

SILA: *Synthèse et Identification*
pour les systèmes dynamiques linéaires paramétrés
algébriquement

Systemes dynamiques paramétrés

$$\dot{x}(t) = A(p)x(t) + B(p)u(t)$$

$$y(t) = C(p)x(t)$$

avec $p = \{p_1, \dots, p_r\}$ un jeu de r paramétres

Fonction de transfert:

$$H(s) = C(p)(sId - A(p))^{-1}B(p) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{C(p)A^i(p)B(p)}{s^i} \quad (1)$$

L'application π

$K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}

Pour un système paramétré σ ,

$$\begin{aligned}\pi_\sigma : K^r &\rightarrow (K^{k \times m})^{2n} \\ p &\rightarrow (C(p)B(p), \dots, C(p)A^{2n-1}(p)B(p))\end{aligned}\tag{2}$$

Ensemble des transferts admissibles = $\pi_\sigma(K^r)$

Variété : $V(\sigma) = \overline{\pi_\sigma(K^r)}$

σ_1, σ_2 deux systèmes,

$$p \in K^{r_1}, E_{\sigma_1}(p) = \{q \in K^{r_1}, \pi_{\sigma_1}(q) = \pi_{\sigma_1}(p)\}\tag{3}$$

$$p \in K^{r_2}, E_{\sigma_1, \sigma_2}(p) = \{q \in K^{r_1}, \pi_{\sigma_1}(q) = \pi_{\sigma_2}(p)\}\tag{4}$$

Propriétés générales lorsque $K = \mathbb{C}$

- Les cardinalités de $E_{\sigma_1}(p)$ et $E_{\sigma_1, \sigma_2}(p)$ sont génériquement constantes par rapport à p . On note $\Theta(\sigma_1)$ (resp. $\Theta(\sigma_1, \sigma_2)$) cette constante. Cardinalité E_σ finie = “non-redondant”.
- Système σ_1 est non-redondant ssi le Jacobien associé à l'application π_{σ_1} est génériquement de rang r_1 sur \mathbb{C}^{r_1} .
- Si σ_1 est non-redondant la dimension de $V(\sigma_1)$ (comme variété) est r_1 .
- Si $r_1 \geq r_2$, $V(\sigma_1) \subset V(\sigma_2)$ et σ_1 non-redondant alors $r_2 = r_1$ and $V(\sigma_1) = V(\sigma_2)$.
- Si $V(\sigma_1) = V(\sigma_2)$ alors $\Theta(\sigma_1) = \Theta(\sigma_1, \sigma_2)$
- Si $r_1 < r_2$ and σ_2 est non-redondant alors $\Theta(\sigma_1, \sigma_2) = 0$.

Lorsque $K = \mathbb{R}$

- V variété semi-algébrique
- Ce qui est vrai sur \mathbb{C} l'est pour chaque composante connexe de $V \setminus D$
- $D =$ Variété discriminante

Cas favorable et défavorable

- **Favorable:** On sait donner un sens “fonctionnel” à la variété V
ex: L'ensemble des transferts symétriques de degré de MacMillan $\leq n$.
- **Défavorable:** La variété des transferts V n'a pas d'interprétation simple

Les problèmes: Identification harmonique

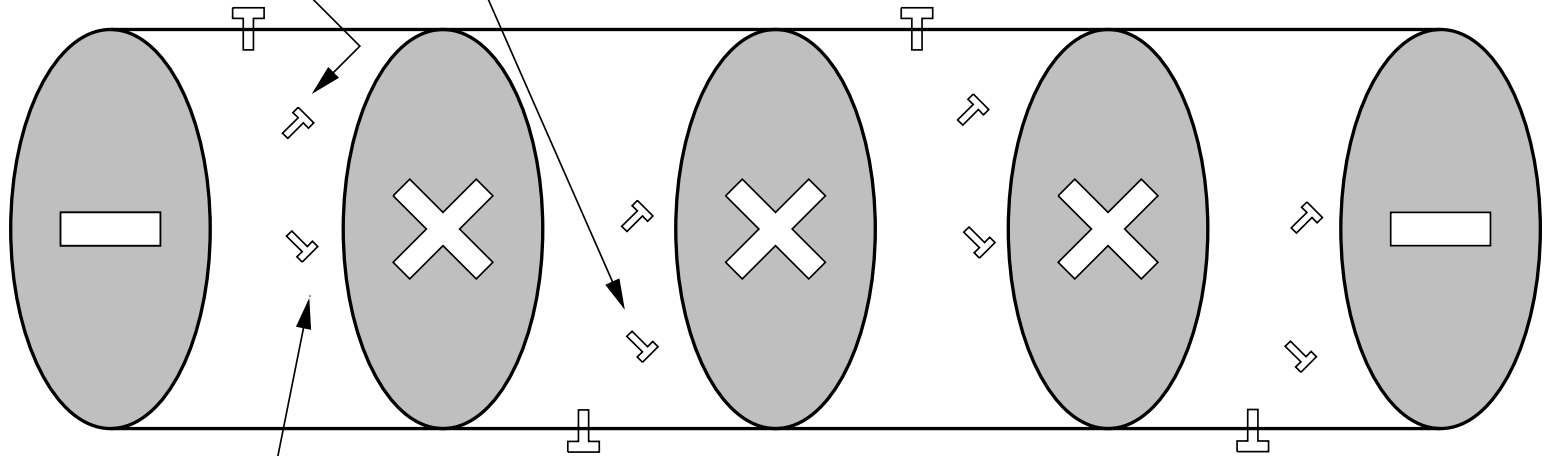
- Identification
 - $(w_i, H(w_i))$: mesures de la fonction de transferts en certains points de fréquence
 - Objectif: Jeu de paramètres en accord avec les mesures
- Incertitude/bruit mesures: Algorithme d'approximation rationnelle stable multivariable -> Modèle rationnel \mathcal{R}
- Valeur des paramètres = Réalisation de \mathcal{R} = inversion de π
 - Cas favorable/défavorable: Étape de projection de \mathcal{R} sur V plus ou moins "scabreuse" !

