Polytech'Nice
Département MAM
Option MAM5 INUM

Examen de Lois de conservation et modèles de trafic

Paola Goatin
14 fevrier 2012

Notes du cours et documents autorisés. 3 pages d'énoncé.
Durée de l'épreuve : 2h.

Exercice 1.
On considère le problème de Riemann pour une loi de conservation scalaire avec une contrainte locale sur le flux, qui modélise un péage, ou un rétrécissement de la voie :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x f(\rho) = 0, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ f(\rho(t,0)) \leq F, & F \in]0, 0.25[, \\ \rho(0,x) = \begin{cases} \rho_l, & x < 0, \\ \rho_r, & x > 0, \end{cases} \end{cases} \tag{1}$$

où le flux f est donné par le modèle LWR simplifié :

$$f(\rho) = \rho(1-\rho).$$

On dénote par $\check{\rho}_F, \hat{\rho}_F \in]0,1[$, $\check{\rho}_F < \hat{\rho}_F$, les deux racines de l'équation $f(\rho) = F$. On dénote aussi par $\mathcal{R}(\rho_l, \rho_r)(\cdot) = \mathcal{R}(\rho_l, \rho_r)(x/t)$ la solution du problème de Riemann classique

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x f(\rho) = 0, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ \rho(0,x) = \begin{cases} \rho_l, & x < 0, \\ \rho_r, & x > 0. \end{cases} \end{cases} \tag{2}$$

1. **(4 points)** Définir l'ensemble $\mathcal{NC}$ des couples de points $(\rho_l, \rho_r) \in [0,1]^2$ tels que $f\left(\mathcal{R}(\rho_l, \rho_r)(0)\right) > F$ et en donner une représentation graphique dans le plan ρ_l, ρ_r.
   (Se souvenir de la formule qui donne le flux numérique du schéma de Godunov :
   $$h_G(\rho_l, \rho_r) = \begin{cases} \max\limits_{\rho \in [\rho_r, \rho_l]} f(\rho), & \text{si } \rho_l > \rho_r, \\ \min\limits_{\rho \in [\rho_l, \rho_r]} f(\rho), & \text{si } \rho_l \leq \rho_r, \end{cases}$$
   et utiliser le fait que $f\left(\mathcal{R}(\rho_l, \rho_r)(0)\right) = h_G(\rho_l, \rho_r)$.
2. **(3 points)** Montrer que si $(\rho_l, \rho_r) \in \mathcal{NC}$ alors la solution du problème
   $$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x f(\rho) = 0, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ \rho(0,x) = \begin{cases} \rho_l, & x < 0, \\ \hat{\rho}_F, & x > 0, \end{cases} \end{cases}$$

contient seulement une onde de vitesse négative, tandis que la solution de

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x f(\rho) = 0, & t > 0, \; x \in \mathbb{R}, \\ \rho(0,x) = \begin{cases} \check{\rho}_F, & x < 0, \\ \rho_r, & x > 0, \end{cases} \end{cases}$$

contient seulement une onde de vitesse positive.

Exercice 2.
On considère le système suivant

$$\begin{cases} \partial_t \rho_1 + \partial_x \left(V_1 \rho_1 (1 - \rho_1 - \rho_2) \right) = 0, \\ \\ \partial_t \rho_2 + \partial_x \left(V_2 \rho_2 (1 - \rho_1 - \rho_2) \right) = 0, \end{cases} \qquad t > 0, \; x \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

qui décrit le mouvement de deux classes de véhicules, de densité $\rho_1 \geq 0$ et $\rho_2 \geq 0$ (avec $\rho_1 + \rho_2 \leq 1$), qui se déplacent sur la même route avec des vitesses maximales V_1 et V_2 respectivement (on supposera $0 < V_1 < V_2$).

Le système peut s'écrire sous la forme d'un système de lois de conservation

$$\vec{\rho}_t + f(\vec{\rho})_x = 0$$

où

$$\vec{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f(\vec{\rho}) = \begin{pmatrix} V_1 \rho_1 \\ V_2 \rho_2 \end{pmatrix} \psi(\rho_1 + \rho_2),$$

avec $\psi(r) = 1 - r$.

1. **(1 point)** Montrer que la matrice jacobienne du système peut s'écrire sous la forme

$$Df(\vec{\rho}) = \psi(\rho_1 + \rho_2) \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix} + \psi'(\rho_1 + \rho_2) \begin{bmatrix} V_1 \rho_1 & V_1 \rho_1 \\ V_2 \rho_2 & V_2 \rho_2 \end{bmatrix}.$$

2. **(3 points)** Montrer que le polynôme caractéristique de Df est donné par

$$\pi(\lambda; \rho) = (\lambda - \beta_1)(\lambda - \beta_2) - \alpha_1 \alpha_2$$

où

$$\beta_i = V_i(\psi + \rho_i \psi') \quad \text{et} \quad \alpha_i = -V_i \rho_i \psi' \quad \text{pour } i = 1, 2.$$

Vérifier ensuite que le discriminant de π est toujours positif :

$$\delta = (\beta_1 - \beta_2)^2 + 4\alpha_1 \alpha_2 \geq 0$$

Trouver le point $(\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2)$ tel que $\delta = 0$.
Quelle est la conclusion ?

3. **(2 points)** Vérifier que les valeurs propres de Df sont

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left(\beta_1 + \beta_2 - \sqrt{\delta} \right),$$
$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left(\beta_1 + \beta_2 + \sqrt{\delta} \right),$$

et qu'un choix possible pour les vecteurs propres est le suivant :

$$r_i = \begin{pmatrix} -\alpha_1 \\ \lambda_i - \beta_1 \end{pmatrix}, \qquad \text{pour } i = 1, 2.$$

4. **(3 points)** Montrer que la fonction

$$\mathcal{S}(\rho_1, \rho_2) = \frac{\rho_1(\ln \rho_1 - 1)}{V_1} + \frac{\rho_2(\ln \rho_2 - 1)}{V_2},$$

   est une entropie du système, de flux

$$\mathcal{F}(\rho_1, \rho_2) = \psi(\rho_1 + \rho_2)\,(\rho_1 \ln \rho_1 + \rho_2 \ln \rho_2) - \phi(\rho_1 + \rho_2),$$

   où ϕ est une primitive de ψ. Vérifier que $\mathcal{S}$ est convexe.

5. **(4 points)** On considère le cas $\rho_2^l < \bar{\rho}_2 < \rho_2^r$. Montrer que la discontinuité qui relie $\vec{\rho}_l = (0, \rho_2^l)$ à $\vec{\rho}_r = (0, \rho_2^r)$ avec vitesse $\sigma = V_2(1 - \rho_2^l - \rho_2^r)$ est un choc de la deuxième famille si

$$\rho_2^l < \frac{V_2 - V_1}{V_2}(1 - \rho_2^r).$$

   (Montrer que les conditions de Rankine-Hugoniot sont satisfaites et que $\lambda_2(\vec{\rho}_r) < \sigma < \lambda_2(\vec{\rho}_l)$.)