C^0(\overline{\Omega}).$$

Le cylindre est-il optimal ? (5)

Les grandes étapes de la preuve (3)

- **Étape 3 : condition d'optimalité.**

On utilise le résultat de symétrie précédent.

Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$dJ(\Omega, \mathbf{V}) = \lambda \int_{\Gamma} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) ds,$$

qui se réécrit :

$$\frac{\partial v_3}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

Le cylindre est-il optimal ? (5)

Les grandes étapes de la preuve (3)

- **Étape 4 : Conclusion.** On introduit les fonctions :

$$w_0(r, x_3) := \int_0^{x_3} w(r, z) dz \text{ et } \psi(z) = \int_{\Gamma_z} (\tilde{q} - 2cr^2 w_0) r dr d\theta.$$

Lemme

La fonction ψ est affine.

Idee de la preuve. On applique l'opérateur de divergence à l'EDP :

$$-\mu \Delta \mathbf{v} + \nabla q + \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = -2\mu \Delta \mathbf{u},$$

puis, on intègre sur une tranche du cylindre.

Le cylindre est-il optimal ? (6)

Les grandes étapes de la preuve (4)

Ingrédients pour conclure :

- Le couple (\mathbf{v}, q) est $C^1 \times C^0$ dans $\overline{\Omega}$.
- On intègre l'EDP donnant v_3 séparément sur E et sur S .
- On utilise la condition surdéterminée $\frac{\partial v_3}{\partial n} = 0$ sur Γ .

On obtient :

$$\boxed{\psi'(L) = -16\mu c \pi R^2} \text{ et } \boxed{\psi'(0) = -8\mu c \pi R^2}.$$

ψ est affine, donc c'est absurde !

Extension du résultat précédent

Théorème. (A. HENROT, Y.P.)

Le cylindre n'est optimal :

- ni pour un système de Navier-Stokes, en 2D et en 3D ;
- ni pour un système de Stokes, en 2D et en 3D.

→ **Une question naturelle : l'optimum est-il à symétrie cylindrique ?**

Symétries de l'optimum (1)

Uniquement dans le cas d'un système de **Stokes**, on sait établir le :

Théorème. (A. HENROT, Y.P.)

Il existe un domaine Ω minimisant l'énergie de dissipation sous contrainte de volume qui possède un plan de symétrie passant par les centres des disques E et S .

→ Un élément de réponse à la question : l'optimum est-il à symétrie cylindrique ?

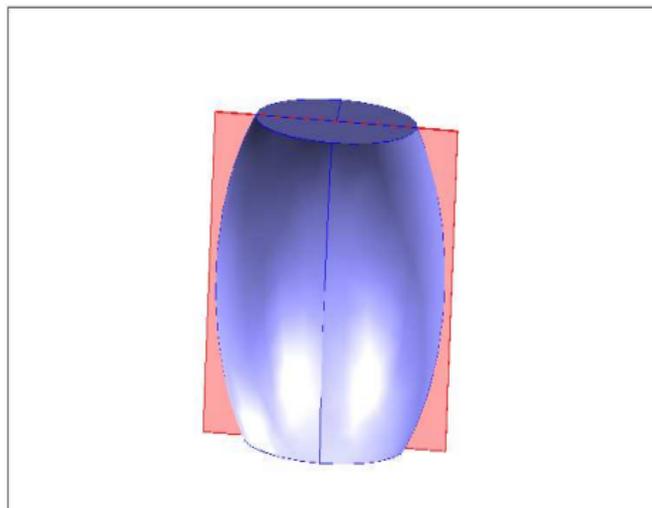
G. Arumugam et O. Pironneau ont montré que dans le cas d'un régime de Poiseuille (flux proportionnel à la différence de pression entre l'entrée et la sortie du conduit), on améliore le critère J en créant des **riblets**.

Symétries de l'optimum (2)

Soit Ω , une solution du problème d'optimisation de forme.

- **Étape 1 : Sélection d'un domaine de mesure $|\Omega|/2$.**

L'existence est assurée, en balayant Ω à l'aide d'un plan passant par les centres des disques E et S .



Symétries de l'optimum (3)

- **Étape 2 : “Symétrisation” du domaine Ω .**

On a l'existence d'un plan coupant Ω en deux domaines de même mesure Ω_1 et Ω_2 .

Si $\int_{\Omega_1} |\varepsilon(\mathbf{u})|^2 dx \leq \int_{\Omega_2} |\varepsilon(\mathbf{u})|^2 dx$, on pose :

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_1 \\ \mathbf{u}(\sigma(\mathbf{x})) & \text{si } \mathbf{x} \in \sigma(\Omega_1) \end{cases} \quad \text{et} \quad \hat{p}(\mathbf{x}) = \begin{cases} p(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_1 \\ p(\sigma(\mathbf{x})) & \text{si } \mathbf{x} \in \sigma(\Omega_1) \end{cases}$$

où σ est la symétrie par rapport au plan coupant Ω en deux domaines de même mesure, et $\hat{\Omega} = \Omega_1 \cup \sigma(\Omega_1)$.