Les problèmes: Synthèse

- Synthèse
 - Spécifications fréquentielles sur \mathcal{R}
 - Objectif: trouver \mathcal{R}_{opt} dans V (degré minimal)
- Utilisation d'une forme "fonctionnelle" de V pour déterminer le transfert idéal
- Garantir $\mathcal{R}_{opt} \in V$ est ici essentiel
- Cas favorable/défavorable: problème bloquant dans le cas défavorable

Filtrage Hyperfréquence

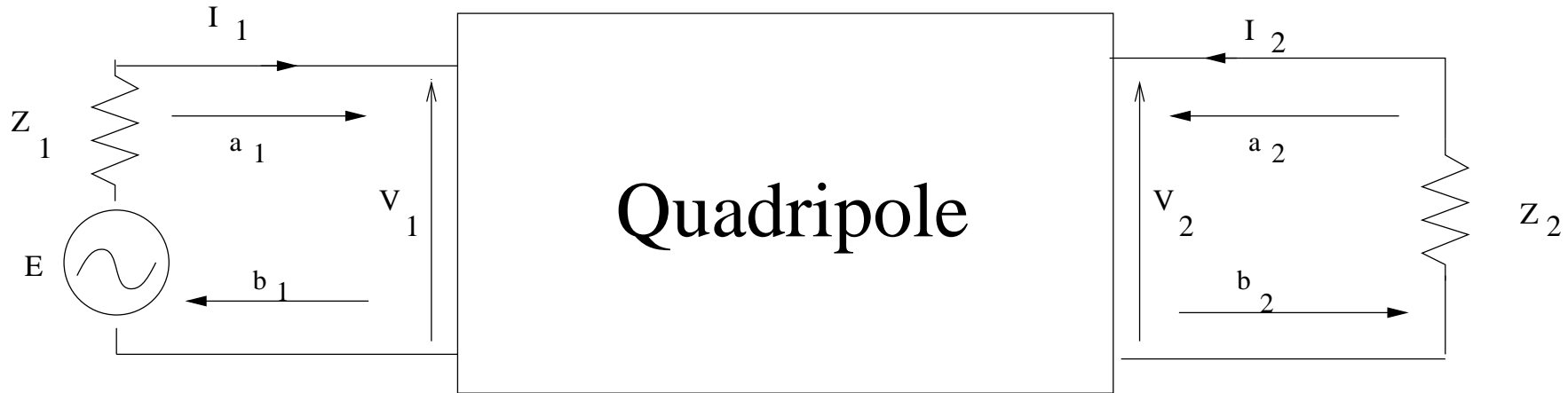
VIS DE COUPLAGE



VIS DE REGLAGE

- Works around the GHz
- Passband: a few Mhz
- Used in communication satellites

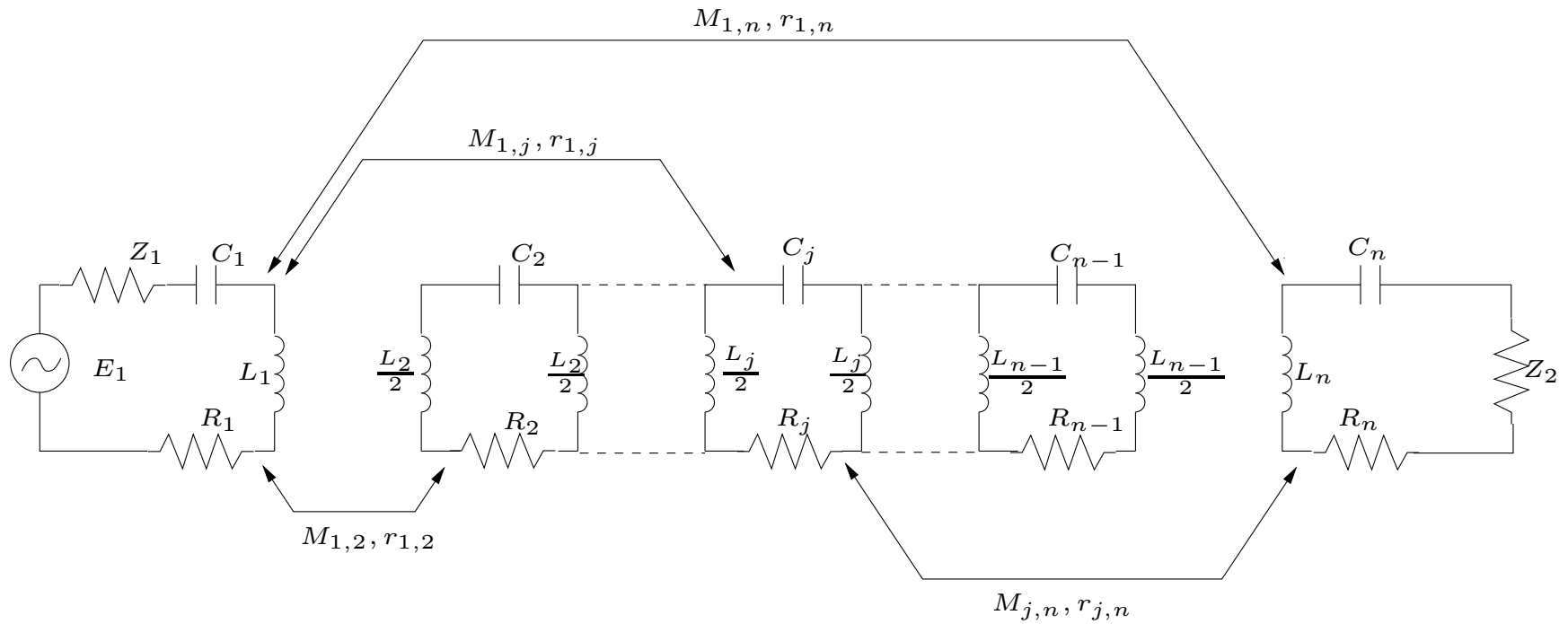
Associated linear squattering system



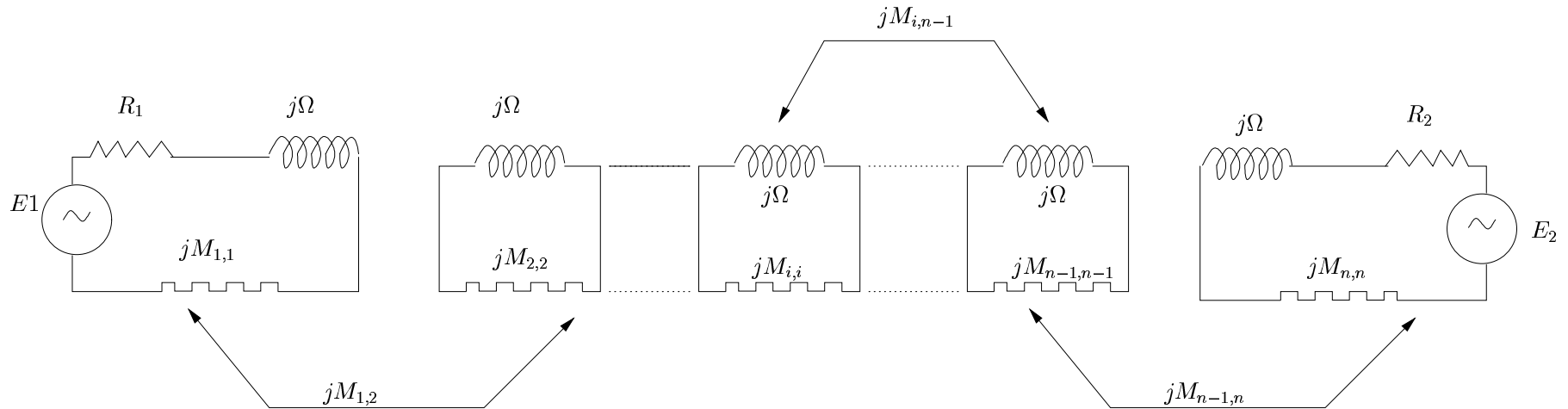
$$\bullet \quad |S_{1,2}|^2 = \frac{\text{Power available in 2}}{\text{Puiss émise en 1}} = \frac{|b_2(\omega)|^2}{|a_1(\omega)|^2}$$

$$\bullet \quad |S_{1,1}|^2 = \frac{\text{Power available in 1}}{\text{Power transmitted to 1}} = \frac{|b_1(\omega)|^2}{|a_1(\omega)|^2}$$

An equivalent electrical model



Low-pass equivalent network



