

**SILA:** *Synthèse et Identification*  
*pour les systèmes dynamiques linéaires paramétrés*  
*algébriquement*

# Systemes dynamiques paramétrés

$$\dot{x}(t) = A(p)x(t) + B(p)u(t)$$

$$y(t) = C(p)x(t)$$

avec  $p = \{p_1, \dots, p_r\}$  un jeu de  $r$  paramétres

Fonction de transfert:

$$H(s) = C(p)(sId - A(p))^{-1}B(p) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{C(p)A^i(p)B(p)}{s^i} \quad (1)$$

# L'application $\pi$

$K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$

Pour un système paramétré  $\sigma$ ,

$$\begin{aligned}\pi_\sigma : K^r &\rightarrow (K^{k \times m})^{2n} \\ p &\rightarrow (C(p)B(p), \dots, C(p)A^{2n-1}(p)B(p))\end{aligned}\tag{2}$$

Ensemble des transferts admissibles =  $\pi_\sigma(K^r)$

Variété :  $V(\sigma) = \overline{\pi_\sigma(K^r)}$

$\sigma_1, \sigma_2$  deux systèmes,

$$p \in K^{r_1}, E_{\sigma_1}(p) = \{q \in K^{r_1}, \pi_{\sigma_1}(q) = \pi_{\sigma_1}(p)\}\tag{3}$$

$$p \in K^{r_2}, E_{\sigma_1, \sigma_2}(p) = \{q \in K^{r_1}, \pi_{\sigma_1}(q) = \pi_{\sigma_2}(p)\}\tag{4}$$

# Propriétés générales lorsque $K = \mathbb{C}$

- Les cardinalités de  $E_{\sigma_1}(p)$  et  $E_{\sigma_1, \sigma_2}(p)$  sont génériquement constantes par rapport à  $p$ . On note  $\Theta(\sigma_1)$  (resp.  $\Theta(\sigma_1, \sigma_2)$ ) cette constante. Cardinalité  $E_\sigma$  finie = “non-redondant”.
- Système  $\sigma_1$  est non-redondant ssi le Jacobien associé à l'application  $\pi_{\sigma_1}$  est génériquement de rang  $r_1$  sur  $\mathbb{C}^{r_1}$ .
- Si  $\sigma_1$  est non-redondant la dimension de  $V(\sigma_1)$  (comme variété) est  $r_1$ .
- Si  $r_1 \geq r_2$ ,  $V(\sigma_1) \subset V(\sigma_2)$  et  $\sigma_1$  non-redondant alors  $r_2 = r_1$  and  $V(\sigma_1) = V(\sigma_2)$ .
- Si  $V(\sigma_1) = V(\sigma_2)$  alors  $\Theta(\sigma_1) = \Theta(\sigma_1, \sigma_2)$
- Si  $r_1 < r_2$  and  $\sigma_2$  est non-redondant alors  $\Theta(\sigma_1, \sigma_2) = 0$ .

# Lorsque $K = \mathbb{R}$

- $V$  variété semi-algébrique
- Ce qui est vrais sur  $\mathbb{C}$  l'est pour chaque composante connexe de  $V \setminus D$
- $D =$  Variété discriminante

# Cas favorable et défavorable

- **Favorable:** On sait donner un sens “fonctionnel” à la variété  $V$   
ex: L'ensemble des transferts symétriques de degré de MacMillan  $\leq n$ .
- **Défavorable:** La variété des transferts  $V$  n'a pas d'interprétation simple

# Les problèmes: Identification harmonique

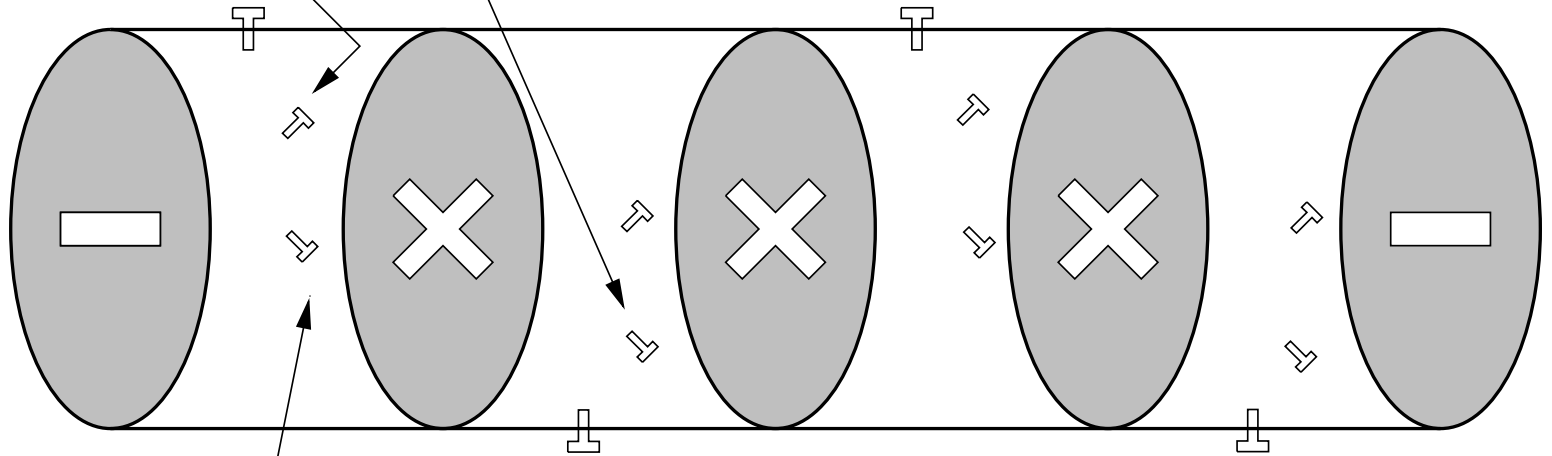
- Identification
  - $(w_i, H(w_i))$ : mesures de la fonction de transferts en certains points de fréquence
  - Objectif: Jeu de paramètres en accord avec les mesures
- Incertitude/bruit mesures: Algorithme d'approximation rationnelle stable multivariable -> Modèle rationnel  $\mathcal{R}$
- Valeur des paramètres = Réalisation de  $\mathcal{R}$  = inversion de  $\pi$ 
  - Cas favorable/défavorable: Étape de projection de  $\mathcal{R}$  sur  $V$  plus ou moins "scabreuse" !