Symétries de l'optimum (4)

• **Étape 3 : Conclusion.**

$$\begin{aligned}
 J(\hat{\Omega}) &= \min_{\mathbf{u} | \operatorname{div} \mathbf{u} = 0} \left(2\mu \int_{\hat{\Omega}} |\varepsilon(\mathbf{u})|^2 dx \right) \\
 &\leq 2\mu \int_{\hat{\Omega}} |\varepsilon(\hat{\mathbf{u}})|^2 dx \\
 &\leq J(\Omega)
 \end{aligned}$$

→ $\hat{\Omega}$ est admissible ($|\hat{\Omega}| = |\Omega|$).

→ Les inégalités précédentes sont des égalités.

$\hat{\Omega}$ minimise le critère J dans la classe des formes admissibles.

Symétries de l'optimum (5)

→ Peut-on prouver cette propriété pour tous les minimiseurs de ce problème ?

Oui, si le minimiseur Ω est C^2 en utilisant l'analyticité des solutions du problème de Stokes.

Problèmes ouverts

- Quid du cas Navier-Stokes ? (La technique de "symétrisation" ne fonctionne pas *a priori*.)
- Peut-on montrer des propriétés de symétrie plus fortes dans les cas de Stokes et Navier-Stokes ?

Retour sur la forme optimale d'un tuyau

Confirmation numérique du résultat de non optimalité



Comment dissiper un fluide à travers une bifurcation ? (1)

Quel choix de modélisation ?

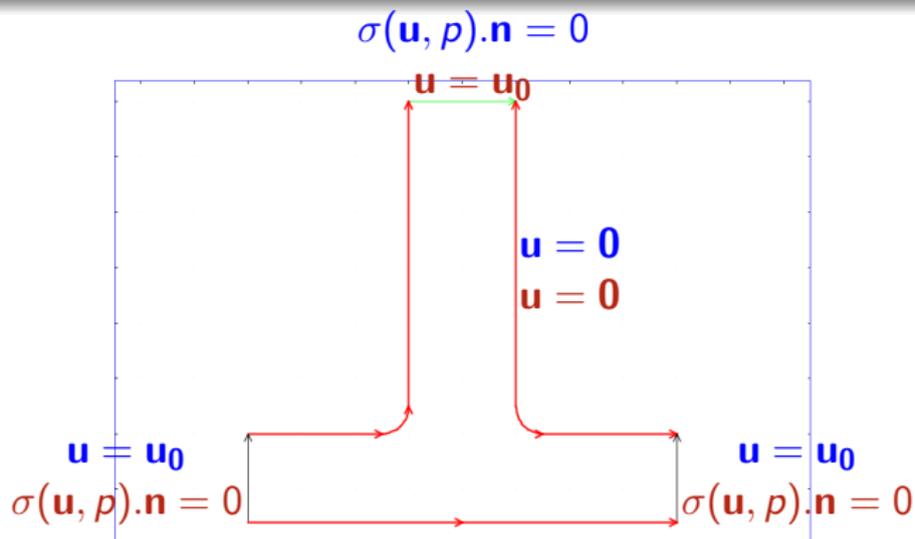


FIG.: Les différentes conditions au bord envisageables

Comment dissiper un fluide à travers une bifurcation ? (2)

Un algorithme de type Lagrangien augmenté

On se donne $\tau > 0$ et ε_{stop} .

On définit le **Lagrangien augmenté** du problème :

$$\mathcal{L}_b(\Omega, \mu) = J(\Omega) + \mu (\text{mes}(\Omega) - V_0) + \frac{b}{2} (\text{mes}(\Omega) - V_0)^2.$$

Description de l'algorithme

→ **Initialisation.** On se fixe Ω_0 (initialisation de l'arbre) et $\mu_0 \in \mathbb{R}$.

→ **Itération m : une méthode de gradient**

→ **Calcul de la direction de descente :** $-\nabla \mathcal{L}_b(\Omega_m, \mu_m)$.

- Résolution du problème de Navier-Stokes (solution \mathbf{u}_m).
- Résolution du problème adjoint (solution \mathbf{v}_m).

Comment dissiper un fluide à travers une bifurcation ? (3)

→ Détermination du déplacement \mathbf{d}_m . Nous choisissons \mathbf{d}_m solution de :

$$\langle \mathbf{d}_m, \mathbf{w} \rangle_{H^1(\Omega_m)} = - \int_{\Gamma_m} \nabla \mathcal{L}_b(\Omega_m, \mu_m) \cdot \mathbf{w} ds, \quad \forall \mathbf{w} \in B(\Omega_m),$$

avec $B(\Omega_m) \stackrel{\text{déf}}{=} \{ \mathbf{w} \in H^1(\Omega_m) \mid \mathbf{w}|_{EUS} = 0 \}$.

