Une application d'une inégalité de type Carleman au contrôle dans un milieu stratifié

A. Benabdallah, Y. Dermenjian, J. Le Rousseau
LATP, UMR 6632, Université de Provence *

Une idée de ce qu'on appelle le contrôle
On considère un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, de bord régulier, et on se donne
• un opérateur autoadjoint positif A de domaine $D(A) \subset L^2(\Omega)$,
• un petit ouvert ω tel que $\omega \subset \Omega$,
• un temps $T > 0$,
• une fonction $q^0 \in L^2(\Omega)$,
• accessoirement une fonction $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $G(s) = sg(s)$ et $\lim_{|x|\to\infty} \frac{|G(s)|}{|s| \ln^{3/2}(1+|s|)} = 0$.
Les questions posées sont les suivantes :
1/ Peut-on trouver une fonction $u \in L^2((0,T), L^2(\Omega)$ telle que la solution q du système

$$\begin{cases} \partial_t q + Aq + G(q) = 1_\omega u, \\ q(t,.) \in D(A),\ \forall t \in (0,T), \\ q(0,x) = q^0(x), \end{cases}$$

vérifie $q(T,x) = 0$ pour tout $x \in \Omega$?
2/ Peut-on répondre positivement pour tout $T > 0$ et toute donnée initiale $q^0 \in L^2(\Omega)$?

Si la réponse à ces deux questions est positive, on dit que l'on a la contrôlabilité à zéro.

Nous nous sommes intéressés au cas d'un opérateur A sous forme divergentielle et que l'on peut définir par une formulation variationnelle, à savoir

$$a(u,v) := \int_\Omega c \nabla u . \nabla v \, dx, u, v \in H_0^1(\Omega). \tag{1}$$

Il n'y a aucun problème pour considérer une fonction c irrégulière, il suffit de prendre $c, \frac{1}{c} \in L^\infty(\Omega), c > 0$ et on définit ainsi un opérateur autoadjoint positif A avec la condition de Dirichlet au bord. On l'écrit

$$Aq := -\text{div}(c \, \text{grad} q), q_{|\partial\Omega} = 0. \tag{2}$$

*LATP, 39 rue F. Joliot Curie 13 453 Marseille cedex 13.

Lorsque le coefficient de diffusion c est régulier, disons C^1, on sait prouver que le système est contrôlable à zéro. Les difficultés, non encore résolues actuellement, commencent avec un coefficient de diffusion irrégulier. Il y a eu un travail initiateur de Doubova-Osses-Puel en 2002 mais avec plusieurs restrictions, la principale à nos yeux étant que l'ouvert de contrôle ω ne peut pas être situé n'importe où.

Nous avons fait sauter partiellement le verrou :
1/ lorsque $\Omega = (0, H)$ et $c \in BV(0, H)$ (cf. nos travaux et la généralisation de Le Rousseau) ;
2/ lorsque le milieu est stratifié dans une direction. L'exemple le plus simple correspond à $\Omega = \Omega' \times (0, H) \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}, c(x', x_n) = c(x_n)$, où Ω' est un ouvert borné.
Nos Ingrédients :
1/ écriture de l'opérateur A comme une somme hilbertienne d'opérateurs autoadjoints A_k définis dans $L^2(0, H)$, i.e.

$$A = \bigoplus_{k \geq 1} A_k \tag{3}$$

chaque A_k agissant dans un espace d'Hilbert $\mathcal{H}_k$. On a $L^2(\Omega) = \bigoplus_k \mathcal{H}_k$ et il se trouve ici que l'on est dans une situation simple puisque $\mathcal{H}_k = L^2(0, H)$ quelque soit k.
2/ utilisation d'une inégalité de Carleman adaptée à l'opérateur autoadjoint positif $A_0 := -(cu')'$, de domaine$D(A) := \{u \in H_0^1(0, H); cu' \in H^1(0, H)\}$.
3/ utilisation d'une inégalité, due à Lebeau et Robbiano, permettant de regrouper les estimations obtenues pour un nombre fini d'opérateurs A_k.

Ceci permet de traiter un certain nombre de situations et de répondre positivement lorsque la perturbation non linéaire G est nulle, c'est à dire absente.