# Les problèmes: Synthèse

- Synthèse
  - Spécifications fréquentielles sur  $\mathcal{R}$
  - Objectif: trouver  $\mathcal{R}_{opt}$  dans  $V$  (degré minimal)
- Utilisation d'une forme "fonctionnelle" de  $V$  pour déterminer le transfert idéal
- Garantir  $\mathcal{R}_{opt} \in V$  est ici essentiel
- Cas favorable/défavorable: problème bloquant dans le cas défavorable

# Filtrage Hyperfréquence

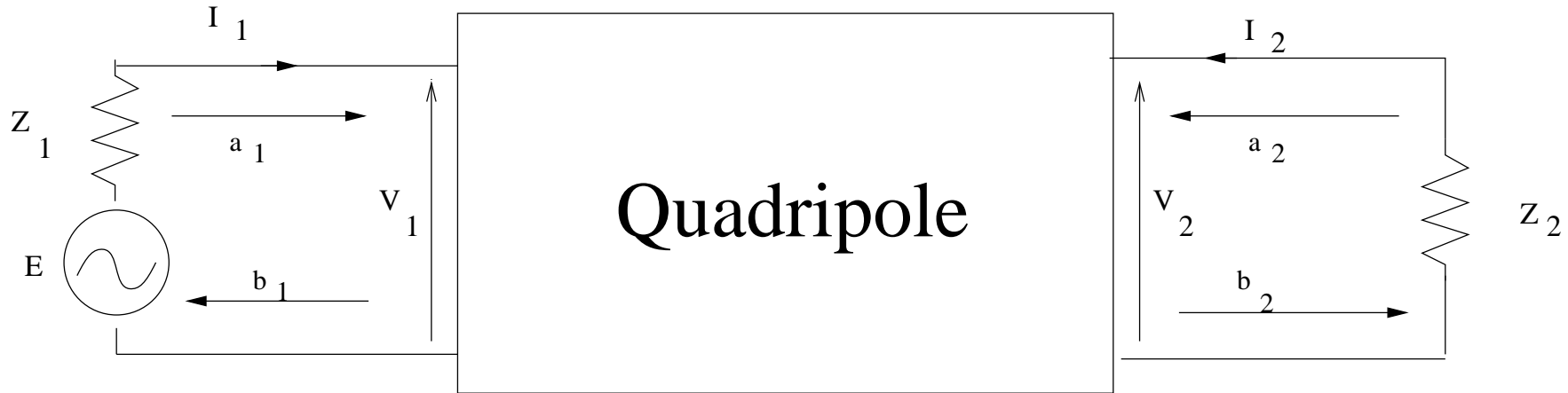
VIS DE COUPLAGE



VIS DE REGLAGE

- Works around the GHz
- Passband: a few Mhz
- Used in communication satellites

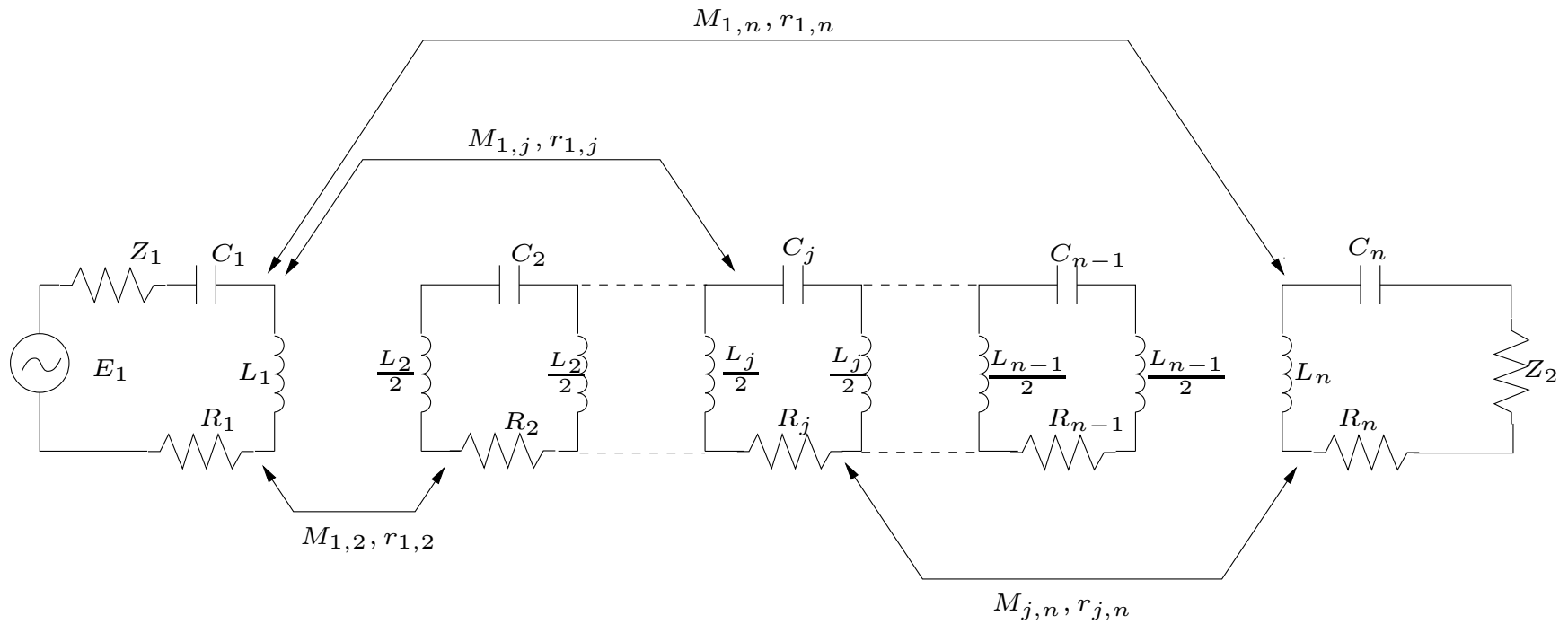
# Associated linear squattering system



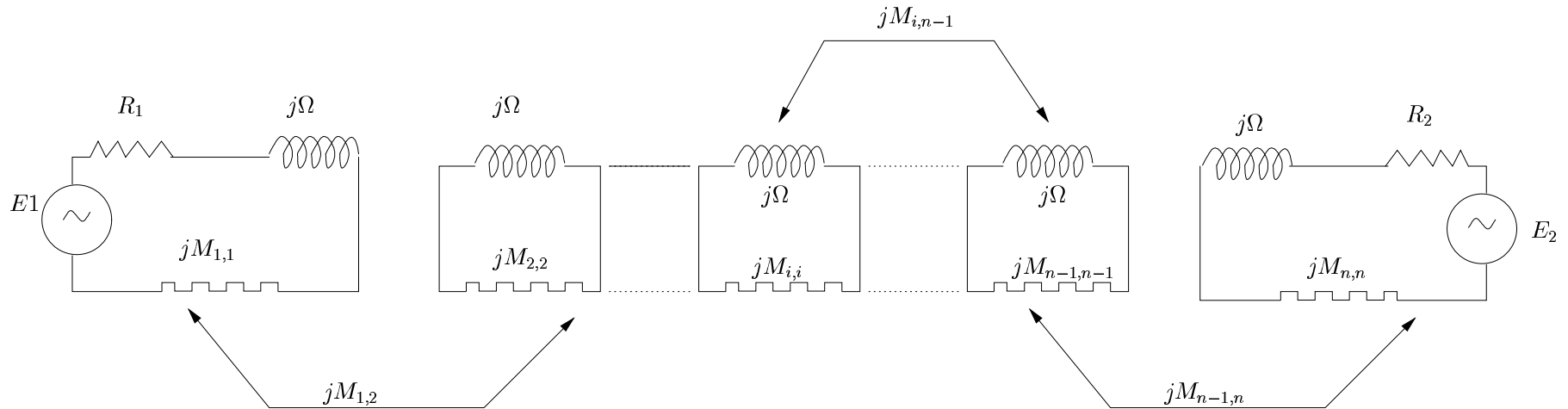
•  $|S_{1,2}|^2 = \frac{\text{Power available in 2}}{\text{Puiss émise en 1}} = \frac{|b_2(\omega)|^2}{|a_1(\omega)|^2}$

•  $|S_{1,1}|^2 = \frac{\text{Power available in 1}}{\text{Power transmitted to 1}} = \frac{|b_1(\omega)|^2}{|a_1(\omega)|^2}$

# An equivalent electrical model



# Low-pass equivalent network



- Valid approximation for frequencies such that  $\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$  is small and  $L_i, C_i$  such that  $\frac{(\omega_0 - \frac{1}{\sqrt{L_i C_i}})}{\omega_0}$  is small
- Couplings are supposed to be frequency independant
- Change of variable:  $\Omega = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$

# Forme d'état du filtre

$$\begin{array}{l}
 S \left\{ \begin{array}{l}
 [-A] = [R] + j[M], [A] = [A]^t \\
 [B] = [C]^t \\
 C = \begin{bmatrix} j\sqrt{2R_1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & j\sqrt{2R_2} \end{bmatrix} \\
 2[R] = -[C]^t[C] \\
 [D] = Id
 \end{array} \right. \\
 Y \left\{ \begin{array}{l}
 [A] = j[M] \\
 [B] = [C]^t \\
 C = \begin{bmatrix} \sqrt{R_1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \sqrt{R_2} \end{bmatrix}
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

# Remarks about the admittance matrix

$$Y(s) = C(sId - jM)^{-1}B = \frac{I - S}{I + S}$$

If  $M$  is real ,  $R1, R2 \geq 0$

- $Y$  is lossless of McMillan at most  $n$
- $Y$  is reciprocal i.e  $Y_{1,2} = Y_{2,1}$
- The first markov parameter is diagonal, i.e  $\lim_{w \rightarrow \infty} wY_{1,2}(jw) = 0$
- May be more: depending on the coupling topology