On a ainsi :

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle \mathbf{d}_m, \mathbf{d}_m \rangle_{H^1(\Omega_m)} &= - \int_{\Gamma_m} \nabla \mathcal{L}_b(\Omega_m, \mu_m) \cdot \mathbf{d}_m ds \\ &= - \langle d\mathcal{L}_b(\Omega_m, \mu_m), \mathbf{d}_m \rangle. \end{aligned}$$

Comment dissiper un fluide à travers une bifurcation ? (4)

→ Détermination du domaine Ω_{m+1} : $\Omega_{m+1} = (I + \varepsilon_m \mathbf{d}_m)(\Omega_m)$.

→ Réinitialisation du multiplicateur de Lagrange :

$$\mu_{m+1} = \mu_m + \tau (\text{mes}(\Omega_{m+1}) - V_0)$$

→ Critère d'arrêt.

Comment dissiper un fluide à travers une bifurcation ? (5)

Quelques résultats numériques

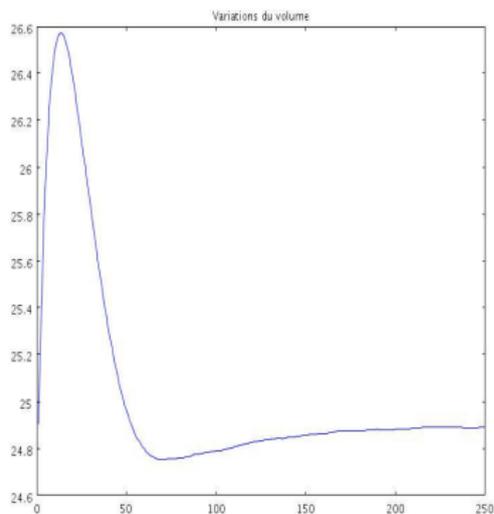
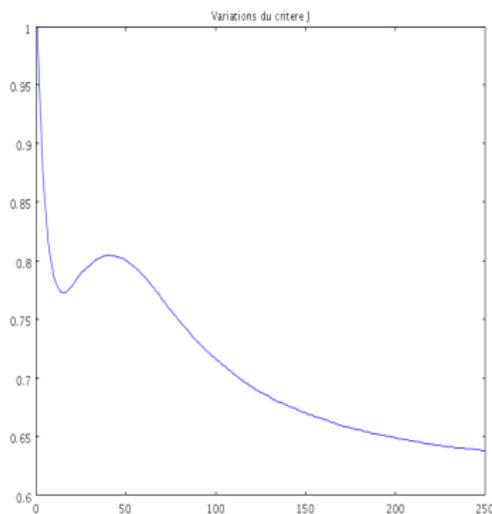


FIG.: À droite, volume en fonction des itérations et à gauche, critère en fonction des itérations

Perspectives (1)

- Le conduit cylindrique serait-il optimal pour d'autres données raisonnables en entrée et en sortie ?
- L'étude d'un autre critère peut sembler intéressante :

$$J_1(\Omega) := \int_S p(s) ds - \int_E p(s) ds \text{ (perte de charge)}$$

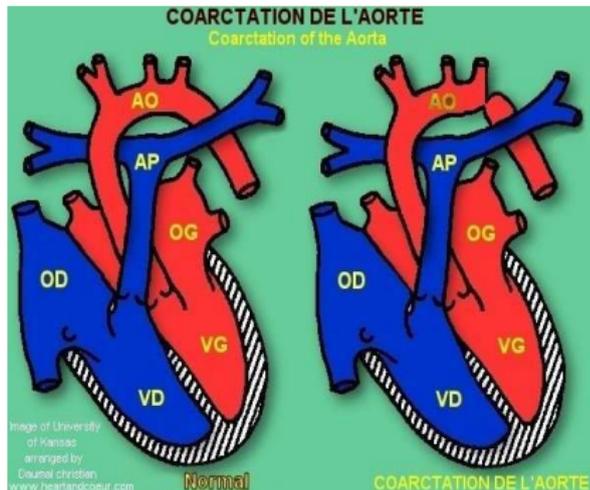
- Retrouve-t-on la forme de l'arbre bronchique si l'on minimise ce critère dans une classe raisonnable ?
- Également intéressant pour traiter des problèmes de design optimal (optimisation de la forme d'une pompe de fonds de puits).

Perspectives (2)

- $J_2(\Omega) := \int_{\partial\Omega} |\sigma(\mathbf{u}, p)|^2 dx$. (contraintes)

Application au problème de la coarctation de l'aorte.

⇒ Travail en cours avec Benjamin MAUROY.



Merci de votre attention