- Valid approximation for frequencies such that $\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$ is small and L_i, C_i such that $\frac{(\omega_0 - \frac{1}{\sqrt{L_i C_i}})}{\omega_0}$ is small
- Couplings are supposed to be frequency independant
- Change of variable: $\Omega = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$

Forme d'état du filtre

$$\begin{array}{l}
 S \left\{ \begin{array}{l}
 [-A] = [R] + j[M], [A] = [A]^t \\
 [B] = [C]^t \\
 C = \begin{bmatrix} j\sqrt{2R_1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & j\sqrt{2R_2} \end{bmatrix} \\
 2[R] = -[C]^t[C] \\
 [D] = Id
 \end{array} \right. \\
 Y \left\{ \begin{array}{l}
 [A] = j[M] \\
 [B] = [C]^t \\
 C = \begin{bmatrix} \sqrt{R_1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \sqrt{R_2} \end{bmatrix}
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Remarks about the admittance matrix

$$Y(s) = C(sId - jM)^{-1}B = \frac{I - S}{I + S}$$

If M is real , $R1, R2 \geq 0$

- Y is lossless of McMillan at most n
- Y is reciprocal i.e $Y_{1,2} = Y_{2,1}$
- The first markov parameter is diagonal, i.e $\lim_{w \rightarrow \infty} wY_{1,2}(jw) = 0$
- May be more: depending on the coupling topology