1 La décomposition hilbertienne

Nous allons chercher une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ composée de fonctions propres de l'opérateur A (voir (2)) en utilisant la technique de séparation des variables.
L'ouvert Ω étant un parallélépipède et $Aq = -\mathrm{div}(c\,\mathrm{grad}q)$ s'écrivant aussi

$$-c(x_n) \sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{\partial}{\partial x_n} \left(c(x_n) \frac{\partial}{\partial x_n} \right), \tag{4}$$

on profite de cette structure particulière en cherchant des fonctions propres φ de la forme $\varphi(x) = \phi(x')\psi(x_n)$. On distingue donc l'opérateur $-\Delta_{x'}$ dans (4) avec la condition de Dirichlet sur l'ouvert Ω'. Il lui correspond une base orthonormale de fonctions propres ϕ_k associées aux valeurs propres μ_k. Lorsque $n = 2$ et $\Omega' = (0, 1)$, on voit que $\mu_k = k^2\pi^2, \phi_k(x') = \sqrt{2}\sin(k\pi x')$. On applique alors l'opérateur A à l'éventuelle fonction propre $\varphi(x) = \phi_k(x')\psi(x_n)$, associée à la valeur propre λ, et on obtient l'équation

$$\begin{cases} -(c\psi')' + (c\mu_k - \lambda)\psi = 0 \text{ sur } (0, H) \\ \psi(0) = \psi(H) = 0. \end{cases}$$

On a donc introduit, de manière naturelle, l'opérateur

$$A_k\psi := -(c\psi')' + c\mu_k\psi \tag{5}$$

Cet opérateur considéré sur l'intervalle $(0, H)$ et muni de la condition de Dirichlet en 0 et en H est autoadjoint positif. Comme il est à résolvante compacte, nous choisissons une base orthonormale de fonctions propres que nous appelerons $(\psi_{k,p})_{p\geq 1}$ associée à la suite de valeurs propres $(\lambda_{k,p})_{k,p\geq 1}$. Nous avons maintenant ce que nous désirons, à savoir des fonctions propres $(\varphi_{k,p})_{k\geq 1,p\geq 1}$, de la forme $\varphi_{k,p}(x) := \phi_k(x')\psi_{k,p}(x_n)$, la valeur propre associée étant encore $\lambda_{k,p}$. Il faut montrer que c'est effectivement une base complète de $L^2(\Omega)$ mais c'est sans problème.
Maintenant on peut avancer comme si on était sur une autoroute avec une infinité de voies avec comme règle simple qu'il est interdit de changer de voie.

2 Une inégalité de Carleman

2.1 Une estimation de Carleman pour un problème de Cauchy

La question de l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy est à l'origine de ce que l'appelle les inégalité de Carleman (1939). À cette époque, Carleman utilisait seulement un seul paramètre appelé s et destiné à tendre vers $+\infty$.
Si P est un opérateur aux dérivées partielles d'ordre m à coefficients réguliers dans la partie principale, et sous des hypothèses convenables sur P, il existe des constantes strictement positives C, T_0, s_0, r telles que pour $T \leq T_0$, $s \geq s_0$, on ait

$$\sum_{|\alpha|\leq m-1} \int_0^T e^{s(t-T)^2} \|D^\alpha q\|^2\, dt \\ \leq C(\frac{1}{s} + T^2) \int_0^T e^{s(t-T)^2} \|Pq\|^2\, dt$$

pour chaque fonction v de classe C^∞ avec $\operatorname{supp} v \subset \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}; 0 \leq t \leq T, |x| \leq r\}$.

Si l'opérateur est elliptique d'ordre 1 on a

$$\int_0^T e^{s(t-T)^2} \|q\|^2\, dt \leq \frac{C}{s} \int_0^T e^{s(t-T)^2} \|Pq\|^2\, dt$$

La notation $\|v\|$ désigne la norme de la fonction v dans l'espace $L^2(\mathbb{R}^n)$.