# Réalisation en flèche

**Proposition 1** *Let  $Y$  be lossless, reciprocal, of MacMillan degree  $n$ , such that its first markov parameter is diagonal ( $> 0$ ). There exists a realization of  $Y$  with the following “physical” shape:*

$$[A] = j[M] = [A]^t, [B] = [C]^t$$

$$C = \begin{bmatrix} \sqrt{R_1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \sqrt{R_2} \end{bmatrix}$$

*with  $M, R > 0$  real. Moreover  $M$  can be chosen so as to be in “arrow form”,*

$$M = \begin{bmatrix} * & * & (0) & * \\ * & \ddots & \ddots & \vdots \\ (0) & \ddots & \ddots & * \\ * & \cdots & * & * \end{bmatrix} .$$

*In this latter shape,  $M$  is generically unique up to a sign matrix (i.e  $\text{diag}(1, \pm 1, \pm 1 \dots, 1)$ , **sign symmetries**!).*

# Réalisations

- Si on “relâche” la propriété “lossless” sur  $Y$ , tout reste vrais génériquement sauf  $M, R > 0$  réels
- Toute autre réalisation de  $Y$  avec  $M'$  symétrique et  $B' = C'^t$  sous la forme physique prescrite se déduit de la forme flèche par:

$$\begin{cases} M' = P^t M P & C' = P C \\ \text{avec } P^t P = Id \end{cases}$$

et  $P$  de la forme,

$$\begin{bmatrix} 1 & & (0) \\ & H & \\ (0) & & 1 \end{bmatrix}$$

# Inversion de $\pi$

- Formulation directe:  $\mathcal{R} \in V$

$$\mathcal{R} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{G_i}{s^i}$$

Équations algébriques:

$$CA^i B = G_i$$

- Calcul d'une base Groebner
- Problématique à cause des symétries  $\text{card}(Sols) = m2^n$
- **Mais**, nombre de variables réduit
- Théorie des invariants de Noether: reformulation sur un anneau invariant par le groupe de symétrie = pas d'amélioration (à creuser !!??)

# Inversion de $\pi$ (suite)

$M$  : Matrice forme en flèche compatible avec  $V$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & & (0) \\ & H & \\ (0) & & 1 \end{bmatrix}$$

Équations algébriques:

$$\begin{aligned} (i, j) \in I_V \quad (P^t M P)_{i,j} &= 0 \\ H^t H &= Id \end{aligned}$$

$$H = (h_1, \dots, h_{n-2})$$

# Inversion de $\pi$ (suite)

**Rompre la symétrie:** remplacer équations de normalisation par:

$$\langle h_i, h_i \rangle = 1 \longrightarrow \langle v_i, h'_i \rangle = 1$$

où  $v_i$  vecteur aléatoire. Pour un choix générique de  $v_i$ , à chaque ensemble de solutions symétrique

$$(\pm h_1, \pm h_2 \dots \pm h_{n-2})$$

correspond une **seule** solution du nouveau système i.e

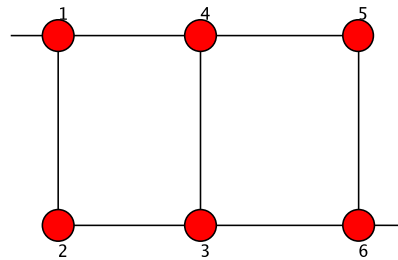
$$h'_i = \frac{h_i}{\langle h_i, v_i \rangle}$$

Pour la réciproque il faut garantir:

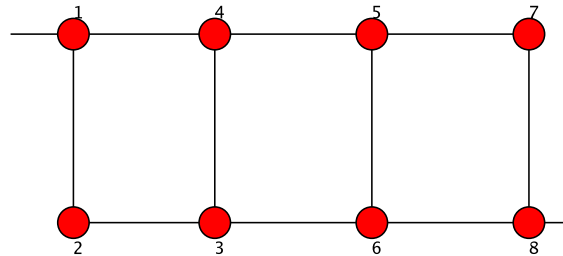
$$\|h'_i\| \neq 0 \longrightarrow t_i \|h'_i\| + 1 = 0$$

# Résultats et classification des topologies

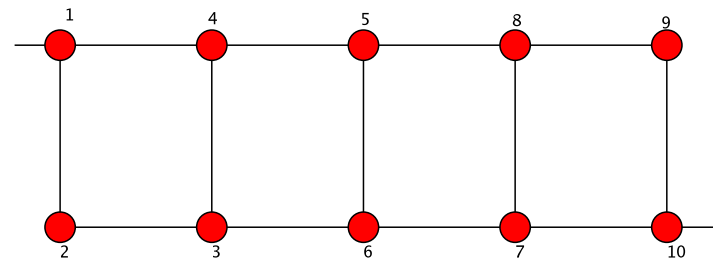
Avec FGb,



$$V_{\sigma} = 2 \text{ Tz, Red. Order} = 8$$



$$V_{\sigma} = 3 \text{ Tz, Red. Order} = 48$$



$$V_{\sigma} = 4 \text{ Tz, Red. Order} = 384$$

etc...