Réalisation en flèche

Proposition 1 *Let Y be lossless, reciprocal, of MacMillan degree n , such that its first markov parameter is diagonal (> 0). There exists a realization of Y with the following “physical” shape:*

$$[A] = j[M] = [A]^t, [B] = [C]^t$$

$$C = \begin{bmatrix} \sqrt{R_1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \sqrt{R_2} \end{bmatrix}$$

with $M, R > 0$ real. Moreover M can be chosen so as to be in “arrow form”,

$$M = \begin{bmatrix} * & * & (0) & * \\ * & \ddots & \ddots & \vdots \\ (0) & \ddots & \ddots & * \\ * & \cdots & * & * \end{bmatrix} .$$

*In this latter shape, M is generically unique up to a sign matrix (i.e $\text{diag}(1, \pm 1, \pm 1 \dots, 1)$, **sign symmetries !**).*

Réalisations

- Si on “relâche” la propriété “lossless” sur Y , tout reste vrais génériquement sauf $M, R > 0$ réels
- Toute autre réalisation de Y avec M' symétrique et $B' = C'^t$ sous la forme physique prescrite se déduit de la forme flèche par:

$$\begin{cases} M' = P^t M P & C' = P C \\ \text{avec } P^t P = Id \end{cases}$$

et P de la forme,

$$\begin{bmatrix} 1 & & (0) \\ & H & \\ (0) & & 1 \end{bmatrix}$$

Inversion de π

- Formulation directe: $\mathcal{R} \in V$

$$\mathcal{R} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{G_i}{s^i}$$

Équations algébriques:

$$CA^i B = G_i$$

- Calcul d'une base Groebner
- Problématique à cause des symétries $\text{card}(Sols) = m2^n$
- **Mais**, nombre de variables réduit
- Théorie des invariants de Noether: reformulation sur un anneau invariant par le groupe de symétrie = pas d'amélioration (à creuser !!??)

Inversion de π (suite)

M : Matrice forme en flèche compatible avec V

$$P = \begin{bmatrix} 1 & (0) \\ & H \\ (0) & 1 \end{bmatrix}$$

Équations algébriques:

$$\begin{aligned} (i, j) \in I_V \quad (P^t M P)_{i,j} &= 0 \\ H^t H &= Id \end{aligned}$$

$$H = (h_1, \dots, h_{n-2})$$

Inversion de π (suite)

Rompre la symétrie: remplacer équations de normalisation par:

$$\langle h_i, h_i \rangle = 1 \longrightarrow \langle v_i, h'_i \rangle = 1$$

où v_i vecteur aléatoire. Pour un choix générique de v_i , à chaque ensemble de solutions symétrique

$$(\pm h_1, \pm h_2 \dots \pm h_{n-2})$$

correspond une **seule** solution du nouveau système i.e

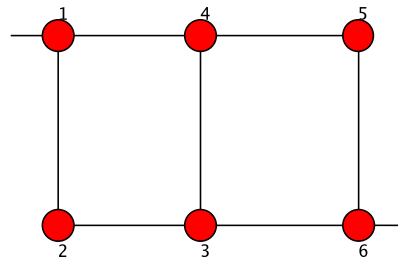
$$h'_i = \frac{h_i}{\langle h_i, v_i \rangle}$$

Pour la réciproque il faut garantir:

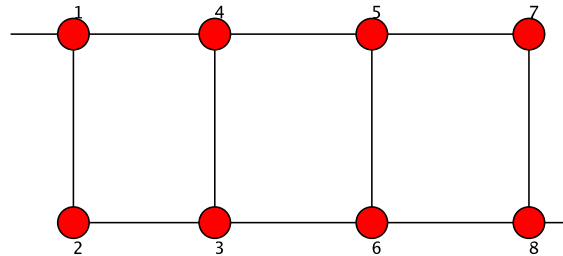
$$\|h'_i\| \neq 0 \longrightarrow t_i \|h'_i\| + 1 = 0$$

Résultats et classification des topologies

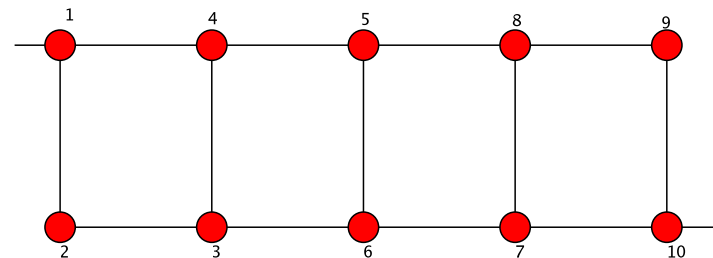
Avec FGb,



$$V_{\sigma} = 2 \text{ Tz, Red. Order} = 8$$



$$V_{\sigma} = 3 \text{ Tz, Red. Order} = 48$$



$$V_{\sigma} = 4 \text{ Tz, Red. Order} = 384$$

etc...