2.2 Une estimation de Carleman adaptée au contrôle pour un espace 1-D

Soit $\omega \Subset (0, H)$. Il existe $\lambda_1 = \lambda_1((0, H), \omega) > 0$, $s_1 = s_1(\lambda_1, T) > 0$ et une constante positive $C = C((0, H), \omega)$ telle que l'estimation suivante ait lieu

$$
\begin{aligned}
& s\lambda^2 \int\int_Q e^{-2s\eta}\varphi\, |\partial_x q|^2\, dxdt + s^3\lambda^4 \int\int_Q e^{-2s\eta}\varphi^3\, |q|^2\, dxdt \\
& \quad \leq C \left[s^3\lambda^4 \int\int_{(0,T)\times\omega} e^{-2s\eta}\varphi^3\, |q|^2\, dxdt + \int\int_Q e^{-2s\eta}\, |\partial_t q \pm A_0 q|^2\, dxdt \right], \qquad (6)
\end{aligned}
$$

pour $s \geq s_1$, $\lambda \geq \lambda_1$ et pour tout $q \in \aleph$, avec

$\aleph = \left\{ q \in C(Q,\mathbb{R}); q_{|Q_i} \in C^2(\overline{Q_i}), i = 0,1, q_{|\Sigma} = 0, \text{et } q \text{ satisfait (CT) pour tout } t \in (0,T) \right\}.$

$Q := (0,T) \times (0,H)$. Les fonctions poids φ et η sont données par

$$
\lambda > 0 \,\text{et}\, t \in (0,T), \quad \varphi(t,x) = \frac{e^{\lambda\beta(x)}}{t(T-t)}, \qquad \eta(t,x) = \frac{e^{\lambda\overline{\beta}} - e^{\lambda\beta(x)}}{t(T-t)}.
$$

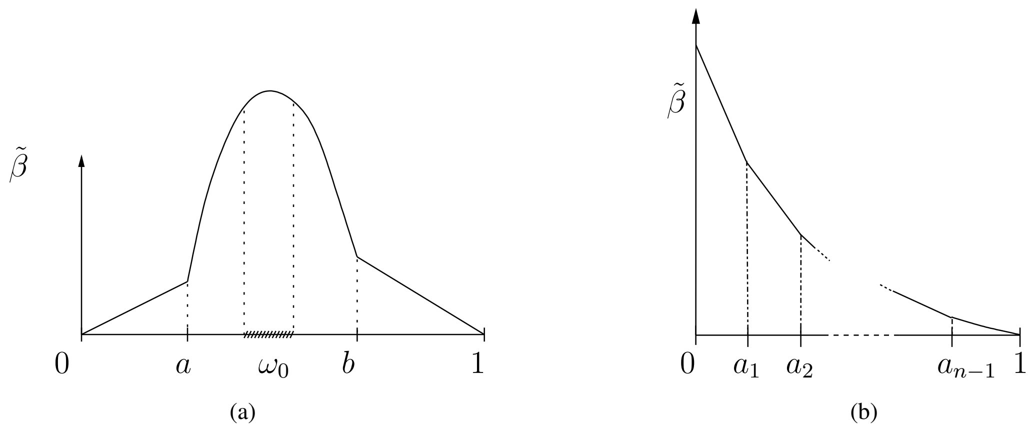

FIG. 1 – Exemples de $\tilde\beta$ avec a) un contrôle intérieur sur ω_0 et b) un contrôle en $x = 0$.

$$
(CT) \quad \left\{ \begin{array}{ccc}
u(a^-) & = & u(a^+), \\
u(b^-) & = & u(b^+) \\
c(a^-)\partial_x u(a^-) & = & c(a^+)\partial_x u(a^+), \\
c(b^-)\partial_x u(b^-) & = & c(b^+)\partial_x u(b^+).
\end{array} \right.
$$

L'idée est d'appliquer cette estimation aux opérateurs A_k pour $k \leq 2^j$. On répétera ceci pour tous les entiers j. Plus précisément, commençons par $j = 1$. On veut résoudre le problème global

$$
\left\{ \begin{array}{l}
\partial_t q - \text{div}(c\,\text{grad} q) = 1_\omega u \\
q(t,.) \in D(A),\ \forall t \in (0,T) \\
q(0,x) = q^0(x) \\
q(T,.) = 0.
\end{array} \right.
$$

où $\omega = \omega' \times \omega_n$. Pour l'indice $j = 1$ choisi, on va se contenter de résoudre le problème suivant moins exigeant

$$\begin{cases} \partial_t q - \text{div}(c\,\text{grad}q) = 1_\omega u_j, \text{ sur } (0,T_1)\times\Omega \\ q(t,.)\in D(A),\ \forall t\in(0,T) \\ q(0,x) = q^0(x) \\ q_1(T_1,.) = q_2(T_1,.) = 0. \end{cases}$$