# Résultats et classification des topologies

- Permet la classification des topologies les plus usuelles
- Résoud exhaustivement la phase de réalisation du processus de synthèse = Considérations “hardware”
- Seules les solutions réelles sont réalisables - dans le cas conservatif:
  - Si l'ordre réduit est impair: au moins une solution réelle
  - Ordre réduit paire:
    - 6 pôles: argument “Borsuk-Ulam” prouve à nouveau l'existence
    - 5 pôles: un ouvert dans l'espace des paramètres sans solution réelle
- Pour extended boxed (R. Cameron): pas de calcul effectif pour  $n \geq 10$

# Homotopies

- Méthodes classiques:
  - Un système  $Q_0$  de départ que l'on sait résoudre exhaustivement
  - Suivi des solutions par continuation (gestion des branches partant à l'infini) pour obtenir les solutions de  $Q_1$
- Nombre de solutions de  $Q_0$ : borne de Bezout, borne de Bezout multihomogène, volume mixte
- Pour notre système
  - Pour  $n \geq 8$  bornes prohibitives - borne de bezout de l'ordre de  $2^{(n-3)^2}$
  - Système très structuré, i.e pas du tout générique

# Homotopie du tricheur !

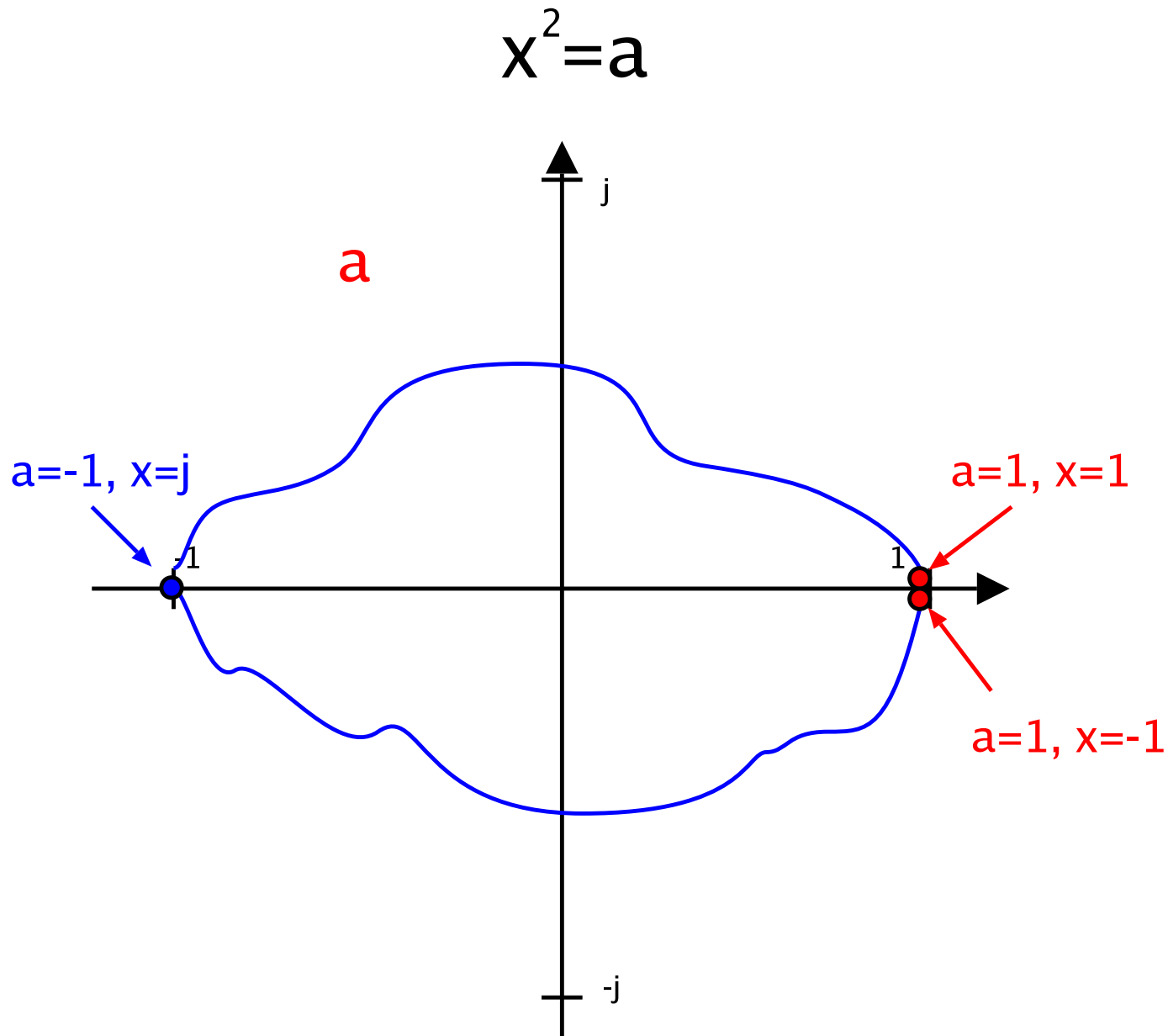
[Li, Sauer, Yorke, 1989]

- $Q(p_1, \dots, p_r, x_1 \dots x_n) = 0$
- Si on sait calculer l'ensemble des solutions isolées pour un  $P_0$  générique
- Alors on peut calculer l'ensemble des solutions isolées du problème pour tout autre  $P_1$  (sauf peut être pour une sous-variété de  $\mathbb{C}^r$ ) par homotopie

$$Q((1 - \alpha)P_0 + \alpha P_1, X(\alpha))$$

- Permet d'envisager une stratégie de calcul en 2 temps
  - Hors ligne: établissement d'une base de données pour les topologies usuelles
  - En ligne: "cheater homotopy"