Résultats et classification des topologies

- Permet la classification des topologies les plus usuelles
- Résoud exhaustivement la phase de réalisation du processus de synthèse = Considérations “hardware”
- Seules les solutions réelles sont réalisables - dans le cas conservatif:
 - Si l'ordre réduit est impair: au moins une solution réelle
 - Ordre réduit paire:
 - 6 pôles: argument “Borsuk-Ulam” prouve à nouveau l'existence
 - 5 pôles: un ouvert dans l'espace des paramètres sans solution réelle
- Pour extended boxed (R. Cameron): pas de calcul effectif pour $n \geq 10$

Homotopies

- Méthodes classiques:
 - Un système Q_0 de départ que l'on sait résoudre exhaustivement
 - Suivi des solutions par continuation (gestion des branches partant à l'infini) pour obtenir les solutions de Q_1
- Nombre de solutions de Q_0 : borne de Bezout, borne de Bezout multihomogène, volume mixte
- Pour notre système
 - Pour $n \geq 8$ bornes prohibitives - borne de bezout de l'ordre de $2^{(n-3)^2}$
 - Système très structuré, i.e pas du tout générique

Homotopie du tricheur !

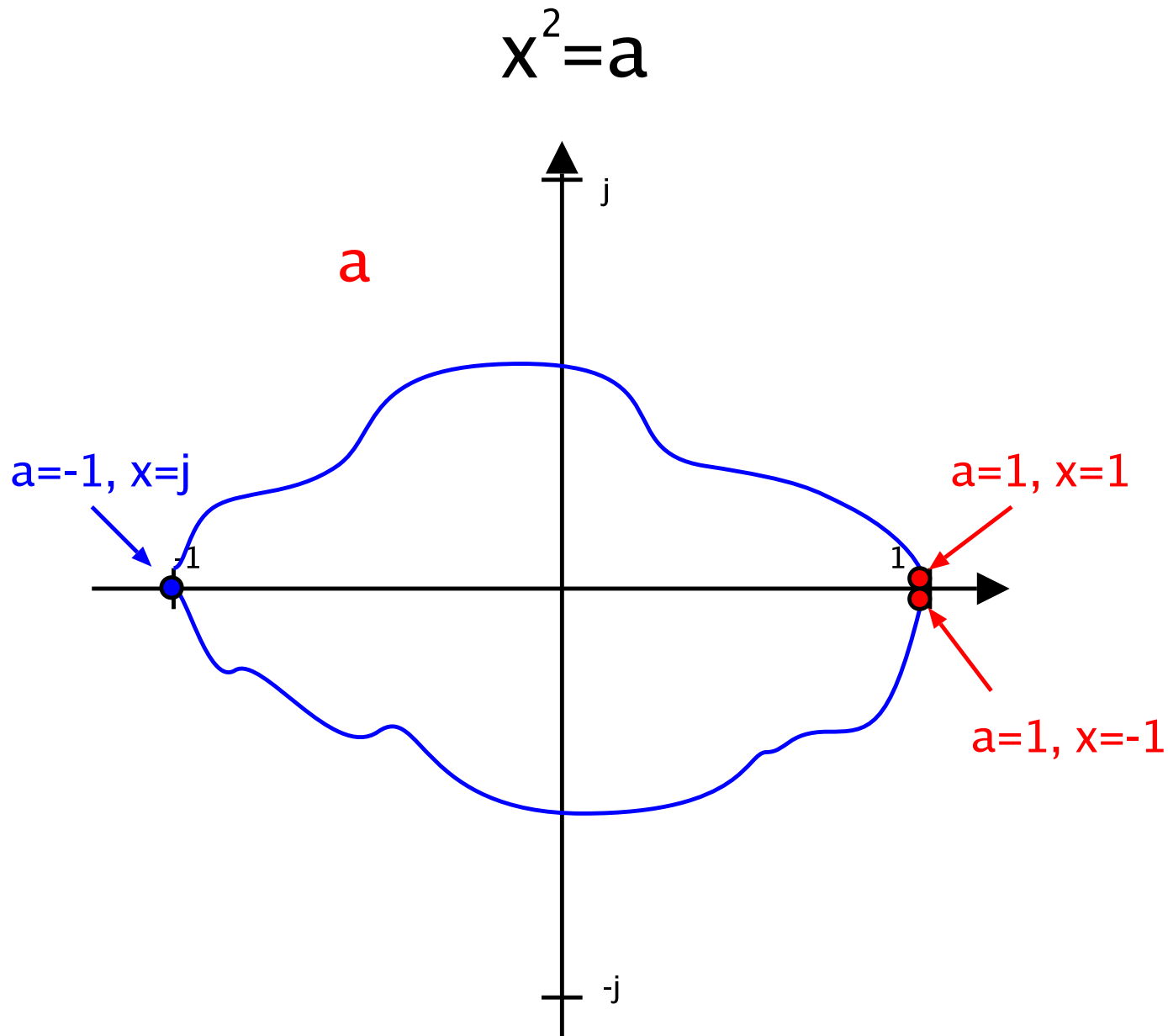
[Li, Sauer, Yorke, 1989]

- $Q(p_1, \dots, p_r, x_1 \dots x_n) = 0$
- Si on sait calculer l'ensemble des solutions isolées pour un P_0 générique
- Alors on peut calculer l'ensemble des solutions isolées du problème pour tout autre P_1 (sauf peut être pour une sous-variété de \mathbb{C}^r) par homotopie

$$Q((1 - \alpha)P_0 + \alpha P_1, X(\alpha))$$

- Permet d'envisager une stratégie de calcul en 2 temps
 - Hors ligne: établissement d'une base de données pour les topologies usuelles
 - En ligne: "cheater homotopy"