Autrement dit, on cherche un contrôle u_j, valable sur un temps moins long $T_1 < T$, et qui n'annule la solution que sur deux voies de l'autoroute à l'instant T_1. L'avantage de cette approche est que l'on peut se ramener à considérer le problème sur seulement les deux premières voies, ce qui s'écrit, en développant le système précédent sur chaque voie,

$$\begin{cases} \partial_t q_k - A_k q_k = \Pi_k(1_\omega u_j), \text{ sur } (0,T_1)\times(0,H) \\ q_k(t,.)\in D(A_k),\ \forall t\in(0,T) \\ q_k(0,x) = \Pi_k q^0(x) \\ q_1(T_1,.) = q_2(T_1,.) = 0. \end{cases}$$

Le symbole Π_k désigne le projecteur de l'espace $L^2(\Omega)$ sur $\mathcal{H}_k$.
On montre que l'on peut résoudre ce problème en le ramenant à un problème adjoint : *Il existe une constante C_{T_1} telle que pour chaque $y^0 \in \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, la solution du problème adjoint*

$$\begin{cases} -\partial_t y - div(c\,grady) = 0, \ sur\ (0,T_1)\times\Omega \\ y(T_1,x) = y^0(x)\ sur\ \Omega, \end{cases} \tag{7}$$

vérifie l'estimation (dite inégalité d'observabilité

$$\|y(0,.)\|^2_{L^2(\Omega)} \le C^2_{T_1}\int_0^{T_1}\int_\omega |y(t,x)|^2\,dtdx. \tag{8}$$

On montre alors que, si cela est vrai, on peut sélectionner un contrôle parmi tous les candidats possibles tel que l'on ait

$$\|u_1\|_{L^2((0,T_1)\times\Omega)} \le C_{T_1}\|q^0\|_{L^2(\Omega)} \tag{9}$$

L'inégalité de Carleman sert à prouver (8) et à estimer la constante C_{T_1}. Il faut maintenant recommencer sur la période de temps $(2T_1, 2T_1 + T_2)$. Cette fois-ci les donnés initiales ne seront plus $q^0(x)$ mais la valeur en $t = 2T_1$ de la solution obtenue. Il se trouve qu'elle sera nulle sur les deux premières voies. On pourrait se dire que cela est terminé et qu'il suffit de bien ajuster les durées intermédiaires T_j mais cela est faux dès que l'ouvert ω n'est pas une bande horizontale.

2.3 Le regroupement des solutions intermédiaires ou l'inégalité de Lebeau-Robbiano

On montre facilement que la solution de (7) vérifie

$$\|y(0,.)\|^2_{L^2(\Omega)} \le Ce^{\mu_2^{2/3}}\int_0^{T_1}\int_{\omega_n}\sum_{k\le 2}|y_k(t,x_n)|^2\,dtdx_n. \tag{10}$$

On voit la difficulté : cette intégrale ne porte pas sur l'ouvert ω. C'est là que l'inégalité prouvée par Lebeau et Robbiano va nous sauver :
Il existe une constante $C > 0$ *telle que pour tout entier* $l > 0$ *on ait*

$$\sum_{k\leq l} |b_k|^2 \leq Ce^{C\sqrt{\mu_l}} \int_{\omega'} |\sum_{k\leq l} |b_k\phi_k(x')|^2 \, dx', \quad (b_1, ..., b_l) \in \mathbb{R}^l. \tag{11}$$

On l'applique avec $b_k = y_k(t, x_n)$ ce qui donne

$$\|y(0,.)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq Ce^{C\mu_2^{2/3}} \int_0^{T_1} \int_\omega |y(t,x)|^2 \, dt \, dx, \tag{12}$$

puis

$$\|u_1\|_{L^2((0,T_1)\times\Omega} \leq Ce^{C\mu_2^{2/3}} \|q^j\|_{L^2(\Omega)} \tag{13}$$

Maintenant il faut ajuster les temps T_j pour que tout marche.