# Monodromie - Exemple $a = x^2$



# Cas d'une courbe algébrique

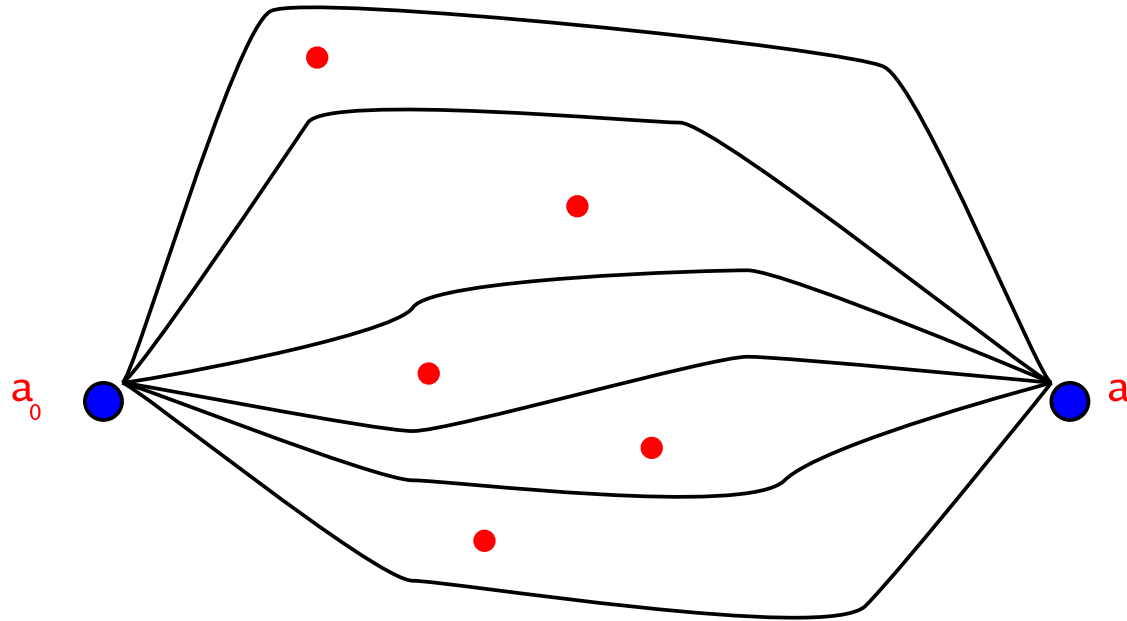
$$Q(a, x) = p_n(a)x^n + p_{n-1}(a)x^{n-1} \dots p_0(a) = 0$$

- Suppose  $Q$  irréductible sur  $\mathbb{C}[a, x]$

$$W = \{a \in \mathbb{C}, p_n(a) = 0\} \cup \{a \in \mathbb{C}, D_{Q,x}(a) = 0\}$$

- Chaque chemin  $a(t) \notin W$  peut être relevé en un chemin  $x(t)$
- Soit  $a_1 \notin W$ , on suppose qu'on dispose:
  - Un point  $(x_0, a_0) \in V$  avec  $a_0 \notin W$
  - Une famille de chemins  $(\gamma_i)$  qui séparent les points de  $W$

# Intégration sur les chemins



- Par intégrations successives sur les chemins: obtention de toutes les solutions
- Famille de chemins: générateur du groupe fondamental de  $\mathbb{C} \setminus W$
- Connexité de  $V$

# Variétés plus générales

- S'étend au cas d'une variété 1-dimensionnelle avec  $a$  une coordonnée (élément primitif)
- Cas d'un système où les paramètres sont des coordonnées
  - $Q(X, \alpha P_0 + (1 - \alpha)P_1) = 0$  ramène au cas 1-dimensionnel
  - Théorème de Bertini permet de "descendre" propriété d'irréductibilité

# Systeme du filtre

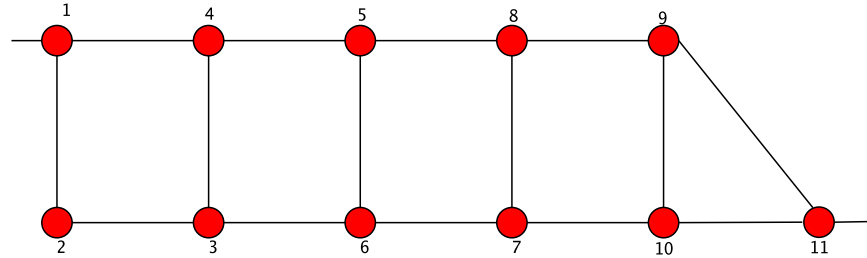
- On part d'une forme "physique"  $A_0$  generique (random)
- On calcule sa forme fleche  $A_{f0}$
- $A_{f1}$  la forme fleche cible

$$\left( P_{\beta}^t (\beta A_{f0} + A_{f1}) P_{\beta} \right)_{i,j \in I_V} = 0$$

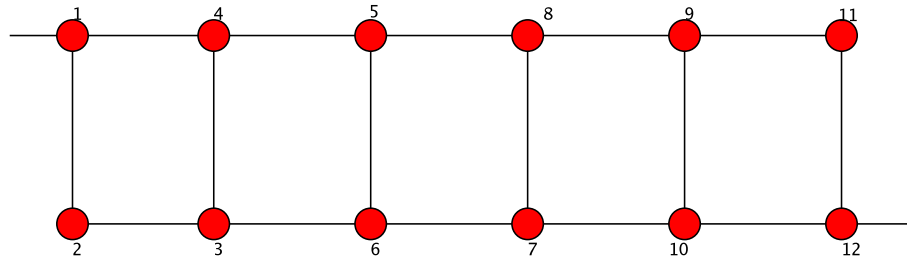
- Chemins  $\gamma_i$ ,  $\beta = r(t)e^{i\theta_i}$

$$\left( P_r^t \left( \frac{r(t)e^{i\theta_i}}{r(t) + 1} A_{f0} + \frac{1}{r(t) + 1} A_{f1} \right) P_r \right)_{i \in I_V} = 0$$