Monodromie - Exemple $a = x^2$



Cas d'une courbe algébrique

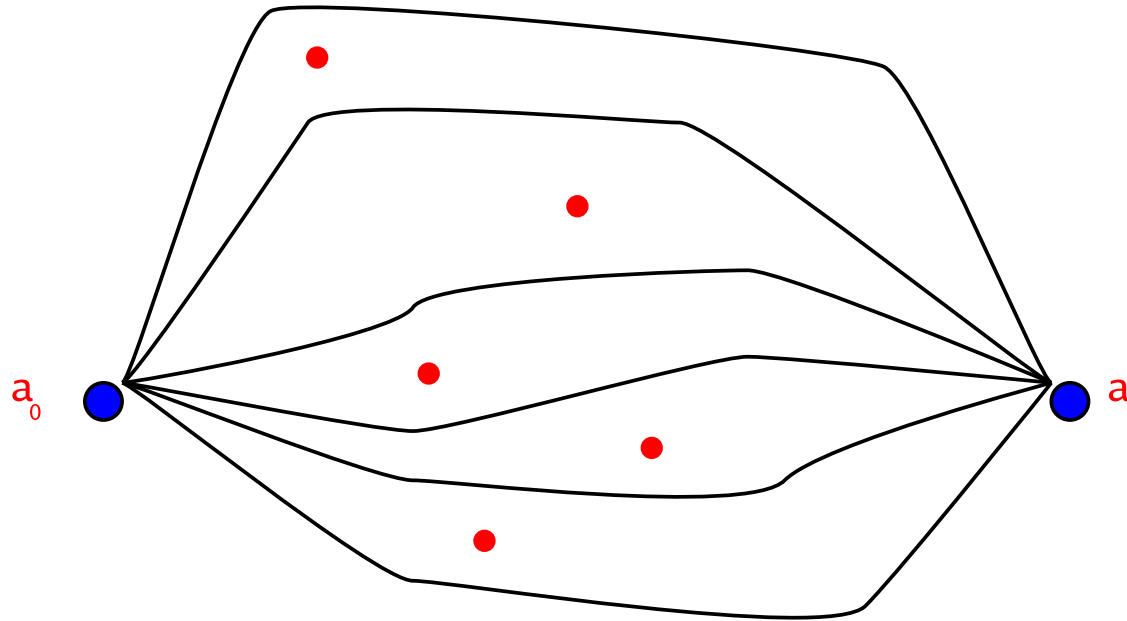
$$Q(a, x) = p_n(a)x^n + p_{n-1}(a)x^{n-1} \dots p_0(a) = 0$$

- Suppose Q irréductible sur $\mathbb{C}[a, x]$

$$W = \{a \in \mathbb{C}, p_n(a) = 0\} \cup \{a \in \mathbb{C}, D_{Q,x}(a) = 0\}$$

- Chaque chemin $a(t) \notin W$ peut être relevé en un chemin $x(t)$
- Soit $a_1 \notin W$, on suppose qu'on dispose:
 - Un point $(x_0, a_0) \in V$ avec $a_0 \notin W$
 - Une famille de chemins (γ_i) qui séparent les points de W

Intégration sur les chemins



- Par intégrations successives sur les chemins: obtention de toutes les solutions
- Famille de chemins: générateur du groupe fondamental de $\mathbb{C} \setminus W$
- Connexité de V

Variétés plus générales

- S'étend au cas d'une variété 1-dimensionnelle avec a une coordonnée (élément primitif)
- Cas d'un système où les paramètres sont des coordonnées
 - $Q(X, \alpha P_0 + (1 - \alpha)P_1) = 0$ ramène au cas 1-dimensionnel
 - Théorème de Bertini permet de "descendre" propriété d'irréductibilité

Systeme du filtre

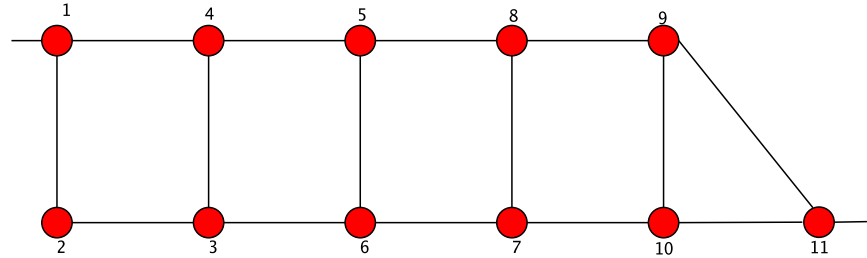
- On part d'une forme "physique" A_0 generique (random)
- On calcule sa forme fleche A_{f0}
- A_{f1} la forme fleche cible

$$\left(P_{\beta}^t (\beta A_{f0} + A_{f1}) P_{\beta} \right)_{i,j \in I_V} = 0$$

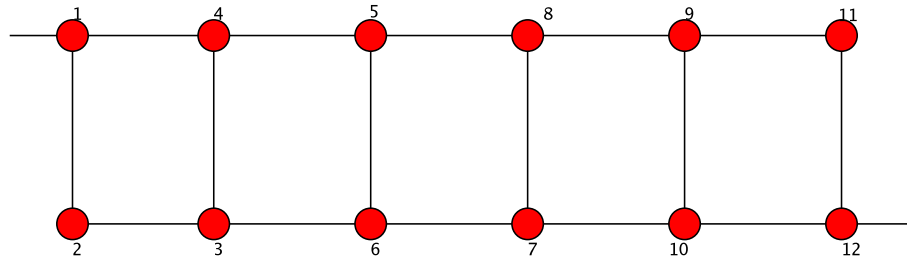
- Chemins γ_i , $\beta = r(t)e^{i\theta_i}$

$$\left(P_r^t \left(\frac{r(t)e^{i\theta_i}}{r(t) + 1} A_{f0} + \frac{1}{r(t) + 1} A_{f1} \right) P_r \right)_{i \in I_V} = 0$$

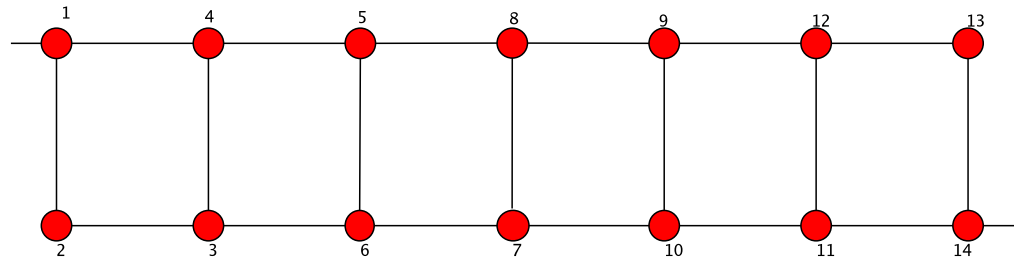
Extended Boxed topology



$$V_{\sigma} = 5 \text{ Tz, Red. Order Heur.} = 945$$



$$V_{\sigma} = 5 \text{ Tz, Red. Order Heur.} = 3840$$

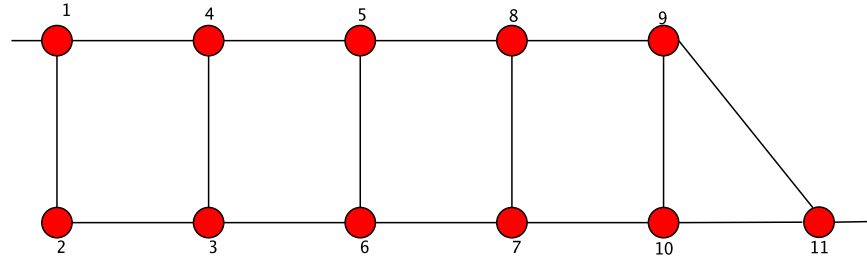


$$V_{\sigma} = 6 \text{ Tz, Red. Order Heur.} = 46080$$

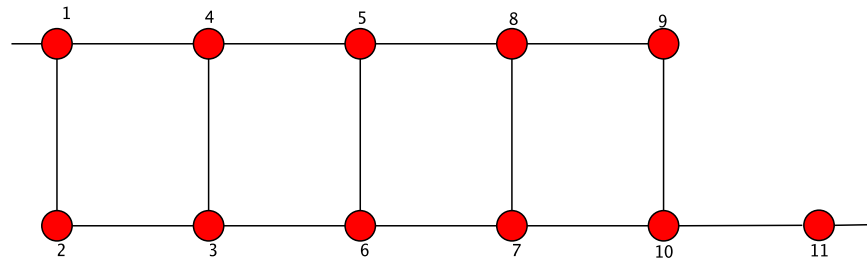
Réalisation des filtres de grands ordres

- Ordre réduit élevé:
 - Avantage: Choix lors de la réalisation
 - Problème: Comment choisir pendant l'identification lors du réglage ?
- Contournement: Synthèse approchée

Synthèse approchée



$V_\sigma = 5 \text{ Tz}$, Red. Order = 945



$V_\sigma = 5 \text{ Tz}$, **Cas défavorable !**, Red. Order = 1

- Simplifier la réalisation
- Faire chuter l'ordre réduit

Réglage avec plusieurs solutions ?

- Une question ouverte
- Information différentielle pour discriminer les solutions - permet de choisir ?
- Si on ne considère que les solutions réelles:
 - Disparition de solution - point proche de la variété discriminante
- Inclure les solutions complexes ?

Synthèse dans le cas favorable

$$S(s) = \frac{1}{q(s)} \begin{bmatrix} p_1(s) & p_2(s) \\ (-1)^{n+1} \bar{p}_2(-s) & (-1)^n \bar{p}_1(-s) \end{bmatrix}$$

with,

- p_1 monique of degree n
- $p_2(s) = (-1)^{n+1} \bar{p}_2(-s)$
- p_2 of degree $\leq n - 2$
- q monique stable defined by,

$$q(s)\bar{q}(-s) = p_1(s)\bar{p}_1(-s) + p_2(s)\bar{p}_2(-s)$$

Cas favorable: $\exists n, k$ $p_1 \in P_n$ **et** $p_2 \in P_k$

Synthèse cas favorable (suite)