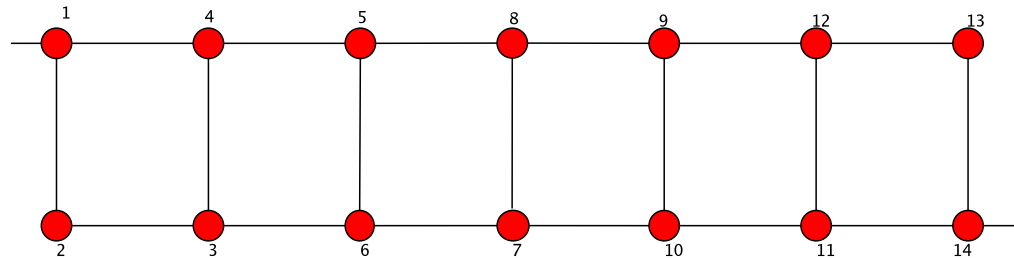
# Extended Boxed topology



$$V_{\sigma} = 5 \text{ Tz, Red. Order Heur.} = 945$$



$$V_{\sigma} = 5 \text{ Tz, Red. Order Heur.} = 3840$$

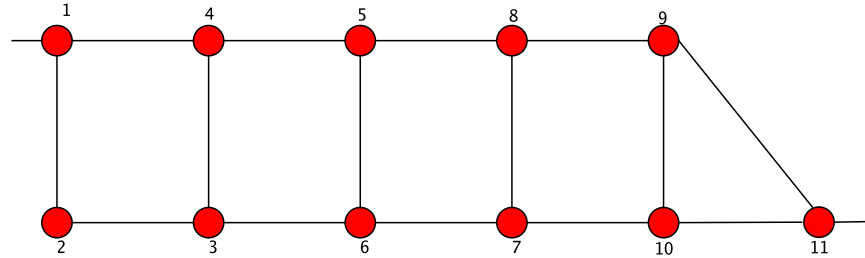


$$V_{\sigma} = 6 \text{ Tz, Red. Order Heur.} = 46080$$

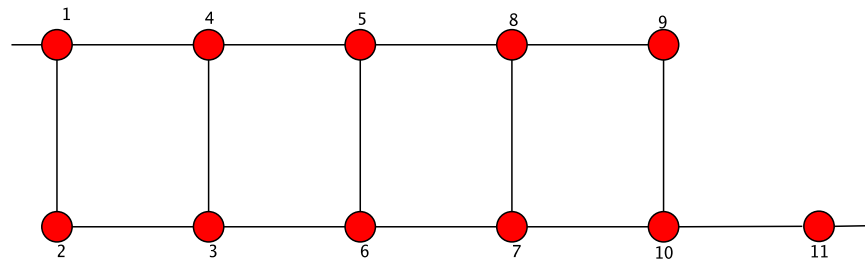
# Réalisation des filtres de grands ordres

- Ordre réduit élevé:
  - Avantage: Choix lors de la réalisation
  - Problème: Comment choisir pendant l'identification lors du réglage ?
- Contournement: Synthèse approchée

# Synthèse approchée



$$V_{\sigma} = 5 \text{ Tz}, \text{ Red. Order} = 945$$



$$V_{\sigma} = 5 \text{ Tz}, \text{ Cas défavorable ! , Red. Order} = 1$$

- Simplifier la réalisation
- Faire chuter l'ordre réduit

# Réglage avec plusieurs solutions ?

- Une question ouverte
- Information différentielle pour discriminer les solutions - permet de choisir ?
- Si on ne considère que les solutions réelles:
  - Disparition de solution - point proche de la variété discriminante
- Inclure les solutions complexes ?

# Synthèse dans le cas favorable

$$S(s) = \frac{1}{q(s)} \begin{bmatrix} p_1(s) & p_2(s) \\ (-1)^{n+1} \bar{p}_2(-s) & (-1)^n \bar{p}_1(-s) \end{bmatrix}$$

with,

- $p_1$  monique of degree  $n$
- $p_2(s) = (-1)^{n+1} \bar{p}_2(-s)$
- $p_2$  of degree  $\leq n - 2$
- $q$  monique stable defined by,

$$q(s)\bar{q}(-s) = p_1(s)\bar{p}_1(-s) + p_2(s)\bar{p}_2(-s)$$

**Cas favorable:**  $\exists n, k$   $p_1 \in P_n$  **et**  $p_2 \in P_k$

# Synthèse cas favorable (suite)

For  $s = j\omega$ ,

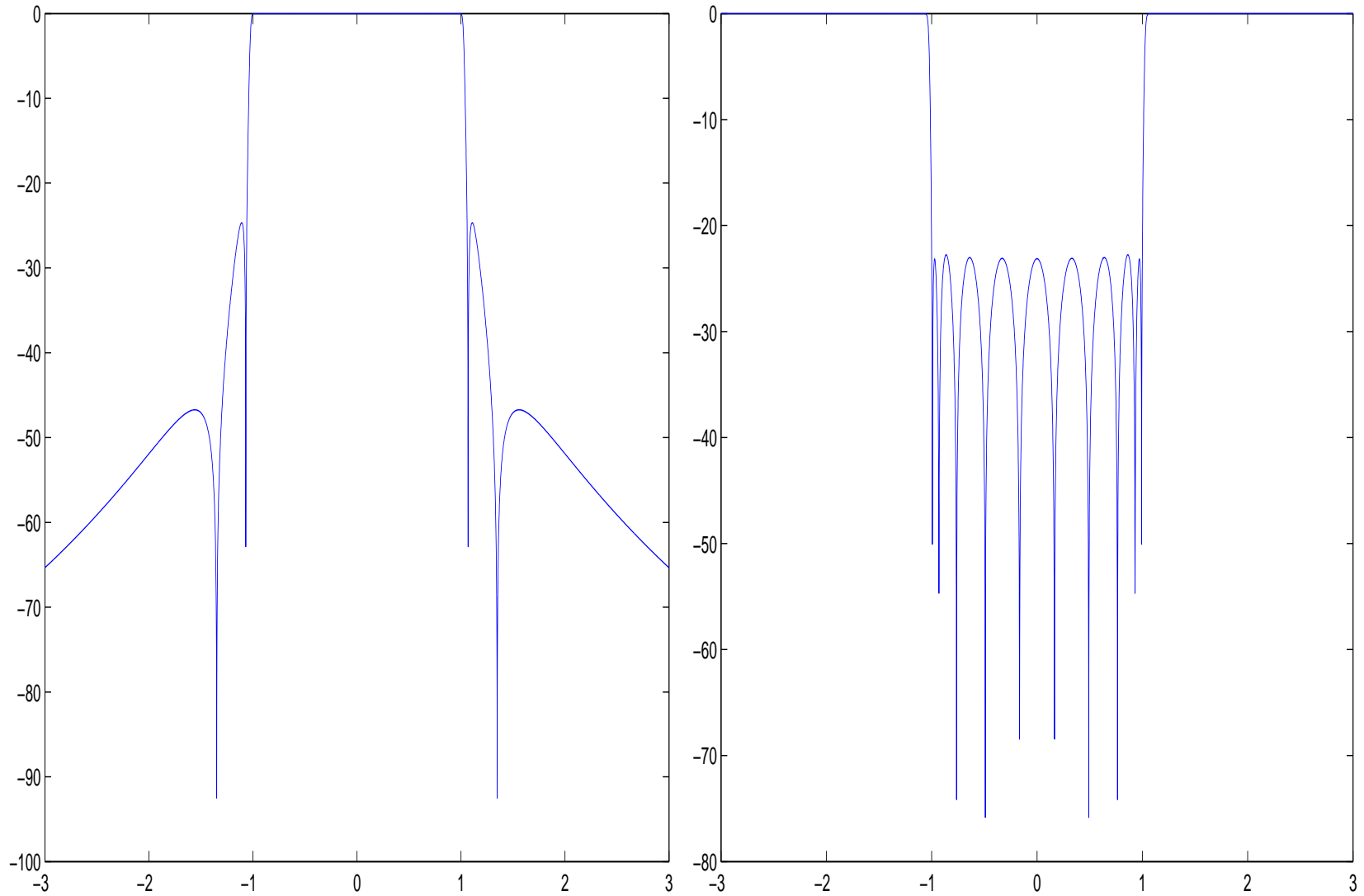
$$\begin{aligned} |S_{1,2}|^2 &= \frac{|p_2|^2}{|q|^2} = \frac{|p_2|^2}{|p_1|^2 + |p_2|^2} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{|p_1|^2}{|p_2|^2}} \end{aligned}$$

Given  $I$  the pass-band  $J$  the stop-band,  $\epsilon > 0$

$$\max_{p_2, p_1} \left\| \frac{p_1}{p_2} \right\|_I < \epsilon \left( \min_J \left| \frac{p_1}{p_2} \right| \right)$$

- Generalized Zoltarev problem of the third kind.
- In practice:  $p_2$  is fixed  $\Rightarrow$  closed form formula

# Exemple d'un 10 pôles



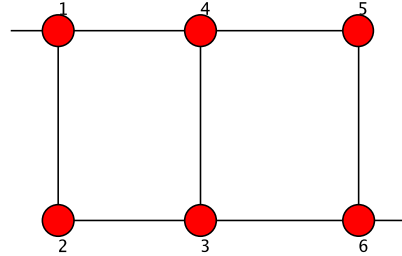
# Synthèse dans le cas défavorable

- $(p_1, p_2)$  n'appartiennent plus à des espaces vectoriels  $P_n$

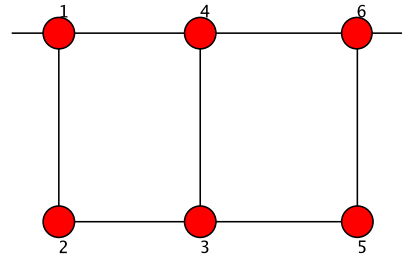
$$p_1 = r_n(p)X^n + r_{n-1}(p)X^{n-1} \dots r_0(p)$$

- Impliciter ?
- Fixer un maximum de zéros ?
- Minimiser la distance à une référence ?
- Équation algébrique caractérisant un optimum ?

# Synthèse cas défavorable: exemple 6 pôles 3 zéros



$$V_{\sigma} = 2 \text{ Tz, Red. Order} = 8$$



$$V_{\sigma} = 3 \text{ Tz, Red. Order} = 1$$