For $s = j\omega$,

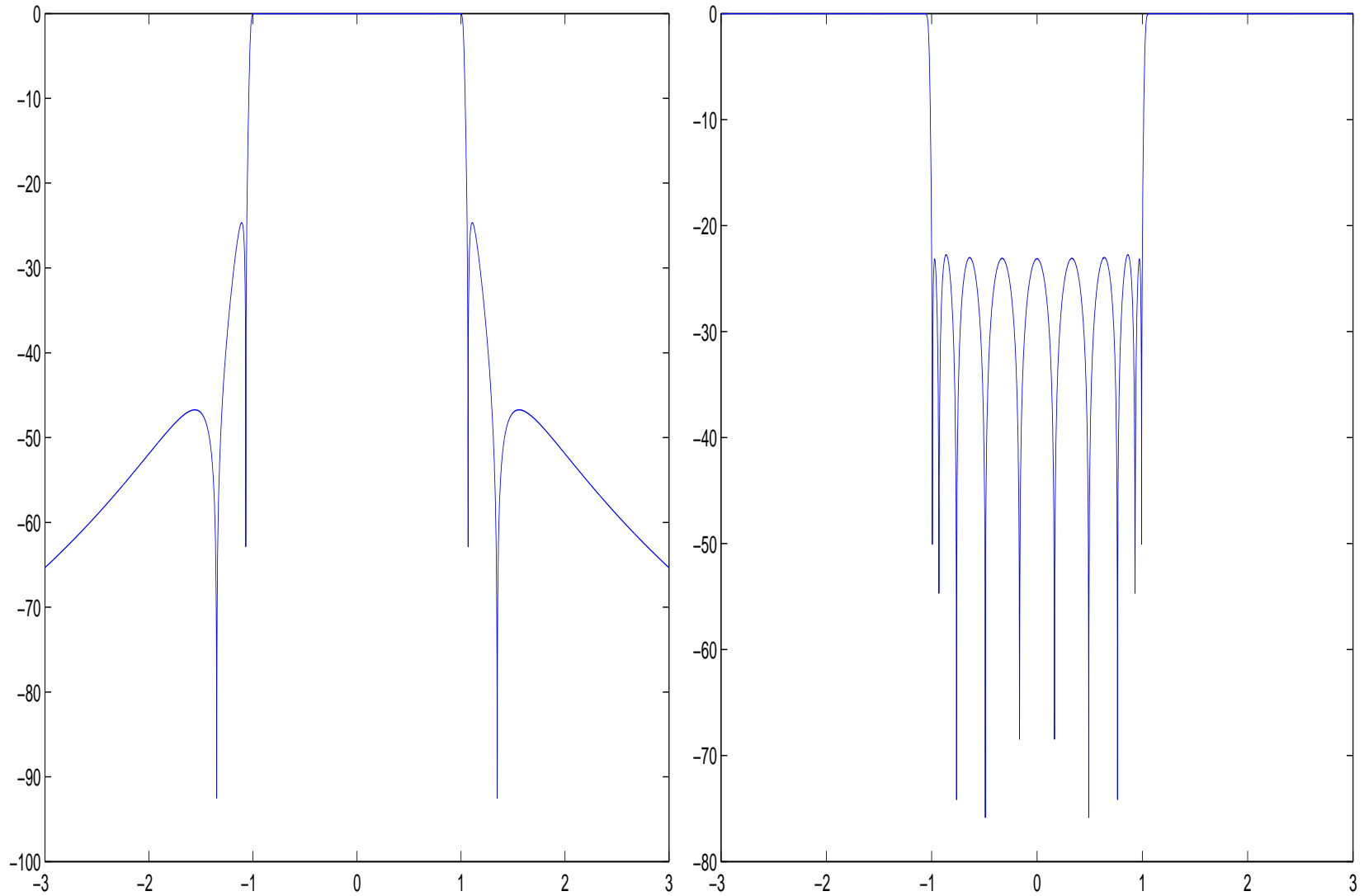
$$\begin{aligned} |S_{1,2}|^2 &= \frac{|p_2|^2}{|q|^2} = \frac{|p_2|^2}{|p_1|^2 + |p_2|^2} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{|p_1|^2}{|p_2|^2}} \end{aligned}$$

Given I the pass-band J the stop-band, $\epsilon > 0$

$$\max_{p_2, p_1} \left\| \frac{p_1}{p_2} \right\|_I < \epsilon \left(\min_J \left| \frac{p_1}{p_2} \right| \right)$$

- Generalized Zoltarev problem of the third kind.
- In practice: p_2 is fixed \Rightarrow closed form formula

Exemple d'un 10 pôles



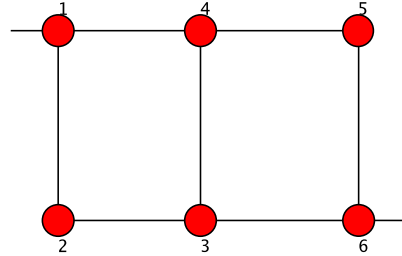
Synthèse dans le cas défavorable

- (p_1, p_2) n'appartiennent plus à des espaces vectoriels P_n

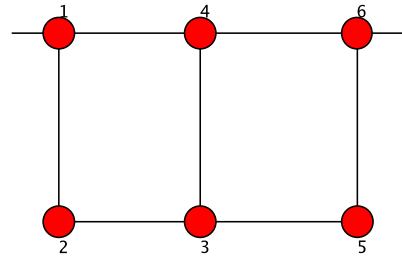
$$p_1 = r_n(p)X^n + r_{n-1}(p)X^{n-1} \dots r_0(p)$$

- Impliciter ?
- Fixer un maximum de zéros ?
- Minimiser la distance à une référence ?
- Équation algébrique caractérisant un optimum ?

Synthèse cas défavorable: exemple 6 pôles 3 zéros



$$V_\sigma = 2 \text{ Tz, Red. Order} = 8$$



$$V_\sigma = 3 \text{ Tz, Red. Order} = 1$$